A per-capita nukleolusz kiszámítása hozzárendelési játékokban

Solymosi Tamás
Budapesti Corvinus Egyetem

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia
Cegléd
2017.06.16.

Előzmények /1

A nukleolusz hatékony kiszámítása hozzárendelési játékokban

- Egy hozzárendelési játék (standard) nukleolusza a játékot meghatározó (az egyelemű és a vegyespáros koalíciók értékéből álló) alapmátrixból (a játékosok számában) polinomiális időben kiszámítható.
  - az algoritmus a hozzárendelési játék magjának egyik speciális csúcsából indul ki, majd követve a "szokásos" szekvenciális eljárást, meghatározza a generált lineáris programozási feladatok optimális megoldáshalmazaiban az ugyanilyen típusú speciális csúcsokat;
  - az egymást követő speciális csúcspontok meghatározása minden lépésben egy pozitív hosszúságú kört nem tartalmazó segédhálózatban a leghosszabb utak megtalálásával történik.

- *Solymosi, T.; Raghavan, T.E.S. (1994): An algorithm for finding the nucleolus of assignment games. International Journal of Game Theory, 23 (2):119-143.*

1. Példa - hozzárendelési játék - mag

			v_1	v_2
			0	0
u_1	0		$\boxed{6}$	4
u_2	0		0	$\boxed{6}$

$w(S)$	$x(S)$			
$0 \leq$	u_1	.	.	.
$0 \leq$	.	u_2	.	.
$0 \leq$	.	.	v_1	.
$0 \leq$	.	.	.	v_2
$\boxed{6} =$	u_1	.	v_1	.
$4 \leq$	u_1	.	.	v_2
$0 \leq$	.	u_2	v_1	.
$\boxed{6} =$	.	u_2	.	v_2
$0 \leq$	u_1	u_2	.	.
$0 \leq$	.	.	v_1	v_2
$6 \leq$	u_1	u_2	v_1	.
$6 \leq$	u_1	u_2	.	v_2
$6 \leq$	u_1	.	v_1	v_2
$6 \leq$	.	u_2	v_1	v_2
$\boxed{12} =$	u_1	u_2	v_1	v_2

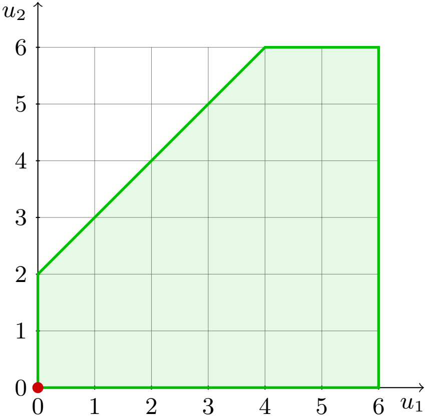
A játékban csak az egyszereplős és a vegyespáros koalíciók lehetnek lényegesek.

Huberman (1980): ha a mag nemüres, a nukleoluszt a lényegesek meghatározzák.

1. Példa - a mag (redukált leírás)

		v_1	v_2
		0	0
u_1	0	$\boxed{6}$	4
u_2	0	0	$\boxed{6}$

	$u_1 \leq 6$	$u_2 \leq 6$
$u_1 \geq 0$	.	$u_1 - u_2 \geq -2$
$u_2 \geq 0$	$u_2 - u_1 \geq -6$	.
	$v_1 = 6 - u_1$	$v_2 = 6 - u_2$



1. Példa - a nukleolusz (algoritmus)

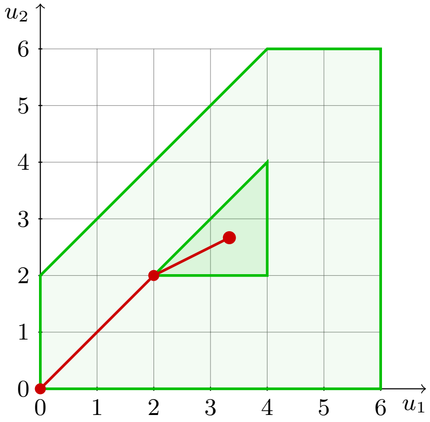
$\boxed{0}$	6	6	0
0	$\boxed{0}$	2	+1
0	6	$\boxed{0}$	+1
0	−1	−1	β

