

Hogyan osszunk el igazságosan egy tortát sokfelé?

közös kutatás Cseh Ágnessel és Fleiner Tamással

Romsics Erzsébet

Matematikus MSc, BME

Mechanizmustervezés kutatócsoport, MTA

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia
2017-06-15

Az alapprobléma

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

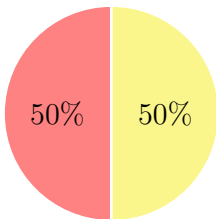
Közel Felezés

RTFA(k)

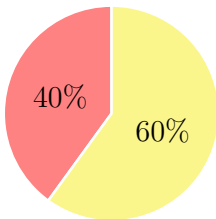
Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

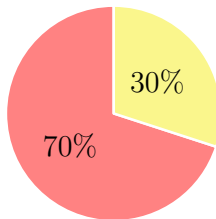
Anya



Aladár



Bálint



- Első szelet - eper
- Második szelet - vanília

Egyenlő arányú osztzkodás

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Definíció

Egyszerű igazságos osztásról beszélünk, ha az k ember közül mindenki legalább $\frac{1}{k}$ részét kapja a tortának, vagyis

$$\forall i \in I : \mu_i(X_i) \geq \frac{1}{k}$$

mérték = saját vélemény

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

Definíció

*Egy tortaosztó algoritmus **vágásszáma** az osztáshoz maximálisan szükséges vágásokról hozott döntések számát jelenti.*

Célunk a vágásszám nagyságrendjének minimalizálása.

Oszd Meg és Uralkodj Algoritmus

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

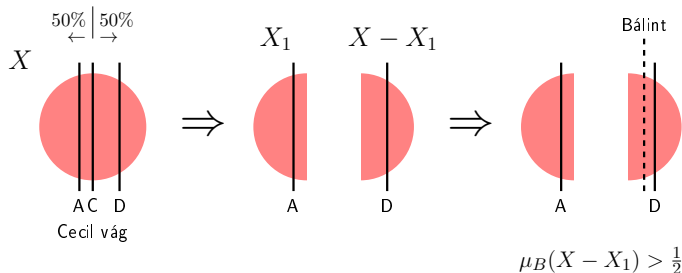
Alapfogalmak I.
Oszd Meg és
Uralkodj

BEA
Különlegessége
Vágásszáma

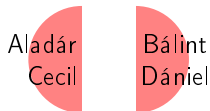
Alapfogalmak II.
Közel Felezés

RTFA(k)
Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek



Következő lépés:

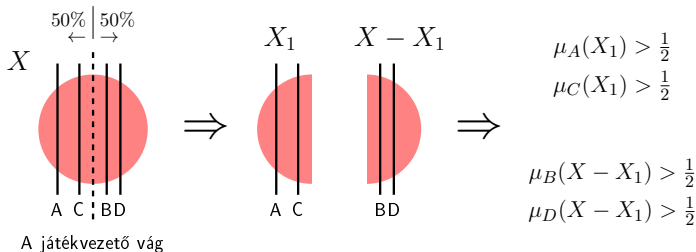


k-személyes optimális

Boldogság az Egyenjogúságban

Algoritmus

motiváció, játékvezető, abszolút folytonos



Definíció

Erősen igazságos osztásról beszélünk, ha mindenki szigorúan nagyobb szeletet kap, mint $\frac{1}{k}$, vagyis:

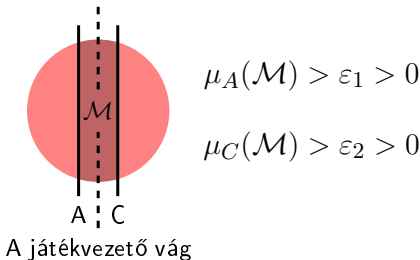
$$\forall i \in I : \mu_i(X_i) > \frac{1}{k}$$

Bárki kaphat többet!

Tétel (Cseh, Fleiner, R. 2017+)

Ha egy játékosnak a többiektől különböző véleménye van az első jelöléskor, akkor a BEA garantálja neki a szigorúan nagyobb, mint $\frac{1}{k}$ részt.

Ha az első jelöléskor mindenki különböző helyen jelöli meg a tortát, BEA osztása erősen igazságos.



