Egy speciális lineáris feltételrendszer megengedett megoldásának meghatározása a változók számával arányos aritmetikai műveletek segítségével

Mihályffy László KSH

XXXII. MAGYAR OPERÁCIÓKUTATÁSI KONFERENCIA
CEGLÉD, 2017. JÚNIUS 14-16

A feladat

Adott: elsődleges bekerülési valószínűségek

$$0 < \pi_i < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = n, \; n < N$$

Ismeretlen: π_{ij} másodlagos bekerülési valószínűségek,

$$1 \le i, \; j \le N, \quad i \ne j$$

Feltételek:

$$0 < \pi_{ij} = \pi_{ji} < \pi_i \pi_j, \quad \pi_{ii} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, N$$

$$\boxed{\sum_{j \ne i}^{N} \pi_{ij} = (n-1)\pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N}$$

<u>Közelítő megoldás</u> ***B**rewer 1963, **R**ao 1965, **D**urbin 1967*

Segédváltozók: $i=1, 2, \ldots, N$ esetén

$u_i = (n-1)/((1+\tau)(n-2\pi_i))$, itt $\tau = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \big/ (n-2\pi_i)$

együtthatók: $x_{ij} = u_i + u_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $i \neq j$,

$x_{11} = x_{22} = \ldots = x_{NN} = 0$,

$$\boxed{\pi_{ij} = x_{ij}\pi_i\pi_j,\ i, j = 1, 2, \ldots, N \ldots}$$

$\pi_{ij} > 0$ ✓ $\sum_{j \neq i}^{N} \pi_{ij} = (n-1)\pi_i$ ✓

$\pi_{ij} < \pi_i\pi_j \Leftrightarrow 0 < x_{ij} < 1 \Leftarrow n = 2$ esetén <u>mindig</u>,

$n > 2$ esetén nem mindig

Példa nem megengedett megoldásra (x_{ij})

$$\mathbf{X} = (x_{ij}) = \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1{,}104 & 0{,}992 & 0{,}960 & 0{,}932 & 0{,}925 & 0{,}895 \\ 1{,}104 & 0 & 0{,}950 & 0{,}917 & 0{,}889 & 0{,}882 & 0{,}853 \\ 0{,}992 & 0{,}950 & 0 & 0{,}806 & 0{,}778 & 0{,}771 & 0{,}741 \\ 0{,}960 & 0{,}917 & 0{,}806 & 0 & 0{,}745 & 0{,}739 & 0{,}709 \\ 0{,}932 & 0{,}889 & 0{,}778 & 0{,}745 & 0 & 0{,}710 & 0{,}681 \\ 0{,}925 & 0{,}882 & 0{,}771 & 0{,}739 & 0{,}710 & 0 & 0{,}674 \\ 0{,}895 & 0{,}853 & 0{,}709 & 0{,}709 & 0{,}681 & 0{,}674 & 0 \end{array} \right|$$

Cél: használjuk a BRD közelítést, ha $x_{ij} \leq 1 \;\; \forall i,\, j$ esetén, egyébként módosítsuk, korrigáljuk ...

Egyenletek, táblázatos elrendezés

$$\sum_{j \neq i}^{N} x_{ij} \pi_i \pi_j = (n-1)\pi_i$$ részletesen::

$$\begin{pmatrix} 0 + x_{12}\pi_2 + x_{13}\pi_3 + \ldots + x_{1,N-1}\pi_{N-1} + x_{1N}\pi_N \\ x_{21}\pi_1 + 0 + x_{23}\pi_3 + \quad + x_{2,N-1}\pi_{N-1} + x_{2N}\pi_N \\ x_{31}\pi_1 + x_{32}\pi_2 + 0 + \quad + x_{3,N-1}\pi_{N-1} + x_{3N}\pi_N \\ \vdots \\ x_{N-1,1}\pi_1 + \quad + 0 + x_{N-1,N}\pi_N \\ x_{N1}\pi_1 + x_{N2}\pi_3 + \quad + x_{N,N-1}\pi_{N-1} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ n-1 \\ \vdots \\ n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Egyenletek, mátrix-vektor jelöléssel: $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$