$\xrightarrow{\beta=2}$

$\boxed{0}$	4	4	0
2	$\boxed{0}$	**2**	+2
2	6	$\boxed{0}$	+1
0	−2	−1	β

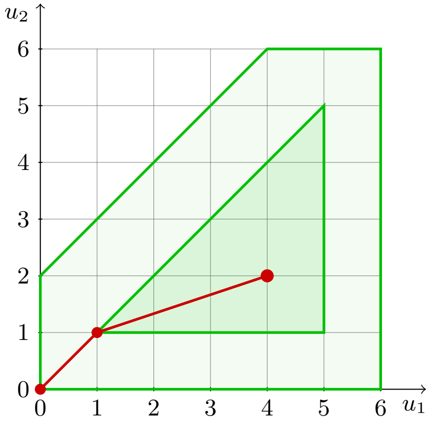
$\xrightarrow{\beta=2/3}$

$\boxed{0}$	**8/3**	10/3
10/3	$\boxed{0}$	**8/3**
8/3	16/3	$\boxed{0}$



1. Példa - ugyanez a per-capita többletekkel?

$$
\begin{array}{|c|cc||c|}
\hline
\boxed{0} & 6 & 6 & 0 \\
\hline
\mathbf{0} & \boxed{0} & 1 & +1 \\
\mathbf{0} & 3 & \boxed{0} & +1 \\
\hline
\hline
0 & -1 & -1 & \beta \\
\hline
\end{array}
\xrightarrow{\beta=1}
\begin{array}{|c|cc||c|}
\hline
\boxed{0} & 5 & 5 & 0 \\
\hline
\mathbf{1} & \boxed{0} & \mathbf{1} & +3 \\
\mathbf{1} & 6 & \boxed{0} & +1 \\
\hline
\hline
0 & -3 & -1 & \beta \\
\hline
\end{array}
\xrightarrow{\beta=1}
\begin{array}{|c|cc|}
\hline
\boxed{0} & \mathbf{2} & 4 \\
\hline
4 & \boxed{0} & \mathbf{2} \\
\mathbf{2} & \mathbf{2} & \boxed{0} \\
\hline
\end{array}
$$



1. Példa - redukált pc-nukleolusz $\neq$ pc-nukleolusz

		v_1	v_2
		0	0
u_1	0	$\boxed{6}$	4
u_2	0	0	$\boxed{6}$

$w(S)$	$x(S)$	$y(S)$	$\frac{y(S)-w(S)}{\lvert S\rvert}$	$z(S)$	$\frac{z(S)-w(S)}{\lvert S\rvert}$
0	u_1 . . .	4	4	3	3
0	. u_2 . .	2	2	3	3
0	. . v_1 .	2	2	3	3
0	. . . v_2	4	4	3	3
$\boxed{6}$	u_1 . v_1 .	6	$\boxed{0}$	6	$\boxed{0}$
4	u_1 . . v_2	8	2	6	1
0	. u_2 v_1 .	4	2	6	3
$\boxed{6}$	. u_2 . v_2	6	$\boxed{0}$	6	$\boxed{0}$
0	u_1 u_2 . .	6	3	6	3
0	. . v_1 v_2	6	3	6	3
6	u_1 u_2 v_1 .	8	2/3	9	1
6	u_1 u_2 . v_2	10	4/3	9	1
6	u_1 . v_1 v_2	10	4/3	9	1
6	. u_2 v_1 v_2	8	2/3	9	1
$\boxed{12}$	u_1 u_2 v_1 v_2	12	$\boxed{0}$	12	$\boxed{0}$

A per-capita nukleoluszhoz nem elegendők csak a lényeges koalíciók.

Huberman (1980) redukálhatósági eredménye nem használható.

Előzmények /2

Per-capita nukleolusz hatékony kiszámíthatósága

- Bármely kiegyensúlyozott játék per-capita nukleoluszának kiszámításakor elegendő csak a duális játékban lényeges koalíciókat tekinteni.

- *Solymosi (2016): Weighted nucleoli and dually essential coalitions. Corvinus Economics Working Papers 12/2016*

Hozzárendelési játék duálisában lényeges koalíciók

- Egy hozzárendelési játék duális játékában csak az egyelemű és a vegyespáros koalíciók lehetnek lényeges koalíciók.
- A hozzárendelési játékot meghatározó alapmátrixból egy polinom sok elemi műveletből álló eljárással megkaphatjuk az egyelemű és a vegyespáros koalíciók duális játékbeli értékét.

- *Núnez, M.; Solymosi, T. (2017): Lexicographic allocations and extreme core payoffs: the case of assignment games. Annals of Operations Research (First online 2017.02.14.) pp 1–24.*

Az új eredmény

Egy (a játékosok számában) erősen polinomiális algoritmus a hozzárendelési játékok per-capita nukleoluszának kiszámítására

- A hozzárendelési játékot meghatározó (az egyelemű és a vegyespáros koalíciók értékéből álló) alapmátrixból polinom sok elemi művelettel megkapjuk az egyelemű és a vegyespáros koalíciók duális játékbeli értékét.
- A duális játéknak csak ezt a kvadratikus sok elemét használva szekvenciálisan meghatározzuk a per-capita nukleoluszt eredményező "szokásos" lineáris programozási feladat-sorozatban az optimális megoldás-halmazoknak az eladó-optimális csúcspontjait.
- Ezt a polinom sok speciális csúcspontot úgy számítjuk ki, hogy kiindulva a mag eladó-optimális csúcsából, minden lépésben meghatározzuk a leghosszabb utakat egy (pozitív hosszúságú kört nem tartalmazó) alkalmas segédhálózatban.

