Népszerű és erősen népszerű párosítások

Király Tamás, Mészáros-Karkus Zsuzsa

ELTE TTK Operációkutatási Tanszék, Budapest

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia

EGRES

Tartalom

EGRES

Tartalom

EGRES

Preferencia-rendszer

$G = (V, E)$ irányítatlan (multi)gráf

$\delta_G(v)$ v-re illeszkedő élek halmaza

$\prec_v$ részbenrendezés $\delta_G(v)$-n

A részbenrendezésekbe utolsónak berakjuk az üreshalmazt:

$$e \succ_v \emptyset \quad \text{minden } e \in \delta_G(v)\text{-re}$$

Preferencia-rendszer

$G = (V, E)$ irányítatlan (multi)gráf

$\delta_G(v)$ v-re illeszkedő élek halmaza

$\prec_v$ részbenrendezés $\delta_G(v)$-n

A részbenrendezésekbe utolsónak berakjuk az üreshalmazt:

$$e \succ_v \emptyset \quad \text{minden } e \in \delta_G(v)\text{-re}$$

Definíció

A v csúcs az $e \in \delta_G(v)$ élt jobban szereti $f \in \delta_G(v)$-nél, ha $e \succ_v f$

A v csúcs az M párosítást jobban szereti M'-nél, ha $M \cap \delta_G(v) \succ_v M' \cap \delta_G(v)$

EGRES

Legyen M és M' párosítás G-ben.

$$\mathrm{vote}_v(M, M') = \begin{cases} 1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \succ_v M' \cap \delta_G(v), \\ -1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \prec_v M' \cap \delta_G(v), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mathrm{vote}(M, M') = \sum_{v \in V} \mathrm{vote}_v(M, M').$$

Legyen M és M' párosítás G-ben.

$$\mathrm{vote}_v(M, M') = \begin{cases} 1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \succ_v M' \cap \delta_G(v), \\ -1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \prec_v M' \cap \delta_G(v), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mathrm{vote}(M, M') = \sum_{v \in V} \mathrm{vote}_v(M, M').$$

Definíció

Az M párosítás népszerűbb mint M' ha $\mathrm{vote}(M, M') > 0$.

EGRES

Legyen M és M' párosítás G-ben.

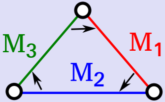
$$\mathrm{vote}_v(M, M') = \begin{cases} 1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \succ_v M' \cap \delta_G(v), \\ -1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \prec_v M' \cap \delta_G(v), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mathrm{vote}(M, M') = \sum_{v \in V} \mathrm{vote}_v(M, M').$$

Definíció

Az M párosítás népszerűbb mint M' ha $\mathrm{vote}(M, M') > 0$.

Megjegyzés



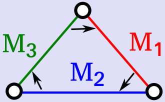
Ez nem tranzitív reláció a párosításokon!
$\mathrm{vote}(M_2, M_1) = \mathrm{vote}(M_3, M_2) = \mathrm{vote}(M_1, M_3) = 1$

Népszerűség

Definíció

Az M párosítás népszerű, ha nincs nála népszerűbb párosítás.

Megjegyzés



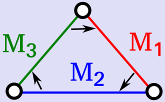
Nem minden preferencia-rendszerben van népszerű párosítás.

Népszerűség

Definíció

Az M párosítás népszerű, ha nincs nála népszerűbb párosítás.

Megjegyzés



Nem minden preferencia-rendszerben van népszerű párosítás.

Kérdések

- Eldönthető-e, hogy egy adott párosítás népszerű-e?
- Tudunk-e népszerű párosítást keresni?
- Tudunk-e maximális méretű népszerű párosítást keresni?

A népszerűség eldöntése

Tétel (Biró, Irving, Manlove, 2010)

Polinom időben eldönthető, hogy egy M párosítás népszerű-e.

A népszerűség eldöntése

Tétel (Biró, Irving, Manlove, 2010)

Polinom időben eldönthető, hogy egy M párosítás népszerű-e.

