

Mire jók a stabil párosítások?

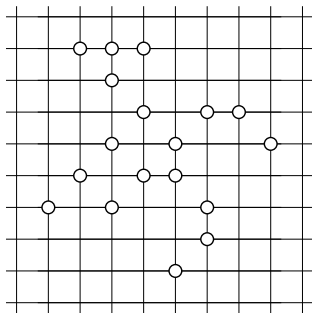
Fleiner Tamás (BME)

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia
2017 június 14, Cegléd

Egy Kürschák feladat (2007/3)

Bizonyítandó, hogy a sík rácspontjainak tetszőleges véges H halmazából kiválasztható olyan K részhalmaz, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

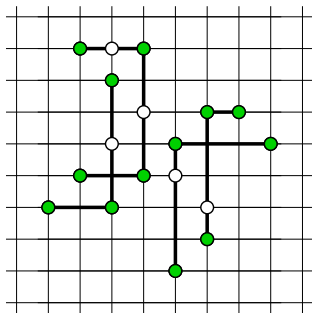
1. a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K -t legfeljebb 2 pontban metszi,
2. $H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K -beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.



Egy Kürschák feladat (2007/3)

Bizonyítandó, hogy a sík rácspontjainak tetszőleges véges H halmazából kiválasztható olyan K részhalmaz, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

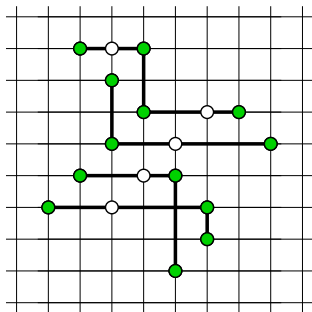
1. a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K -t legfeljebb 2 pontban metszi,
2. $H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K -beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.



Egy Kürschák feladat (2007/3)

Bizonyítandó, hogy a sík rácspontjainak tetszőleges véges H halmazából kiválasztható olyan K részhalmaz, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

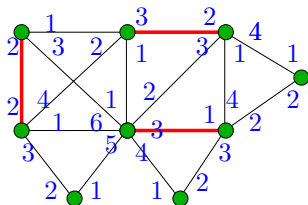
1. a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K -t legfeljebb 2 pontban metszi,
2. $H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K -beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.



Stabil párosítások

Def: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és minden v csúcsára legyen $\prec_v$ a v -re illeszkedő élek egy lineáris rendezése. **Stabil párosításnak** a G olyan M párosítását nevezzük, amely dominál minden M -en kívüli élt, azaz tetsz. $e \in E \setminus M$ élre van olyan v csúcs és $m \in M$ párosításél, amelyre $m \prec_v e$ áll.

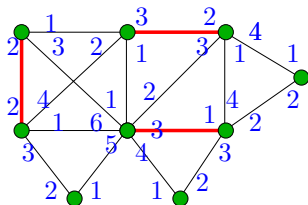
Stabil párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és minden v csúcsára legyen $\prec_v$ a v -re illeszkedő élek egy lineáris rendezése. **Stabil párosításnak** a G olyan M párosítását nevezzük, amely dominál minden M -en kívüli élt, azaz tetsz. $e \in E \setminus M$ éltre van olyan v csúcs és $m \in M$ párosításél, amelyre $m \prec_v e$ áll.

Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Stabil párosítások

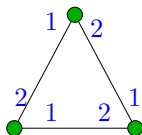
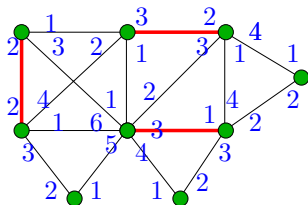


Def: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és minden v csúcsára legyen $\prec_v$ a v -re illeszkedő élek egy lineáris rendezése. **Stabil párosításnak** a G olyan M párosítását nevezzük, amely dominál minden M -en kívüli élt, azaz tetsz. $e \in E \setminus M$ éltre van olyan v csúcs és $m \in M$ párosításél, amelyre $m \prec_v e$ áll.

Megf: Nincs mindig stabil párosítás. Például K_3 és ciklikus preferenciák esetén) nincs stabil párosítása.

Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Stabil párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és minden v csúcsára legyen $\prec_v$ a v -re illeszkedő élek egy lineáris rendezése. **Stabil párosításnak** a G olyan M párosítását nevezzük, amely dominál minden M -en kívüli élt, azaz tetsz. $e \in E \setminus M$ éltre van olyan v csúcs és $m \in M$ párosításél, amelyre $m \prec_v e$ áll.

Megf: Nincs mindig stabil párosítás. Például K_3 és ciklikus preferenciák esetén) nincs stabil párosítása.

Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Epizódok a stabil párosítások történetéből

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)
- ▶ Galvin, 1995 (LCC páros gráfokra)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)
- ▶ Galvin, 1995 (LCC páros gráfokra)
- ▶ Adachi, 1998; F 2000; Hatfield-Milgrom, 2005
(Knaster-Tarski, 1928)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)
- ▶ Galvin, 1995 (LCC páros gráfokra)
- ▶ Adachi, 1998; F 2000; Hatfield-Milgrom, 2005
(Knaster-Tarski, 1928)
- ▶ Abdulkadiroglu, Kojima, Pathak, Roth, Sönmez, Ünver, 2003-
(Beiskolázási mechanizmusok)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)
- ▶ Galvin, 1995 (LCC páros gráfokra)
- ▶ Adachi, 1998; F 2000; Hatfield-Milgrom, 2005
(Knaster-Tarski, 1928)
- ▶ Abdulkadiroglu, Kojima, Pathak, Roth, Sönmez, Ünver, 2003-
(Beiskolázási mechanizmusok)
- ▶ Ostrovsky, 2006 (supply chains); F, 2009 (stable flows)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)
- ▶ Galvin, 1995 (LCC páros gráfokra)
- ▶ Adachi, 1998; F 2000; Hatfield-Milgrom, 2005
(Knaster-Tarski, 1928)
- ▶ Abdulkadiroglu, Kojima, Pathak, Roth, Sönmez, Ünver, 2003-
(Beiskolázási mechanizmusok)
- ▶ Ostrovsky, 2006 (supply chains); F, 2009 (stable flows)
- ▶ Király Z, 2008 (max méretű stabil párosítás approximációja)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)
- ▶ Galvin, 1995 (LCC páros gráfokra)
- ▶ Adachi, 1998; F 2000; Hatfield-Milgrom, 2005
(Knaster-Tarski, 1928)
- ▶ Abdulkadiroglu, Kojima, Pathak, Roth, Sönmez, Ünver, 2003-
(Beiskolázási mechanizmusok)
- ▶ Ostrovsky, 2006 (supply chains); F, 2009 (stable flows)
- ▶ Király Z, 2008 (max méretű stabil párosítás approximációja)
- ▶ Roth, 2012 (Nobel díj)

Epizódok a stabil párosítások történetéből

- ▶ Gale & Shapley, 1962
- ▶ Conway (stabil párosítások hálótulajdonsága)
- ▶ Roth, 1984 (NRMP, 1950)
- ▶ Irving, 1985; Tan, 1991; Aharoni-F, 2002
(„egyoldalú piacok”, $\frac{1}{2}$ -párosítások, Scarf lemma)
- ▶ Vande Vate, 1989; Rothblum, 1992; Baïou & Balinski, 2000;
F, 2000, 2003 (stabil párosítás poliéder)
- ▶ Galvin, 1995 (LCC páros gráfokra)
- ▶ Adachi, 1998; F 2000; Hatfield-Milgrom, 2005
(Knaster-Tarski, 1928)
- ▶ Abdulkadiroglu, Kojima, Pathak, Roth, Sönmez, Ünver, 2003-
(Beiskolázási mechanizmusok)
- ▶ Ostrovsky, 2006 (supply chains); F, 2009 (stable flows)
- ▶ Király Z, 2008 (max méretű stabil párosítás approximációja)
- ▶ Roth, 2012 (Nobel díj)
- ▶ Cseh & Kavitha, 2015 (népszerű és domináns párosítások...)

