

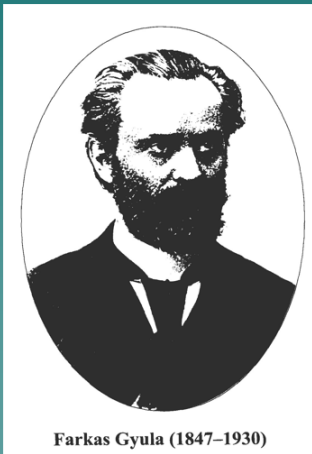
A Farkas lemmától az EP-tételekig

Illés Tibor

*Differenciálegyenletek Tanszék
BME, Budapest*

*XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia
Cegléd, 2017. június 15.*

Farkas Gyula életrajza



- ◆ 1847. március 28., Sárosd
- ◆ Győri Bencés Gimnázium, 1866
- ◆ 1866-1870 Pázmány Péter Tudományegyetem, Budapest (Jogi Kar, később Bölcsész Kar: *természettan-vegytan*)
- ◆ Székesfehérvári Reáltanoda tanára 1870-1874
- ◆ Házitanító (*gróf Batthyány Geiza gyerekei*), 1874-1880
- ◆ 1881-ben doktorált **matematikából** (PPT)
- ◆ 1881-1887 egyetemi magántanár (PPT)
- ◆ 1888-1915 egyetemi tanár, Kolozsvár (hétszer dékán, 1907-1908 rektor) [Kolozsvárra hívja: Schlésinger Lajost, *Fejér Lipót*ot, *Riesz Frigyes*t és *Haar Alfréd*ot is.]
- ◆ **1892 Galilei ünnepség, Padua (diszdoktor)**
- ◆ 1898 MTA levelező tag, 1914 MTA rendes tag
- ◆ 1915-ben szembaja miatt nyugalomba vonul és Budapestre költözik
- ◆ 1930. december 26-án hunyt el Budapesten

Szimplex algoritmus ... 70 éve publikálták



George B. Dantzig
(1914 – 2005)



Prékopa András
(1929 – 2016)



Richard W. Cottle
(1934 –)



- **Lineáris egyenlőtlenségrendszerek**
 - Farkas-lemma
 - Megoldási módszerek: criss-cross algoritmus (CCA), ...
 - Farkas-, Minkowski-, és Weyl-tétele
- **Lineáris komplementaritási feladatok (LCP) és a CCA variánsai**
 - Mátrixosztályok
 - Alternatíva tételek (Ville, 1938; Fukuda és Terlaky, 1992)
 - Primál- és duál LCP
 - Fukuda és Terlaky (1992) LCP alternatíva tétel
 - CCA variánsai elégséges LCP-re és általánosításai
 - Cameron és Edmonds (1990) általános EP-tétele
 - Fukuda, Namiki és Tamura LCP EP-tétele (1998)
- **LCP és a belsőpontos algoritmusok (BPA)**
 - Elégséges LCP centrális útja és a BPA-k alapjai
 - BPA elégséges és általános LCP-re
 - Illés, Nagy M. és Terlaky LCP EP-tételei (2009, 2010)

Farkas lemma ... ahogyan mi ismerjük

Lemma

Farkas lemma. Az alábbi két lineáris egyenlőtlenségrendszer közül pontosan az egyik oldható meg:

$$\left. \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (\mathcal{R}_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y}^T A \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{b} = 1 \end{array} \right\} (\mathcal{R}_2)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor. Az ismeretlenek n illetve m elemű vektorai az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$.

Farkas lemma ... ahogyan Farkas megfogalmazta 1894-ben

Lemma

Farkas lemma, 1894.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $c \in \mathbb{R}^n$.

Az $Ax \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) lineáris egyenlőtlenségrendszernek, a

$$c^T x \geq 0$$

lineáris egyenlőtlenség a következménye, akkor és csak akkor, ha $\exists y \in \mathbb{R}_{\oplus}^m$:

$$c = \sum_{i=1}^m y_i a^{(i)},$$

és az $a^{(i)}$ vektor az A mátrixnak az i . sorvektor.

Farkas Gy., *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 12:457–472, 1894.

I. Algebrai előzmény.

1. *Definíció.* Egyszerűsödnek képzeteink, ha minden adott egyenlőtlenséget ≥ 0 -ra, vagy mind < 0 -ra jegyezzük. Kövessük az előbbi módot. Az ismeretleneket $u, v, \dots$ -vel jelölve, legyenek az adott egyenlőtlenségek

$$\left. \begin{aligned} A_1 u + B_1 v + \dots &\geq 0, \\ A_2 u + B_2 v + \dots &\geq 0, \\ \text{stb.} \end{aligned} \right\} \quad 4)$$

Közös megoldásaikat rendszerük megoldásainak nevezzük.

Ha még egy egyenlőtlenséget csatolunk 4)-hez u. m.

$$A_0 u + B_0 v + \dots \geq 0, \quad 5)$$

akkor a 4) megoldásainak rendszere nyilvánképen vagy változatlan marad, vagy megszűnik, a szerint, a mint a 4)-nek minden megoldása 5)-nek is megoldása, vagy nem. Ennek megfelelően azt mondjuk az 5)-ről, hogy nem új, vagy azt, hogy új a 4)-re nézve. Egy közös megoldás mindenestre van, t. i. $u=0, v=0, \dots$

Ha minden 4)-beli egyenlőtlenség új a többinek rendszerére nézve, akkor a 4)-et törzsrendszernek nevezzük.

3. Szembe szökő, hogy ha egy egyenlőtlenség 5) baloldala mások 4) baloldalainak lineáris függvényeként pozitív multiplikátorokkal kifejezhető, akkor nem új emezeknek a rendszerére nézve. Állítom, hogy fordítva: ha valamely egyenlőtlenség 5) mások 4) rendszerére nézve nem új, akkor mindig kifejezhető ezek pozitív sokszorosainak összegével. Ez az állítás már éppenséggel nem evidens és bebizonyítása már részletes következtetés kerestülvitelét követeli.

Lemma (Farkas lemma, 1894.)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Tekintsük az alábbi lineáris egyenlőtlenségeket

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq 0. \quad (2)$$

A (2) egyenlőtlenség akkor és csakis akkor következménye az (1) egyenlőtlenségeknek, ha $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\oplus}^m$ úgy, hogy

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}^{(i)}, \quad \text{teljesül.}$$

Lemma (Farkas lemma, 1894. [Ekvivalens alak.])