Alapfogalmak

TU-játék

- N nem üres, véges — játékosok halmaza
- $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $v(\emptyset) = 0$ — koalíciós függvény

Koalíció $S \subseteq N$ — jelölés: $\mathcal{N} = \{S \subseteq N : S \neq \emptyset, N\}$

- S **nem lényeges** v-ben, ha $v(S) \leq v(S_1) + \ldots + v(S_k)$
  valamilyen $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ $(k \geq 2)$ partícióra

  Vegyük észre:

  - *feltehetjük, hogy mindegyik S_j $(1 \leq j \leq k)$ lényeges*
  - *minden 1-szereplős koalíció lényeges*

Kifizetés vektor $x \in \mathbb{R}^N$ — jelölés: $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$

- szétosztások $\mathbf{Ef}(v) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N)\right\}$
- **mag** $\mathbf{Co}(v) = \{x \in \mathbf{Ef}(v) : x(S) \geq v(S) \quad \forall\, S \in \mathcal{N}\}$

Duális játék

(N, v^*) az (N, v) **játék duálisa**, ahol $\quad v^*(S) := v(N) - v(N \setminus S) \quad \forall\, S \subseteq N$

Vegyük észre: $\quad v^*(\emptyset) = 0$

$v^*(N) = v(N)$ *tehát* $\mathbf{Ef}(v) = \mathbf{Ef}(v^*)$

$v^{**}(S) = v(S) \quad \forall\, S \subseteq N$

- S **duálisan nem lényeges**, ha $\quad v^*(S_1) + \ldots + v^*(S_k) \leq v^*(S)$
  valamilyen $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ $(k \geq 2)$ partícióra

  Vegyük észre:
  - *feltehetjük, hogy mindegyik S_j $(1 \leq j \leq k)$ duálisan lényeges*
  - *minden 1-szereplős koalíció duálisan lényeges*

A mag primál és duál leírása

$$\begin{array}{rrclcccl}
 & v(N) & = & x(N) & & & & \\
\forall S \in \mathcal{N} & v(S) & \leq & x(S) & & & & \\
\hline
 & & & x(N) & = & v^*(N) & & \\
 & & & x(N \setminus S) & \leq & v^*(N \setminus S) & \forall S \in \mathcal{N} &
\end{array}$$

Vegyük észre: Mindkét leírásban a nem lényeges koalíciók redundánsak.

2. Példa - (duálisan) lényeges koalíciók

		v_1	v_2
		0	0
u_1	0	$\boxed{6}$	2
u_2	0	4	$\boxed{3}$

$w(S)$	$x(S)$				$w^*(S)$
0	u_1	.	.	.	5
0	.	u_2	.	.	3
0	.	.	v_1	.	6
0	.	.	.	v_2	3
$\boxed{6}$	u_1	.	v_1	.	$\boxed{6}$
2	u_1	.	.	v_2	5
4	.	u_2	v_1	.	7
$\boxed{3}$	.	u_2	.	v_2	$\boxed{3}$
0	u_1	u_2	.	.	9
0	.	.	v_1	v_2	9
6	u_1	u_2	v_1	.	9
3	u_1	u_2	.	v_2	9
6	u_1	.	v_1	v_2	9
4	.	u_2	v_1	v_2	9
$\boxed{9}$	u_1	u_2	v_1	v_2	$\boxed{9}$

A játékban csak az egyszereplős és a vegyespáros koalíciók lehetnek lényegesek.

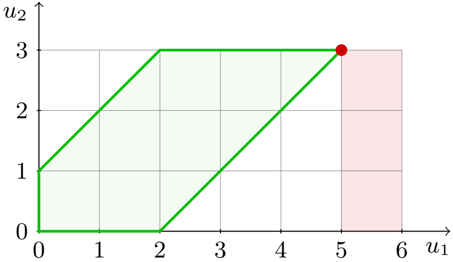
Núnez, Solymosi (2017): a duális játékban is csak ezek lehetnek a lényegesek.

