

A nemlineáris komplementaritási feladat megoldására szolgáló nem monoton símító módszer

Papp Zoltán ¹ Sanja Rapajić ²

¹Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka

²Matematika és Informatika részleg
Természettudományi Kar
Újvidéki Egyetem

XXXII. Magyar Operációkutatás Konferencia

Nemlineáris komplementaritási feladat

Definíció (NCP)

Legyen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. A nemlineáris komplementaritási feladat (NCP) célja meghatározni az $x \in \mathbb{R}^n$ vektort, melyre érvényes

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0. \quad (1)$$

Nemlineáris komplementaritási feladat

Definíció (NCP)

Legyen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. A nemlineáris komplementaritási feladat (NCP) célja meghatározni az $x \in \mathbb{R}^n$ vektort, melyre érvényes

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0. \quad (1)$$

Kutatás célja

Az NCP numerikus megoldására szolgáló nem monoton, símitó pontatlan Newton módszer feljavítása.

N. Krejić, S. Rapajić, *Globally convergent Jacobian smoothing inexact Newton methods for NCP*, *Comp. Opt. Appl.*, 2008

Motiváció

A CP sűrűn jelentkezik reális problémákban.

Motiváció

A CP sűrűn jelentkezik reális problémákban.

- ▶ közgazdaságtan: az általános egyensúlyállapot modellje (*Arrow-Debreu, Walras*);
- ▶ közlekedéstervezési problémák:
M. C. Ferris, J. S. Pang, *Engineering and economic applications of complementarity problems*, SIAM Rev., 1997.

Az NCP megoldása símító módszerrel

- ▶ az NCP nemlineáris egyenletrendszerre való ekvivalens átalakítása

$$\Phi(x) = 0, \quad (2)$$

ahol $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$;

Az NCP megoldása símitó módszerrel

- ▶ az NCP nemlineáris egyenletrendszerre való ekvivalens átalakítása

$$\Phi(x) = 0, \quad (2)$$

ahol $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$;

- ▶ sokszor olyan ekvivalens átalakítást használunk, amelyben a Φ függvény nem sima (nagyobb numerikus stabilitás, q-szuperlineáris konvergencia degenerált NCP-re). Az NCP $x^* \in \mathbb{R}^n$ megoldása degenerált, ha létezik legalább egy olyan i index, melyre érvényes

$$x_i = F_i(x) = 0,$$

különben a megoldás nemdegenerált.

Az NCP megoldása símító módszerrel

Fischer-Burmeister (FB) függvény

$$\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b.$$

A. Fischer, *A special Newton-type optimization method*, Optimization, 1992.

Ekvivalens átalakítás

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \varphi(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix},$$

Az NCP megoldása símító módszerrel

- ▶ az FB függvény által definiált $\Phi(x)$ függvény félsima;

Az NCP megoldása símító módszerrel

- ▶ az FB függvény által definiált $\Phi(x)$ függvény félsima;
- ▶ a félsima függvénnyel rendelkező egyenletrendszereket a *símító módszerekkel* lehet megoldani;
- ▶ a $\Phi(x)$ félsima függvényt a

$$\Phi_{\mu}(x) := \begin{pmatrix} \varphi_{\mu}(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \varphi_{\mu}(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix},$$

sima függvénnyel approximálják, ahol

Az NCP megoldása símító módszerrel

$$\varphi_{\mu}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} - a - b,$$

$\mu > 0$ a Kanzow-féle sima függvény.

C. Kanzow, *Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems*, SIAM J. Matrix Anal. A., 1996

Az NCP megoldása símitó módszerrel

$$\varphi_{\mu}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} - a - b,$$

$\mu > 0$ a Kanzow-féle sima függvény.

