A BLP modell alternatív megoldási módszereinek vizsgálata

Pál László, Sándor Zsolt, Makó Zoltán

Csíkszeredai Kar, Sapientia EMTE

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia
Cegléd, 2017. május 14-17.

Outline

A BLP modell

- Berry, Levinshon, and Peaks (BLP) [1]: módszertan a kereslet becslésére
- A BLP modell jellmezői:
  - Kereslet becslése aggregált adatokkal $\Rightarrow$ a keresleti függvény a fogyasztók hasznossági függvényéből levezethető egyéni keresleti függvények összegzéséből származik
  - Diszkrét választási modellt használ véletlen együtthatókkal
  - Kezeli a termékár endogén tulajdonságát
- Alkalmazások:
  - Fúzió elemzés (merger analysis)
  - Jólét-elemzés (welfare analysis)

[1] S. Berry, J. Levinsohn and A. Pakes: Automobile Prices in Market Equilibrium, Econometrica, vol. 63, issue 4, 841-90, 1995.

A modell összetevői

- Piacok (T): $t = 1, \ldots, T$
- Termékek (J): $j = 0, \ldots, J$ ($j = 0 \Rightarrow$ külső termék)
- Az i. fogyasztó választ egy j terméket a t piacról
- Hasznosságfüggvény (véletlen együtthatók):
  $u_{ijt} = \beta_i x_{jt} - \alpha_i p_{jt} + \xi_{jt} + \varepsilon_{ijt}$, ahol
  - p_{jt}: a j termék ára
  - x_{jt}: a megfigyelt termék jellemzők
  - ξ_{jt}: termék jellemző, nem ismert a kutató számára, hibaváltozó
  - ε_{ijt}: hibaváltozó, fogyasztó-specifikus
  - α_i, β_i: fogyasztó-specifikus együtthatók, normál eloszlásúak

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \Sigma \right).$$

A modell összetevői

- Hasznosságfüggvény átírása: átlag+szórás
  $$u_{ijt} = \underbrace{\beta x_{jt} - \alpha p_{jt} + \xi_{jt}}_{\delta_{jt}} + \underbrace{[x_{jt}, p_{jt}]\upsilon_i \sigma}_{\mu_{ijt}} + \varepsilon_{ijt}, \text{ ahol } \upsilon_i \sim N(0, I)$$
  $$u_{ijt} = \underbrace{\delta_{jt}(x_{jt}, p_{jt}, \xi_{jt}; \theta_1)}_{\text{mean utility}} + \underbrace{\mu_{ijt}(x_{jt}, p_{jt}, \upsilon_i; \theta_2)}_{\text{individual deviations}} + \varepsilon_{ijt}$$
- j. termék piaci részesedése s_{jt} :
  $$s_{jt}(\delta_t; \theta) = \int \frac{\exp(\delta_{jt} + \mu_{ijt}(x_{jt}, p_{jt}, \upsilon_i; \theta_2))}{1 + \sum_{j=1}^{J} \exp(\delta_{jt} + \mu_{ijt}(x_{jt}, p_{jt}, \upsilon_i; \theta_2)))} dF(\upsilon; \theta),$$
- Becsülendő paraméterek ($\theta = (\theta_1, \theta_2)$):
  - $\theta_1 = (\beta, \alpha)$ (lineáris)
  - $\theta_2 = (\sigma)$ (nemlineáris)

A BLP becslő módszer

- Az ár korrelál a hibaváltozóval (ξ) $\Rightarrow$ az ár endogén változó
- Megoldás: GMM (general method of momments) alkalmazása
  - instrumentális változók bevezetése (z_{jt})
  - momentum feltétel: $E[\xi_{jt}|z_{jt}] = 0$
  - analóg forma: $g(\xi(\theta)) = \frac{1}{JT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J}\xi_{jt}(\theta)\cdot h(z_{jt})$
- A GMM módszer az alábbi célfüggvényt minimalizálja:

$$Q(\theta) = g(\xi(\theta))'\ W\ g(\xi(\theta))$$

ahol W egy súlymátrix.
- Az optimalizálási feladat:

$$\min_{\theta} Q(\theta) = \min_{\theta} g(\xi(\theta))'\ W\ g(\xi(\theta)),$$

ahol $\xi_t(\theta)$ megoldása a piaci részesedések egyenletének $S_t = s(\xi_t;\theta)$

