

A 2018. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatai

1. Az ABC háromszög beírt köre a BC , a CA , illetve az AB oldalt rendre az A_1 , a B_1 , illetve a C_1 pontban érinti, A -ból induló súlyvonala pedig az M pontban metszi a B_1C_1 szakaszt. Mutassuk meg, hogy az A_1M szakasz merőleges a BC oldalra.
2. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ a térbeli derékszögű koordinátarendszer egész koordinátájú, páronként különböző, p hosszúságú vektorai, ahol p prímszám. Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leq j < k \leq n$ esetén van olyan $0 < \ell < p$ egész szám, melyre a $\underline{v}_j - \ell \cdot \underline{v}_k$ vektor mindhárom koordinátája p -vel osztható. Igazoljuk, hogy $n \leq 6$.
3. A k utcából álló Aprajafalván $k(n - 1) + 1$ klub működik, mindegyik tagsága n törpöt számlál. Egy törp több klubnak is tagja lehet, és két törp bizonyosan ismeri egymást, ha klubtársak vagy ha ugyanabban az utcában laknak. Igazoljuk, hogy kiválasztható n különböző klub és ezeknek egy-egy tagja úgy, hogy ez az n tag páronként különböző legyen és közülük bármely kettő ismerje egymást.