C. Kanzow, *Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems*, SIAM J. Matrix Anal. A., 1996

A módszer mindegyik lépésében egy sima, nemlineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\Phi_{\mu}(x) = 0, \tag{3}$$

ahol $\mu \rightarrow 0$;

Az NCP megoldása símitó módszerrel

A módszer konvergenciasebessége lassú lehet, ha a $\Phi_\mu(x)$ approximáló függvény nem elégíti ki a

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \text{dist}(\Phi'_\mu(x), \partial_C \Phi(x)) = 0.$$

feltételt minden $x \in \mathbb{R}^n$, ahol $\partial_C \Phi(x)$ az általánosított Jacobi mátrix Clarke-féle approximációja.

F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1983.

Az NCP megoldása símító, Newton módszerrel

- ▶ a símító, Newton módszerek minden iterációban egy lineáris egyenletrendszert (*vegyes Newton egyenlet*) oldanak meg:

$$\Phi'_{\mu}(x^k)d^k = -\Phi(x^k). \quad (4)$$

- ▶ a nagydimenziós problémáknál a (4) lineáris egyenletrendszer megoldása időigényes lehet;

Az NCP megoldása símító, Newton módszerrel

- ▶ a símító, Newton módszerek minden iterációban egy lineáris egyenletrendszert (*vegyes Newton egyenlet*) oldanak meg:

$$\Phi'_{\mu}(x^k)d^k = -\Phi(x^k). \quad (4)$$

- ▶ a nagydimenziós problémáknál a (4) lineáris egyenletrendszer megoldása időigényes lehet;
- ▶ a símító, pontatlan Newton módszerrel a (4) lineáris egyenletrendszert pontatlanul oldják meg:

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k)d^k = -\Phi(x^k) + r^k, \text{ ahol } \|r^k\| \leq t_k \|\Phi(x^k)\|. \quad (5)$$

A símító, pontatlan Newton módszer globalizációja

- ▶ globalizáció céljából vonalmenti keresést alkalmazunk;
- ▶ a vonalmenti keresésnél merit függvényt használunk

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \|\Phi(x)\|^2;$$

A símító, pontatlan Newton módszer globalizációja

- ▶ globalizáció céljából vonalmenti keresést alkalmazunk;
- ▶ a vonalmenti keresésnél merit függvényt használunk
$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \|\Phi(x)\|^2;$$
- ▶ mivel a d^k keresési irány nem csökkenő, nem monoton vonalmenti keresést kell használni;

Símító, pontatlan Newton módszer

A kutatás célja egy globálisan konvergens algoritmus feljavítása.
N. Krejić, S. Rapajić, *Globally convergent Jacobian smoothing inexact Newton methods for NCP*, *Comp. Opt. Appl.*, 2008

Símító, pontatlan Newton módszer

A kutatás célja egy globálisan konvergens algoritmus feljavítása.
 N. Krejić, S. Rapajić, *Globally convergent Jacobian smoothing inexact Newton methods for NCP, Comp. Opt. Appl.*, 2008

SPN Algoritmus

S0 Legyen $\sigma, \alpha, \bar{\xi} \in (0, 1)$, $0 < \tau_{min} < \tau_{max} < 1$, $\gamma > 0$, $t \in [0, \frac{1-\alpha}{1+\alpha})$, $M \in \mathbb{N}$,
 $\varepsilon \geq 0$ and $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Legyen $\{\eta_k\} > 0$ egy olyan sorozat, melyre érvényes $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k < \infty$ és
 $\{t_k\}$ olyan sorozat, melyre érvényes $0 \leq t_k \leq t$.

Legyen $\beta_0 = \|\Phi(x^0)\|$, $\mu_0 = (\frac{\alpha\beta_0}{2\sqrt{2n}})^2$ és $k = 0$.

SPN Algoritmus

S1 Ha $\|\Phi(x^k)\| \leq \varepsilon$, STOP.

SPN Algoritmus

S1 Ha $\|\Phi(x^k)\| \leq \varepsilon$, STOP.

S2 Határozzuk meg a d^k keresési irányt, melyre érvényes

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k)d^k = -\Phi(x^k) + r^k, \text{ ahol } \|r^k\| \leq t_k\|\Phi(x^k)\|.$$

SPN Algoritmus

S1 Ha $\|\Phi(x^k)\| \leq \varepsilon$, STOP.