$\mathbf{A}=(a_{ij})$, $N\times M$, $M=N(N-1)/2$ -- (itt $N=6$, $M=15$)

x **1,2**	x **1,3**	x **1,4**	x **1,5**	x **1,6**	x **2,3**	x **2,4**	x **2,5**	x **2,6**	x **3,4**	x **3,5**	x **3,6**	x **4,5**	x **4,6**	x **5,6**		*minusz*
π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_1$
π_1	0	0	0	0	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_2$
0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	0	π_4	π_5	π_6	0	0	0	=	$\mathbf{b}_3$
0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	0	π_5	π_6	0		$\mathbf{b}_4$
0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	0	π_6		$\mathbf{b}_5$
0	0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	π_5		$\mathbf{b}_6$

$$\mathbf{b} = (n-1, n-1, \ldots, n-1)^T, \quad \mathbf{b} \in \mathrm{R}^N$$

$$\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1N}, x_{23}, x_{24}, \ldots, x_{2N}, \ldots, x_{N-2,N-1}, x_{N-2,N}, x_{N-1,N})^T \qquad \mathbf{x} \in \mathrm{R}^M$$

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet partikuláris megoldása

Legyen $\mathbf{D} = (d_{ij})$ $N \times M$, $d_{ij} = 1$ ha $a_{ij} \neq 0$, egyébként $d_{ij} = 0$. Legyen $\mathbf{C} = \mathbf{AD}^T$.

$\mathbf{DC}^{-1}$ az „**A**” egyik ált. inverze,

$\mathbf{x}^o = (x_{12}^o, x_{13}^o, \ldots, x_{1N}^o, \ldots, x_{N-2,N}^o, x_{N-1,N}^o)^T = \mathbf{DC}^{-1}\mathbf{b}$

az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet partikuláris megoldása

$\pi_{ij} = x_{ij}^o \pi_i \pi_j$ a BRD közelítéssel azonos,

$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}$ az u_i segédváltozók vektora

Alapötlet /*a*/, x_{12}>1: x_{12}:=1, fix, „maradék egyenlet” megoldása

$\mathbf{A}=(a_{ij})$, $N\times M$, $M=N(N-1)/2$ -- (itt $N=6$, $M=15$)

***x* 1,2**	***x* 1,3**	***x* 1,4**	***x* 1,5**	***x* 1,6**	***x* 2,3**	***x* 2,4**	***x* 2,5**	***x* 2,6**	***x* 3,4**	***x* 3,5**	***x* 3,6**	***x* 4,5**	***x* 4,6**	***x* 5,6**			*minusz*
π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_1$	
π_1	0	0	0	0	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_2$	
0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	0	π_4	π_5	π_6	0	0	0	=	$\mathbf{b}_3$	
0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	0	π_5	π_6	0		$\mathbf{b}_4$	
0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	0	π_6		$\mathbf{b}_5$	
0	0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	π_5		$\mathbf{b}_6$	

$$\mathbf{b}=(n-1, n-1, \ldots, n-1)^T, \quad \mathbf{b}\in \mathrm{R}^N$$

$$\mathbf{x}=(x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1N}, x_{23}, x_{24}, \ldots, x_{2N}, \ldots, x_{N-2,N-1}, x_{N-2,N}, x_{N-1,N})^T$$

$$\mathbf{x}\in \mathrm{R}^M$$

Alapötlet /*b*/, $x_{13}>1$: $x_{13}:=1$, fix, „maradék egyenlet” megoldása

$\mathbf{A}=(a_{ij})$, $N\times M$, $M=N(N-1)/2$ -- (itt $N=6$, $M=15$)

$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$x_{1,4}$	$x_{1,5}$	$x_{1,6}$	$x_{2,3}$	$x_{2,4}$	$x_{2,5}$	$x_{2,6}$	$x_{3,4}$	$x_{3,5}$	$x_{3,6}$	$x_{4,5}$	$x_{4,6}$	$x_{5,6}$		*minusz*
π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_1$
π_1	0	0	0	0	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_2$
0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	0	π_4	π_5	π_6	0	0	0	=	$\mathbf{b}_3$
0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	0	π_5	π_6	0		$\mathbf{b}_4$
0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	0	π_6		$\mathbf{b}_5$
0	0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	π_5		$\mathbf{b}_6$

$$\mathbf{b}=(n-1, n-1, \ldots, n-1)^T, \quad \mathbf{b}\in \mathrm{R}^N$$

$$\mathbf{x}=(x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1N}, x_{23}, x_{24}, \ldots, x_{2N}, \ldots, x_{N-2,N-1}, x_{N-2,N}, x_{N-1,N})^T \qquad \mathbf{x}\in \mathrm{R}^M$$