A BLP becslő eljárás

- Eljárás: két egymásba ágyazott ciklus (nested fixed-point - NFP)
  - Külső ciklus: keresés θ szerint
  - Belső ciklus (kontrakciós eljárás): ξ kiszámolása θ alapján (piaci részesedések invertálása)

$$\xi_t^k = \xi_t^{k-1} + \ln S_t - \ln s(\xi_t^{k-1}; \theta)$$

- Tulajdonságok:
  - Kontrakció: a konvergencia garantált, de lassú
  - Külső ciklus: a konvergencia függ a megállási feltételektől
- A kontrakció helyettesíthető más eljárásokkal: Newton, Spectral, illetve Squarem módszerek

Newton módszer

- Gyökkeresési feladat: $f(\xi) = 0$, $f : \mathbb{R}^{JT} \to \mathbb{R}^{JT}$, ahol

$$f(\xi) = \log(S) - \log(s(\xi; \theta)).$$

- Iterációs eljárás:

$$\xi^{k+1} = \xi^k - \mathbb{J}(\xi^k)^{-1} f(\xi^k),$$

  ahol $\mathbb{J} : \mathbb{R}^{JT} \to \mathbb{R}^{JT \times JT}$ az f Jacobi mátrixa

- Tulajdonságok:
  - Kvadratikus konvergencia a kiindulási pont környezetében
  - Nem garantált a konvergencia: távoli kiindulási pontból, rosszul kondicionált Jacobi mátrix esetén

Spectral algoritmus

- Barzilai and Borwein algoritmus [2] módosított változata
- Nem igényli a Jacobi mátrix kiszámítását

Function Spectral(f, ξ^0)

α_0 − scalar
$k \leftarrow 1$
while *not stop cond* **do**
$\quad \xi^k \leftarrow \xi^{k-1} - \alpha^{k-1} \cdot f(\xi^{k-1})$
$\quad s^k \leftarrow \xi^k - \xi^{k-1}$
$\quad y^k \leftarrow f(\xi^k) - f(\xi^{k-1})$
$\quad \alpha^k \leftarrow \frac{(s^k)' y^k}{(y^k)' y^k}$
$\quad k \leftarrow k + 1$
return ξ^k

[2] Barzilai, J. and Borwein, J.M. (1988), "Two-Point Step Size Gradient Methods," *IMA Journal of Numerical Analysis* 8(1), 141–148.

Squarem módszer

- Extrapolációs módszer a kontrakció gyorsítására [3]
- A kontrakciós függvényen dolgozik:

$$\kappa(\xi) \leftarrow \xi + \ln S - \ln s(\xi;\theta)$$

Function Squarem(f, ξ^0)

$k \leftarrow 0$
while *not stop cond* **do**
  $r^k \leftarrow \kappa\left(\xi^k\right) - \xi^k$
  $y^k \leftarrow \kappa\left(\kappa\left(\xi^k\right)\right) - 2\kappa\left(\xi^k\right) + \xi^k$
  $\alpha^k \leftarrow \frac{\left(r^k\right)' y^k}{\left(y^k\right)' y^k}$
  $\xi^{k+1} \leftarrow \xi^k - 2\alpha^k r^k + \left(\alpha^k\right)^2 y^k$
  $k \leftarrow k + 1$
return ξ^k

[3] Jo Reynaerts, Ravi Varadhan, John C. Nash (2012). Enhancing the Convergence Properties of the BLP (1995) Contraction Mapping, Discussion Paper, Vives.

Az MPEC módszer

- MPEC: mathematical programming with equilibrium constraints [4]
- Cél: a kontrakciós algoritmus kikerülése
- A θ mellett ξ-t is ismeretlennek tekinti $\Rightarrow$ feltételes optimalizálási feladat:

$$\min_{\theta,\xi} g(\xi)' \; W \; g(\xi)$$

$$\text{ú.h.} \;\; s(\xi;\theta) = S.$$

- Tulajdonságok:
  - Ugyanazt a becslést eredményezi, mint a BLP módszer
  - Sok piac -és termékszámra lassú lehet (pld. $T = 50$, $J = 25$ $\Rightarrow$ ξ mérete 1250)

[4] Su, C.-L. and Judd, K.L. (2012) "Constrained Optimization Approaches to Estimation of Structural Models." *Econometrica*, Vol. 80, pp. 2213–2230.