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Az alábbi két lineáris egyenlőtlenségrendszer közül pontosan az egyik oldható meg:

$$\left. \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 1 \end{array} \right\} (\mathcal{R}'_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A^T \mathbf{y} = \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (\mathcal{R}'_2)$$

Lineáris egyenlőtlenség rendszerek vizsgálata

Lemma (Farkas-Minty típusú előjeles lemma.)

Legyenek adottak az $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok és a hozzájuk tartozó $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{I} = \{\hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{m}\}$ indexek. Az alábbi két (bázis) tábla közül pontosan az egyik állhat elő:

	$\bar{\mathcal{J}}'_B$	b	$\bar{\mathcal{I}}'_B$		$\bar{\mathcal{J}}''_B$	$\bar{\mathcal{I}}''_B$
$\mathcal{J}'_B$		$\oplus$ $\vdots$		$\mathcal{J}''_B$		
		$\oplus$		b	$\ominus \dots \ominus$	
$\mathcal{I}'_B$	0	$\vdots$ 0		$\mathcal{I}''_B$	0	

Klaszky E. és Terlaky T., A pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének a bizonyításában. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 14:425–448, 1989. $\rightsquigarrow$ *irányított matroidok*

Farkas-Minty típusú előjeles lemma bizonyítása

	$\tilde{\mathcal{J}}_B$	b	$\tilde{\mathcal{I}}_B$
$\mathcal{J}_B$		$\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}$	
$\mathcal{I}_B$	0	$\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$	

Criss-cross algoritmus (CCA)

Ha a $\mathbf{b}$ oszlopában a $\mathcal{J}_B$ indexekhez tartozó együtthatók között **csupa nemnegatív** szám van akkor az első esetet kaptuk. Különben valamely $t_{rb} < 0$, $r \in \mathcal{J}_B$ elemen pivotálhatunk és a $\mathbf{b}$ vektor ekkor bekerül a bázisba, és az $\mathbf{a}_r$ vektor távozik.

Ha a $\mathbf{b}$ a bázisban van és a sorában a $\tilde{\mathcal{J}}_B$ oszlopaiban **csupa nempozitív** együttható található akkor a második esetet kaptuk. Különben valamely $t_{bs} > 0$, $s \in \tilde{\mathcal{J}}_B$ elemen pivotálhatunk és a $\mathbf{b}$ vektor ekkor távozik a bázisból, és az $\mathbf{a}_s$ vektor.

Farkas lemma - konstruktív bizonyítás

Lemma (Farkas lemma.)

Az alábbi két lineáris egyenlőtlenségrendszer közül pontosan az egyik oldható meg:

$$\left. \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (\mathcal{R}_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y}^T A \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{b} = 1 \end{array} \right\} (\mathcal{R}_2)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor. Az ismeretlenek n illetve m elemű vektorai az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$.

Következik a Farkas-Minty típusú előjeles lemmából és (minimál indexes, LIFO, MOSV) CCA végességéből.

Illés Tibor, Mészáros Katalin, A Farkas lemma egy új és elemi bizonyítása. In: Komlósi Sándor, Szántai Tamás *Új utak a magyar operációkutatásban: In memoriam Farkas Gyula*. Budapest; Pécs: Dialóg Campus Kiadó, pp. 73-88, 1999. (XXIII. Magyar Operációkutatási Konferencia, 1997, Pécs)

LIFO, MOSV – később: s-monoton index választási szabályok
Csizmadia, Illés, Nagy A., EJOR, 2012

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása

- Fourier-Motzkin eliminációs módszer (Fourier (1828), Motzkin (1936))
[Farkas Gy., 1896 - **Fourier elimináció**, 1898 - **Fourier elimináció duálisa**] [Dines 1919 - **felteszi, hogy van megoldása**]
Komplexitása: duplán exponenciális. Kiterjeszthető lineáris programozási feladat megoldására is.
- Szimplex algoritmus első fázis
- Criss-cross algoritmus (Klafszky és Terlaky, 1989; Illés és Mészáros K., 1999)
- MBU szimplex algoritmus (Bilen, Csizmadia Zs. és Illés, 2007)
Iterációk száma = mK , ahol K értéke, az összes lehetséges bázishoz tartozó determinánsokból számolható ki a Cramer-szabály alkalmazásával.
Címkezés technikával **erősen polinomiális** változat készíthető **hálózati folyam feladat** esetén megengedett feszítőfa (bázis) keresésre (Illés és Molnár-Szipai, 2014).

• ...

MBU simplex algoritmus (Bilen, Csizmadia, Illés, 2007)

	s	
r	$-$	$\left. \begin{array}{c} - \\ - \\ \vdots \\ - \end{array} \right\} \mathcal{I}_B^-$
q	$+$	$\left. \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \\ \vdots \\ \oplus \end{array} \right\} \mathcal{I}_B^+$

bázis (nem bázis) index halmazok: $\mathcal{I}_B, \mathcal{I}_N \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_B = \mathcal{I}_B^+ \cup \mathcal{I}_B^-$, ahol $\mathcal{I}_B^+ = \{i \in \mathcal{I}_B : x_i \geq 0\}$, és $\mathcal{I}_B^- = \{i \in \mathcal{I}_B : x_i < 0\}$

Nem megengedettségi kritérium: ha létezik $r \in \mathcal{I}_B^- : \mathcal{J}_r^- = \emptyset$ akkor $\mathcal{P} = \emptyset$, ahol $\mathcal{J}_r^- = \{i \in \mathcal{I}_N : t_{ri} < 0\}$

vezér változó: $r \in \mathcal{I}_B^-$, *döntési paraméterek:* $s \in \mathcal{J}_r^-$

$$\theta_1 := \frac{\bar{b}_r}{t_{rs}} > 0, \quad \text{és} \quad \theta_2 := \min \left\{ \frac{\bar{b}_k}{t_{ks}} \mid k \in \mathcal{I}_B^+, t_{ks} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_q}{t_{qs}} \geq 0$$

Ha $\theta_1 \leq \theta_2$ **akkor** pivotálás a t_{rs} elemen,
különben pivotálás a t_{qs} elemen.