Alapötlet /*c*/, $x_{23}>1$: $x_{23}:=1$, fix, „maradék egyenlet” megoldása

$\mathbf{A}=(a_{ij})$, $N\times M$, $M=N(N\text{-}1)/2$ -- (itt $N=6$, $M=15$)

x 1,2	x 1,3	x 1,4	x 1,5	x 1,6	x 2,3	x 2,4	x 2,5	x 2,6	x 3,4	x 3,5	x 3,6	x 4,5	x 4,6	x 5,6			*minusz*
π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_1$	
π_1	0	0	0	0	π_3	π_4	π_5	π_6	0	0	0	0	0	0		$\mathbf{b}_2$	
0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	0	π_4	π_5	π_6	0	0	0	=	$\mathbf{b}_3$	
0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	0	π_5	π_6	0		$\mathbf{b}_4$	
0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	0	π_6		$\mathbf{b}_5$	
0	0	0	0	π_1	0	0	0	π_2	0	0	π_3	0	π_4	π_5		$\mathbf{b}_6$	

$$\mathbf{b}=(n-1,n-1,\ldots,n-1)^T,\quad \mathbf{b}\in \mathrm{R}^N$$

$$\mathbf{x}=(x_{12},x_{13},\ldots,x_{1N},x_{23},x_{24},\ldots,x_{2N},$$
$$\ldots,x_{N-2,N-1},x_{N-2,N},x_{N-1,N})^T$$

$$\mathbf{x}\in \mathrm{R}^M$$

Alapötlet /*d*/

Start: $\mathbf{A}\mathbf{x}^{\text{o}} = \mathbf{b}$

T.f. $\mathbf{a}_1$ az $\mathbf{A}$ első oszlopa, koefficiense $x_{12} > 1$.

– legyen x_{12} (új) értéke 1, ezt rögzítsük;

– hagyjuk el **A**-ból $\mathbf{a}_1$–et (**A** új értéke $\mathbf{A}'$), vonjuk le **b**-ből, $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{a}_1$, és hagyjuk el $\mathbf{x}^{\text{o}}$ első komponensét, x_{12}-et;

– oldjuk meg a „redukált” egyenletet:

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}'$$

– eredeti egyenlet aktuális megoldása: x_{12} és $\mathbf{x}'\ldots$

Alapötlet /*e*/

Ha $x'_{hl} < 1$ minden h, l indexpárra, készen vagyunk.
Ha nem,

– T.f. $\mathbf{A}'$ k-adik oszlopának koefficiense $x_{hl} > 1$.

– legyen x_{hl} (új) értéke 1, ezt rögzítsük;

– hagyjuk el $\mathbf{A}'$-ből az $\mathbf{a}_k$ oszlopot ($\mathbf{A}'$ új értéke $\mathbf{A}''$),
vonjuk le $\mathbf{b}'$-ből, $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}' - \mathbf{a}_k$, és hagyjuk el $\mathbf{x}'$-ből az x_{hl} komponenst;

– oldjuk meg a „redukált” egyenletet:

$$\mathbf{A}''\mathbf{x}'' = \mathbf{b}''$$

Az eredeti egyenlet aktuális megoldása x_{12}, x_{hl} és $\mathbf{x}''$ …

Olcsó megoldás…

Kezdeti állapot: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1 = (\pi_2, \pi_3, 0, \ldots, 0)^T$, $x_{12} > 1$,
$\mathbf{b} = (n-1)(1, 1, \ldots, 1)^T$
Segédváltozók: $\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}$, $\mathbf{C} = \mathbf{AD}^T$, ahol $\mathbf{D}$=…
Alternatív: $\mathbf{C} = \sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{d}_k^T$ M db diád
Hagyjuk el az $\mathbf{a}_1$ *oszlopot*!

$$(\mathbf{C} - \mathbf{a}_1\mathbf{d}_1^T)\mathbf{u}' = \mathbf{b} - \mathbf{a}_1 \Rightarrow \mathbf{u}' = (\mathbf{C} - \mathbf{a}_1\mathbf{d}_1^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{a}_1)$$

Morrison-Sherman azonosság:

$$(\mathbf{C} - \mathbf{a}_1\mathbf{d}_1^T)^{-1} = \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{1 - \mathbf{d}_1^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}_1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}_1\mathbf{d}_1^T\mathbf{C}^{-1}$$

Algoritmus, előkészület

Adott: $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \ldots \geq \pi_N$, plusz BRD közelítések,

segédváltozók: $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_N$, koefficiensek: $h > l$

$\Rightarrow x_{ih} \leq x_{il},\ x_{hj} \leq x_{lj}$

jelző(x_{ij})=1 $\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = i+1, i+2, \ldots, N.$

Ha $x_{12} \leq 1$, nincs szükség az algoritmusra.

