MTA SZTAKI
Magyar Tudományos Akadémia
Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet

Poliéderes eredmények projekt ütemezési feladatokra

Horváth Markó · Kis Tamás

Magyar Tudományos Akadémia
Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet
Mérnöki és Üzleti Intelligencia Kutatólaboratórium

Áttekintés

1. **Motiváció**
    - Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem
2. **Modellezési megközelítések**
    - Az idő-indexelt illetve az esemény-alapú megközelítés összehasonlítása
    - Az On/Off illetve a Start/End esemény-alapú megközelítés bemutatása
3. **Poliéderes eredmények** az On/Off esemény-alapú megközelítésre
4. **Poliéderes eredmények** a Start/End esemény-alapú megközelítésre

Bevezetés

Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem

$\mathcal{A}$	tevékenységek halmaza $= \{1, \ldots, n\}$
B	megújuló, kumulatív erőforrás kapacitás
r_i	rendelkezésre állási idő
d_i	határidő
$b_i^{\min}$	minimum erőforrás felhasználás
$b_i^{\max}$	maximum erőforrás felhasználás

A tevékenységek megmunkálási ideje nem rögzített, de a W_i energia-szükségletüket teljesíteni kell, melyet a hatékonysági függvény segítségével tudunk meghatározni:

$$f_i(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b = 0 \\ a_i b + c_i & \text{ha } b_i^{\min} = 0 \text{ and } b \in \,]b_i^{\min}, b_i^{\max}] \\ a_i b + c_i & \text{ha } b_i^{\min} \neq 0 \text{ and } b \in [b_i^{\min}, b_i^{\max}] \end{cases}$$

Bevezetés

Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem

CECSP

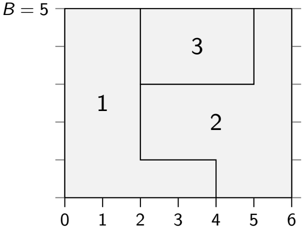
$$
\begin{aligned}
r_i \leq st_i < et_i \leq d_i & \qquad \forall\ i \in \mathcal{A} \\
b_i^{\min} \leq b_i(t) \leq b_i^{\max} & \qquad \forall\ i \in \mathcal{A},\ \forall\ t \in [st_i, et_i] \\
b_i(t) = 0 & \qquad \forall\ i \in \mathcal{A},\ \forall\ t \notin [st_i, et_i] \\
\sum_{i \in \mathcal{A}} b_i(t) \leq B & \qquad \forall\ t \in \mathcal{T} \\
\int_{st_i}^{et_i} f_i(b_i(t))\ dt = W_i & \qquad \forall\ i \in \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

ahol $\mathcal{T} = [\min_{i \in \mathcal{A}} r_i, \max_{i \in \mathcal{A}} d_i]$.

Bevezetés

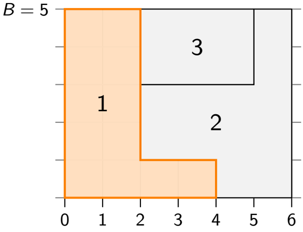
Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem

i	r_i	d_i	W_i	$b_i^{\min}$	$b_i^{\max}$	$f_i(b)$
1	0	6	28	1	5	$2b+1$
2	2	6	32	2	5	$b+5$
3	2	5	6	2	2	b



Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem

i	r_i	d_i	W_i	$b_i^{\min}$	$b_i^{\max}$	$f_i(b)$
1	0	6	28	1	5	$2b+1$
2	2	6	32	2	5	$b+5$
3	2	5	6	2	2	b

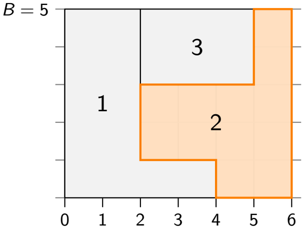


Össz-energia: $(2\cdot 5+1)+(2\cdot 5+1)+(2\cdot 1+1)+(2\cdot 1+1)=28$

Bevezetés

Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem

i	r_i	d_i	W_i	$b_i^{\min}$	$b_i^{\max}$	$f_i(b)$
1	0	6	28	1	5	$2b+1$
2	2	6	32	2	5	$b+5$
3	2	5	6	2	2	b