Definíció.

Legyen az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ adott vektor és a $\beta \in \mathbb{R}$ adott szám.

- *(affin) hipersík:* $\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \beta\};$
- *nyílt (affin) féltér:* $\mathcal{F}_{>} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} > \beta\};$
- *zárt (affin) féltér:* $\mathcal{F}_{\geq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq \beta\}.$

Legyen a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ halmaz, és legyenek az λ, μ nemnegatív valós számok.

- A $\mathcal{C}$ *kúp*, ha bármely $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$ esetén $\lambda \mathbf{a} \in \mathcal{C}$ teljesül.
- A $\mathcal{C}$ *konvex kúp*, ha bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{C}$ esetén $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in \mathcal{C}$ teljesül.
- A $\mathcal{C}$ *poliedrikus kúp*, (vagy *metszet-kúp*), ha létezik egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, amelyre $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ •

... végesen generált kúp, ... Weyl-tétel, 1935

Definíció.

Legyenek az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ adott vektorok és $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$ index halmaz. A *végesen generált kúp*:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) &= \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j, x_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{J} \} \\ &= \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ megoldható} \} \end{aligned}$$

végesen generált kúp polárisa:

$$\begin{aligned} C^*(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{J} \} \\ &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y}^T A \leq 0 \} \quad \bullet \end{aligned}$$

Weyl-tétel, 1935.

Legyenek az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ adott vektorok, ekkor léteznek olyan $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok, amelyekre $C(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = C^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$.

H. Weyl, Elementare Theorie der konvexen Polyeder. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 7:290–306, 1935.

Minkowski-tétel, 1896.

Legyenek az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ adott vektorok, ekkor léteznek olyan $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorok, amelyekre

$$C^*(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = C(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k).$$

H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen (Erste Lieferung)*. Teubner, Leipzig, 1896.

Prékopa A., *Lineáris programozás I.* Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.

Prékopa A., Az optimalizáláselmélet kialakulásának a történetéről.
Alkalmazott Matematikai Lapok, 4:165-191, 1978.

A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons., New York, 1986.

Farkas-tétel, 1898, 1902.

Tetszőleges $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ vektorrendszer esetén

$$C(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = C^{**}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n),$$

teljesül.

- Farkas Gy., A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 16:361–364, 1898.
- J. Farkas, Über die Theorie der einfachen Ungleichungen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 124:1–27, 1902 (1901?).

Következmény. Tetszőleges konvex kúp az $\mathbb{R}^m$ térben pontosan akkor metszet-kúp, ha végesen generált. • $\rightsquigarrow$ Schrijver szerint:
Farkas-Minkowski-Weyl tétel, pedig egyszerűen **Farkas-tétel, 1898**

Farkas Gyula: ... akik nem érhetik meg eszméik diadalát. ...

EUDML | The EUROPEAN DIGITAL MATHEMATICS LIBRARY

English (en)
Title, Author

Home Advanced Search Browse by Subject Browse by Journals

Theorie der einfachen Ungleichungen.

[Julius Farkas](#)
[Journal für die reine und angewandte Mathematik \(1902\)](#)
Volume: 124, page 1-27
ISSN: 0075-4102; 1435-5345/e

Access Full Article

[Access to full text](#)

How to cite

MLA BibTeX RIS

Farkas, Julius. "Theorie der einfachen Ungleichungen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 124 (1902): 1-27. <<http://eudml.org/doc/149129>>.

<https://eudml.org/doc/149129>

Theorie der einfachen Ungleichungen.

(Von Herrn *Julius Farkas* in Kolozsvár (Klausenburg).)

Die naturgemässe und zugleich systematische Behandlung der analytischen Mechanik muss das zuerst von *Fourier**) und dann später von *Gauss***) formulierte Ungleichheitsprincip der virtuellen Verschiebungen zur Grundlage haben.

Die Möglichkeit einer solchen Behandlung erfordert aber gewisse Kenntnisse über die homogenen linearen ganzen Ungleichungen, welche bisher so zu sagen gänzlich gefehlt haben.

Fourier hat sich selbst vielfach um Ungleichungen bemüht***), aber ohne erheblichen Erfolg. Später befasste sich der russische Mathematiker *Ostrogradsky* mit diesem Gegenstande.†) Seine Betrachtungen passen aber nur auf den Fall, dass die Anzahl der Ungleichungen, welche zum Ausdruck des mechanischen Zwanges dienen, diejenige der Componenten der virtuellen Verschiebungen nicht übertrifft. Andere Publicationen, welche über dieses Thema noch erschienen sind, zeigen auch keinen wesentlichen Fortschritt.

*) „Sur la Statique“. I. de l'Éc. polyt. II. An VI. (1798). Oeuvres, Tome II, pp. 477—521. 1890.

**) „Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“. Dieses Journal, IV. 1829. Werke V. 1877.

„Principia generalia theoriae figurarum fluidorum in statu aequilibril“. Comm. soc. reg. scient. Gotting. rec. Vol. VII. 1830. Werke V. 1877.

***) Oeuvres, Tome II. pp. 317—328. 1890. (1823, 1824).

†) „Considérations générales sur les momens des forces“. Mém. de l'Ac. imp. des Sc. de St. Pétersbourg 1834.

Journal für Mathematik Bd. CXXIV. Heft 1.

H.W. Kuhn and A.W. Tucker, *Nonlinear Programming*. In: Neyman J. (editor), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (University of California Press, Berkeley, California, 1950), **481–492, 1951**.

Hermann Minkowski, Farkas Gyula és Haár Alfréd



1864 – 1909



1847 – 1930



1885 – 1933

Lineáris komplementaritási feladatok (LCP) és a CCA variánsai

- Mátrixosztályok
- Alternatíva tételek (Ville, 1938; Fukuda és Terlaky, 1992)
- Primál- és duál LCP
- Fukuda és Terlaky (1992) LCP alternatíva tétel
- CCA variánsai elégséges LCP-re és általánosításai
- Cameron és Edmonds (1990) EP-tétele
- Fukuda, Namiki és Tamura EP-tétele (1998)

Példák lineáris komplementaritási feladatokra

$$-M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Feladat	az M mátrix tulajdonsága
Primál-duál LP feladat Primál-duál, lineáris feltételes, konvex QP feladat	ferdén szimmetrikus biszimmetrikus (diagonális blokkok: PSD, és azon kívül: ferdén szimmetrikus)
Hátizsák feladat	alsó háromszög: -1 a diagonálisban
Markov láncok feladat	nem negatív diagonális és nem pozitív diagonálison kívül
Bimátrix játékok	nem negatív elemek ($\mathbf{q} = -\mathbf{e}$)
Arrow–Debreu feladat	nem pozitív elemek ($\mathbf{q} = \mathbf{e}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$)
...	...