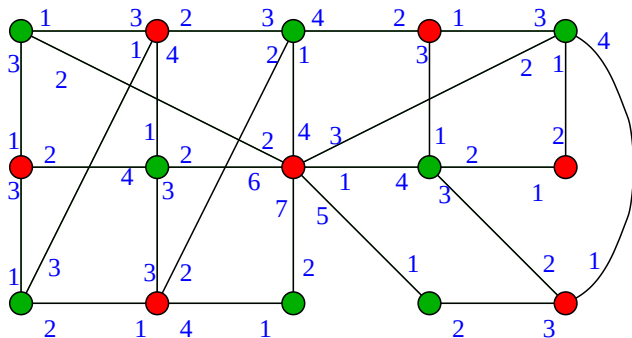
Tartalomjegyzék

- ▶ A Gale-Shapley algoritmus és következményei
- ▶ Kiválasztási függvények, és fixponttételek
- ▶ Alkalmazások
(splitting tulajdonság, medián stabil párosítás, Pym tétel)
- ▶ Galvin tétele
- ▶ Egy alsó kvótás egyetemi felvételi probléma megoldása matroidokkal
- ▶ Stabil $\frac{1}{2}$ -párosítások és a Scarf lemma
- ▶ Irving algoritmusai és általánosításai
- ▶ Stabil párosítás poliéderek
- ▶ Stabil folyamok
- ▶ Stabil párosítások és gráf-kernelek

Stabil házasságok

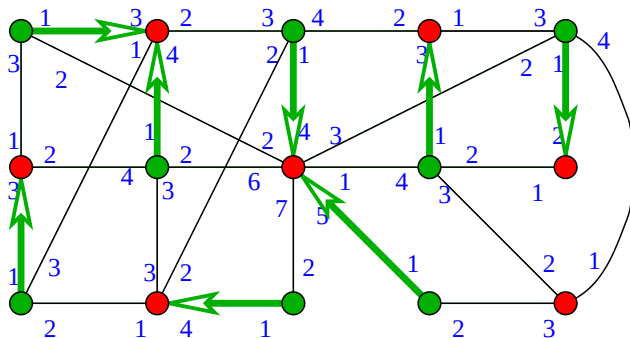
Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

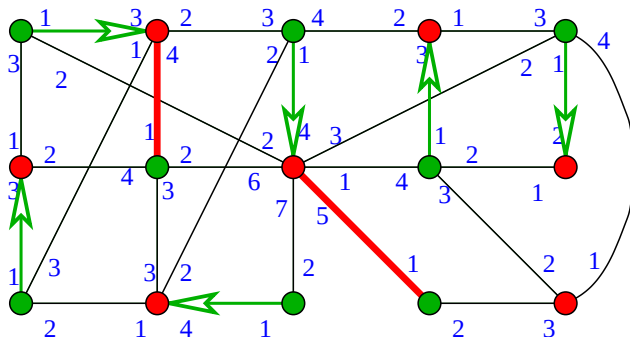
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és

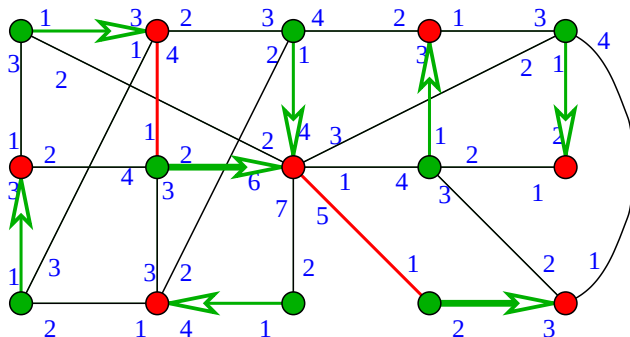
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

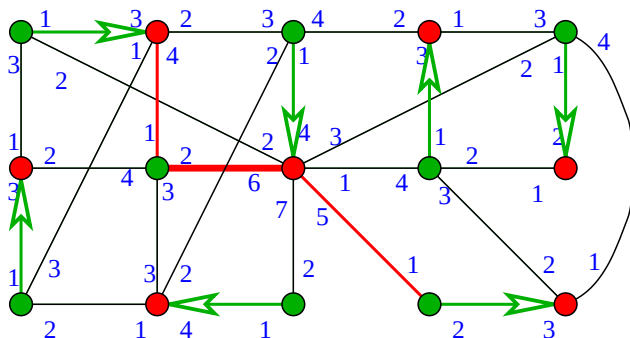
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik,

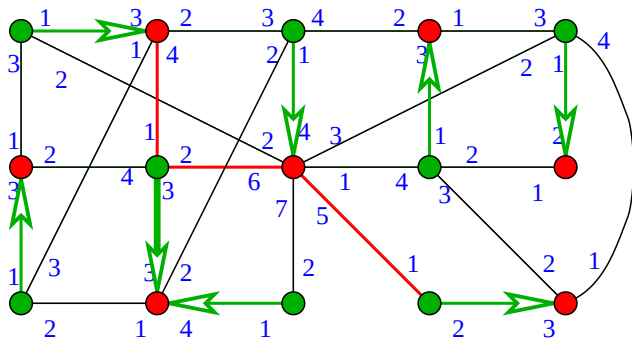
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

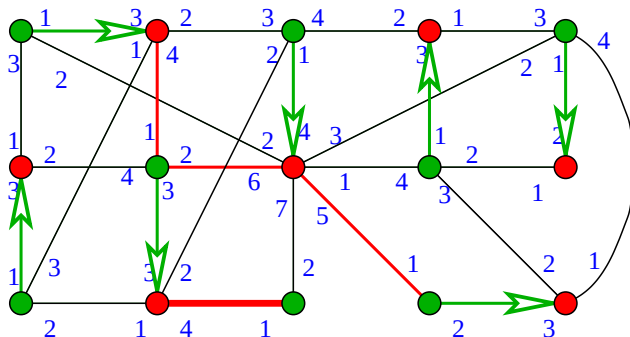
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik,

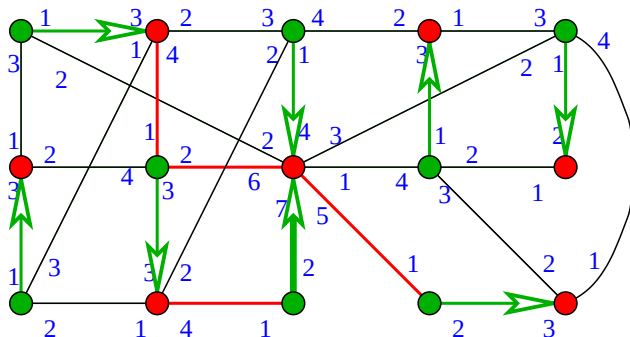
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

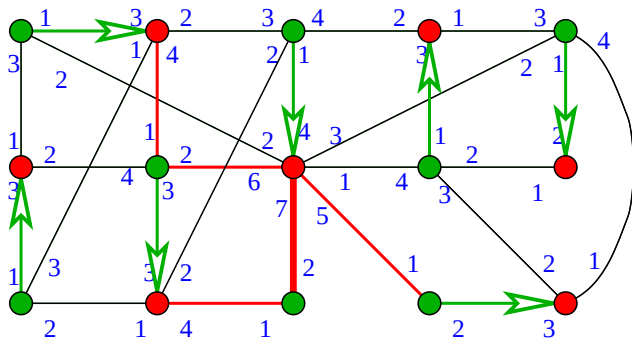
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik,

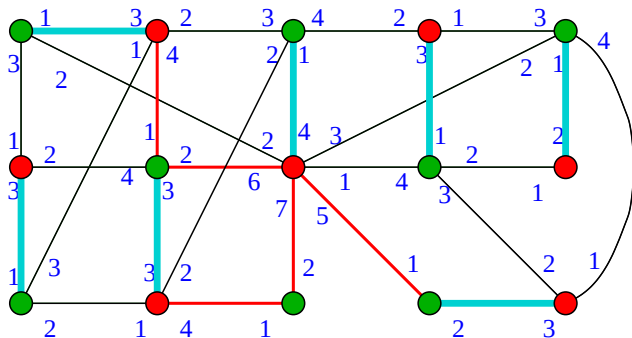
Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

Stabil házasságok



Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikoszorózás váltakozik, amíg van kit.

Stabil házasságok

Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg van kit. Ha nincs, akkor a lánykérések stabil párosítást alkotnak.

Stabil házasságok

Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg van kit. Ha nincs, akkor a lánykérések stabil párosítást alkotnak.

Megfigyelések:

- (1) A lánykérő algoritmus valóban stabil párosítást talál.
- (2) Ez a párosítás fiú-optimalis (ill. „lány-pesszimális”).
- (3) Stabil párosítások hálótulajdonsága: ha két stabil párosítás esetén minden fiú a jobbik partnert választja, újabb stabil párosítást kapunk.
- (4) Érdeellentét: Ha a fiúk mindegyike jobb partnert kap M szerint, mint M' -ben akkor a lányokra a fordítottja igaz.
- (5) Minden stabil párosításban ugyanazok maradnak facérok.