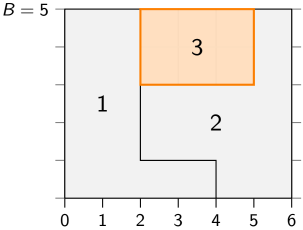


Össz-energia: $(2+5)+(2+5)+(3+5)+(5+5)=32$

Bevezetés

Continuous Energy-Constrained Scheduling Problem

i	r_i	d_i	W_i	$b_i^{\min}$	$b_i^{\max}$	$f_i(b)$
1	0	6	28	1	5	$2b+1$
2	2	6	32	2	5	$b+5$
3	2	5	6	2	2	b



Össz-energia: $(2)+(2)+(2)=6$

MILP modellek

Idő-indexelt megközelítés

- diszkretizált időhorizont

  pl. $T = \{\min_i r_i, \dots, \max_i d_i\}$

- bináris változók jelölik a tevékenységek kezdő és végző időpontját

  $2n|T|$ bináris változó

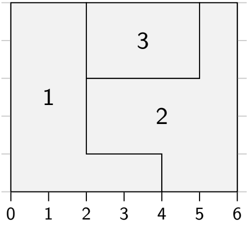
Esemény-alapú megközelítés

- $\mathcal{E} = \{1, \dots, 2n\}$ események index-halmaza
- események időpontját folytonos változók jelölik t_j $(j \in \mathcal{E})$
- bináris változók jelölhetik a tevékenységek aktivitását, vagy azok kezdő és befejező eseményeit

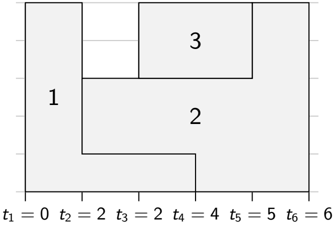
  $2n$ folytonos változó
  $2n^2$ vagy $4n^2$ bináris változó

MILP modellek

Idő-indexelt megközelítés



Esemény-alapú megközelítés

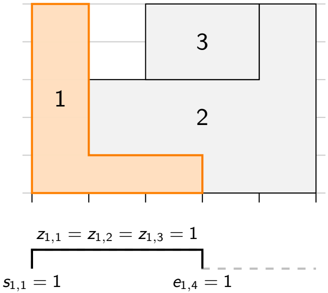


On/Off modell

- $2n^2 - n$ bináris változó (z)

Start/End modell

- $4n^2$ bináris változó (s, e)

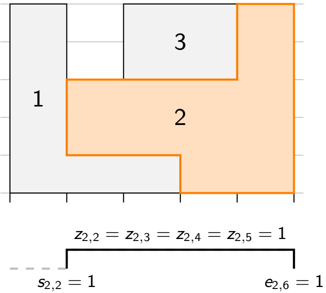


On/Off modell

- $2n^2 - n$ bináris változó (z)

Start/End modell

- $4n^2$ bináris változó (s, e)

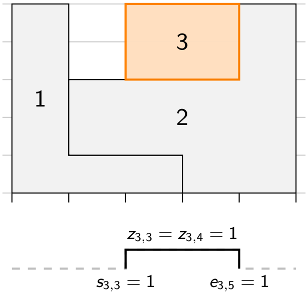


On/Off modell

- $2n^2 - n$ bináris változó (z)

Start/End modell

- $4n^2$ bináris változó (s, e)



On/Off esemény-alapú megközelítés

Megengedett megoldások konvex burka

A $z_{i,j}$ bináris változók jelölik, hogy az i tevékenység aktív-e a j és $j+1$ események között (azaz a $[t_j, t_{j+1}]$ intervallumban). Megengedett megoldások:

$$\sum_{j=1}^{2n-1} z_{i,j} \geq 1 \qquad \forall\ i = 1, \dots, n \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} z_{i,k} \leq (j-1)(1-(z_{i,j}-z_{i,j-1})) \qquad \forall\ i,\ \forall\ j = 2, \dots, 2n-1 \tag{2}$$

$$\sum_{k=j}^{2n-1} z_{i,k} \leq (2n-j)(1+(z_{i,j}-z_{i,j-1})) \qquad \forall\ i,\ \forall\ j = 2, \dots, 2n-1 \tag{3}$$

Megjegyzés: egy esemény több tevékenységhez is tartozhat.