Mátrix osztályok

- Q, Q_0
- S, S_0
- ferdén szimmetrikus
- pozitív definit, pozitív szemidefinit
- P, P_0
- oszlop/sor elégséges
- $P^*(\kappa), P^*$

$$-M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot pontosan akkor nevezzük **Q-mátrix**nak, ha az LCP-nek bármely $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén van megoldása.

Az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot pontosan akkor nevezzük **Q₀-mátrix**nak, ha az LCP megengedettsége elégséges feltétele a megoldhatóságának is.

Legyenek az $M, X = \text{diag}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok, tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén. Azt mondjuk, hogy az M mátrix

ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$

PSD (PD), ha $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0$ ($\mathbf{x}^T M \mathbf{x} > 0$, ahol $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

Ha az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *ferdén szimmetrikus*, *PSD (PD)* akkor az M egyben **Q₀-mátrix** is.

Lemma (J. Ville, 1938)

Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy adott mátrix. Az alábbi két lineáris egyenlőtlenségrendszer közül pontosan az egyik oldható meg:

$$Mx > 0, \quad x > 0, \quad (3)$$

$$M^T u \leq 0, \quad u \geq 0 \text{ és } u \neq 0. \quad (4)$$

Azokat az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokat, amelyek kielégítik a (3) feltételt, **S-mátrix**oknak nevezzük.

Az **S-mátrix**ok pontosan azok, amelyeknél az LCP feladatoknak tetszőleges $q \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén van megengedett megoldásuk.

A **PD** mátrixok, természetesen **S-mátrix**ok.

Ha gyengítjük a (3) lineáris egyenlőtlenségrendszert az alábbi módon

$$Mx \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x \neq 0, \quad (5)$$

akkor az **S₀-mátrix**okat kapjuk. Nyilvánvaló, hogy $S \subseteq S_0$.

LCP – mátrix osztályok III.

Legyenek az $M, X = \text{diag}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok, tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén. Azt mondjuk, hogy az M mátrix

ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$

PSD (PD), ha $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0$ ($\mathbf{x}^T M \mathbf{x} > 0$, ahol $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

P (P_0): ha bármelyik főminora pozitív (nem negatív)

CS: ha $X(M\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \Rightarrow X(M\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Cottle, Pang, Venkateswaran (1989)

RS: ha M^T **CS**-mátrix.

SU: ha M **CS**- és **RS**-mátrix, azaz **elégséges mátrix**, ha oszlop- és sor elégséges mátrix.

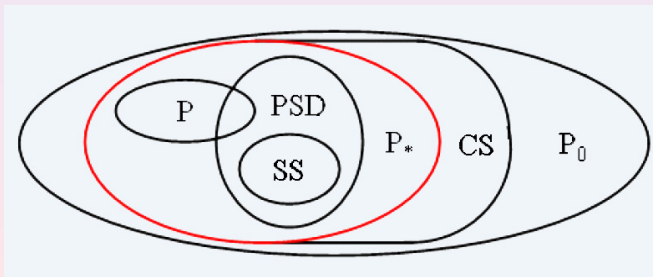
Kojima, Megiddo, Noma, Yoshise (1991)

$\mathcal{P}_*(\kappa) : (1+4\kappa) \sum_{i \in I_+(\mathbf{x})} x_i (M\mathbf{x})_i + \sum_{i \in I_-(\mathbf{x})} x_i (M\mathbf{x})_i \geq 0, \quad (\kappa \geq 0, \text{ adott})$

ahol $I_+(\mathbf{x}) = \{i : x_i (M\mathbf{x})_i > 0\}$ és $I_-(\mathbf{x}) = \{i : x_i (M\mathbf{x})_i < 0\}$.

$$\mathcal{P}_* = \bigcup_{\kappa \geq 0} \mathcal{P}_*(\kappa)$$

- Kojima, Megiddo, Noma, Yoshise (1991): $\mathcal{P}_* \subseteq \mathcal{CS}$
- Guu and Cottle (1995): $\mathcal{P}_* \subseteq \mathcal{RS}$
- Văliaho (1996): $SU \subseteq \mathcal{P}_*$



Az *elégseges mátrix*ok, egyben Q_0 -mátrixok is.

Lemma (Fukuda és Terlaky, 1992)

Legyen az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ adottak. Az alábbi két lineáris egyenlőtlenségrendszer közül pontosan az egyik oldható meg:

$$-M\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\mathbf{y}^T M + \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{q} = -1, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \quad (7)$$

Nyilvánvaló, hogy az $LCP(M, \mathbf{q})$ feladatnak, pontosan akkor van megengedett megoldása, ha (6) teljesül.

K. Fukuda and T. Terlaky, Linear complementarity and oriented matroids. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 35(1):45–61, 1992.

LCP – primál és duál feladatok

A (primál) lineáris komplementaritási feladatot ($P - LCP$) az alábbi módon adhatjuk meg

$$\mathcal{F}_{\oplus} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2n} : -M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq 0\}$$

$$\mathcal{F}_c = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2n} : -M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \mathbf{u}\mathbf{v} = 0\}$$

$$\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_{\oplus} \cap \mathbb{R}_+^{2n} \quad \text{és} \quad \mathcal{F}^* = \mathcal{F}_{\oplus} \cap \mathcal{F}_c$$

A (duál) lineáris komplementaritási feladatot ($D - LCP$) az alábbi módon adhatjuk meg

$$\mathbf{x} + M^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^T\mathbf{y} = -1, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{x}\mathbf{y} = 0.$$

$$\mathcal{D}_{\oplus} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{x} + M^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^T\mathbf{y} = -1, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0\}$$

$$\mathcal{D}_c = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{x} + M^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^T\mathbf{y} = -1, \quad \mathbf{x}\mathbf{y} = 0\}$$