Stabil házasságok

Gale-Shapley tétel ('62): Véges páros gráfban tetszőleges preferenciák mellett mindig van stabil párosítás.

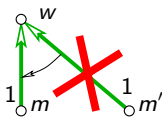
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg van kit. Ha nincs, akkor a lánykérések stabil párosítást alkotnak.

Megfigyelések:

- (1) A lánykérő algoritmus valóban stabil párosítást talál.
- (2) Ez a párosítás fiú-optimalis (ill. „lány-pesszimális”).
- (3) Stabil párosítások hálótulajdonsága: ha két stabil párosítás esetén minden fiú a jobbik partnert választja, újabb stabil párosítást kapunk.
- (4) Érdeellentét: Ha a fiúk mindegyike jobb partnert kap M szerint, mint M' -ben akkor a lányokra a fordítottja igaz.
- (5) Minden stabil párosításban ugyanazok maradnak facérok.

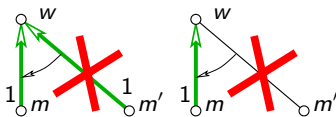
Cél: Unortodox bizonyítás a fentiekre.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa

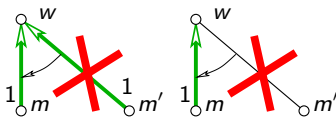


Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



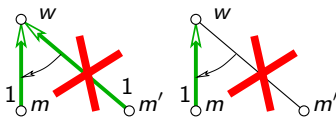
Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

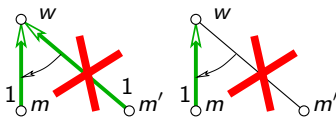
Valójában többet is megtehetünk:

Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

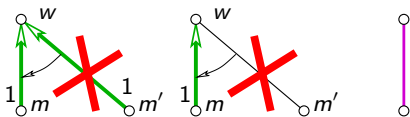
Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

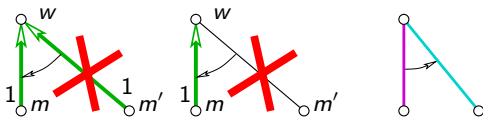
Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

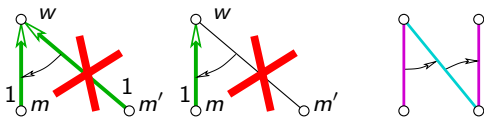
Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

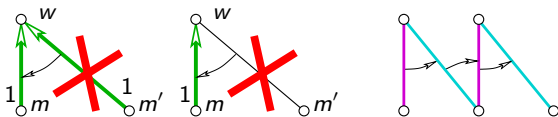
Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

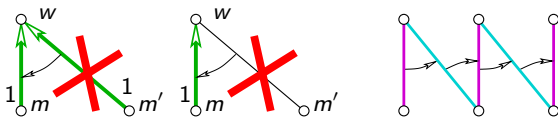
Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

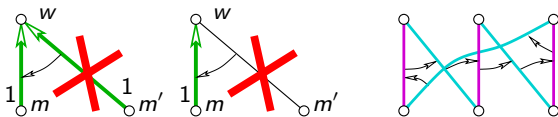
Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykéresekhöz tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

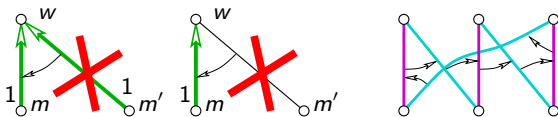
Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

A Gale-Shapley algoritmus kulcsa



Rutin lépés: Ha a w lány kezét az m és m' is megkéri, és w közülük m -et választja, akkor töröljük az $m'w$ élt G -ből.

Valójában többet is megtehetünk:

Megf: (1) Ha w az m legjobb partnere, és törölünk minden ennél w szerint rosszabbét, akkor így **a stabil párosítások halmaza nem változik**, azaz minden stabil megmarad és új sem keletkezik.

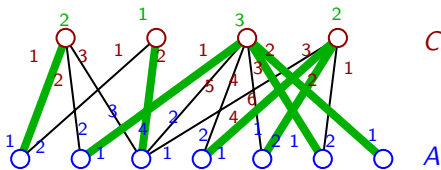
(2) Az (1)-hez nem szükséges, hogy G páros legyen.

(3) Ha G páros, akkor a lánykérő algoritmus (1) szerint töröl éleket. Előbb-utóbb a fiúk különböző lányt fognak megkérni. A lánykérésekhez tartozó élek stabil párosítást alkotnak, ami a fiúk számára a legjobb, a lányoknak a legrosszabb.

Megf: Két stabil párosítás szimmetrikus különbségének minden komponense „preferenciakör”.

Köv: A stabil párosítások hálótulajdonsága.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma

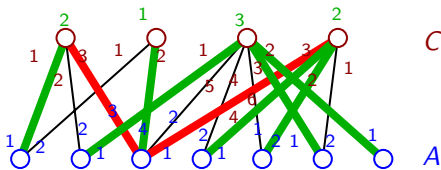


Modell:

- ▶ Az A és C színosztálybeli csúcsok a jelentkezők ill. a szakok
- ▶ a páros gráf élei a jelentkezések,
- ▶ $q(c)$ a c szak keretszáma.
- ▶ Minden jelentkező lineárisan rendezi a jelentkezéseit,
- ▶ akárcsak a szakok a hozzájuk befutó jelentkezéseket.

Megoldás vagy **felvételi séma** a jelentkezések olyan halmaza, amelyben minden jelentkezőhöz legfeljebb egy, minden c szakhoz pedig legfeljebb $q(c)$ jelentkezés tartozik.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma



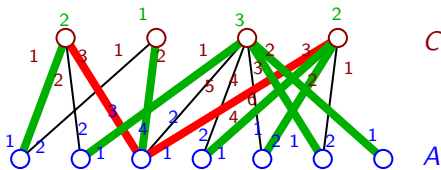
Modell:

- ▶ Az A és C színosztálybeli csúcsok a jelentkezők ill. a szakok
- ▶ a páros gráf élei a jelentkezések,
- ▶ $q(c)$ a c szak keretszáma.
- ▶ Minden jelentkező lineárisan rendezi a jelentkezéseit,
- ▶ akárcsak a szakok a hozzájuk befutó jelentkezéseket.

Megoldás vagy **felvételi séma** a jelentkezések olyan halmaza, amelyben minden jelentkezőhöz legfeljebb egy, minden c szakhoz pedig legfeljebb $q(c)$ jelentkezés tartozik.

Egy ac jelentkezés akkor **blokkol** egy megoldást, ha mind a , mind c jobban járna, ha az ac jelentkezés megvalósulna.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma



Modell:

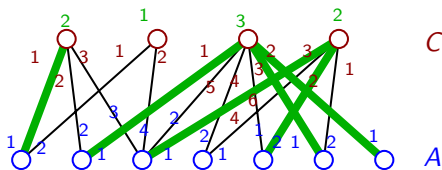
- ▶ Az A és C színosztálybeli csúcsok a jelentkezők ill. a szakok
- ▶ a páros gráf élei a jelentkezések,
- ▶ $q(c)$ a c szak keretszáma.
- ▶ Minden jelentkező lineárisan rendezi a jelentkezéseit,
- ▶ akárcsak a szakok a hozzájuk befutó jelentkezéseket.

Megoldás vagy **felvételi séma** a jelentkezések olyan halmaza, amelyben minden jelentkezőhöz legfeljebb egy, minden c szakhoz pedig legfeljebb $q(c)$ jelentkezés tartozik.

Egy ac jelentkezés akkor **blokkol** egy megoldást, ha mind a , mind c jobban járna, ha az ac jelentkezés megvalósulna.

