Feltételes optimalizálási problémák megoldása változó mintanagyságú eljárással

Krejić Nataša[1] Krklec Jerinkić Nataša[1] Rožnjik Andrea[2]

[1]Újvidéki Tudományegyetem, Természettudományi Matematikai Kar, Újvidék
[2]Újvidéki Tudományegyetem, Építőmérnöki Kar, Szabadka

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia
Cegléd, 2017. június 14.-16.

Sztochasztikus optimalizálási probléma megoldása – SAA approximáció (sample average approximation)

ξ valószínűségi vektorváltozó

$$\xi : \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_N \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \end{pmatrix}$$

$$\min_x E[F(x,\xi)]$$

$$\min_x \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(x,\xi_i)$$

$$\min_x E[F(x,\xi)]$$
$$E[G(x,\xi)] \geq 0$$
$$E[H(x,\xi)] = 0$$

$$\min_x \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(x,\xi_i),$$
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(x,\xi_i) \geq 0$$
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H(x,\xi_i) = 0$$

Sztochasztikus optimalizálási probléma megoldása – SAA approximáció

$$\min_x f(x) = E[F(x,\xi)]$$ megoldás: x^*

$$\min_x f_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(x,\xi_i)$$ megoldás: x_N^*

- $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ független, azonos eloszlású minta
- $F(\cdot,\xi)$ folytonosan differenciálható majdnem minden ξ-re
- $f(x)$, $\nabla_x f(x)$ jól definiált, véges értékű minden x-re

$$\lim_{N\to\infty} x_N^* = x^*, \quad \lim_{N\to\infty} f_N(x_N^*) = f(x^*) \quad \text{m.m.}$$

Shapiro, A., Dentcheva, D., Ruszczynski, A.: Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory.

MPS-SIAM Series on Optimization (2009)

SAA probléma megoldásának keresése iterációs eljárással
$\Longrightarrow$ sok függvényértéket kell kiszámolni
$\Longrightarrow$ változó mintanagyságú iterációs eljárások

VSS eljárás
(variable sample size):

$$\min_x \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(x, \xi_i) \qquad N^0, x^0, \quad N^1, x^1, \quad N^2, x^2, \quad \ldots$$

$$N^0 \le N^1 \le N^2 \le \ldots \qquad \text{lehetséges: } N^k > N^{k+1}$$

$$N^0, N^1, N^2, \ldots \to \infty \qquad N^0, N^1, N^2, \ldots N^{max}$$

Sztochasztikus feltételes optimalizálási probléma

(SP) $$\min_x f(x) \quad h(x) = 0$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$

ξ valószínűségi vektorváltozó

$$h(x) = E[H(x, \xi)]$$

(SAA) $$\min_x f(x) \quad \hat{h}_{N_{max}}(x) = 0$$

$$\hat{h}_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H(x, \xi_i)$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_{max}}$ független, azonos eloszlású minta

Sztochasztikus feltételes optimalizálási probléma

- büntető módszer

$$\phi_N(x;\mu) := f(x) + \mu\hat{\theta}_N(x)$$

μ – büntető paraméter

$$\hat{\theta}_N(x) := \|\hat{h}_N(x)\|^2$$

- vonalmenti keresés
  Armijo feltétel:
  $\phi_{N_k}(x_{k+1};\mu_k) \leq \phi_{N_k}(x_k;\mu_k) + \eta\alpha_k \nabla_x \phi_{N_k}(x_k;\mu_k)^T d_k$
  Backtracking $\Longrightarrow \alpha_k$

- VSS eljárás

az elején meghatározzuk a mintát: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_{max}}$
k-adik iteráció: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_k}$
N_k kiválasztása:

$\min_x \phi_{N_k}(x;\mu_k)$ stacionárius pontjától való távolság mértéke

$$dm_k = -\alpha_k \nabla_x \phi_{N_k}(x_k;\mu_k)^T d_k,$$

a $\hat{h}_{N_k} \approx \hat{h}_{N_{max}}$ approximáció hibájának becslése

$$\begin{aligned} \epsilon_\delta^{N_k}(x_k) &= \hat{\sigma}_{N_k}(x_k) 1.96/\sqrt{N_k} \\ \hat{\sigma}^2_{N_k}(x_k) &= \frac{1}{N_k - 1} \sum_{i=1}^{N_k} \|H(x_k, \xi_i) - \hat{h}_{N_k}(x_k)\|^2 \end{aligned}$$

cél:

$$dm_k \approx \frac{N_k}{N_{k+1}} \epsilon_\delta^{N_{k+1}}(x_k)$$

$$N_k^{min} \leq N_{k+1} \leq N_{max}$$

A fő algoritmus

Input: $N_{min} \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta, \eta \in (0,1)$, $\mu_0 > 0$, $\gamma > 1$
$N_k := N_{min}$, $x_k := x_0$, $\mu_k := \mu_0$, $t := 1$, $N_0^{min} := N_{min}$
for k=0,1,2,...
  d_k csökkenő keresési irány meghatározása
  $\alpha_k = 1$
  while $\phi_{N_k}(x_k + \alpha_k d_k; \mu_k) > \phi_{N_k}(x_k; \mu_k) + \eta \alpha_k \nabla_x \phi_{N_k}(x_k; \mu_k)^T d_k$
    $\alpha_k = \beta \alpha_k$
  end while
  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad dm_k = -\alpha_k \nabla_x \phi_{N_k}(x_k; \mu_k)^T d_k$
  $dm_k \leq \alpha_k / \mu_k^2 \implies z_t = x_k,\ t = t + 1$
  N_{k+1}, N_{k+1}^{min} meghatározása

$$\underbrace{N_k = N_{k+1} < N_{max} \ \vee \ dm_k > \alpha_k / \mu_k^2}_{\Downarrow \perp} \stackrel{\top}{\Longrightarrow} \mu_{k+1} = \mu_k$$

$$\mu_{k+1} = \gamma \mu_k$$

end for

N_{k+1} meghatározása

Input: $\epsilon_\delta^{N_k}(x_k)$, $\nu_1 \in (0,1)$

$dm_k = \epsilon_\delta^{N_k}(x_k) \implies N_{k+1} = N_k$

$dm_k > \epsilon_\delta^{N_k}(x_k) \implies N = N_k$

while $dm_k > \frac{N_k}{N}\, \epsilon_\delta^{N}(x_k) \wedge N > N_k^{min}$

$N = N - 1$

end while

$N_{k+1} = N$

$\nu_1 \epsilon_\delta^{N_k}(x_k) \leq dm_k < \epsilon_\delta^{N_k}(x_k) \implies N = N_k$

while $dm_k < \frac{N_k}{N}\, \epsilon_\delta^{N}(x_k) \wedge N < N_{max}$

$N = N + 1$

end while

$N_{k+1} = N$

$dm_k < \nu_1 \epsilon_\delta^{N_k}(x_k) \implies N_{k+1} = N_{max}$

N_{k+1}^{min} meghatározása

$$\underbrace{N_{k+1} \leq N_k} \overset{\top}{\Longrightarrow} N_{k+1}^{min} = N_k^{min}$$

$$\Downarrow \perp$$

$$\underbrace{N_{k+1} \neq N_j, j = 0, 1, \ldots, k} \overset{\top}{\Longrightarrow} N_{k+1}^{min} = N_k^{min}$$

$$\Downarrow \perp$$

$$\underbrace{\frac{\hat{\theta}_{N_{k+1}}(x_{l(k)}) - \hat{\theta}_{N_{k+1}}(x_{k+1})}{k+1-l(k)} < \frac{N_{k+1}}{N_{max}} \epsilon_\delta^{N_{k+1}}(x_{k+1})} \overset{\top}{\Longrightarrow} N_{k+1}^{min} = N_{k+1}$$

$$\Downarrow \perp$$

$$N_{k+1}^{min} = N_k^{min}$$

$$N_{l(k)-1} \neq N_{k+1}$$
$$N_{l(k)} = N_{l(k)+1} = \ldots = N_{l(k)+s} = N_{k+1}$$
$$N_{l(k)+s+1} \neq N_{k+1}, N_{l(k)+s+2} \neq N_{k+1}, \ldots, N_k \neq N_{k+1}$$

Kikötések

K1 f alulról korlátos az (SAA) megoldáshalmazán.
$f, H(\cdot, \xi_i) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots, N_{max}$.
$\{x_k\}$-nak van legalább egy torlódási pontja.

K2 $(\exists\, \kappa > 0, n_1 \in \mathbb{N})\ (\forall k \geq n_1)\ \epsilon_\delta^{N_k}(x_k) \geq \kappa$

K3 d_k: csökkenő keresési irány, korlátos és minden $K \subseteq \mathbb{N}$ halmazra

$$\lim_{k \in K} g_k^T d_k = 0 \implies \lim_{k \in K} g_k = 0.$$

Konvergencia

Lemma

Teljesüljön a K1 feltétel és létezzen olyan $\bar{n} \in \mathbb{N}$, hogy $\mu_k = \bar{\mu}$ és $N_k = \bar{N}$ minden $k \geq \bar{n}$ esetén. Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} dm_k = 0.$$