A BEA vágásszáma

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

Tétel (Even, Paz 1984)

Az k -személyes OMUA vágásszám rekurzív formulájának zárt alakja

$$D(k) = k \cdot \lceil \log_2 k \rceil - 2^{\lceil \log_2 k \rceil} + 1$$

Tétel (Cseh, Fleiner, R. 2017+)

Az k -személyes BEA vágásszám rekurzív formulájának zárt alakja

$$B(k) = k \cdot \lceil \log_2 k \rceil - 2^{\lceil \log_2 k \rceil} + k$$

rekurziós formulából, mindketten $\mathcal{O}(k \cdot \log k)$

Nemegyenlő arányú osztozkodás

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlégsége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

Definíció

Egy nem egyenlően osztó algoritmust **igazságosnak** nevezünk, ha P_i játékos követelése d_i , $n := \sum_i d_i$ és $\{Y_i\}_{i \in I}$ szeletek elosztására teljesül, hogy:

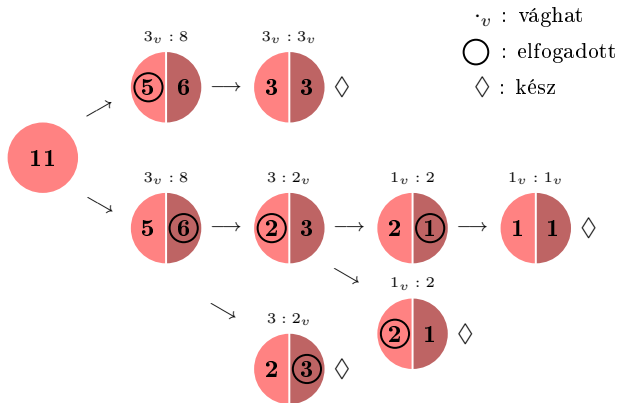
$$\forall i \in I : \mu_i(Y_i) \geq \frac{d_i}{\sum_i d_i}$$

Közel Felező Algoritmus optimális 2-személyes

innentől a torta értéke n

Közel felező Algoritmus

Anna és Beáta - 3:8



Definíció

Közel felezés:

vágjuk az n értékű tortát $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ és $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ nagyságú szeletekre.

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

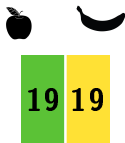
Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

k-személyes Részvénytársaság Felosztás Algoritmus

Adamis Anna, Batki Bálint és Cinke Cecil - 3:28:7

$\mathcal{H} = 10 < 28 \Rightarrow$ közel felezés



AA	②	1
CC	④	3
BB		

②	1
④	3
13	15

③	0
⑦	0
9	19

→ kiegyenlítés → részvénycsere

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa

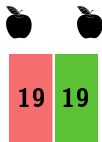
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

A háromszemélyes példa második lépése

Adamis Anna, Batki Bálint és Cinke Cecil - 3:9:7

$\mathcal{H} = 10 > 9 \Rightarrow$ pontosan felezés



AA	3	3	6	0
CC	7	7	13	1
BB	9	9	0	18

→
részvénycsere

vágásszám: $1 + 1 + 2 \cdot \lceil \log_2 19 \rceil = 12$

KÉSZ.

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa

Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

Az RTFA(2) vágásszáma

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlégessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa

Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

Tétel

Legyen $d_1 < d_2$ és $(d_1, d_2) = 1$, ekkor a $d_1 : d_2$ arányú kétszemélyes Részvénytársaság Felosztás Algoritmus vágásszáma:

$$D(n) = \lceil \log_2(d_1 + d_2) \rceil$$

RTFA(2) optimális marad

Az RTFA(k) vágásszáma becslése

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

Tétel (Cseh, Fleiner, R. 2017+)

A k -személyes Részvénytársaság Felosztás Algoritmusnak, melyben a torta összértéke n , felülről becsülhető a vágásszáma, ha $2 \leq k$ és $3 \leq n$ (valamint $k \leq n$):

$$C(n, k) \leq (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1$$

közel sem éles, $\mathcal{O}(2^k \cdot \log_2 n)$ nagyságrendű

További munkálatok

Egy módosítási ötlet alapján már újratervezzük az $RTFA(k)$ az algoritmust.

Sejtés:

- ▶ $\mathcal{O}(k \cdot \log n \cdot \log k)$ nagyságrendű lehet a vágásszáma.

Egy nyitott kérdés:

- ▶ Mi az optimális vágásszám a nemegyenlő osztozkodásban?

Köszönöm a figyelmet!

Igazságos
tortaosztás

Romsics Erzsébet

Alapfogalmak I.

Oszd Meg és
Uralkodj

BEA

Különlegessége
Vágásszáma

Alapfogalmak II.

Közel Felezés

RTFA(k)

Példa
Vágásszám becslése

Jövőbeni tervek