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_{\oplus} \cap \mathbb{R}_+^{2n} \quad \text{és} \quad \mathcal{D}^* = \mathcal{D}_{\oplus} \cap \mathcal{D}_c$$

LCP – alternatíva (dualitás?) tétel

$$(P - LCP) \quad -M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(D - LCP) \quad \mathbf{x} + M^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{q}^T\mathbf{y} = -1, \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Indirekt bizonyítás – mindkettő megoldható:

$$\mathbf{y}^T(-M\mathbf{u} + \mathbf{v}) = -\mathbf{y}^T M\mathbf{u} + \mathbf{y}^T \mathbf{v} = \mathbf{y}^T \mathbf{q} = -1$$

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{x} + M^T\mathbf{y}) = \mathbf{u}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T M^T \mathbf{y} = \mathbf{u}^T \mathbf{0} = 0$$

$$\rightsquigarrow 0 \leq \mathbf{u}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{v} = -1 \quad \text{ellentmondás.}$$

Tétel

Fukuda, Terlaky (1992)

Legyen az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **elégséges mátrix**, és a $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vektor adott. Ekkor a következő két állítás közül **pontosan az egyik** teljesül

$$(1) \quad \mathcal{F}^* \neq \emptyset, \quad (2) \quad \mathcal{D}^* \neq \emptyset.$$

Fukuda és Terlaky tétele CCA végességéből következik.

CCA elégséges LCP feladatokra: Hertog, Roos, Terlaky (1993) LAA

Fukuda és Terlaky (eredetileg): irányított matroid programozási feladatra

Criss-Cross algoritmus elégséges LCP feladatra

Input:

LCP feladat, ahol M **elégséges** mátrix, $\bar{M} := -M$, $\bar{q} := q$, $r := 1$,

Begin

$J := \{\alpha \in I : \bar{q}_\alpha < 0\}$

While ($J \neq \emptyset$) **do**

Legyen k a belépő változó indexe

If ($\bar{m}_{kk} < 0$) **then**

diagonális pivot az $\bar{m}_{kk}$ elemen

Else

$K := \{\alpha \in I : \bar{m}_{k\alpha} < 0\}$

If ($K = \emptyset$) **then**

Stop: $\mathcal{F}_\oplus = \emptyset$ Az LCP feladatnak nincsen megengedett megoldása.

Else

Legyen l a felcserélős pivot változó indexe

felcserélős pivot az $\bar{m}_{kl}$ és $\bar{m}_{lk}$ elemeken

Endif

Endif

Endwhile

Stop: $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$

Megengedett, komplementáris megoldást kaptunk.

End

	u_j	
	$\vdots$	
v_j	$\dots$	$-$
	$\vdots$	

Diagonális pivot

	u_j	u_k	
		$\vdots$	
		$+$	
		$\vdots$	
v_k	$\dots$	$-$	0
		$\vdots$	

Felcserélős pivot

Véges Criss-Cross algoritmus variánsai LCP feladatra

Szerzők & év	pivot szabály	mátrix osztály
Klafszky, Terlaky (1992)	minimál index	biszimmetrikus
Väliaho (1992)	minimál index	biszimmetrikus
den Hertog, Roos, Terlaky (1993)	minimál index	elégséges
Fukuda, Namiki, Tamura (1998)	minimál index	általános
Akkeles, Balogh, Illés (2004)	LIFO, MOSV	biszimmetrikus
Csizmadia, Illés (2006)	LIFO, MOSV	általános
Csizmadia, Illés, A. Nagy (2013)	s-monoton	általános

Lemma

Csizmadia, Illés, (2007)

Minimál index-, LIFO- és MOSV pivot választási szabályok egyben s-monoton pivot választási szabályok is.

Tétel

Csizmadia, Illés, A. Nagy (2013)

Criss-cross algoritmus az s-monoton pivot választási szabályok esetén véges az elégséges (biszimmetrikus) mátrixszal adott lineáris komplementaritási feladatokra.



Tétel [EP (Existentially Polytime) tétel]

Cameron, Edmonds (1990)

$$[\forall \mathbf{x} : F_1(\mathbf{x}) \text{ vagy } F_2(\mathbf{x}) \text{ vagy } \dots \text{ vagy } F_k(\mathbf{x})]$$

ahol $F_i(\mathbf{x})$ egy a következő formában adott állítás

$$F_i(\mathbf{x}) = [\exists \mathbf{y}_i, \text{ amelyre } \|\mathbf{y}_i\| \leq \|\mathbf{x}\|^{n_i} \text{ és } f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)] .$$

Tétel

Fukuda, Namiki, Tamura (1998)

Tetszőleges $M \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ vektor esetén az alábbi állítások közül legalább egy teljesül

- (1) $\exists (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (2) $\exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (3) az M mátrix nem elégséges, és erre létezik egy bizonyíték, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú.

Bizonyítás: általánosított minimál indexes CCA algoritmussal.

Criss-Cross algoritmus általános LCP feladatra

Extra memória és számítás használata

- 1 $O(n^2)$ extra memória
- 2 $O(n)$ extra számítás

Ciklizálás ellenőrzése

- 1 Előjel struktúra ellenőrzése
- 2 A mozgó, vezető változó sorának vagy oszlopának a mentése
- 3 Az utolsó mozgó változó pár sorával vagy oszlopával képezhető skaláris szorzatok kiszámítása

Eredmények

- 1 Az s-monoton szabállyal a CCA véges, általános LCP-re (Csizmadia, Illés, Nagy A., 2013).
- 2 Fukuda, Namiki, Tamura (1998) LCP EP-tétele bizonyítható a CCA-kal.
- 3 Numerikus számítások esetén, a LIFO- és MOSV szabályokkal a CCA hatékonyabban, mint a minimál indexes szabállyal.

Input: Induló, bázis tábla, $r = 1$, inicializálás Q .

Begin

While $((\mathcal{J} := \{i \in \cdot : \mathbf{q}_i < 0\}) \neq \emptyset)$ do

$\mathcal{J}_{\max} := \{\beta \in : \mathbf{s}(\beta) \geq \mathbf{s}(\alpha), \text{ for all } \alpha \in \mathcal{J}\}$.

Legyen $k \in \mathcal{J}_{\max}$ tetszőleges.

Ellenőrzés $-\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'' - \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}'$ a $Q(k)$ segítségével.