Lemma

Teljesüljenek a K1 és K2 feltételek. Ekkor van olyan $q \in \mathbb{N}$, hogy

$$N_k = N_{max}, \qquad \text{minden } k \geq q \text{ esetén.}$$

Tétel

Teljesüljenek a K1-K3 feltételek. Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = \infty.$$

Konvergencia

Tétel

Legyenek érvényesek a K1-K3 feltételek.
Ekkor a $\{z_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *sorozat minden* x^* *torlódási pontja a* $\min_x \hat{\theta}_{N_{max}}$ *probléma stacionárius pontja.*
Továbbá, ha teljesül az LICQ regularitási feltétel a x^**-ban, akkor* x^* *az (SAA) probléma Karush-Kuhn-Tucker pontja.*

Krejić, N., Krklec, N., Rožnjik A.: Variable sample size method for equality constrained optimization problems,

Optim. Lett. (2017), DOI: 10.1007/s11590-017-1143-8

Numerikus vizsgálatok

- 14 teszt Hock és Schittkowski problémáiból
- determinisztikus problémák $c(x)$ feltételi függvénnyel SAA problémákká módosítva

$$H(x,\xi) = c(\xi x) \quad \text{függvénnyel,}$$

$\xi \sim \mathcal{N}(1,1)$

- 10 minta, $N_{max} = 2000$ nagysággal problémánként
- BFGS keresési irány $d_k = -H_k g_k$

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= \left(I - \frac{s_k y_k^T}{y_k^T s_k}\right) H_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k} \\ s_k &= x_{k+1} - x_k \\ y_k &= \nabla\phi(x_{k+1}; N_{k+1}; \mu_k) - \nabla\phi(x_k; N_k; \mu_k) \end{aligned}$$

Numerikus vizsgálatok

- Összehasonlítás:
  - VSS
  - SAA: $N_k = N_{max}$
  - HEUR: $N_{k+1} = \lceil \min\{1.1 N_k, N_{max}\} \rceil$
- FEV: H és ∇H függvényértékek kiszámításának száma, egynek számítva a ∇H minden komponensét
- kilépési feltétel:

$$\| \left(\nabla_x \phi(x_k; N_{max}; \mu_k), \hat{h}_{N_{max}}(x_k) \right) \| \leq 10^{-1}$$

$FEV > 10^8 \implies$ sikertelen módszer

- Dolan és Moré teljesítmény profil (performance profile) alkalmazása az eredmények kimutatására

Teljesítmény profil

$$m \in \{VSS, SAA, HEUR\}, \quad p = 1, 2, \ldots, 140$$

$FEV_{m,p}$: az m módszerrel kapott FEV a p példára
TELJESÍTMÉNY HÁNYADOS (performance ratio):

$$r_{m,p} = \frac{FEV_{m,p}}{\min\limits_{m} FEV_{m,p}}$$

teljesítmény hányados kumulatív eloszlásfüggvénye módszerenként:

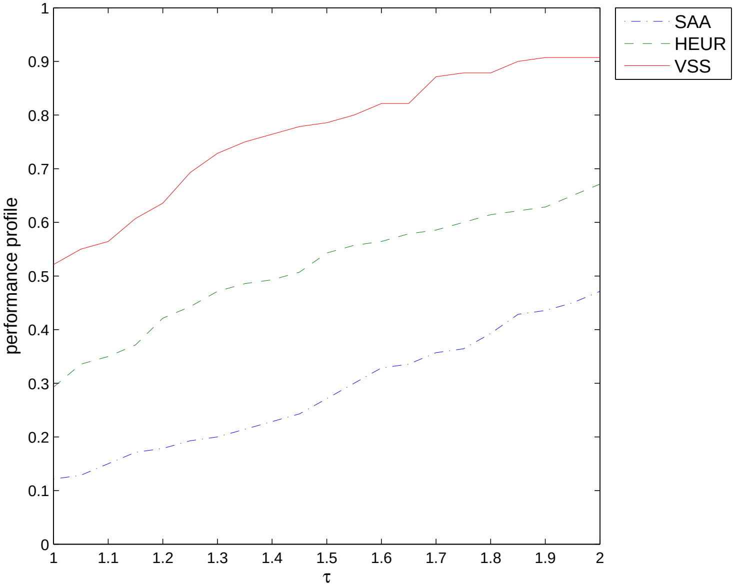
$$\frac{1}{140} \# \{p : r_{m,p} \leq \tau\}$$

TELJESÍTMÉNY PROFIL:

$$P(r_{m,p} \leq \tau : m \in \{VSS, SAA, HEUR\})$$

$\tau = 1 \Longrightarrow$ a legjobb módszer

Numerikus vizsgálatok



KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!