S2 Határozzuk meg a d^k keresési irányt, melyre érvényes

$$\Phi'_{\mu_k}(x^k)d^k = -\Phi(x^k) + r^k, \text{ ahol } \|r^k\| \leq t_k\|\Phi(x^k)\|.$$

S3 Lépéshossz meghatározása a *backtracking algoritmussal*:
legyen $\tilde{\alpha} = 1$.

Ha a *vonalmonti keresés* megállási feltétele teljesül, $\alpha_k = \tilde{\alpha}$ és

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k.$$

Ha a vonalmonti keresés megállási feltétele nem teljesül,
legyen $\alpha_{new} \in [\tilde{\alpha}\tau_{min}, \tilde{\alpha}\tau_{max}]$, és $\tilde{\alpha} = \alpha_{new}$. Ellenőrizd le, az
így kapott $\tilde{\alpha}$ teljesíti-e a vonalmonti keresés megállási
feltételét.

SPN Algoritmus

S4 Ha

$$\|\Phi(x^{k+1})\| \leq \max\{\bar{\xi}\beta_k, \frac{1}{\alpha}\|\Phi(x^{k+1}) - \Phi_{\mu_k}(x^{k+1})\|\}, \quad (6)$$

legyen $\beta_{k+1} = \|\Phi(x^{k+1})\|$ és $\mu_{k+1} > 0$, melyre teljesül

$$\mu_{k+1} \leq \min\left\{\left(\frac{\alpha\beta_{k+1}}{2\sqrt{2n}}\right)^2, \frac{\mu_k}{4}, \frac{\mu_k^2}{\|\Phi_{\mu_k}(x^{k+1})\|^2}, \bar{\mu}(x^{k+1}, \gamma\beta_{k+1})\right\}.$$

Ha (6) nem teljesül, akkor

$$\beta_{k+1} = \beta_k \text{ i } \mu_{k+1} = \mu_k. \quad (7)$$

SPN Algoritmus

S4 Ha

$$\|\Phi(x^{k+1})\| \leq \max\{\bar{\xi}\beta_k, \frac{1}{\alpha}\|\Phi(x^{k+1}) - \Phi_{\mu_k}(x^{k+1})\|\}, \quad (6)$$

legyen $\beta_{k+1} = \|\Phi(x^{k+1})\|$ és $\mu_{k+1} > 0$, melyre teljesül

$$\mu_{k+1} \leq \min\left\{\left(\frac{\alpha\beta_{k+1}}{2\sqrt{2n}}\right)^2, \frac{\mu_k}{4}, \frac{\mu_k^2}{\|\Phi_{\mu_k}(x^{k+1})\|^2}, \bar{\mu}(x^{k+1}, \gamma\beta_{k+1})\right\}.$$

Ha (6) nem teljesül, akkor

$$\beta_{k+1} = \beta_k \text{ i } \mu_{k+1} = \mu_k. \quad (7)$$

S5 Legyen $k := k + 1$, menj vissza az S1 lépésre.

Vonalmenti keresés

Mivel a d^k keresési irány nem csökkenő, nem monoton vonalmenti keresést kell használni:

JSIN

$$\Psi_{\mu_k}(x^k + \alpha_k d^k) \leq (1 + \alpha_k \sigma(\theta - 1))^2 \Psi_{\mu_k}(x^k) + \eta_k,$$

ahol $\sigma \in (0, 1)$, $\theta \in [0, 1)$;

N. Krejić, S. Rapajić, *Globally convergent Jacobian smoothing inexact Newton methods for NCP*, *Comp. Opt. Appl.*, 2008

Vonalmenti keresés

Grippo-Lampariello-Lucidi (GLL)

Nem monoton vonalmenti keresési stratégia a $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ feladatra.