If $(-\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'' - \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}' \leq 0)$ then

Stop: M nem elégséges, bizonyíték: $\mathbf{u}' - \mathbf{u}''$.

Endif

If $(t_{kk} < 0)$ then

diagonális pivot a t_{kk} elemen, frissítse s.

$Q(k) = [\mathcal{J}_B; \mathbf{t}_q]$, $r := r + 1$.

Elseif $(t_{kk} > 0)$

Stop: M nem elégséges, bizonyíték előállítása.

Else /* $t_{kk} = 0$ */

$K := \{\alpha \in I : \bar{t}_{k\alpha} < 0\}$

If $(K = \emptyset)$ then

Stop: (D-LCP) megoldása.

Else

$\max = \{\beta \in K : \mathbf{s}(\beta) \geq \mathbf{s}(\alpha), \text{ for all } \alpha \in K\}$.

Legyen $l \in \max$ tetszőleges.

If $((\mathbf{t}_k, \mathbf{t}^k)$ vagy $(\mathbf{t}_l, \mathbf{t}^l)$ az előjel struktúra sérült) then

Stop: M nem elégséges, bizonyíték előállítása.

Endif

Felcserélő pivot a t_{kl} és t_{lk} elemeken, frissítse az s vektort először az (u_k, v_k) , majd (u_l, v_l) helyeken a következő két iterációban.

$Q(k) = [\mathcal{J}_B; \bar{\mathbf{t}}_q]$, $Q(l) = [\emptyset, 0]$, $r := r + 2$.

Endif

Endif

EndWhile

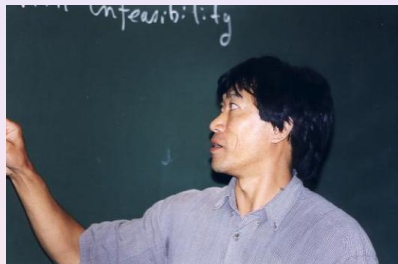
Stop: komplementáris, megnekedett megoldásunk van.

End

Kas Péter, Klafszky Emil, Terlaky Tamás, Komei Fukuda



Kas Péter (1949 – 2009),
Klafszky Emil (1934 – 2009),
Terlaky Tamás (1955 –)



Komei Fukuda (1952?)

Lineáris komplementaritási feladatok (LCP) és a belsőpontos algoritmusok (BPA)

- Elégséges LCP centrális útja és a BPA-k alapjai
- BPA elégséges és általános LCP-re
- Illés, Nagy M. és Terlaky LCP EP-tételei (2009, 2010)

$$-M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}, \mathbf{v} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = \mu \mathbf{e} \quad \mu > 0$$

Tétel

Kojima, Megiddo, Noma, Yoshise (1991)

Legyen az M mátrix egy $P_*(\kappa)$ -mátrix. Ekkor a következő állítások ekvivalensek

- $\mathcal{F}_+ \neq \emptyset$
- $\forall \mathbf{w} > \mathbf{0}, \exists! (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}_+ : \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{w},$
- $\forall \mu > 0, \exists! (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}_+ : \mathbf{u}\mathbf{v} = \mu \mathbf{e}.$

Megjegyzés. Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ elégséges mátrix ekkor a *centrális út*

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}_+ : \mathbf{u}\mathbf{v} = \mu \mathbf{e}, \mu > 0\}$$

egy egyváltozós, sima görbe a $2n$ -dimenziós térben, amelyik ha a $\mu \rightarrow 0$, akkor tart az (LCP) nem üres megoldás halmazához, az $\mathcal{F}^*$ halmazhoz.

Az előző tétel egyszerű, elemi bizonyítását dolgoztam ki 1997-ben.

Newton-rendszer, centrum közelítése

$$-M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{u} > 0, \mathbf{v} > 0, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = \mu \mathbf{e} \quad \mu > 0$$

Legyen $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}^+$ adott megengedett megoldása (belsőpontja) az (LCP)-nek. Számoljuk ki egy adott $(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu)) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F}^+$ μ -centrum közelítését az $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$, $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ alakban, úgy, hogy $(\mathbf{u}^+, \mathbf{v}^+) \in \mathcal{F}^+$ teljesüljön.

Newton-rendszer:

$$\begin{aligned} -M \Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \Delta \mathbf{v} &= \mu \mathbf{e} - \mathbf{u}\mathbf{v} \end{aligned}$$

Állítás

Ha $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy $\mathcal{P}_*(\kappa)$ -mátrix (P_0 -mátrix) akkor

$$M' = \begin{bmatrix} -M & I \\ V & U \end{bmatrix} \text{ reguláris mátrix,}$$

bármely $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív diagonális mátrix esetén.

Centrális út környezete és jellemzése

$$-M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}, \mathbf{v} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = \mu \mathbf{e} \quad \mu > 0$$

környezet mértéke: $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mu) := \left\| \sqrt{\frac{\mu \mathbf{e}}{\mathbf{u}\mathbf{v}}} - \sqrt{\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{\mu}} \right\|$

Állítás

Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy elégséges mátrix ekkor a centrális út a

$$\mathfrak{C} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}_+ : \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mu) = 0, \mu > 0\}.$$

a centrális út környezete:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{C}}(\tau) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}_+ : \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mu) \leq \tau, \mu > 0\},$$

ahol $\tau \geq 0$.

Belsőpontos algoritmusok legfontosabb építőkövei

- centrális út egyértelműsége,
- induló belsőpont előállítása,
- cél centrum meghatározása (befolyásolja a Newton-rendszer jobb oldalát),
- környezet mérték (befolyásolja az algoritmus komplexitás elemzését),
- centrális út környezete,
- lépéshossz meghatározása

Átalános BPA elégséges LCP-re

Input: $LCP(M, \mathbf{q})$, where M is a sufficient matrix
duality gap parameter $\varepsilon > 0$,
barrier parameter $0 < \theta < 1$, centrality parameter $\tau > 0$
 $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathcal{F}_+$ and $\mu_0 > 0$ such that $\psi(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mu_0) \leq \tau$

Begin

$\mathbf{u} := \mathbf{u}_0$ and $\mathbf{v} := \mathbf{v}_0$

while $\mathbf{u}^T \mathbf{v} > \varepsilon$ **do**

solve the **Newton-system**: $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v})$

find the **step length** $0 < \alpha \leq 1$ such that $\psi(\mathbf{u}^+, \mathbf{v}^+, \mu) \leq \tau$,
where $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u} + \alpha \Delta \mathbf{u}$ and $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v} + \alpha \Delta \mathbf{v}$

$\mu := (1 - \theta)\mu$

$\mathbf{u} := \mathbf{u}^+$ and $\mathbf{v} := \mathbf{v}^+$

endwhile

Output: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}_+ : \mathbf{u}^T \mathbf{v} \leq \varepsilon$

End

Illés, Peng, Roos, Terlaky, A strongly polynomial rounding procedure yielding a maximally complementary solution for $P^*(\kappa)$ linear complementarity problems. *SIAM Journal on Optimization* 11(2):320–340, 2000.

