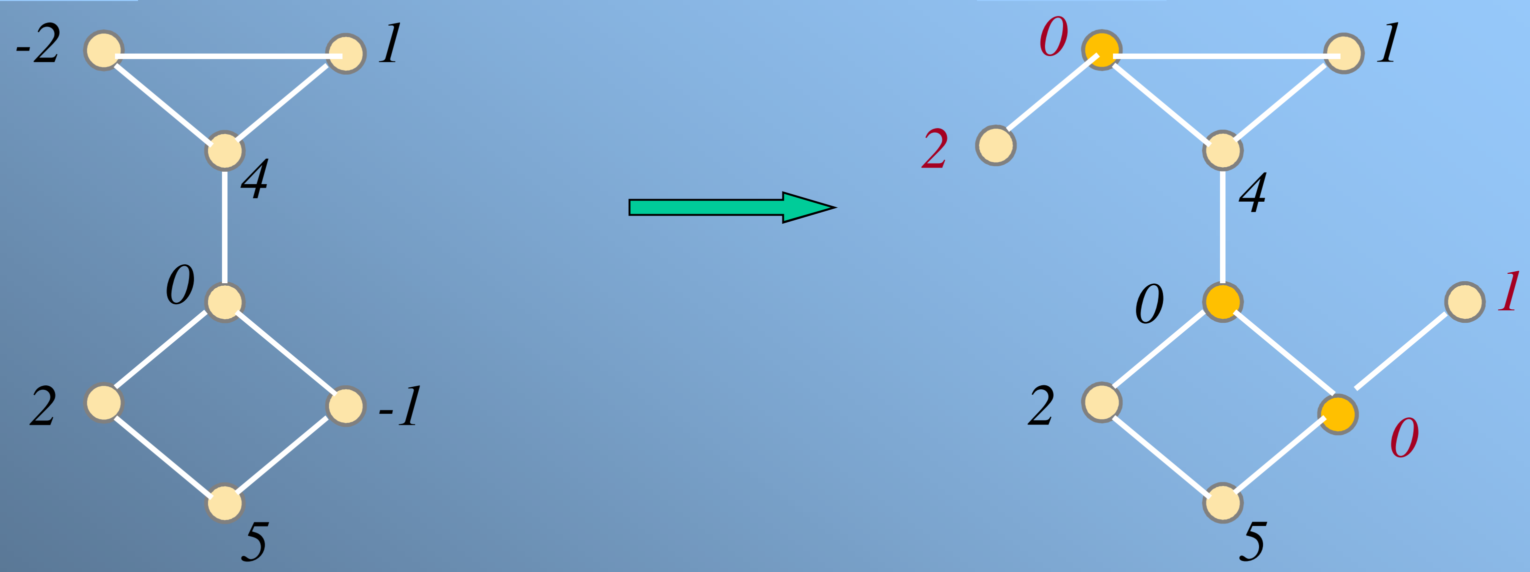
A csúcs-súlyozott inverz párosítási probléma

Krész Miklós

SZTE JGYPK

Csúcs-súlyozott párosítások

G: *G'*:



Propozíció (Spencer-Mayr, 1984) A *G* és *G'* párosításai (maximális csűcs-súlyozott párosításai) között 1-1 értelmű megfeleltetés áll fenn.

Észrevétel (Spencer-Mayr, 1984): A maximális csűcs-súlyozott párosítás (MCSP) probléma optimális megoldásai egyértelműen meghatározottak a súlyok sorrendje által.

Feltétel: Nemnegatív egész súlyok.

Az inverz párosítási probléma (IPP)

Természetes megközelítés: Adott egy M párosítás G-ben. Határozzuk meg a $V(G)$ minimális súlyozását, amely szerint M egy MCSP.

Triviális („zéró súlyoás”)

Alternatív megközelítés: Adott az összes MCSP struktúrája. Határozzuk meg a $V(G)$ egy olyan súlyozását, melyre vonatkozólag az MCSP probléma optimuma minimális lesz.

Hogy definiáljuk az „összesített MCSP struktúrát” ?

Él (csúcs) kategóriák:

- ***tiltott***: egy MCSP által sem fedett
- ***kötelező***: az összes MCSP által fedett
- ***flexibilis***: egyébként

Constraint Programming alkalmazások.

Komplexitás

Észrevétel: Ha G rendelkezik teljes párosítással, akkor az IPP optimális megoldása egy bináris súlyozás.

Tutte halmaz: A csúcsok egy X halmaza, melyre $odd\,(G \setminus X) = |X|$.

MAX-TUTTE: Adott egy teljes párosítással rendelkező gráf. Határozzuk meg egy maximális méretű Tutte halmazát.

Tétel (Bauer et al, 2007). *MAX-TUTTE* NP-teljes.