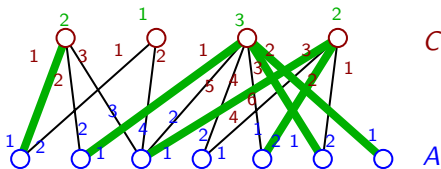
Egy megoldás akkor **stabil** ha egyetlen jelentkezés sem blokkolja.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma



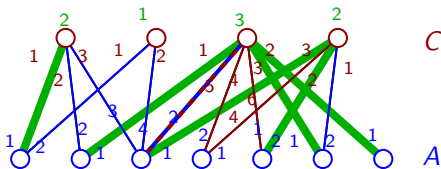
Egy megoldás akkor **stabil** ha egyetlen jelentkezés sem blokkolja.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma



Egy megoldás akkor **stabil** ha egyetlen jelentkezés sem blokkolja.
Avagy: ha minden más jelentkezést dominál. Azaz teszőleges meg
nem valósult a c jelentkezés esetén vagy a kapott jobb szakot c -nél
vagy c töltötte fel a -nál jobb jelentkezőkkel mind a $q(c)$ helyét.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma

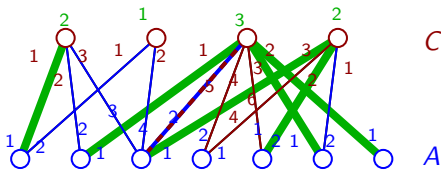


Egy megoldás akkor **stabil** ha egyetlen jelentkezés sem blokkolja.
Avagy: ha minden más jelentkezést dominál. Azaz teszőleges meg nem valósult ac jelentkezés esetén vagy a kapott jobb szakot c -nél vagy c töltötte fel a -nál jobb jelentkezőkkel mind a $q(c)$ helyét.

Három halmazt definiálhatunk:

- megvalósult jelentkezések S ,
- jelentkezők által dominált jelentkezések $\mathcal{D}_A(S)$
- ill. a szakok által dominált jelentkezések $\mathcal{D}_C(S)$.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma

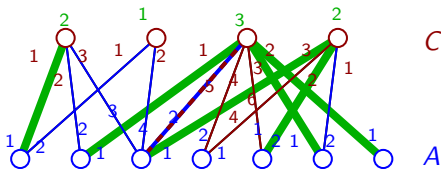


Egy megoldás akkor **stabil** ha egyetlen jelentkezés sem blokkolja.
Avagy: ha minden más jelentkezést dominál. Azaz teszőleges meg nem valósult ac jelentkezés esetén vagy a kapott jobb szakot c -nél vagy c töltötte fel a -nál jobb jelentkezőkkel mind a $q(c)$ helyét.
Három halmazt definiálhatunk: megvalósult jelentkezések S ,
jelentkezők által dominált jelentkezések $\mathcal{D}_A(S)$
ill. a szakok által dominált jelentkezések $\mathcal{D}_C(S)$.

Megfigyelés:

A jelentkezők az $S \cup \mathcal{D}_A(S)$ halmazból S -t választják,
a szakok az $S \cup \mathcal{D}_C(S)$ halmazból S -t választják:
 $\mathcal{C}_A(S \cup \mathcal{D}_A(S)) = S$ és $\mathcal{C}_C(S \cup \mathcal{D}_C(S)) = S$.

Kétoldalú piacok: az egyetemi felvételi probléma



Egy megoldás akkor **stabil** ha egyetlen jelentkezés sem blokkolja.
Avagy: ha minden más jelentkezést dominál. Azaz teszőleges meg nem valósult a c jelentkezés esetén vagy a kapott jobb szakot c -nél vagy c töltötte fel a -nál jobb jelentkezőkkel mind a $q(c)$ helyét.
Három halmazt definiálhatunk: megvalósult jelentkezések S ,
jelentkezők által dominált jelentkezések $\mathcal{D}_A(S)$
ill. a szakok által dominált jelentkezések $\mathcal{D}_C(S)$.

Megfigyelés:

A jelentkezők az $S \cup \mathcal{D}_A(S)$ halmazból S -t választják,
a szakok az $S \cup \mathcal{D}_C(S)$ halmazból S -t választják:

$\mathcal{C}_A(S \cup \mathcal{D}_A(S)) = S$ és $\mathcal{C}_C(S \cup \mathcal{D}_C(S)) = S$.

Cél: Kiválasztási függvényekre és gráfokra alapozott tárgyalás.

Kiválasztási függvények és stabilitás

Általánosított modell: adottak a jelentkezők ill. a szakok kiválasztási függvényei a G gráf élein:

$$\mathcal{C}_A(F) \subseteq F \quad \text{ill.} \quad \mathcal{C}_C(F) \subseteq F \quad \forall F \subseteq E.$$

Példa: $\mathcal{C}_A(F)$ = minden jelentkező kiválasztja az F -beli legjobb élt. $\mathcal{C}_C(F)$ = a szakok számára legjobb F -beli jelentkezők, amelyek még beférnek a keretszámokba.

Stabil megoldás: Az élek S részhalmaza, melyre

$$S = \mathcal{C}_C(S) = \mathcal{C}_A(S) \quad (\text{megoldás}) \quad \text{és} \\ e \notin S \Rightarrow e \notin \mathcal{C}_C(S \cup \{e\}) \text{ vagy } e \notin \mathcal{C}_A(S \cup \{e\}) \quad (e \text{ nem blokkol})$$

Kiválasztási függvények és stabilitás

Általánosított modell: adottak a jelentkezők ill. a szakok kiválasztási függvényei a G gráf élein:

$$\mathcal{C}_A(F) \subseteq F \quad \text{ill.} \quad \mathcal{C}_C(F) \subseteq F \quad \forall F \subseteq E.$$

Példa: $\mathcal{C}_A(F)$ = minden jelentkező kiválasztja az F -beli legjobb élt. $\mathcal{C}_C(F)$ = a szakok számára legjobb F -beli jelentkezések, amelyek még beférnek a keretszámokba.

Stabil megoldás: Az élek S részhalmaza, melyre

$$S = \mathcal{C}_C(S) = \mathcal{C}_A(S) \quad (\text{megoldás}) \quad \text{és} \\ e \notin S \Rightarrow e \notin \mathcal{C}_C(S \cup \{e\}) \text{ vagy } e \notin \mathcal{C}_A(S \cup \{e\}) \quad (e \text{ nem blokkol})$$

Absztrakt def: Adott az E élhalmaz ill. a $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_C$ kiv. fv-k.

$$\text{Az } S \text{ élhalmaz } \textbf{stabil megoldás} \quad \exists X, Y \subseteq E \text{ amire} \\ X \cup Y = E, \quad X \cap Y = S \quad \text{és} \quad \mathcal{C}_A(X) = \mathcal{C}_C(Y) = S.$$

Kiválasztási függvények és stabilitás

Általánosított modell: adottak a jelentkezők ill. a szakok kiválasztási függvényei a G gráf élein:

$$\mathcal{C}_A(F) \subseteq F \quad \text{ill.} \quad \mathcal{C}_C(F) \subseteq F \quad \forall F \subseteq E.$$

Példa: $\mathcal{C}_A(F)$ = minden jelentkező kiválasztja az F -beli legjobb élt. $\mathcal{C}_C(F)$ = a szakok számára legjobb F -beli jelentkezések, amelyek még beférnek a keretszámokba.

Stabil megoldás: Az élek S részhalmaza, melyre

$$S = \mathcal{C}_C(S) = \mathcal{C}_A(S) \quad (\text{megoldás}) \quad \text{és} \\ e \notin S \Rightarrow e \notin \mathcal{C}_C(S \cup \{e\}) \text{ vagy } e \notin \mathcal{C}_A(S \cup \{e\}) \quad (e \text{ nem blokkol})$$

Absztrakt def: Adott az E élhalmaz ill. a $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_C$ kiv. fv-k.

$$\text{Az } S \text{ élhalmaz } \textbf{stabil megoldás} \quad \exists X, Y \subseteq E \text{ amire} \\ X \cup Y = E, \quad X \cap Y = S \quad \text{és} \quad \mathcal{C}_A(X) = \mathcal{C}_C(Y) = S.$$

Kiválasztási függvények tulajdonságai: A $\mathcal{C} : 2^E \rightarrow 2^E$ kiv.

fv **komonoton** ha $F' \subseteq F \Rightarrow F' \setminus \mathcal{C}(F') \subseteq F \setminus \mathcal{C}(F)$

útfüggetlen (PI) ha $\mathcal{C}(F) \subseteq F' \subseteq F \Rightarrow \mathcal{C}(F') = \mathcal{C}(F)$ végül

növekvő („law of aggregate demand”) ha $F' \subseteq F \Rightarrow |\mathcal{C}(F')| \leq |\mathcal{C}(F)|$.

Kiválasztási függvények és stabilitás

Általánosított modell: adottak a jelentkezők ill. a szakok kiválasztási függvényei a G gráf élein:

$$\mathcal{C}_A(F) \subseteq F \quad \text{ill.} \quad \mathcal{C}_C(F) \subseteq F \quad \forall F \subseteq E.$$

Példa: $\mathcal{C}_A(F)$ = minden jelentkező kiválasztja az F -beli legjobb élt. $\mathcal{C}_C(F)$ = a szakok számára legjobb F -beli jelentkezések, amelyek még beférnek a keretszámokba.