2. Példa - mag (egzakt leírás)

		v_1	v_2
	$\boxed{0}$	1	0
u_1	0	$\boxed{6}$	2
u_2	0	4	$\boxed{3}$

$w(S)$	$x(S)$				$w^*(S)$
$0 \leq$	u_1	.	.	.	≤ 5
$0 \leq$	.	u_2	.	.	≤ 3
$1 \leq$	.	.	v_1	.	≤ 6
$0 \leq$	.	.	.	v_2	≤ 3
$\boxed{6} =$	u_1	.	v_1	.	$= \boxed{6}$
$2 \leq$	u_1	.	.	v_2	≤ 5
$4 \leq$	.	u_2	v_1	.	≤ 7
$\boxed{3} =$	.	u_2	.	v_2	$= \boxed{3}$

		v_1	v_2
	$\boxed{0}$	6	3
u_1	5	$\boxed{6}$	5
u_2	3	7	$\boxed{3}$

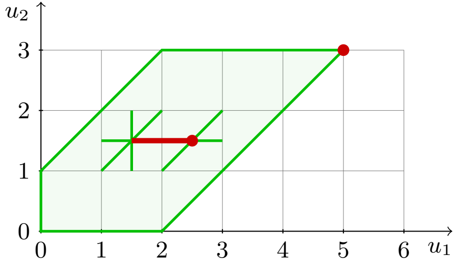


2. Példa - per-capita "szűkmag"

max α

$w(S)+q(S)\alpha$	$x(S)$				$w^*(S)-q^*(S)\alpha$
$0+1\alpha \leq$	u_1	.	.	.	$\leq 5-3\alpha$
$0+1\alpha \leq$	.	u_2	.	.	$\leq 3-3\alpha$
$1+1\alpha \leq$	.	.	v_1	.	$\leq 6-3\alpha$
$0+1\alpha \leq$	.	.	.	v_2	$\leq 3-3\alpha$
$\boxed{6} =$	u_1	.	v_1	.	$= \boxed{6}$
$2+2\alpha \leq$	u_1	.	.	v_2	$\leq 5-2\alpha$
$4+2\alpha \leq$	.	u_2	v_1	.	$\leq 7-2\alpha$
$\boxed{3} =$	.	u_2	.	v_2	$= \boxed{3}$

max α

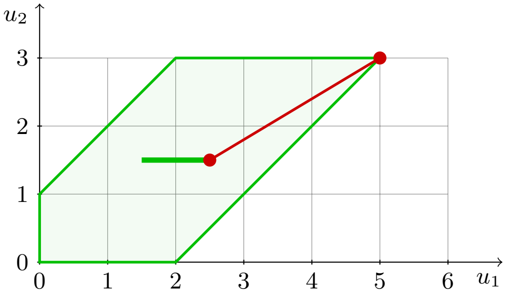


2. Példa - a per-capita nukleolusz (duál algoritmus /1)

		$1_{(+5)}$	$0_{(+3)}$
	$\boxed{0}$	$5/3_{(-5/3)}$	$1_{(-1)}$
$5_{(-5)}$	$\mathbf{0}_{(+5/3)}$	$\boxed{0}$	$\mathbf{0}_{(+1)}$
$3_{(-3)}$	$\mathbf{0}_{(+1)}$	$3/2_{(-1)}$	$\boxed{0}$

$\xrightarrow{\beta=1/2}$

		$7/2$	$3/2$
	$\boxed{0}$	$5/6$	$\boxed{\mathbf{1/2}}$
$5/2$	$5/6$	$\boxed{0}$	$\mathbf{1/2}$
$3/2$	$\boxed{\mathbf{1/2}}$	1	$\boxed{0}$

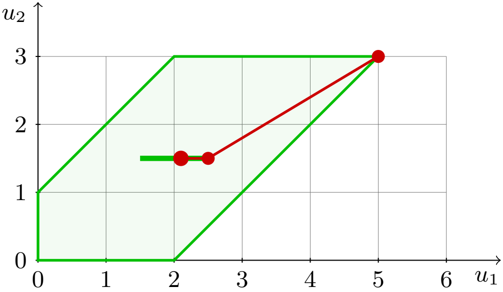


2. Példa - a per-capita nukleolusz (duál algoritmus /2)

		$7/2_{(+2)}$	$3/2_{(0)}$
	$\boxed{0}$	$5/6_{(-2/3)}$	$\boxed{1/2}$
$5/2_{(-2)}$	$5/6_{(+2/3)}$	$\boxed{0}$	$\mathbf{1/2}_{(+1)}$
$3/2_{(0)}$	$\boxed{1/2}$	$1_{(-1)}$	$\boxed{0}$

$\xrightarrow{\beta=1/5}$

		3.9	1.5
	$\boxed{0}$	$\boxed{\mathbf{0.7}}$	$\boxed{0.5}$
2.1	0.97	$\boxed{0}$	$\boxed{\mathbf{0.7}}$
1.5	$\boxed{0.5}$	0.8	$\boxed{0}$



A per-capita nukleolusz $= (2.1, 1.5; 3.9, 1.5)$

STOP (algoritmus / előadás / szekció)

Köszönöm a figyelmet!