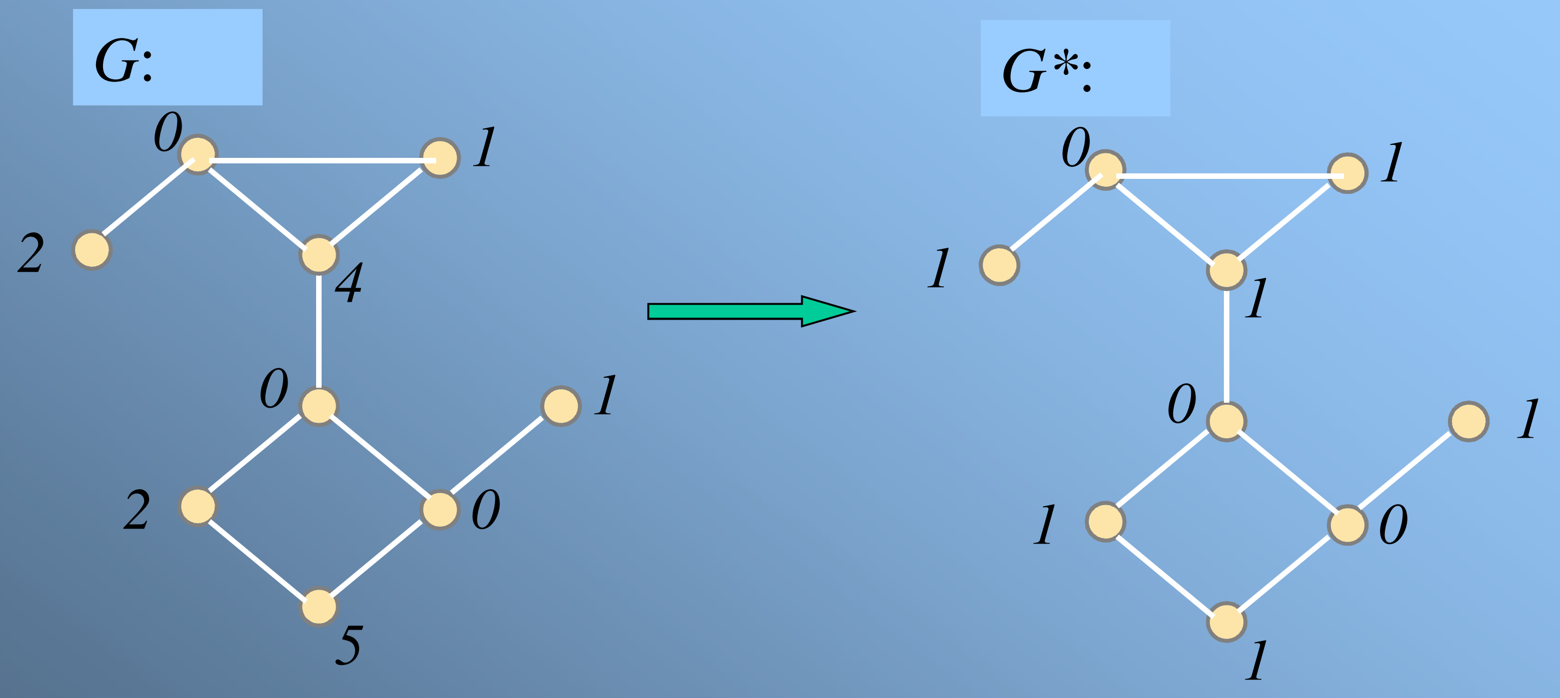
Tétel. Adott egy teljes párosítással rendelkező G gráf. A G bármely X csúcshalmaza akkor és csakis akkor egy maximális méretű Tutte halmaz, ha X az IPP egy optimális megoldásának 0-súlyú csúcsainak halmaza.

Következmény. IPP NP-teljes.

Kérdés.

- A polinomiális megoldhatóság karakterizációja?