Definiáljunk élköltségeket $E \setminus M$-en:

$$c_{uv} = \text{vote}_u(e, M) + \text{vote}_v(e, M).$$

- M pontosan akkor népszerű, ha minden alternáló kör vagy út* nem-pozitív költségű
- Ez polinom időben eldönthető párosítás-algoritmussal

* az út költsége módosítandó ha az utolsó éle M-beli

EGRES

A népszerűség eldöntése

Tétel (Biró, Irving, Manlove, 2010)

Polinom időben eldönthető, hogy egy M párosítás népszerű-e.

Definiáljunk élköltségeket $E \setminus M$-en:

$$c_{uv} = \text{vote}_u(e, M) + \text{vote}_v(e, M).$$

- M pontosan akkor népszerű, ha minden alternáló kör vagy út* nem-pozitív költségű
- Ez polinom időben eldönthető párosítás-algoritmussal

* az út költsége módosítandó ha az utolsó éle M-beli

Következmény

A népszerű párosítás probléma NP-beli.

Tartalom

Döntetlen-mentes preferencia-rendszer

Tegyük fel, hogy $\prec_v$ teljes rendezés $\forall v \in V$.

Tétel (Gärdenfors, 1975)

Minden stabil párosítás népszerű. Speciálisan minden páros döntetlen-mentes preferencia-rendszerben van népszerű párosítás.

Döntetlen-mentes preferencia-rendszer

Tegyük fel, hogy $\prec_v$ teljes rendezés $\forall v \in V$.

Tétel (Gärdenfors, 1975)

Minden stabil párosítás népszerű. Speciálisan minden páros döntetlen-mentes preferencia-rendszerben van népszerű párosítás.

Tétel (Huang, Kavitha, 2011)

Páros gráfban tudunk maximális méretű népszerű párosítást keresni:

- *minden élt megduplázunk, a nők az új élt preferálják, a férfiak a régit,*
- *ebben a preferencia-rendszerben keresünk stabil párosítást.*

Döntetlen-mentes preferencia-rendszer

Tegyük fel, hogy $\prec_v$ teljes rendezés $\forall v \in V$.

Tétel (Gärdenfors, 1975)

Minden stabil párosítás népszerű. Speciálisan minden páros döntetlen-mentes preferencia-rendszerben van népszerű párosítás.

Tétel (Huang, Kavitha, 2011)

Páros gráfban tudunk maximális méretű népszerű párosítást keresni:

- *minden élt megduplázunk, a nők az új élt preferálják, a férfiak a régit,*
- *ebben a preferencia-rendszerben keresünk stabil párosítást.*

Nyitott kérdés

El tudjuk-e dönteni polinom időben, hogy van-e népszerű párosítás egy nem-páros döntetlen-mentes preferencia-rendszerben?

Páros, döntetlenes preferencia-rendszerek

Nem mindig létezik népszerű párosítás.

Definíció

A v csúcs indifferens ha $\delta_G(v)$ minden élét egyformán szereti.
A v csúcs szigorú preferenciájú ha $\prec_v$ teljes rendezés $\delta_G(v)$-n.

Páros, döntetlenes preferencia-rendszerek

Nem mindig létezik népszerű párosítás.

Definíció

A v csúcs indifferens ha $\delta_G(v)$ minden élét egyformán szereti.
A v csúcs szigorú preferenciájú ha $\prec_v$ teljes rendezés $\delta_G(v)$-n.

Tétel (Cseh, Huang, Kavitha, 2016)

- *Egyik oldal szigorú prefenreciájú, másik oldal indifferens: P-beli*
- *Egyik oldal szigorú prefenreciájú, másik oldalon mindkét típus: NP-teljes*

EGRES

Páros, döntetlenes preferencia-rendszerek

Nem mindig létezik népszerű párosítás.

Definíció

A v csúcs indifferens ha $\delta_G(v)$ minden élét egyformán szereti.
A v csúcs szigorú preferenciájú ha $\prec_v$ teljes rendezés $\delta_G(v)$-n.

Tétel (Cseh, Huang, Kavitha, 2016)

- *Egyik oldal szigorú prefenreciájú, másik oldal indifferens: P-beli*
- *Egyik oldal szigorú prefenreciájú, másik oldalon mindkét típus: NP-teljes*

[Mészáros-Karkus Zs., KT]: az erősen népszerű párosítás probléma az utóbbi esetben is P-beli.

