A Bell-egyenlőtlenségek valószínűségi geometriájáról

Koniorczyk Mátyás

Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Kar
Matematikai és Informatikai Intézet
Alkalmazott Matematika Tanszék

Magyar Operációkutatási Konferencia, Cegléd, 2017.

Vázlat

A szituáció

- Két szereplő, Alice és Bob
- mérnek *valamit (Alice: x, Bob: y)*
- eredmény: A, B

Kérdés

Származhat-e a mérés leírása egy közös eloszlásból?

Fizika: lokális realizmus
Einstein et al. [1935]; Bell [1954]; Clauser et al. [1969]

Játékelmélet: közös prior
Harsányi [1967-68]

Válasz

Nem mindig!

Motiváció a fizikában

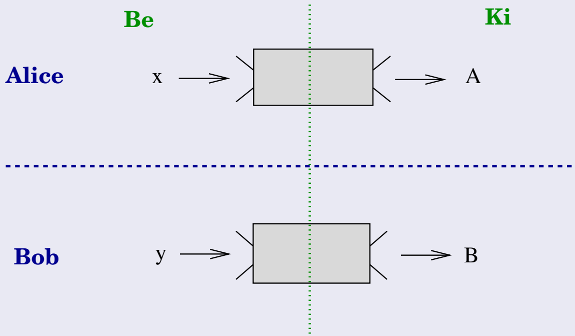
Kvantuminformáció

- összefonódás
- kvantum kriptográfia $\rightarrow$ eszközfüggetlen kriptográfia Mayers and Yao [1998]; Colbeck [2009]

Összefoglaló munka: Brunner et al. [2014]

A szituáció

Kétrészű kísérlet

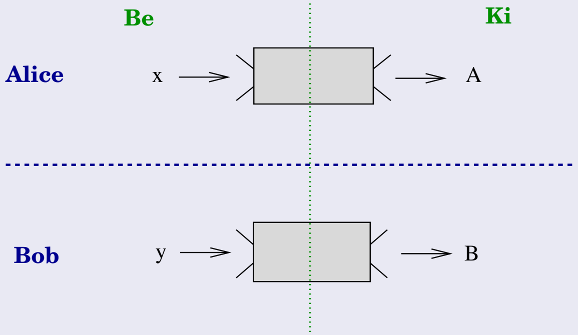


$$x = 0 \dots N_x - 1, \qquad A = 0 \dots N_A - 1$$

$$y = 0 \dots N_y - 1, \qquad B = 0 \dots N_B - 1$$

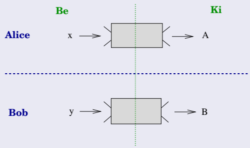
Leírás

Kétrészű kísérlet



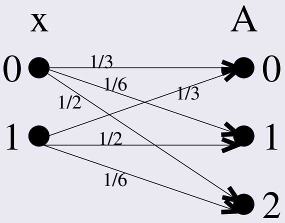
$$P(A, B|x, y)$$

Leírás



V.Ö.

Memóriamentes csatorna



Leírás

$$P(A, B|x, y) \in \mathbb{R}^{N_A N_B N_x N_y}$$

- Hiperkocka:
$$0 \leq P(A, B|x, y) \leq 1$$
- Valójában kevesebb dimenzió:
$$\sum_A P(A, B|x, y) \leq 1$$
$$\sum_B P(A, B|x, y) \leq 1$$
$$\sum_{A,B} P(A, B|x, y) = 1$$
- A dimenziócsökkentés hasznos technika, de nem izometria

Lokális politóp

Determinisztikus csatorna

- Minden bemenethez megadott kimenetet rendel
- Pl. identikus csatorna, törlő csatorna

- Minden csatorna determinisztikus csatornák konvex kombinációja
- *Lokális realizmus:*
  - A kétrészű csatorna
  - determinisztikus részcsatornák direkt szorzatának
  - konvex kombinációja
- $N_A N_x N_B N_y$ darab vektor $\rightarrow$ nem egyértelmű

Lokális politóp, no-signaling politóp

no signaling

$$P(A|X,Y) = P(A|X)$$

$$P(B|X,Y) = P(B|Y)$$

vagyis

$$\forall A, X \forall Y_1, Y_2 \sum_B P(A,B|X,Y_1) = \sum_B P(A,B|X,Y_2)$$

$$\forall B, Y \forall X_1, X_2 \sum_A P(A,B|X_1,Y) = \sum_A P(A,B|X_2,Y)$$

- No-signaling politóp: a korábban említett feltételek + no signaling $\rightarrow$ *külső reprezentáció*
- Lokális politóp: szorzat det. csatornák konvex kombinációja $\rightarrow$ *belső reprezentáció*

A Bell-egyenlőtlenségek

A Bell-egyenlőtlenségek a lokális politóp extra lapjai (a no-signaling politóphoz képest).