Stabil megoldás: Az élek S részhalmaza, melyre

$$S = \mathcal{C}_C(S) = \mathcal{C}_A(S) \quad (\text{megoldás}) \quad \text{és} \\ e \notin S \Rightarrow e \notin \mathcal{C}_C(S \cup \{e\}) \text{ vagy } e \notin \mathcal{C}_A(S \cup \{e\}) \quad (e \text{ nem blokkol})$$

Absztrakt def: Adott az E élhalmaz ill. a $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_C$ kiv. fv-k.

Az S élhalmaz **stabil megoldás** $\exists X, Y \subseteq E$ amire
 $X \cup Y = E, \quad X \cap Y = S \quad \text{és} \quad \mathcal{C}_A(X) = \mathcal{C}_C(Y) = S.$

Kiválasztási függvények tulajdonságai: A $\mathcal{C} : 2^E \rightarrow 2^E$ kiv.

fv **komonoton** ha $F' \subseteq F \Rightarrow F' \setminus \mathcal{C}(F') \subseteq F \setminus \mathcal{C}(F)$

útfüggetlen (PI) ha $\mathcal{C}(F) \subseteq F' \subseteq F \Rightarrow \mathcal{C}(F') = \mathcal{C}(F)$ végül

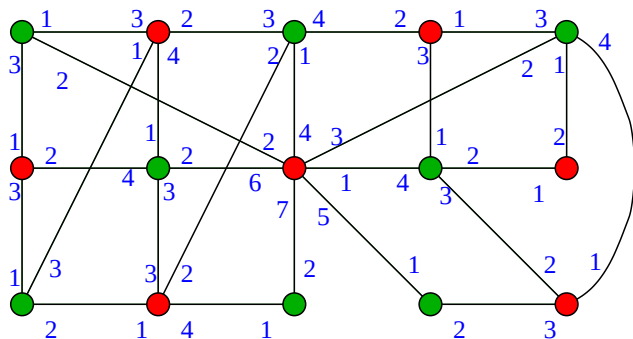
növekvő („law of aggregate demand”) ha $F' \subseteq F \Rightarrow |\mathcal{C}(F')| \leq |\mathcal{C}(F)|.$

Megf: Ha $\mathcal{C}$ növekvő és komonoton, akkor útfüggetlen.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel

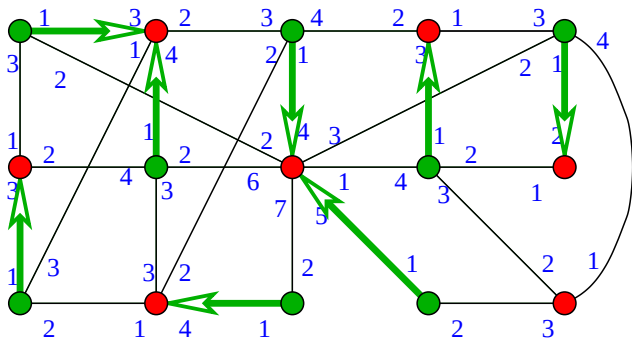
Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

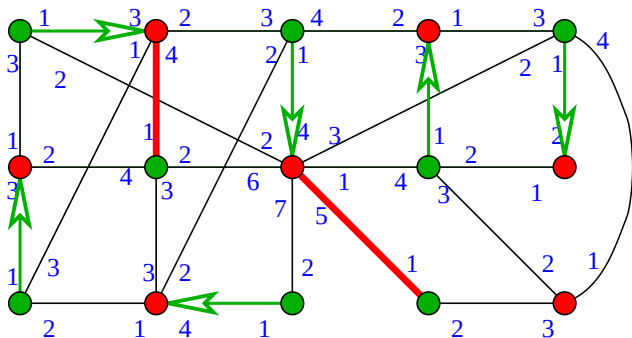
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és

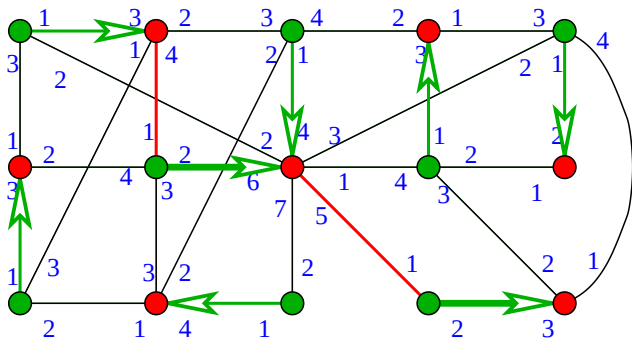
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

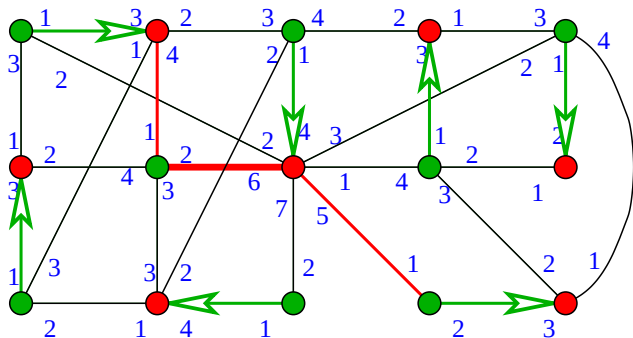
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikoszorázás váltakozik,

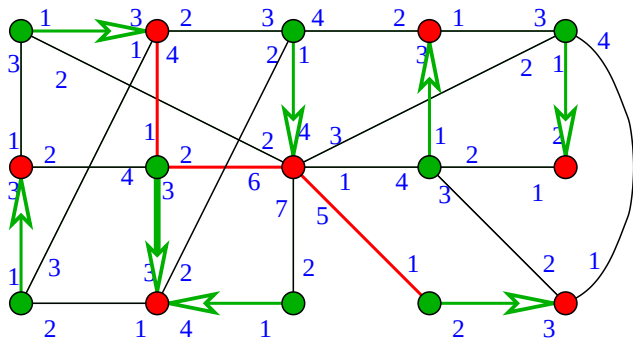
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

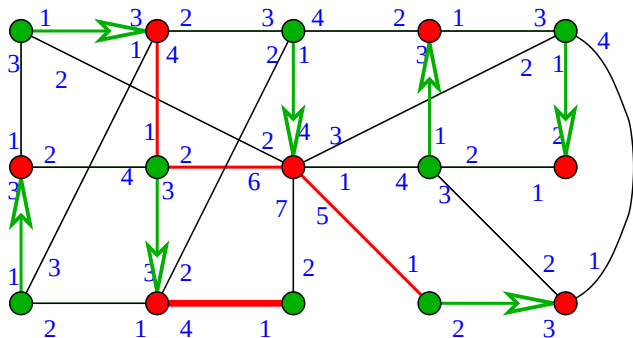
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik,

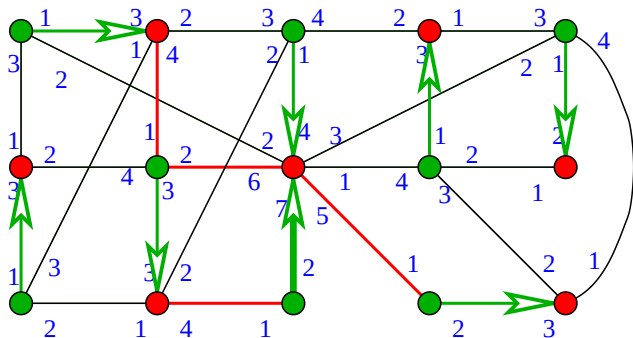
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

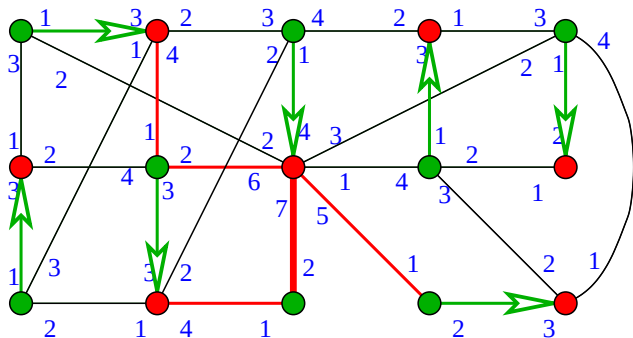
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik,