Tartalom

Definíció

$$\text{vote}_v(M, M') = \begin{cases} 1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \succ_v M' \cap \delta_G(v), \\ -1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \prec_v M' \cap \delta_G(v), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\text{vote}(M, M') = \sum_{v \in V} \text{vote}_v(M, M').$$

Definíció

Egy M párosítás erősen népszerű, ha $\text{vote}(M, M') > 0$ minden $M' \neq M$ párosításra.

Definíció

$$\mathrm{vote}_v(M, M') = \begin{cases} 1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \succ_v M' \cap \delta_G(v), \\ -1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \prec_v M' \cap \delta_G(v), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mathrm{vote}(M, M') = \sum_{v \in V} \mathrm{vote}_v(M, M').$$

Definíció

Egy M párosítás erősen népszerű, ha $\mathrm{vote}(M, M') > 0$ minden $M' \neq M$ párosításra.

- Erősen népszerű párosításból legfeljebb 1 lehet

Definíció

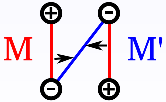
$$\text{vote}_v(M, M') = \begin{cases} 1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \succ_v M' \cap \delta_G(v), \\ -1 & \text{ha } M \cap \delta_G(v) \prec_v M' \cap \delta_G(v), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\text{vote}(M, M') = \sum_{v \in V} \text{vote}_v(M, M').$$

Definíció

Egy M párosítás erősen népszerű, ha $\text{vote}(M, M') > 0$ minden $M' \neq M$ párosításra.

- Erősen népszerű párosításból legfeljebb 1 lehet
- Minden erősen népszerű párosítás stabil



EGRES

Az erős népszerűség eldöntése

Tétel (Biró, Irving, Manlove, 2010)

Polinom időben eldönthető, hogy egy adott M párosítás erősen népszerű-e.

Az erős népszerűség eldöntése

Tétel (Biró, Irving, Manlove, 2010)

Polinom időben eldönthető, hogy egy adott M párosítás erősen népszerű-e.

Az UP (Unambiguous NP) bonyolultsági osztály

- Valiant vezette be
- NP eldöntési problémák, ahol legfeljebb 1 elfogadó számítás van
- Példák: faktorizálás, paritási játékok ($\mathrm{UP} \cap \mathrm{coUP}$)

EGRES

Az erős népszerűség eldöntése

Tétel (Biró, Irving, Manlove, 2010)

Polinom időben eldönthető, hogy egy adott M párosítás erősen népszerű-e.

Az UP (Unambiguous NP) bonyolultsági osztály

- Valiant vezette be
- NP eldöntési problémák, ahol legfeljebb 1 elfogadó számítás van
- Példák: faktorizálás, paritási játékok ($\mathrm{UP} \cap \mathrm{coUP}$)

Következmény

Az erősen népszerű párosítás probléma UP-beli.

EGRES

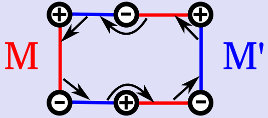
Tartalom

Döntetlen-mentes preferencia-rendszer

Tegyük fel hogy $\prec_v$ teljes rendezés $\forall v \in V$.

Megfigyelés

Ha van erősen népszerű párosítás, akkor az egyedüli stabil párosítás.

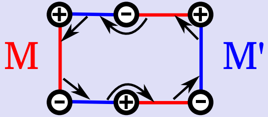


Döntetlen-mentes preferencia-rendszer

Tegyük fel hogy $\prec_v$ teljes rendezés $\forall v \in V$.

Megfigyelés

Ha van erősen népszerű párosítás, akkor az egyedüli stabil párosítás.



Algoritmus

- Eldöntjük hogy van-e stabil párosítás.
  Ha nincs: nincs erősen népszerű párosítás.
- Keresünk egy M stabil párosítást; ellenőrizzük hogy erősen népszerű-e.
  Ha nem: nincs erősen népszerű párosítás.

Páros preferencia-rendszer döntetlenekkel

Emlékeztető: a népszerű párosítás probléma NP-teljes ha

- Egyik oldal szigorú preferenciájú,
- másik oldalon mindenki indifferens vagy szigorú preferenciájú.

Tétel (Mészáros-Karkus Zs., KT, 2016)

Az erősen népszerű párosítás probléma ebben az esetben is P-beli.