$P_i^{OO} = \left\{ z \in \{0,1\}^{2n-1} :\ (1)-(3) \text{ hold} \right\} \rightarrow$ egyetlen tevékenységre vonatkozik!
$Q_i^{OO} = conv(P_i^{OO})$

On/Off esemény-alapú megközelítés

Non-preemptive egyenlőtlenségek

Non-preemptive egyenlőtlenségek (Nattaf et al., 2016)

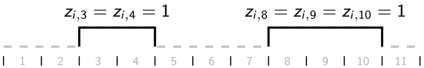
$$\sum_{e_k \in S} (-1)^k z_{i,e_k} \leq 1, \tag{4}$$

ahol $S = \{e_0, e_1, \ldots, e_{2\ell}\} \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$ és $e_k < e_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, 2\ell - 1)$.

Non-preemptive egyenlőtlenségek (Nattaf et al., 2016)

$$\sum_{e_k \in S} (-1)^k z_{i,e_k} \leq 1, \tag{4}$$

ahol $S = \{e_0, e_1, \ldots, e_{2\ell}\} \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$ és $e_k < e_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, 2\ell - 1)$.



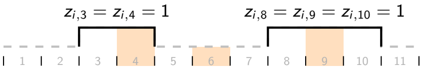
On/Off esemény-alapú megközelítés

Non-preemptive egyenlőtlenségek

Non-preemptive egyenlőtlenségek (Nattaf et al., 2016)

$$\sum_{e_k \in S} (-1)^k z_{i,e_k} \leq 1, \tag{4}$$

ahol $S = \{e_0, e_1, \ldots, e_{2\ell}\} \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$ és $e_k < e_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, 2\ell - 1)$.



$$z_{i,4} + z_{i,9} \leq 1 + z_{i,6}$$

On/Off esemény-alapú megközelítés

Non-preemptive egyenlőtlenségek

Non-preemptive egyenlőtlenségek (Nattaf et al., 2016)

$$\sum_{e_k \in S} (-1)^k z_{i,e_k} \leq 1, \tag{4}$$

ahol $S = \{e_0, e_1, \dots, e_{2\ell}\} \subseteq \{1, \dots, 2n-1\}$ és $e_k < e_{k+1}$ $(k = 0, \dots, 2\ell - 1)$.

Tétel (Nattaf et al. (2016))

A non-preemptive egyenlőtlenségek (4) érvényesek Q_i^{OO}-re, sőt facet-t definiálnak.

On/Off esemény-alapú megközelítés

Non-preemptive egyenlőtlenségek

Non-preemptive egyenlőtlenségek (Nattaf et al., 2016)

$$\sum_{e_k \in S} (-1)^k z_{i,e_k} \leq 1, \tag{4}$$

ahol $S = \{e_0, e_1, \ldots, e_{2\ell}\} \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$ és $e_k < e_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, 2\ell - 1)$.

Tétel (Nattaf et al. (2016))

A non-preemptive egyenlőtlenségek (4) polinomiális időben szeparálhatóak.

Bizonyítás (alapötlet).

Leghosszabb út számítása egy megfelelően definiált aciklikus digráfban. □

On/Off esemény-alapú megközelítés

Számítási eredmények

Results on CECSP instances

		Status[a]			Time (s)	
		O	S	$\emptyset$	solved	all
$n = 10$	Default	5	0	0	0.4	(0.4)
	Separation	5	0	0	0.4	(0.4)
$n = 20$	Default	9	0	1	9.1	(62.8)
	Separation	9	0	1	4.9	(59.0)
$n = 25$	Default	8	0	2	28.4	(155.4)
	Separation	9	0	1	19.4	(83.8)
$n = 30$	Default	6	0	4	130.8	(318.5)
	Separation	6	0	4	36.5	(261.9)

[a] (after 600 seconds) **O**: optimal solution found; **S**: time limit exceeded, solution found; $\emptyset$: time limit exceeded, no solution found

Start/End esemény-alapú megközelítés

Megengedett megoldások konvex burka

Az $s_{i,j}$ illetve $e_{i,j}$ bináris változók jelölik, hogy a j esemény az i tevékenység kezdete-e illetve vége-e.