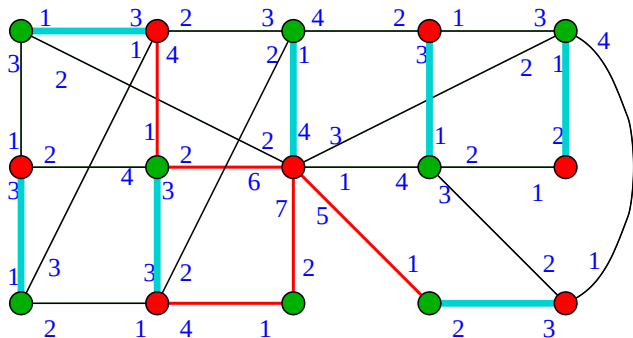
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és **kikosarazás** váltakozik,

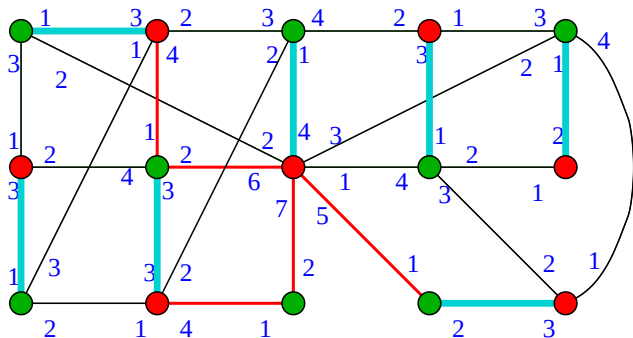
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

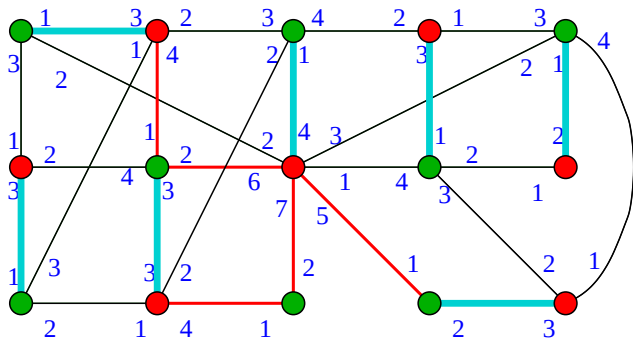
Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.
Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

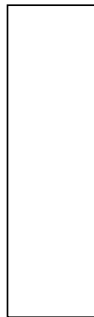
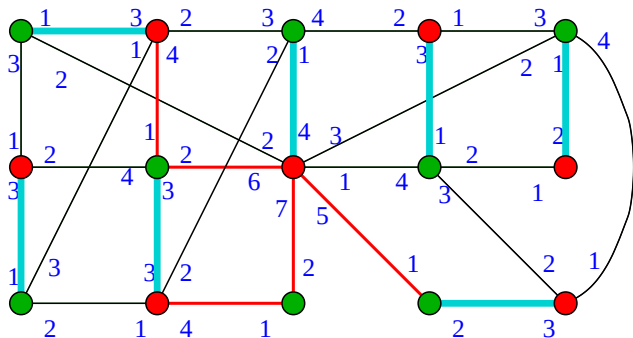
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_0

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

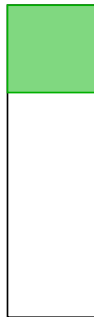
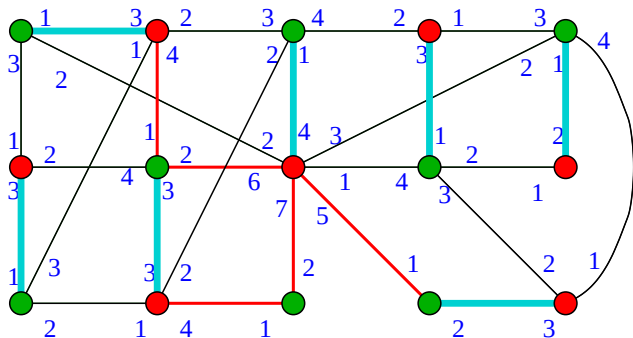
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_0

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

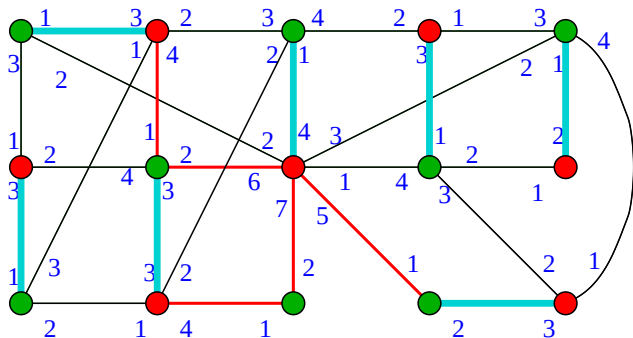
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_0

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

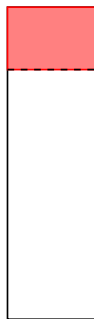
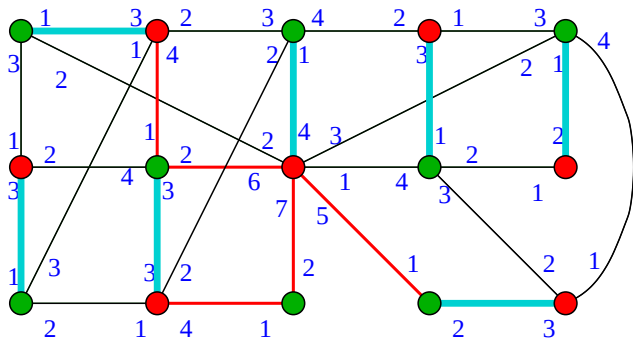
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_1

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

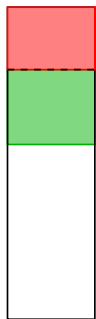
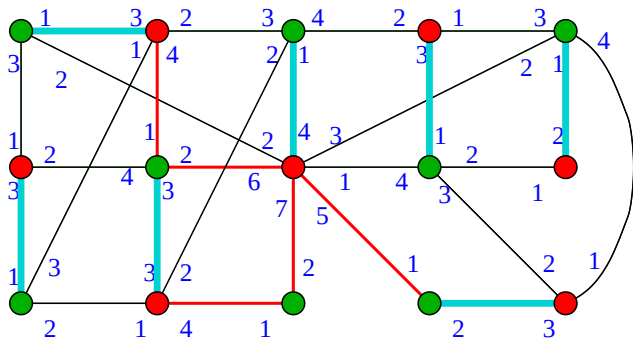
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_1

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

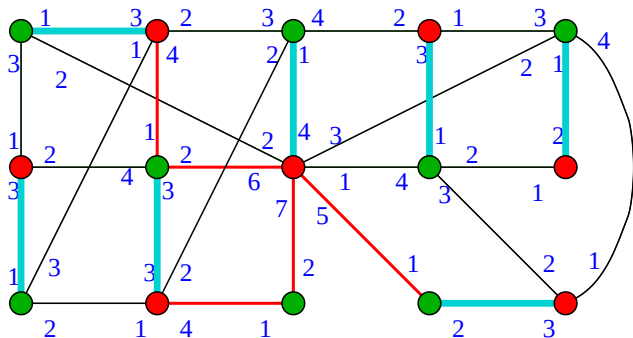
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_2

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

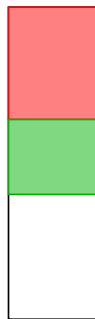
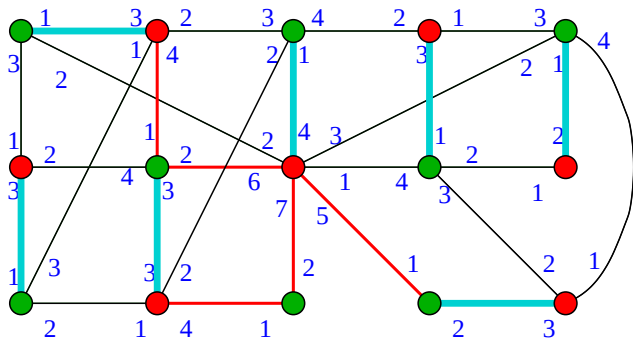
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_2