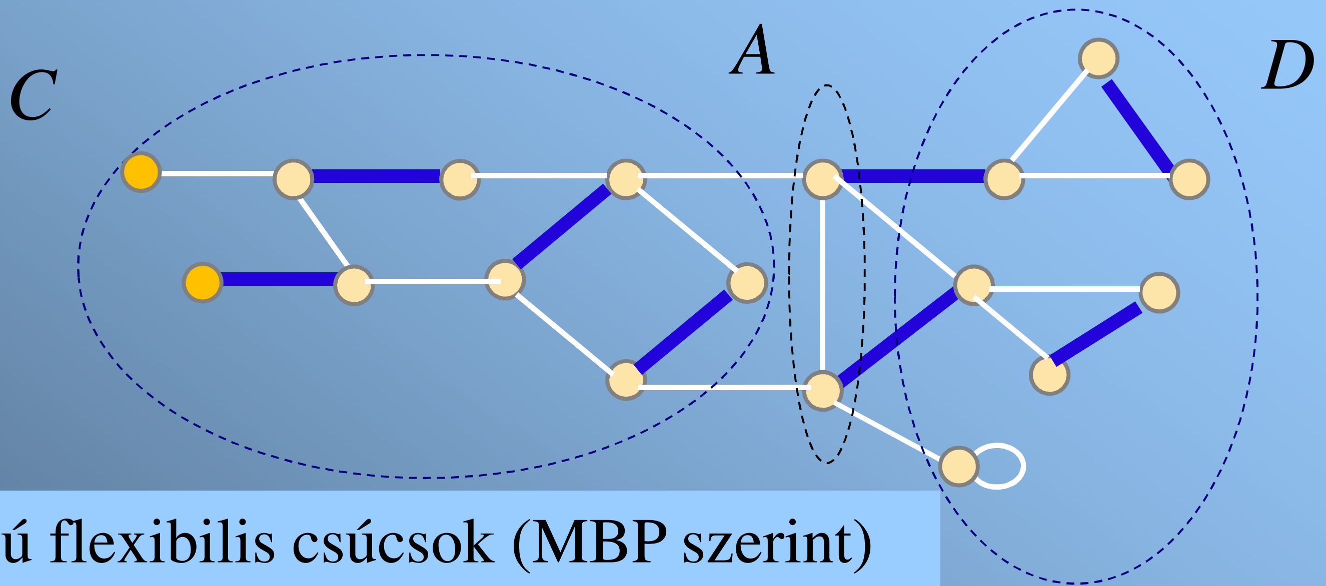
Bináris relaxáció



Propozíció Legyen M a G gráfban egy MCSP. Ekkor M a G^*-ban egy maximális bináris párosítás (MBP).

Bináris Gallai-Edmonds Dekompozíció (BGED)

Klasszikus eredmény: Gallai (1963), Edmonds (1965)



D: pozitív súlyú flexibilis csúcsok (MBP szerint)

A: a $V \setminus D$ azon csúcsai, melyek *D*-beli csúccsal szomszédosak

$C = V \setminus A \setminus D$

Faktor-kritikus gráf G': Bármely $v \in V(G')$ *esetén* $G'-v$ rendelkezik teljes párosítással

⇓

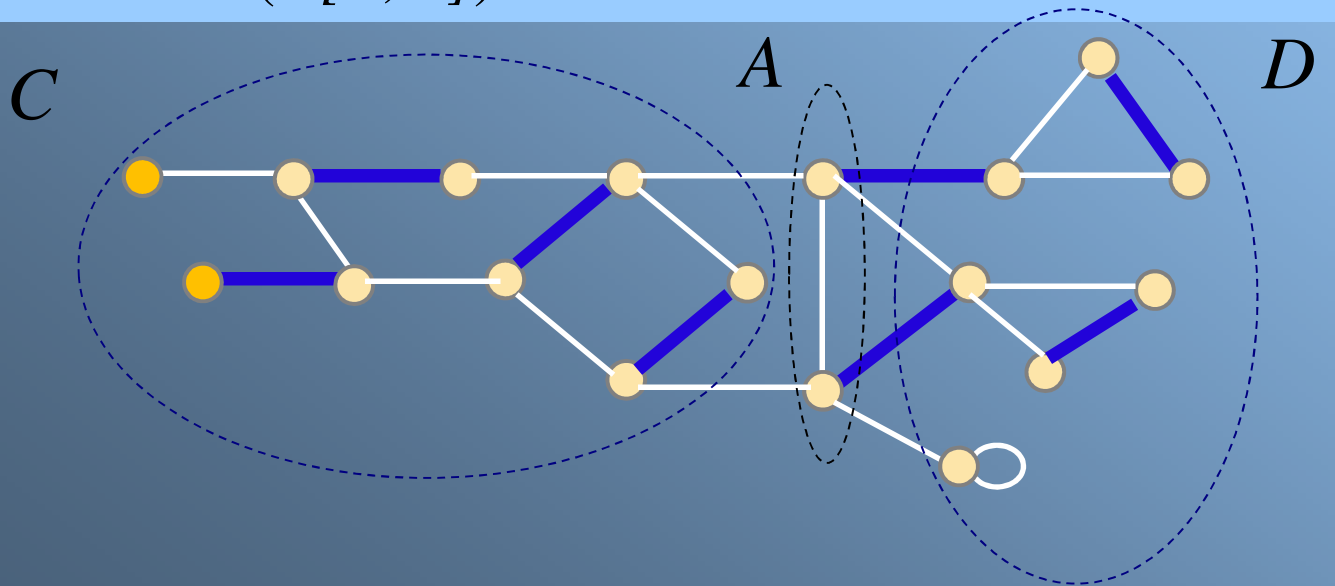
„Kvázi-teljes" párosítások (Near perfect matchings)

Binaris Gallai-Edmonds Decompozíció (folyt.)