$$\sum_{j=1}^{2n} s_{i,j} = 1, \ \sum_{j=1}^{2n} e_{i,j} = 1 \qquad \forall\ i = 1, \dots, n \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (s_{i,j} + e_{i,j}) = 1 \qquad \forall\ j = 1, \dots, 2n \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} e_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{k} s_{i,j} \qquad \forall\ i = 1, \dots, n,\ \ k = 1, \dots, 2n-2 \tag{7}$$

$$s_{i,2n} = 0, \ \ e_{i,1} = 0 \qquad \forall\ i = 1, \dots, n \tag{8}$$

$P^{SE} = \left\{ (s,e) \in \{0,1\}^{n \cdot 2n} \times \{0,1\}^{n \cdot 2n} :\ (5) - (8) \text{ hold} \right\} \to$ összes tevékenység!
$Q^{SE} = conv(P^{SE})$

Start/End esemény-alapú megközelítés

Optimalizálás a poliéder felett

Tétel

Legyenek $c^s, c^e : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, 2n\} \to \mathbb{R}$ tetszőleges célfüggvények. A következő optimalizálási probléma NP-nehéz:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n} c^s(i,j) s_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n} c^e(i,j) e_{i,j} : \ (s,e) \in P^{SE} \right\}.$$

Bizonyítás (alapötlet).

Visszavezetjük az INDEPENDENT SET feladatot a problémára. $\square$

Start/End esemény-alapú megközelítés

A poliéder dimenziója

Tétel

$$\dim\left(Q^{SE}\right) = \begin{cases} 1 & \textit{ha } n = 1 \\ 5 & \textit{ha } n = 2 \\ 4n^2 - 6n + 1 & \textit{ha } n \geq 3 \end{cases}$$

Bizonyítás ($n \geq 3$, alapötlet).
Az (5), (6), (8) egyenletekből egy tetszőlegeset elhagyva, egy minimális egyenletrendszert kapunk Q^{SE}-re. □

Start/End esemény-alapú megközelítés

Parity egyenlőtlenségek

Az egyszerűség kedvéért legyen $z_{i,j} := \sum_{k=1}^{j}(s_{i,k} - e_{i,k})$ jelezve, hogy az i tevékenység aktív-e a j és $j+1$ események között ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, 2n-1$).

Parity egyenlőtlenségek

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páratlan},\ \forall\ j < n$$

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j-1} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j-1} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páros},\ \forall\ j.$$

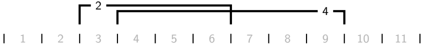
Start/End esemény-alapú megközelítés

Parity egyenlőtlenségek

Parity egyenlőtlenségek

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páratlan}, \ \forall\ j < n$$

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j-1} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j-1} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páros}, \ \forall\ j.$$



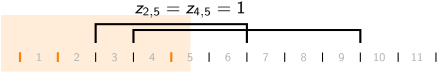
Start/End esemény-alapú megközelítés

Parity egyenlőtlenségek

Parity egyenlőtlenségek

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páratlan}, \ \forall\ j < n$$

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j-1} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j-1} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páros}, \ \forall\ j.$$



$$z_{2,5} + z_{4,5} \leq 1 + z_{1,5} + z_{3,5} + z_{5,5} + z_{6,5}$$

Start/End esemény-alapú megközelítés

Parity egyenlőtlenségek

Parity egyenlőtlenségek

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páratlan},\ \forall\ j < n$$

$$\sum_{i \in S} z_{i,2j-1} \leq |S| - 1 + \sum_{i \notin S} z_{i,2j-1} \qquad \forall\ S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \text{ páros},\ \forall\ j.$$

Tétel

A parity egyenlőtlenségek érvényesek Q^{SE}-re.

Sejtés: facet-t definiálnak.
Megjegyzés: ezek az egyenlőtlenségek *nem* érvényesek az On/Off modellben!