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq \max_{0 \leq j \leq M-1} f(x_{k-j}) + \gamma \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k.$$

L. Grippo, F. Lampariello, S. Lucidi, *A nonmonotone line search technique for Newton's method*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1986

Vonalmenti keresés

Li-Fukushima (LF)

$$\Psi_{\mu_k}(x^k + \alpha_k d^k) \leq (1 + \eta_k) \Psi_{\mu_k}(x^k) - \gamma \alpha_k^2 \|d^k\|^2,$$

ahol $\gamma \in (0, 1)$ és $\{\eta_k\} > 0$ olyan sorozat, melyre érvényes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k < \infty;$$

D.H. Li, M.N. Fukushima, *A derivative-free line search and global convergence of Broyden-like method for nonlinear equations*, *Optim. Methods. Softw.*, 2000

Vonalmenti keresés

Grippo-Lampariello-Lucidi és Li-Fukushima (GLL-LF)

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu_k}(x^k + \tilde{\alpha}d^k) &\leq \max_{0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}} \Psi_{\mu_{k-j}}(x^{k-j}) \\ &+ \eta_k - \sigma \tilde{\alpha}^2 \Psi_{\mu_k}(x^k), \end{aligned} \quad (8)$$

ahol $\sigma \in (0, 1)$ és $M \in \mathbb{N}$.

S. Rapajić, Z. Papp, *A nonmonotone Jacobian smoothing inexact Newton method for NCP*, *Comput. Optim. Appl.*, 2017

A JSIN Algoritmus tulajdonságai

Tétel

Az SPN Algoritmus jól definiált.

A JSIN Algoritmus tulajdonságai

Tétel

Az SPN Algoritmus jól definiált.

Tétel

Tegyük fel, hogy az $\{x^k\}$ sorozat az SPN Algoritmus által lett generálva. Akkor a $\{x^k\}$ sorozat mindegyik tagja a

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq (1 + \alpha)^2 \Psi(x^0) + 2(1 + \alpha) \sqrt{\eta \Psi(x^0)} + \eta \right\}$$

nivóhalmaz eleme.

Az SPN Algoritmus tulajdonságai

Definíció

Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény egyenletesen P -függvény, ha létezik egy olyan $c > 0$ konstans úgy, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ létezik legalább egy i index, melyre érvényes

$$(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq c\|y - x\|^2.$$

Tétel

Tegyük fel, hogy az NCP F függvénye egyenletesen P -függvény. A Ψ merit függvény

$$\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq \alpha\}$$

nivóhalmaza korlátos.

Az SPN Algoritmus globális konvergenciája

Tétel

Legyen az NCP F függvénye egyenletesen P -függvény és tételezzük fel, hogy az $\{x^k\}$ sorozat az SPN Algoritmus által lett generálva. Akkor a $\{x^k\}$ sorozat mindegyik torlódási pontja egyben a Ψ merit függvény stacionárius pontja.

Az SPN Algoritmus konvergenciasebessége

Tétel

Legyen az NCP F függvénye egyenletesen P -függvény és az $x^ \in \mathbb{R}^n$ az SPN Algoritmus által generált $\{x^k\}$ sorozat torlódási pontja. Az SPN Algoritmusban definiáljuk az $\{\eta_k\}$ sorozatot a következő módon*

$$\eta_k = (2 - \sigma + 2\sqrt{1 - \sigma})n\mu_k + (1 - \sigma + \sqrt{1 - \sigma})\sqrt{2n\mu_k}\|\Phi_{\mu_k}(x^k)\|.$$

Legyenek a Jacobi mátrix Clarke-féle approximációinak elemei $\partial_C \Phi(x^)$ reguláris mátrixok és legyen $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$. Ekkor az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pont az NCP megoldása és az $\{x^k\}$ sorozat q -szuperlineárisan konvergál a x^* pont felé.*

Numerikus kísérletek

- ▶ a numerikus kísérletek folyamán az NCP megoldására szolgáló SPN Algoritmust teszteltük a GLL-LF (JSIN-GLL-LF) és a (JSIN) nem monoton vonalmenti keresési eljárásokkal;
- ▶ az algoritmusokat Matlabban hasonlítottuk össze;
- ▶ a kísérletek folyamán az algoritmusok robusztusosságát és teljesítményét tanulmányoztuk;