Az ABLP módszer

- ABLP: approximate BLP [5]
- Cél: kontrakciós lépés egyszerűsítése $\Rightarrow$ piaci részesedések linearizálása (analitikus invertálás)
- Célfüggvény:

$$Q(\theta;\xi) = g(\Phi(\theta,\xi))'\ W\ g(\Phi(\theta,\xi)),$$

ahol

$$\Phi(\theta,\xi) = \xi + [\nabla_{\xi'} \ln s(\xi;\theta)]^{-1}[\ln S - \ln s(\xi;\theta)]$$

[5] Lee, J. and Seo, K. (2015), A computationally fast estimator for random coefficients logit demand models using aggregate data. *RAND Journal of Economics*, 46: 86–102.

Az ABLP módszer

- Tulajdonságok:
  - Gyors, de pontatlan
  - Az ABLP és BLP becslő módszerek aszimptotikusan megegyeznek, ha a piacok száma elég nagy

Function ABLP(f, θ^0)

Find ξ^0 (corresponding to θ^0)
$k \leftarrow 1$
while *not stop cond* **do**
    $\theta^k \leftarrow \arg\min_{\theta \in \Theta} \Phi(\theta, \xi^{k-1})$
    $\xi^k \leftarrow \Phi(\theta^k, \xi^{k-1})$
    $k \leftarrow k + 1$
return θ^k

Mesterséges adatok

- $T = 50,\ J = 25$
- Hasznosságfüggvény: $U_{ijt} = X_{jt}\beta_i + \xi_{jt} + \varepsilon_{ijt}$, ahol $X_{jt} = \{1, x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}, p_{jt}\}$
- Termékjellemzők eloszlása:

$$\begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ x_{j3} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.3 \\ -0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

- Árak: $p_{jt} = 3 + \xi_{jt} \cdot 1.5 + u_{jt} + \sum_{k=1}^{3} x_{kj}$, ahol $\xi_{jt} \sim N(0,1)$,
- Instrumentumok: $z_{j,t,d} = \epsilon_{jt} + \frac{1}{4}(e_{jt} + 1.1 \cdot \sum_{k=1}^{3} x_{jk})$, ahol $\epsilon_{jt} \sim U[0,1]$ és $e_{jt} \sim N(0,1)$

Mesterséges adatok

- Fogyasztói ízlés paraméterek: $\beta = (\beta_i^0, \beta_i^1, \beta_i^2, \beta_i^3, \beta_i^p)'$, ahol
  - β_i^0: a konstans (intercept)
  - β_i^k, $k = 1, 2, 3$: termékjellemzők együtthatói
  - β_i^p: az áregyüttható
- Az együtthatók normál eloszlásuak:
  - Várható érték: $E[\beta_i] = [0, 1.5, 1.5, 0.5, -3]'$
  - Variancia: $Var\,[\beta_i] = [0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.2]'$
- Integrál közelítése: quasi-random minta ($N_s = 125$)

Szimulációs környezet

- Tesztkörnyezet: MATLAB 2014
- Algoritmusok (derivált alapú):
  - BLP:
    - KNITRO (Interior/Direct)
    - Analitikus első -és másodrendű derivált
  - ABLP:
    - fmincon (MATLAB)
    - Analitikus első -és másodrendű derivált
  - MPEC (MPEC1, MPEC2):
    - KNITRO (Interior/Direct, Interior/CG)
    - Analitikus első -és másodrendű derivált
- Megállási feltételek: külső ciklus ($TolX = TolFun = 1e^{-6}$), belső ciklus ($|\xi^k - \xi^{k-1}| < 1e^{-14}$)

Szimulációs környezet

- Algoritmusok (derivált-mentes):
  - BLP (kontrakció, Spectral, Squarem):
    - KNITRO (Interior/Direct, SQP) - numerikus derivált használata
    - NEWUOA, BOBYQA: "trust-region"-alapú algoritmusok
    - Nelder-Mead simplex
- Megállási feltételek: 1000 függvényhívás vagy $TolX = TolFun = 1e^{-6}$

Szimulációs esetek

1. Rögzített piac ($T = 50$) -és termékszám ($J = 25$)
   Változó konstans értékek: $E[\beta_i^0] \in [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]$
   (a) $Var[\beta_i] = [0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.2]'$
   (b) $Var[\beta_i] = [4, 4, 4, 4, 1]'$
2. Rögzített konstans: $E[\beta_i^0] = 0$
   Változó piac ($T = [25, 10, 5]$) -és termékszámok ($J = [50, 125, 250]$)
   (a) $Var[\beta_i] = [0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.2]'$
   (b) $Var[\beta_i] = [4, 4, 4, 4, 1]'$