LP

Keresésük nagy skálájú optimalizálási problémákhoz vezet.
Gondzio et al. [2014]

Detection loophole

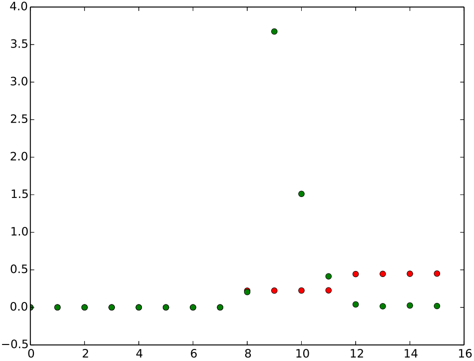
A detektor tökéletlenség hatására kontrakció: a kvantumos halmaz „belebújik” a lokális politópba.
Wilms et al. [2008]

Főkomponens analízis

Milyen is a lokális politóp?

- Helyezzünk random pontokat a politópba!
- (Probléma: ehhez valójában külső reprezentáció kéne, kétféleképp végeztük el, ugyanazt adta...)
- Tekintsünk minden koordinátát val. változónak.
- Számoljunk kovariancia mátrixot
- Nézzük meg a spektrumát!

Főkomponens analízis, CHSH



- Piros: spektrum
- Zöld: Bell-CHSH egyenlőtlenség

Főkomponens analízis általában

Mindig kis számú degenerált altér

2222	8	4	4		
2223	13	6	3	2	
2224	18	8	4	2	
2232	13	6	3	2	
2233	21	9	6		
2234	29	12	4	3	

...

4432	27	54	9	6	
4433	45	81	18		
4434	63	108	12	9	
4442	38	72	11	1	6
4443	63	108	12	9	
4444	88	144	24		

Ellipszoidok

$\{x | ||A\mathbf{x} + \mathbf{d}||_2 \leq 1\}$ vagy $\{B\mathbf{x} + \mathbf{c} | ||x||_2 \leq 1\}$

- Köré írt ellipszoid: belső reprezentáció, csúcsok: $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m$

$$\min_{A,\mathbf{d}} -\log\det A$$

$$\text{f.h. } ||A\mathbf{x}_i + \mathbf{d}||_2 \leq 1$$

$$A \geq 0$$

- Beírt ellipszoid, külső reprezentáció: $\mathbf{h}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$

$$\max_{B,\mathbf{d}} \log\det B$$

$$\text{f.h. } ||B\mathbf{h}_i||_2 + \mathbf{h}_i^T \mathbf{c} \leq b_i$$

$$B \geq 0$$

Ellipszoidok, CHSH

- Lokális politóp: 16 csúcs, 24 lap
- NS politóp: 24 csúcs, 16 lap
- A beírt és köré írt ellipszoidjaik megegyeznek, gömbök
- A lokális politóp lapjai közül 16 az NS-nek is lapja
- A maradék 8 adja a Bell-egyenlőtlenségeket
- 4 pár, a pár elemei tükörképek az origóra
- A 4 pár független egyenlőtlenség normálvektora ortogonális

Magasabb dimenziós esetek

- Az altér szerkezet magasabb dimenzióban is megjelenik
- Nem minden Bell-egyenlőtlenség szimmetrikus rá
- Pl. 3 be, 3 ki:
  - Lokális: 64 csúcs, 684 lap
  - NS: 1408 csúcs, 36 lap
  - 684-36 = 648 Bell-egyenlőtlenség
  - Csak 72 szimmetrikus
- Összefüggés a szimmetriákkal: Werner and Wolf [2001]

A kvantumos halmaz

$$P(A,B|x,y) = \langle\Psi|\,\hat{E}_{A,x}\hat{E}_{B,y}\,|\Psi\rangle\,,$$

$$(\forall x)\,(\forall A)\,(\forall A')\;\hat{E}_{A,x}\hat{E}_{A',x} = \delta_{A,A'}\hat{E}_{A,x} \quad , \quad (\forall x)\sum_A \hat{E}_{A,x} = \hat{1},$$

$$(\forall y)\,(\forall B)\,(\forall B')\;\hat{E}_{B,y}\hat{E}_{B',y} = \delta_{B,B'}\hat{E}_{B,y} \quad , \quad (\forall y)\sum_B \hat{E}_{B,y} = \hat{1}.$$

$$(\forall x)\,(\forall A)\,(\forall y)\,(\forall B)\,[\hat{E}_{A,x},\hat{E}_{B,y}] = 0.$$

