# A 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatai

**1. feladat.** Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben $AB < AC < BC$, az $A, B, C$ csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre $A_1$, $B_1$, illetve $C_1$. Legyen $P$ a $C_1$ pont tükörképe a $BB_1$ egyenesre, és legyen $Q$ a $B_1$ pont tükörképe a $CC_1$ egyenesre. Mutassuk meg, hogy az $A_1PQ$ háromszög köré írt kör átmegy a $BC$ oldal felezőpontján.

**2. feladat.** Legyen $n$ pozitív egész szám. Határozzuk meg az összes olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert, amely az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz bizonyos részhalmazaiból áll, és amelyre minden rögzített, nemüres $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mellett ugyanannyi $A \in \mathcal{F}$ esetén lesz $A \cap X$ elemszáma páros, mint páratlan.

**3. feladat.** Igaz-e, hogy ha $H$ és $A$ a számegyenes korlátos részhalmazai, akkor $H$ legfeljebb egyféleképpen bontható fel $A$ páronként diszjunkt eltolt példányaira? (Végtelen sok eltolt példányt is megengedünk.)