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

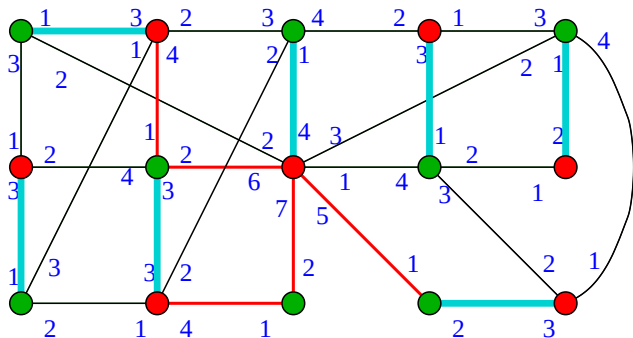
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_2

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

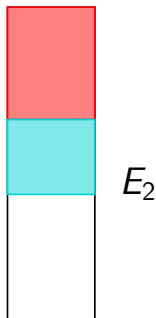
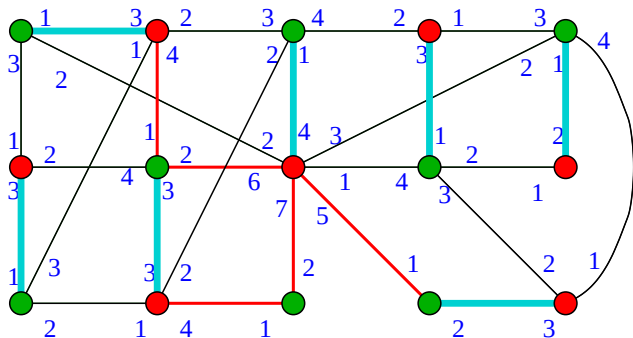
Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosarazznak.

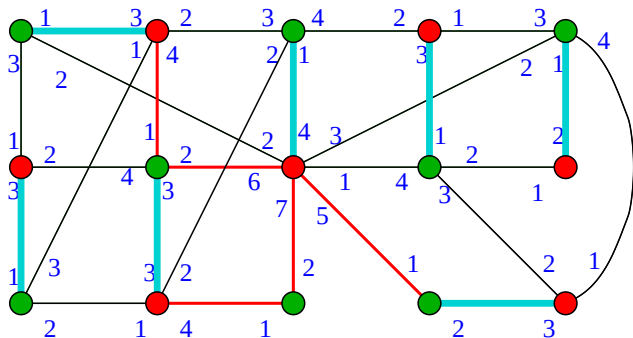
Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Kelso-Crawford Tétel: Ha a C_A és C_C kiv. fv-ek komonotonok és útfüggetlenek, akkor a fenti algoritmus stabil megoldást talál.

Lánykérés kiválasztási függvényekkel



E_2

Gale-Shapley Tétel: Mindig van stabil párosítás.

Biz. Lánykérés és kikosarazás váltakozik, amíg vkit kikosaraznak.

Kiválasztási függvényekre történő általánosítás.

Legyen $E_0 = E$ és $E_{i+1} = E_i \setminus (C_A(E_i) \setminus C_C(C_A(E_i)))$.

Ha $E_i = E_{i+1}$ akkor $C_A(E_i)$ stabil megoldás.

Kelso-Crawford Tétel: Ha a C_A és C_C kiv. fv-ek komonotonok és útfüggetlenek, akkor a fenti algoritmus stabil megoldást talál.

Buta kérdés: Mitől működik a fenti algoritmus?

Tarski fixponttétele

Def: Az $\mathcal{F}$ halmazfüggvény **monoton**, ha $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$.

Megf: Legyen $\bar{\mathcal{C}}(X) = X \setminus \mathcal{C}(X)$.

Ekkor a $\mathcal{C}$ kiv. fv pontosan akkor komonoton, ha $\bar{\mathcal{C}}$ monoton.

Knaster-Tarski fixponttétel: Ha $\mathcal{F} : 2^E \rightarrow 2^E$ monoton, akkor létezik fixpontja: $\mathcal{F}(X) = X$ (valamely $X \subseteq E$ -re).

Ráadásul a fixpontok hálót alkotnak: ha $\mathcal{F}(X) = X$ és $\mathcal{F}(Y) = Y$ akkor $X \cap Y$ tartalmaz fixpontot, és ezek között van egy legbővebb ill. az $X \cup Y$ -t tartalmazó fixpontok közt van egy legszűkebb.

Tarski fixponttétele

Def: Az $\mathcal{F}$ halmazfüggvény **monoton**, ha $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$.

Megf: Legyen $\bar{\mathcal{C}}(X) = X \setminus \mathcal{C}(X)$.

Ekkor a $\mathcal{C}$ kiv. fv pontosan akkor komonoton, ha $\bar{\mathcal{C}}$ monoton.

Knaster-Tarski fixponttétel: Ha $\mathcal{F} : 2^E \rightarrow 2^E$ monoton, akkor létezik fixpontja: $\mathcal{F}(X) = X$ (valamely $X \subseteq E$ -re).

Ráadásul a fixpontok hálót alkotnak: ha $\mathcal{F}(X) = X$ és $\mathcal{F}(Y) = Y$ akkor $X \cap Y$ tartalmaz fixpontot, és ezek között van egy legbővebb ill. az $X \cup Y$ -t tartalmazó fixpontok közt van egy legszűkebb.

Cantor-Bernstein tétel: Ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ akkor $|A| = |B|$.

Tarski fixponttétele

Def: Az $\mathcal{F}$ halmazfüggvény **monoton**, ha $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$.

Megf: Legyen $\bar{\mathcal{C}}(X) = X \setminus \mathcal{C}(X)$.

Ekkor a $\mathcal{C}$ kiv. fv pontosan akkor komonoton, ha $\bar{\mathcal{C}}$ monoton.

Knaster-Tarski fixponttétel: Ha $\mathcal{F} : 2^E \rightarrow 2^E$ monoton, akkor létezik fixpontja: $\mathcal{F}(X) = X$ (valamely $X \subseteq E$ -re).

Ráadásul a fixpontok hálót alkotnak: ha $\mathcal{F}(X) = X$ és $\mathcal{F}(Y) = Y$ akkor $X \cap Y$ tartalmaz fixpontot, és ezek között van egy legbővebb ill. az $X \cup Y$ -t tartalmazó fixpontok közt van egy legszűkebb.

Cantor-Bernstein tétel: Ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ akkor $|A| = |B|$.

A véges eset Mivel $\emptyset \subseteq \mathcal{F}(\emptyset)$, a monotonitás miatt

$\mathcal{F}(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\emptyset))$. Ezért $\mathcal{F}(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\emptyset)) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\emptyset))) \subseteq \dots$

Így $\mathcal{F}^{(i)}(\emptyset) = \mathcal{F}^{(i+1)}(\emptyset) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{(i)}(\emptyset))$ valamely i -re, és

$X = \mathcal{F}^{(i)}(\emptyset)$ fixpont. (A $\mathcal{F}(E) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(E)) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(E))) \supseteq \dots$ szűkülő lánc is fixpontra zsugorodik.)

Tarski fixponttétele

Def: Az $\mathcal{F}$ halmazfüggvény **monoton**, ha $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$.

Megf: Legyen $\bar{\mathcal{C}}(X) = X \setminus \mathcal{C}(X)$.

Ekkor a $\mathcal{C}$ kiv. fv pontosan akkor komonoton, ha $\bar{\mathcal{C}}$ monoton.

Knaster-Tarski fixponttétel: Ha $\mathcal{F} : 2^E \rightarrow 2^E$ monoton, akkor létezik fixpontja: $\mathcal{F}(X) = X$ (valamely $X \subseteq E$ -re).

Ráadásul a fixpontok hálót alkotnak: ha $\mathcal{F}(X) = X$ és $\mathcal{F}(Y) = Y$ akkor $X \cap Y$ tartalmaz fixpontot, és ezek között van egy legbővebb ill. az $X \cup Y$ -t tartalmazó fixpontok közt van egy legszűkebb.

Cantor-Bernstein tétel: Ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ akkor $|A| = |B|$.

A véges eset Mivel $\emptyset \subseteq \mathcal{F}(\emptyset)$, a monotonitás miatt

$\mathcal{F}(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\emptyset))$. Ezért $\mathcal{F}(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\emptyset)) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\emptyset))) \subseteq \dots$

Így $\mathcal{F}^{(i)}(\emptyset) = \mathcal{F}^{(i+1)}(\emptyset) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{(i)}(\emptyset))$ valamely i -re, és

$X = \mathcal{F}^{(i)}(\emptyset)$ fixpont. (A $\mathcal{F}(E) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(E)) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(E))) \supseteq \dots$ szűkülő lánc is fixpontra zsugorodik.)