Adott $j < n$ esetén az első egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$1 \leq \sum_{i \in S} (1 - z_{i,2j}) + \sum_{i \notin S} z_{i,2j} \quad \forall\ S \subseteq \{1, \dots, n\} : |S| \text{ páratlan}$$

Tétel

Legyen $\bar{z} \in [0,1]^{n \cdot 2n}$ az LP-relaxált egy megoldása. A következő szeparációs probléma polinom időben megoldható:

$$\min \left\{ \sum_{i \in S} (1 - \bar{z}_{i,2j}) + \sum_{i \notin S} \bar{z}_{i,2j} :\ S \subseteq \{1, \dots, n\} : |S| \textit{ páratlan} \right\}. \tag{9}$$

Megjegyzés: ez a második egyenlőtlenségre is igaz.

Tétel

Legyen $\bar{z} \in [0,1]^{n \cdot 2n}$ az LP-relaxált egy megoldása. A következő szeparációs probléma polinom időben megoldható:

$$\min \left\{ \sum_{i \in S} (1 - \bar{z}_{i,2j}) + \sum_{i \notin S} \bar{z}_{i,2j} : \; S \subseteq \{1, \ldots, n\} : |S| \textit{ páratlan} \right\}. \qquad (9)$$

Bizonyítás (vázlat).

1. (Rendezve az értékeket) feltehető, hogy $\bar{z}_{1,j} \geq \bar{z}_{2,j} \geq \ldots \geq \bar{z}_{n,j}$ teljesül.
2. Let $t := \max\{i : 0.5 \leq \bar{z}_{i,j}\}$ (t esetleg 0), azaz $\bar{z}_{1,j} \geq \bar{z}_{2,j} \geq \ldots \bar{z}_{t,j} \geq 0.5 > \bar{z}_{t+1,j} \geq \ldots \geq \bar{z}_{n,j}$.
3. Ha t páratlan, akkor az $\{1, \ldots, t\}$ egyébként az $\{1, \ldots, t-1\}$ vagy az $\{1, \ldots, t+1\}$ optimális megoldása (9)-nek.

□

Start/End esemény-alapú megközelítés

További érvényes egyenlőtlenségek

Speciális parity egyenlőtlenségek

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} s_{k,1}$$

$$1 \leq e_{i,2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{k,1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{k,2}$$

Start/End esemény-alapú megközelítés

További érvényes egyenlőtlenségek

Speciális parity egyenlőtlenségek | Diszjunktív egyenlőtlenségek

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} s_{k,1} \quad \Rightarrow \quad e_{i,2} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{k,3} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

$$1 \leq e_{i,2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{k,1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} s_{k,2} \quad \Rightarrow \quad e_{\ell,2} \leq e_{i,2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,\ell}}^{n} s_{k,3} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,\ell}}^{n} s_{k,4} \quad \forall\, \ell \neq i$$

További érvényes egyenlőtlenségek

Speciális parity egyenlőtlenségek

Diszjunktív egyenlőtlenségek

$$1 \le \sum_{k=1}^{n} s_{k,1} \quad \Rightarrow \quad e_{i,2} \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} s_{k,3} \quad \forall\ i = 1, \dots, n$$

$$1 \le e_{i,2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} s_{k,1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} s_{k,2} \quad \Rightarrow \quad e_{\ell,2} \le e_{i,2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i,\ell}}^{n} s_{k,3} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i,\ell}}^{n} s_{k,4} \quad \forall\ \ell \ne i$$

Általánosított egyenlőtlenségek

$$\Rightarrow \quad 1 \le \sum_{i \in S} e_{i,2|S|} + \sum_{i \notin S} \sum_{j=1}^{2|S|} s_{i,j} \quad \forall\ \emptyset \ne S \subseteq \mathcal{A}$$

Start/End esemény-alapú megközelítés

Konklúzió, további tervek

További tervek:

- Érvényes egyenlőtlenségek (non-preemptive, parity) további tesztelése
- Szétválasztási stratégiák tesztelése a CECSP feladatra
- Eredmények alkalmazása hasonló struktúrájú feladatokra (pl.: Coupled Task Problem)

Köszönöm a figyelmet!

✉ marko.horvath@sztaki.mta.hu

Hivatkozások

Nattaf, M., Kis, T., Artigues, C., and Lopez, P. (2016). Polyhedral results and valid inequalities for the continuous energy-constrained scheduling problem. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01391403.