Ha $x_{12} > 1$, legyen k = 1 és kezdődjön az algoritmus

(*A következőkben* x_{ij} *az* „**A**” k-*adik oszlopához tartozó koefficiens!*)

Algoritmus: ciklus „**A**” oszlopain, k =1, 2, …, M (=N(N-1)/2)

1. Ha $x_{ij} \leq 1$ és $(i, j) \neq (N-1, N)$, legyen $k := k+1$, és ismételjük ezt a lépést. Ha $x_{ij} \leq 1$ és $(i, j) = (N-1, N)$, az aktuális megoldás megengedett, *VÉGE*. Ha $x_{ij} > 1$, következzen a 2. lépés.
2. Legyen x_{ij} új értéke 1, jelző(x_{ij})=0, $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{a}_k$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} - \mathbf{a}_k \mathbf{d}_k^T$, $\mathbf{u}' = (\mathbf{C}')^{-1}\mathbf{b} \Leftarrow$ *Sherman-Morrison!*
3. $\forall i < j$ & jelző(x_{ij})=1 esetén: $x_{ij} = u'_i + u'_j$, $x_{ji} = x_{ij}$; jelző(*)=0 esetén x_{ij} és x_{ji} előzőleg rögzített „1” értéket kapott. Legyen $k := k+1$, következzen az 1. lépés.

Az algoritmus segítségével korrigált **X** mátrix

$$\mathbf{X}' = \begin{vmatrix} 0 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 0{,}998 & 0{,}972 \\ 1{,}000 & 0 & 1{,}000 & 0{,}972 & 0{,}934 & 0{,}927 & 0{,}900 \\ 1{,}000 & 1{,}000 & 0 & 0{,}776 & 0{,}738 & 0{,}730 & 0{,}704 \\ 1{,}000 & 0{,}972 & 0{,}776 & 0 & 0{,}672 & 0{,}664 & 0{,}638 \\ 1{,}000 & 0{,}934 & 0{,}738 & 0{,}672 & 0 & 0{,}626 & 0{,}600 \\ 0{,}998 & 0{,}927 & 0{,}730 & 0{,}664 & 0{,}626 & 0 & 0{,}593 \\ 0{,}972 & 0{,}900 & 0{,}704 & 0{,}638 & 0{,}600 & 0{,}593 & 0 \end{vmatrix}$$

Példa nem megengedett megoldásra (x_{ij})

$$\mathbf{X} = (x_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1{,}104 & 0{,}992 & 0{,}960 & 0{,}932 & 0{,}925 & 0{,}895 \\ 1{,}104 & 0 & 0{,}950 & 0{,}917 & 0{,}889 & 0{,}882 & 0{,}853 \\ 0{,}992 & 0{,}950 & 0 & 0{,}806 & 0{,}778 & 0{,}771 & 0{,}741 \\ 0{,}960 & 0{,}917 & 0{,}806 & 0 & 0{,}745 & 0{,}739 & 0{,}709 \\ 0{,}932 & 0{,}889 & 0{,}778 & 0{,}745 & 0 & 0{,}710 & 0{,}681 \\ 0{,}925 & 0{,}882 & 0{,}771 & 0{,}739 & 0{,}710 & 0 & 0{,}674 \\ 0{,}895 & 0{,}853 & 0{,}709 & 0{,}709 & 0{,}681 & 0{,}674 & 0 \end{vmatrix}$$

…

Az algoritmus és a megoldás tulajdonságai

1. Adott rendezés mellett egyszer vizsgál meg minden oszlopot, lefaragja az egynél nagyobb x_{ij}-ket.

2. Bizonyítani kellett a következőket:
   - a keletkező mátrixok nem szingulárisak,
   - a segédváltozók és az x_{ij} koefficiensek pozitívok,
   - a segédváltozók és az x_{ij} koefficiensek csökkenő érték szerint rendezettek