BPA algoritmus változatok LCP-re

Szerzők & év	algoritmus típusa	mátrix osztály
Dikin (1967)	affine scaling	SS, PSD
Sonnevend (1985)	path following	SS, PSD
Kojima, Mizuno, Yoshise (1989)	logarithmic barrier	SS, PSD
Kojima, Megiddo, Noma, Yoshise (1991)	logarithmic barrier	$P * (\kappa)$
⋮		
Ji, Potra, Sheng (1995)	predictor-corrector	$P * (\kappa)$
Illés, Roos, Terlaky (1997)	affine scaling	$P * (\kappa)$
Potra (2002)	MTY-pc	$P * (\kappa)$
Potra, Lin (2005)	MTY-pc	elégseges
Illés, M. Nagy (2007)	MTY-pc	$P * (\kappa)$
Illés, M. Nagy, Terlaky (2010)	logarithmic barrier	általános
Illés, M. Nagy, Terlaky (2010)	affine scaling	általános
Illés, M. Nagy, Terlaky (2010)	predictor-corrector	általános

Néhány BPA iterációinak a száma elégséges LCP-re

Szerzők & év	komplexitás
Kojima, Megiddo, Noma, Yoshise (1991)	$\mathcal{O}(\sqrt{n}(1 + \kappa)L)$
Potra, Lin (2005)	$\mathcal{O}(\sqrt{n}(1 + \kappa)L)$
Illés, M. Nagy (2007)	$\mathcal{O}(\sqrt{n}(1 + \kappa)^{\frac{3}{2}}L)$
Wang, Bai (2009)	$\mathcal{O}(\sqrt{n}(1 + 2\kappa)L)$
Lešaja, Roos (2010)	$\mathcal{O}(\sqrt{n}(1 + 2\kappa)L)$
Kheirfam (2013)	$\mathcal{O}(\sqrt{n}(1 + 2\kappa)L)$

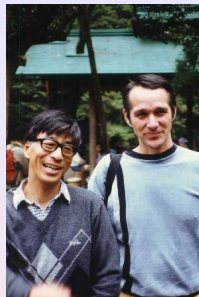
Table 1 The number of iterations

Name pro.	Proposed algorithm	algorithm [13]	algorithm [6]
M1	43	92	50
M2	54	113	59
M3 (n=20)	103	213	101
M4 (n=10)	67	201	71

take $\tau = \frac{1}{2}$ for the algorithms. We stop the iteration of each algorithm if the duality gap $x^T s \leq \epsilon = 10^{-4}$. The number of iterations is presented in Table 1.

algorithm [6] – Illés, Nagy M., A Mizuno-Todd-Ye type
predictor-corrector algorithm ... EJOR 181: 1097–1111, 2007

Kojima, Lešaja, Potra, Roos, Terlaky, Todd



Lineáris komplementaritási feladatok jellemzése

$$-M\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Állítás

Legyen $\mathcal{F}_+ \neq \emptyset$ és $M \in \mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrix, akkor az $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$, konvex, zárt és korlátos halmaz.

$$\mathbf{x} + M^T \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^T \mathbf{y} = -1, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Lemma

Illés, M. Nagy, Terlaky (2007)

Legyenek M sor elégséges mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ adott vektor. Ha $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}_\oplus$, akkor $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}^*$, azaz $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_\oplus \neq \emptyset$, zárt, konvex poliéder. Továbbá, a duál LCP polinomiális időben megoldható.

Tétel

Fukuda, Terlaky (1992)

Legyen az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ elégséges mátrix, és a $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vektor adott. Ekkor a következő két állítás közül pontosan az egyik teljesül

$$(1) \quad \mathcal{F}^* \neq \emptyset, \quad (2) \quad \mathcal{D}^* \neq \emptyset.$$

Tétel (EP 1)

Illés, M. Nagy, Terlaky (2008)

Tetszőleges $M \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ vektor esetén polinomiális időben megmutatható, hogy legalább egy állítás teljesül

- (1) $\exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (2) $\exists (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}_\oplus$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (3) az M mátrix nem sor elégséges, és erre létezik egy bizonyíték, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú.

Tétel (EP 2)

Illés, M. Nagy, Terlaky (2008)

Tetszőleges $M \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ vektor esetén polinomiális időben megmutatható, hogy legalább egy állítás teljesül

- (1) $\exists (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (2) $\exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (3) $M \notin \mathcal{P}_*(\tilde{\kappa})$, valamely adott $\tilde{\kappa} > 0$ paraméter esetén.

Tétel

Fukuda, Namiki, Tamura (1998)

Tetszőleges $M \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ vektor esetén legalább egy az alábbi állítások közül teljesül

- (1) $\exists (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (2) $\exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (3) az M mátrix nem elégséges, és erre létezik egy bizonyíték, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú.

Tétel

Illés, M. Nagy, Terlaky (2008)

Tetszőleges $M \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ vektor esetén polinomiális időben megmutatható, hogy legalább egy állítás teljesül

- (1) $\exists (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{F}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (2) $\exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}^*$, amelyek kódolási mérete polinomiális korlátú,
- (3) $M \notin \mathcal{P}_*(\tilde{\kappa})$, valamely adott $\tilde{\kappa} > 0$ paraméter esetén.