Páros preferencia-rendszer döntetlenekkel

Emlékeztető: a népszerű párosítás probléma NP-teljes ha

- Egyik oldal szigorú preferenciájú,
- másik oldalon mindenki indifferens vagy szigorú preferenciájú.

Tétel (Mészáros-Karkus Zs., KT, 2016)

Az erősen népszerű párosítás probléma ebben az esetben is P-beli.

Valójában egy gyengébb feltétel is elég:

- Egyik oldal szigorú preferenciájú,
- a másik oldalon csak a preferencia-listák végén lehet döntetlen.

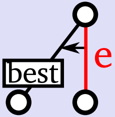
EGRES

Törölhető és rögzíthető élek

Definíció

Egy él törölhető, ha nem szerepelhet erősen népszerű párosításban.

Példa:

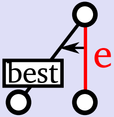


Törölhető és rögzíthető élek

Definíció

Egy él törölhető, ha nem szerepelhet erősen népszerű párosításban.

Példa:



Definíció

Egy él rögzíthető, ha bármely erősen népszerű párosításban szerepel.

Példa:

EGRES

Élek törlése és rögzítése

Az algoritmus egymás után talál törölhető és rögzíthető éleket (különféle kritériumok alapján)

- A törölhető éleket töröljük
- A rögzíthető éleket a végpontjaikkal együtt töröljük.
  Rögzített élek halmaza: F

EGRES

Élek törlése és rögzítése

Az algoritmus egymás után talál törölhető és rögzíthető éleket (különféle kritériumok alapján)

- A törölhető éleket töröljük
- A rögzíthető éleket a végpontjaikkal együtt töröljük.
  Rögzített élek halmaza: F

Megfigyelés

Ha a kapott gráfban nincs erősen népszerű párosítás, akkor az eredetiben sincs.

Élek törlése és rögzítése

Az algoritmus egymás után talál törölhető és rögzíthető éleket (különféle kritériumok alapján)

- A törölhető éleket töröljük
- A rögzíthető éleket a végpontjaikkal együtt töröljük.
  Rögzített élek halmaza: F

Megfigyelés

Ha a kapott gráfban nincs erősen népszerű párosítás, akkor az eredetiben sincs.

Megfigyelés

Ha a kapott gráfban M erősen népszerű párosítás, akkor $M + F$ az egyetlen lehetséges jelölt erősen népszerű párosításra az eredeti gráfban.

EGRES

Élek törlése és rögzítése

Az algoritmus egymás után talál törölhető és rögzíthető éleket (különféle kritériumok alapján)

- A törölhető éleket töröljük
- A rögzíthető éleket a végpontjaikkal együtt töröljük.
  Rögzített élek halmaza: F

Megfigyelés

Ha a kapott gráfban nincs erősen népszerű párosítás, akkor az eredetiben sincs.

Megfigyelés

Ha a kapott gráfban M erősen népszerű párosítás, akkor $M + F$ az egyetlen lehetséges jelölt erősen népszerű párosításra az eredeti gráfban.

Polinom időben ellenőrizhetjük, hogy $M + F$ erősen népszerű-e.
Ha nem, akkor nincs erősen népszerű párosítás.

EGRES

Nyitott kérdések

Erősen népszerű párosítás problémák

- Bonyolultság, ha mindkét oldalon lehetnek indifferens csúcsok
- Bonyolultság, ha a gráf nem páros

Nyitott kérdések

Erősen népszerű párosítás problémák

- Bonyolultság, ha mindkét oldalon lehetnek indifferens csúcsok
- Bonyolultság, ha a gráf nem páros

Népszerű párosítás problémák

- Létezés, ha a gráf nem páros (döntetlen-mentes esetben is)
- Maximális súlyú népszerű párosítás páros gráfban

EGRES

Nyitott kérdések

Erősen népszerű párosítás problémák

- Bonyolultság, ha mindkét oldalon lehetnek indifferens csúcsok
- Bonyolultság, ha a gráf nem páros

Népszerű párosítás problémák

- Létezés, ha a gráf nem páros (döntetlen-mentes esetben is)
- Maximális súlyú népszerű párosítás páros gráfban

Köszönöm a figyelmet!