Szimulációs esetek

- 100 véletlenszerű feladat
  - különböznek a termékjellemzők, hibaváltozók, árak
  - 5 kezdő pont $\Rightarrow$ 500 futtatás
- Összehasonlító kritériumok:
  - Conv: konvergens esetek száma (százalékban)
  - FBest: legjobb fügvényértékek átlaga
  - RMSE (Root Mean Square Error): hiba értékek átlaga
  - Bias: az ár-komponens hibaértékeinek átlaga
  - CPU: futási idők átlaga

Eredmények - Derivált alapú algoritmusok

1. Változó konstans ($E[\beta_i^0]$) értékek:
   (a) var1:
   - konvergencia: közel 100% valamennyi módszer esetén, kivétel az ABLP, amely a $E[\beta_i^0]$ növekedésével csökken (70%)
   - FBest, RMSE1: kontrakció, Spectral, Squarem, Newton esetén megegyeznek és egy-két esetet leszámítva a legjobb értékek. Az ABLP teljesít a legrosszabbul
   - CPU: ABLP a leggyorsabb, ezt követi Spectral, MPEC2. A $E[\beta_i^0]$ növekedésével valamennyi esetben az idő is nő, kivéve az MPEC módszer

   (b) var2:
   - konvergencia: 99-100% kontrakció, Spectral, Squarem esetén, MPEC1 (88-95%), MPEC2 (97-99%), ABLP (16-43%), Newton (97-99%)
   - FBest, RMSE1: kontrakció, Spectral, Squarem esetén megegyeznek és egy-két esetet (MPEC1) leszámítva a legjobb értékek
   - CPU: Spectral, Squarem és MPEC2 módszerek a leggyorsabbak

Eredmények - Derivált alapú algoritmusok

2. Változó piac -és termékszámok :
   (a) var1:
   - konvergencia: 100% kontrakció, Spectral, Squarem esetén, MPEC1 (98-99%), MPEC2 (99-100%), ABLP (78-97%), Newton (96-98%)
   - FBest, RMSE1: kontrakció, Spectral, Squarem esetén megegyeznek és egy-két esetet (MPEC2) leszámítva a legjobb értékek
   - CPU: Spectral, Squarem és ABLP módszerek a leggyorsabbak (MPEC1 időigényesebb főleg 250 termék esetén)

   (b) var2:
   - konvergencia: 100% kontrakció, Spectral, Squarem esetén, MPEC1 (86-90%), MPEC2 (95-96%), ABLP (27-33%), Newton (99%)
   - FBest, RMSE1: kontrakció, Spectral, Squarem és Newton esetén megegyeznek a legjobb értékek
   - CPU: Spectral és Squarem módszerek a leggyorsabbak

Eredmények - Derivált-mentes algoritmusok (Spectral)

2. Változó piac -és termékszámok:
   (a) var1:
      - konvergencia: NumDeriv1 (99-100%), NumDeriv2 (97-99%), NEWUOA (100%), BOBYQA (100%), NM (100%)
      - FBest, RMSE1: NumDeriv1, NumDeriv2, NEWUOA és NM hasonló. NM a legjobb 125 termék esetén
      - FEVs: NEWUOA a leggyorsabb, ezt követi NumDeriv2
      - CPU: NEWUOA a leggyorsabb, ezt követi NumDeriv2 és BOBYQA. NM kb. 2.5-3-szor lassúbb

   (b) var2:
      - konvergencia: NumDeriv1 (100%), NumDeriv2 (99-100%), BOBYQA (99-100%), NM (99-100%)
      - FBest, RMSE1: NumDeriv1 és NumDeriv2 legjobb értékek, NM hasonló, BOBYQA lényegesen eltér
      - FEVs: NEWUOA a leggyorsabb, ezt követi NumDeriv2
      - CPU: NumDeriv2 a leggyorsabb, NM kb. 3-szor lassúbb

Következtetések

- Derivált alapú algoritmusok: valamennyi esetben a BLP+Spectral a legsikeresebb
- Derivált-mentes módszerek: NEWUOA alternatív lehetőség lehet a numerikus deriváltat alkalmazó módszerek mellett
- További lehetőségek:
  - Párhuzamosítás
  - Globális optimalizálás

Köszönöm a figyelmet!