Belsőpontos Algoritmusok (általános) LCP-re

Long step algorithm – LP

```
 $\mathbf{x} := \mathbf{x}^0, \mathbf{s} := \mathbf{s}^0;$   
while  $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \geq \varepsilon$  do  
   $\mu = (1 - \gamma)\mu;$   
  while  $\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) \geq \tau$  do  
    compute the Newton direction  $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$   
    if (the Newton direction does not exist or not unique) then  
      return the matrix is not  $P_2;$   
     $\bar{\alpha} = \operatorname{argmin} \{ \delta_c(\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha), \mu) : (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) > \mathbf{0} \};$   
    if  $\left( \delta_c^2(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) - \delta_c^2(\mathbf{x}(\bar{\alpha})\mathbf{s}(\bar{\alpha}), \mu) < \frac{\delta_c^2}{3(1-\gamma)\tau} \right)$  then  
      determine  $\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$   
      if  $(\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$  is not defined) then  
        return the matrix is not  $P_2;$   
      else  $\kappa = \kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$   
    else  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\bar{\alpha}), \mathbf{s} = \mathbf{s}(\bar{\alpha});$   
  end  
end
```

$$\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) := \left\| \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right\|$$

Long step algorithm – $\mathcal{P}^*$ (Potra's idea)

$\mathbf{x} := \mathbf{x}^0, \mathbf{s} := \mathbf{s}^0, \kappa := 1;$

while $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \geq \varepsilon$ **do**

$\mu = (1 - \gamma)\mu;$

while $\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) \geq \tau$ **do**

compute the Newton direction $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s});$

if (the Newton direction does not exist or not unique) then

return the matrix is not $\mathcal{P}_0;$

$\bar{\alpha} = \operatorname{argmin} \{ \delta_c(\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha), \mu) : (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) > \mathbf{0} \};$

if $\left(\delta_c^2(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) - \delta_c^2(\mathbf{x}(\bar{\alpha})\mathbf{s}(\bar{\alpha}), \mu) < \frac{5}{3(1+4\kappa)} \right)$ **then**

determine $\kappa(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s});$

if ($\kappa(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s})$ is not defined) then

return the matrix is not $\mathcal{P}_0;$

else $\kappa = 2\kappa;$

else $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\bar{\alpha}), \mathbf{s} = \mathbf{s}(\bar{\alpha});$

end

end

$$\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) := \left\| \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right\|$$

Long step algorithm – $\mathcal{P}^*$

$\mathbf{x} := \mathbf{x}^0, \mathbf{s} := \mathbf{s}^0, \kappa := 0;$

while $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \geq \varepsilon$ **do**

$\mu = (1 - \gamma)\mu;$

while $\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) \geq \tau$ **do**

compute the Newton direction $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$

if (the Newton direction does not exist or not unique) then

return the matrix is not $\mathcal{P}_0;$

$\bar{\alpha} = \operatorname{argmin} \{ \delta_c(\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha), \mu) : (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) > \mathbf{0} \};$

if $\left(\delta_c^2(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) - \delta_c^2(\mathbf{x}(\bar{\alpha})\mathbf{s}(\bar{\alpha}), \mu) < \frac{5}{3(1+4\kappa)} \right)$ **then**

determine $\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$

if ($\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ is not defined) then

return the matrix is not $\mathcal{P}_+;$

else $\kappa = \kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$

else $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\bar{\alpha}), \mathbf{s} = \mathbf{s}(\bar{\alpha});$

end

end

$$\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) := \left\| \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right\|$$

$$\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}) := -\frac{1}{4} \frac{\Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{s}}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta s_i}$$

Long step algorithm – general matrix

$\mathbf{x} := \mathbf{x}^0, \mathbf{s} := \mathbf{s}^0, \kappa := 0;$

while $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \geq \varepsilon$ **do**

$\mu = (1 - \gamma)\mu;$

while $\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) \geq \tau$ **do**

compute the Newton direction $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$

if (the Newton direction does not exist or not unique) **then**

return the matrix is not $\mathcal{P}_0;$

$\bar{\alpha} = \operatorname{argmin} \{ \delta_c(\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha), \mu) : (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) > \mathbf{0} \};$

if $\left(\delta_c^2(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) - \delta_c^2(\mathbf{x}(\bar{\alpha})\mathbf{s}(\bar{\alpha}), \mu) < \frac{5}{3(1+4\kappa)} \right)$ **then**

determine $\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$

if $(\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ is not defined) **then**

return the matrix is not $\mathcal{P}_*;$

else $\kappa = \kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s});$

else $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\bar{\alpha}), \mathbf{s} = \mathbf{s}(\bar{\alpha});$

end

end

$$\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) := \left\| \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right\|$$

$$\kappa(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}) := -\frac{1}{4} \frac{\Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{s}}{\sum_{i+} \Delta x_i \Delta s_i}$$

Long step algorithm – general matrix, polynomial (approximation) algorithm with $\tilde{\kappa} > 0$ parameter

$\mathbf{x} := \mathbf{x}^0, \mathbf{s} := \mathbf{s}^0, \kappa := 0;$

while $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \geq \varepsilon$ **do**

$\mu = (1 - \gamma)\mu;$

while $\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) \geq \tau$ **do**

compute the Newton direction $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s});$

if (the Newton direction does not exist or not unique) **then**

return the matrix is not $\mathcal{P}_0;$

$\bar{\alpha} = \operatorname{argmin} \{ \delta_c(\mathbf{x}(\alpha)\mathbf{s}(\alpha), \mu) : (\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{s}(\alpha)) > \mathbf{0} \};$

if $\left(\delta_c^2(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) - \delta_c^2(\mathbf{x}(\bar{\alpha})\mathbf{s}(\bar{\alpha}), \mu) < \frac{5}{3(1+4\kappa)} \right)$ **then**

determine $\kappa(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s});$

if $(\kappa(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s})$ is not defined or $\kappa > \tilde{\kappa})$ **then**

return the matrix is not $\mathcal{P}_*(\tilde{\kappa});$

else $\kappa = \kappa(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s});$

else $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\bar{\alpha}), \mathbf{s} = \mathbf{s}(\bar{\alpha});$

end

end

$$\delta_c(\mathbf{x}\mathbf{s}, \mu) := \left\| \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right\|$$

$$\kappa(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s}) := -\frac{1}{4} \frac{\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s}}{\sum_{i \in I_+} \Delta x_i \Delta s_i}$$

Tanítványok: Arif (2004), Zsolt (2007), Marianna (2010),
Adrienn (2015) – **Köszönjük szépen a figyelmet!**