Tétel.*(Bartha-Gombás, 1991)* A Bináris Gallai-Edmonds dekompozícióra az alábbiak érvényesek:

i) A *D* összefüggő komponensei faktor-kritikusak.

ii) Ha *M* egy MBP *G*-ben, akkor *M* egy kvázi-teljes párosítást alkot a *D* minden összefüggő komponensében, valamint egy teljes bináris párosítást (TBP) a *C*-ben és egy *A* csúcsait fedő párosítást a páros gráfban, melyet *A* csúcsai és a *D* összehúzott komponensei reprezentálnak (*G[A,D]*).



Iterált GED (IGED)

0. Let $G' = G[A,D]$ and consider a maximum vertex-weighted matching (MVWM) M' of G'. Let $i=1$.

1. Let V_i denote the vertices of D in G' covered by M' with minimum weights.
2. Let G^* be a binary weight representation of G' with vertices of 0-weights from V_i.
3. Construct the BGED of $G^*=(C^*,A^*,D^*)$.
4. Let $G_i=G[A^*,D^*]$ with the binary representation..
5. If C^* is empty, stop the procedure, otherwise let $G'=G[C^*]$ with original weights and let the new M' be the restriction of M' to $G[C^*]$. Let $i = i+1$ and continue with Step 1.

Propozíció. IGED meghatározható $O(n \cdot m)$ időben.

Él és csúcs kategorizálás IGED szerint

Theorem. *(Bartha-Krész, 2016)* The sequence of binary subgraphs $G_1, \ldots, G_k$ obtained as a result of the iterated GED is independent from the choice of the MVWM and provides a decomposition of $G[A,D]$ with the following properties.

- Edges connecting distinct subgraphs G_i and G_j by a direction from A to D determine a partial order.
- The restriction of any MVWM of G is a m.b.m. of G_i for each i.
- Any m.b.m. of G_i for each $i \leq k$ can be extended to a m.v.w.m. of G.
- Each G_i can be extended to a G_i* graph such that there exists a one-to-one correspondence between the m.b.m of G_i and the p.b.m of G_i*

Tétel. Az IGED segítségével az élek és a csúcsok kategorizálhatóak $O(n \cdot m)$ időben.

IGED és az IPP komplexitása

Tétel. Tegyük fel, hogy az IGED, valamint a csúcs és él kategóriák adottak az IPP egy optimális megoldása szerint. Ekkor IPP polinomiális időben megoldható a *G[A,D]*-re vonatkozólag. Továbbá az IPP akkor és csakis akkor oldható meg polinomiális időben, ha MAX-TUTTE a C(G)-re vonatkozólag megoldható polinomiális időben.

Tétel. Az optimális megoldásra vonatkozólag az IGED polinomiális időben megoldható, amennyiben az él és csúcs kategóriák adottak.

Következmény**.** Amennyiben a zéró súlyú csúcsok halmaza adott, IPP polinomiális időben megoldható.

Kérdések**.**

- Karekterizálás GED nélkül?
- „Szofisztikáltabb” karakterizáció?

Az IPP „magja”

Legális külső út: Egy „nem-kötelező” csúcsból induló út, amely nem tartalmaz két egymást követő tiltott élt.

Elérhető csúcs: Egy legális külső út tartalmazza.

Lemma. Bármely nem elérhető csúcs *C*-ben található. Továbbá a nem elérhető csúcsok *C*-nek egy olyan részgráfját feszítik ki, amely tartalmaz egy teljes párosítást és bármely ilyen párosítás a *C* egy teljes párosításává terjeszthető ki. („nice subgraph”)

***IPP magja*:** A nem elérhető csúcsok által feszített részgráf.

***Propozíció*.** Az IPP magja polinomiális időben meghatározható.

IPP mag és komplexitás

Tétel: *Az* IPP akkor és csakis akkor oldható meg polinomiális időben, ha MAX-TUTTE az IPP magjára vonatkozólag megoldható polinomiális időben.

Tétel (Bauer et al, 2007): MAX-TUTTE polinomiális időben megoldható a következő gráfosztályokra :

- Páros gráfok
- Hamilton gráfok
- 2-összefüggő „claw-free” gráfok
- k-reguláris , k-él összefüggő gráfok (bármely pozitív k esetén)

Következmény. IPP polinomiális időben megoldható, ha az IPP magja az alábbi gráfosztályok valamelyikébe tartozik.

- Páros gráfok
- Hamilton gráfok
- 2-összefüggő „claw-free” gráfok
- k-reguláris , k-él összefüggő gráfok (bármely pozitív k esetén)

Köszönöm a figyelmet!