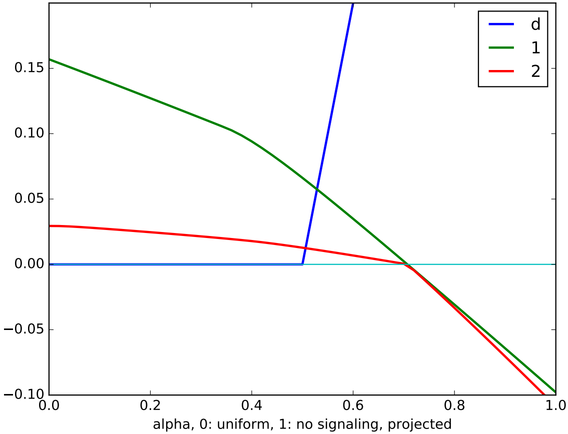
A kvantumos halmaz

- Konvex
- Szemidefinit programok végtelen hierarchiája határozza meg. Navascués et al. [2007]; Navascués et al. [2008].
- Ha valamelyik program optimuma negatív, akkor nem kvantum.

A határai különösen érdekesek.

Jelentős eredmény: Pál and Vértesi [2009]

2-2


d
1
2
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
alpha, 0: uniform, 1: no signaling, projected

Kérdések

- Tudunk-e mondani még valamit a lapok szerkezetéről?
  Bárány and Pór. [2000]
- Milyen alakú, milyen szerkezetű a kvantumos halmaz?
- Több résztvevő esetén mit mondhatunk?
- Hasonló probléma: időbeliség hasonló kezelése:
  más jellegű politópok
  Clemente and Kofler [2016]

Köszönetnyilvánítás:

- Magyar Gazdaságmodellezési Társaság: a részvétel támogatásáért
- Kollégák: Alexander Sauer, Balló Gábor, Bodor András, Frigyik András, Gernot Alber, Pintér Miklós, Szabó Sándor

Hivatkozások I

I. Bárány and A. Pór. 0-1 polytopes with many facets. http://www.renyi.hu/~barany/, 2000. Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences.

J. S. Bell. On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics*, page 194, 1964 1954.

Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86:419–478, Apr 2014. doi: 10.1103/RevModPhys.86.419. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.419.

Hivatkozások II

John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969. doi: 10.1103/PhysRevLett.23.880. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880.

Lucas Clemente and Johannes Kofler. No fine theorem for macrorealism: Limitations of the leggett-garg inequality. *Phys. Rev. Lett.*, 116:150401, Apr 2016. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.150401. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.150401.

Roger Colbeck. Quantum and relativistic protocols for secure multi-party computation, 2009.

Hivatkozások III

A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935. doi: 10.1103/PhysRev.47.777. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777`.

Jacek Gondzio, Jacek A. Gruca, J.A. Julian Hall, Wiesław Laskowski, and Marek Żukowski. Solving large-scale optimization problems related to bell's theorem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 263:392 – 404, 2014. ISSN 0377-0427. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.12.003. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042713006730`.

Harsányi. Games with incomplete information played by bayesian players part i., ii., iii. *Management Science*, 14:159–182, 320–334, 486–502, 1967-68.

Hivatkozások IV

Dominic Mayers and Andrew Yao. Quantum cryptography with imperfect apparatus, 1998.

Miguel Navascués, Stefano Pironio, and Antonio Acín. Bounding the set of quantum correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 98:010401, Jan 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.98.010401. URL `http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.010401`.

Miguel Navascués, Stefano Pironio, and Antonio Acín. A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations. *New Journal of Physics*, 10(7): 073013, 2008. URL `http://stacks.iop.org/1367-2630/10/i=7/a=073013`.

Károly F. Pál and Tamás Vértesi. Quantum bounds on bell inequalities. *Phys. Rev. A*, 79:022120, Feb 2009. doi: 10.1103/PhysRevA.79.022120. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.022120`.

Hivatkozások V

R. F. Werner and M. M. Wolf. All-multipartite Bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site. *Phys. Rev. A*, 64:032112, Aug 2001. doi: 10.1103/PhysRevA.64.032112. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.032112.

J. Wilms, Y. Disser, G. Alber, and I. C. Percival. Local realism, detection efficiencies, and probability polytopes. *Phys. Rev. A*, 78:032116, Sep 2008. doi: 10.1103/PhysRevA.78.032116. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.032116.