Numerikus kísérletek

Teszt feladatok

- ▶ az algoritmusok robusztusosságát és teljesítményét 29 teszt feladaton tanulmányoztuk;
- ▶ mindegyik teszt feladat $n = 10$, $n = 100$ és $n = 1000$ dimenziójú;
- ▶ a tesztelésre szolgáló komplementaritási feladatok F függvényét mesterségesen szerkesztettük meg $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciális, függvények segítségével:
 - ▶ J.C.P. Bus, *Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations, Mathematical Centre Tracts, vol. 122, Mathematical Centre, Amsterdam, 1980*
 - ▶ L. Lukšan, *Inexact trust region method for large sparse systems of nonlinear equations*, J. Optim. Theory Appl.81, 1994
 - ▶ E. Spedicato, Z. Huang, *Numerical experience with Newton-like methods for nonlinear algebraic systems*, Computing 58, 1997

Numerikus kísérletek

- ▶ az algoritmusokat külön teszteltük a degenerált és a nemdegenerált megoldással rendelkező komplementaritási feladatokon;
- ▶ az algoritmusokat az iterációk száma, és a függvénykiértékelések száma alapján hasonlítottuk össze;
- ▶ az algoritmusok robusztusosságának és teljesítményének mértékét a teljesítmény profil (performance profile) segítségével mértük;

E.D. Dolan, J.J. Moré, Benchmarking optimization software with performance profiles, Math. Program. Ser. A, 2002

Numerikus kísérletek

Teljesítmény profil

Legyen $t \in \{\text{iterációk száma, függvénykiértékelések száma}\}$.

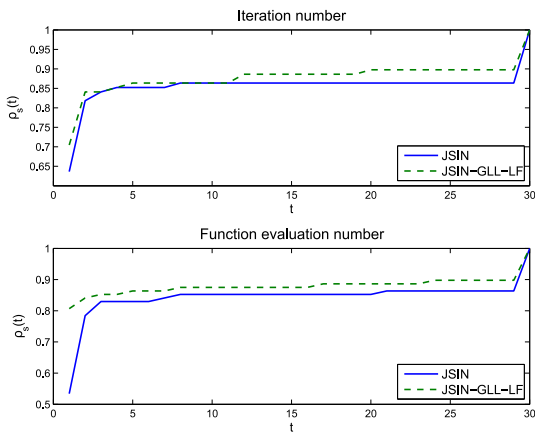
- ▶ algoritmus teljesítmény hányadosa (performance ratio):

$$r = \frac{t_{\text{algoritmus}}}{\min\{t : t \in \text{algoritmusok}\}};$$

- ▶ algoritmus teljesítmény profilja: annak valószínűsége, hogy az algoritmus teljesítmény hányadosa valamilyen τ tényezőtől kisebb legyen

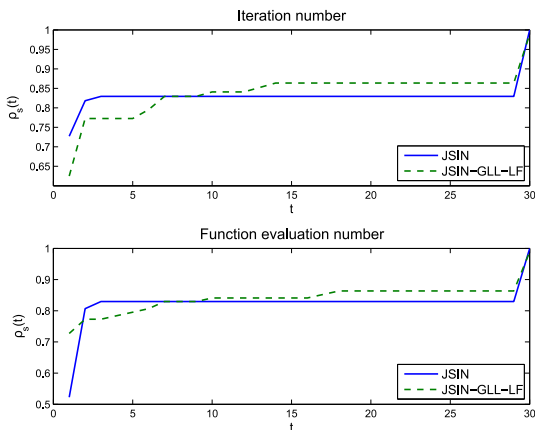
$$\rho(t) = \frac{\text{teszt feladatok száma, melyre } r \leq \tau}{\text{összes teszt feladat száma}}.$$

Numerikus kísérletek



ábra: Algoritmusok teljesítményprofilja nemdegenerált teszt feladatokra

Numerikus kísérletek



ábra: Algoritmusok teljesítményprofilja degenerált teszt feladatokra

Köszönöm a figyelmet!!!