Megf: A Gale-Shapely algoritmus egy monoton függvény

iterációja: $E_{i+1} = \mathcal{F}(E_i)$, ahol

$\mathcal{F}(X) = X \setminus (\mathcal{C}_A(X) \setminus \mathcal{C}_C(\mathcal{C}_A(X))) = (\text{Pl-ből}) = E \setminus \bar{\mathcal{C}}_C(E \setminus \bar{\mathcal{C}}_A(X))$

Következmények

„**Láttuk**”: Stabil megoldások = fixpontok (...)

Következmények

„Láttuk”: Stabil megoldások = fixpontok (...)

Fiú- és lányoptimalitás: A GS algoritmus a stabil megoldások közül azt találja meg, amelyik a fiúknak a lehető legjobb és a lányoknak a lehető legrosszabb. (Az $E \supseteq \mathcal{F}(E) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(E)) \supseteq \dots$ lánc a legbővebb fixponttal ér véget.)

Érdekellentét: fiúknak a legjobb = lányoknak a legrosszabb.

Következmények

„Láttuk”: Stabil megoldások = fixpontok (...)

Fiú- és lányoptimalitás: A GS algoritmus a stabil megoldások közül azt találja meg, amelyik a fiúknak a lehető legjobb és a lányoknak a lehető legrosszabb. (Az $E \supseteq \mathcal{F}(E) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(E)) \supseteq \dots$ lánc a legbővebb fixponttal ér véget.)

Érdekellentét: fiúknak a legjobb = lányoknak a legrosszabb.

Def: Egy S megoldás akkor jobb (a jelentkezőknek), mint S' , ha $\mathcal{C}_A(S \cup S') = S$. (Jelölés: $S \preceq_A S'$)

Tény: Ha $\mathcal{C}_A$ komoton és PI akkor $\preceq_A$ részbenrendezés.

Következmények

„Láttuk”: Stabil megoldások = fixpontok (...)

Fiú- és lányoptimalitás: A GS algoritmus a stabil megoldások közül azt találja meg, amelyik a fiúknak a lehető legjobb és a lányoknak a lehető legrosszabb. (Az $E \supseteq \mathcal{F}(E) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(E)) \supseteq \dots$ lánc a legbővebb fixponttal ér véget.)

Érdekellentét: fiúknak a legjobb = lányoknak a legrosszabb.

Def: Egy S megoldás akkor jobb (a jelentkezőknek), mint S' , ha $\mathcal{C}_A(S \cup S') = S$. (Jelölés: $S \preceq_A S'$)

Tény: Ha $\mathcal{C}_A$ komonoton és PI akkor $\preceq_A$ részbenrendezés.

Blair tétele: Ha $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_C$ komonoton és PI, akkor a stabil megoldások a $\preceq_A$ rendezésre hálót alkotnak. Azaz, ha S_1 és S_2 stabil megoldások, akkor van egy $S = S_1 \wedge S_2$ stabil megoldás, amire $S \preceq_A S_1$, $S \preceq_A S_2$, továbbá ha S' stabil és $S' \preceq_A S_1$, $S' \preceq_A S_2$, akkor $S' \preceq_A S$.

Következmények

„Láttuk”: Stabil megoldások = fixpontok (...)

Fiú- és lányoptimalitás: A GS algoritmus a stabil megoldások közül azt találja meg, amelyik a fiúknak a lehető legjobb és a lányoknak a lehető legrosszabb. (Az $E \supseteq \mathcal{F}(E) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(E)) \supseteq \dots$ lánc a legbővebb fixponttal ér véget.)

Érdekellentét: fiúknak a legjobb = lányoknak a legrosszabb.

Def: Egy S megoldás akkor jobb (a jelentkezőknek), mint S' , ha $\mathcal{C}_A(S \cup S') = S$. (Jelölés: $S \preceq_A S'$)

Tény: Ha $\mathcal{C}_A$ komonoton és PI akkor $\preceq_A$ részbenrendezés.

Blair tétele: Ha $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_C$ komonoton és PI, akkor a stabil megoldások a $\preceq_A$ rendezésre hálót alkotnak. Azaz, ha S_1 és S_2 stabil megoldások, akkor van egy $S = S_1 \wedge S_2$ stabil megoldás, amire $S \preceq_A S_1$, $S \preceq_A S_2$, továbbá ha S' stabil és $S' \preceq_A S_1$, $S' \preceq_A S_2$, akkor $S' \preceq_A S$.

Erősebb hálótulajdonság: Ha $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_C$ komonoton és növekedő, akkor a fenti hálóműveletek explicit megadhatók: $S_1 \wedge S_2 = \mathcal{C}_A(S_1 \cup S_2)$ ill. $S_1 \vee S_2 = \mathcal{C}_C(S_1 \cup S_2)$.

Példa: egy „alternatív” házassági modell

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Mindenkinek két házastársra vágyik:

- ▶ a nők egy kigyúrt és egy gazdag férjre
- ▶ a férfiak pedig egy bombanőre és egy szakácsnőre.

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Mindenkinek két házastársra vágyik:

- ▶ a nők egy kigyúrt és egy gazdag férjre
- ▶ a férfiak pedig egy bombanőre és egy szakácsnőre.

Egy **házasítás** során mindenki legfeljebb két partnert kap.

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Mindenkinek két házastársra vágyik:

- ▶ a nők egy kigyúrt és egy gazdag férjre
- ▶ a férfiak pedig egy bombanőre és egy szakácsnőre.

Egy **házasítás** során mindenki legfeljebb két partnert kap.

Egy házasítás **stabil** ha m és w nem házasok (de azok lehetnének), akkor

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Mindenkinek két házastársra vágyik:

- ▶ a nők egy kigyúrt és egy gazdag férjre
- ▶ a férfiak pedig egy bombanőre és egy szakácsnőre.

Egy **házasítás** során mindenki legfeljebb két partnert kap.

Egy házasítás **stabil** ha m és w nem házasok (de azok lehetnének), akkor

- ▶ m -nek van w -nél jobban kinéző és jobban főző felesége is

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Mindenkinek két házastársra vágyik:

- ▶ a nők egy kigyúrt és egy gazdag férjre
- ▶ a férfiak pedig egy bombanőre és egy szakácsnőre.

Egy **házasítás** során mindenki legfeljebb két partnert kap.

Egy házasítás **stabil** ha m és w nem házasok (de azok lehetnének), akkor

- ▶ m -nek van w -nél jobban kinéző és jobban főző felesége is
- ▶ vagy w -nek van m -nél izmosabb és tehetősebb férje is.

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Mindenkinek két házastársra vágyik:

- ▶ a nők egy kigyúrt és egy gazdag férjre
- ▶ a férfiak pedig egy bombanőre és egy szakácsnőre.

Egy **házasítás** során mindenki legfeljebb két partnert kap.

Egy házasítás **stabil** ha m és w nem házasok (de azok lehetnének), akkor

- ▶ m -nek van w -nél jobban kinéző és jobban főző felesége is
- ▶ vagy w -nek van m -nél izmosabb és tehetősebb férje is.

Köv: Ebben a modellben mindig van stabil házasítás.

Példa: egy „alternatív” házassági modell

A nőket kizárólag a férfiak izomzata és bankszámlája érdekli.

A férfiaknak csak a nő kinézete és főztje számít.

Mindenkinek két házastársra vágyik:

- ▶ a nők egy kigyúrt és egy gazdag férjre
- ▶ a férfiak pedig egy bombanőre és egy szakácsnőre.

Egy **házasítás** során mindenki legfeljebb két partnert kap.

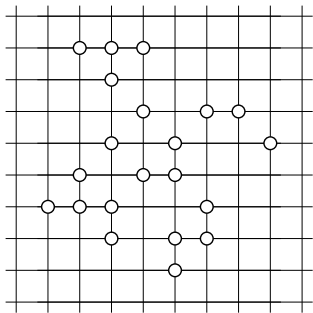
Egy házasítás **stabil** ha m és w nem házasok (de azok lehetnének), akkor

- ▶ m -nek van w -nél jobban kinéző és jobban főző felesége is
- ▶ vagy w -nek van m -nél izmosabb és tehetősebb férje is.

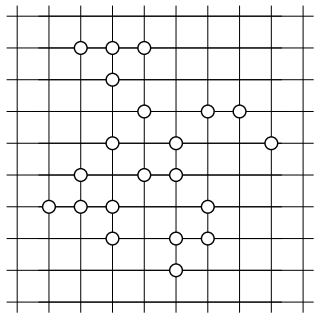
Köv: Ebben a modellben mindig van stabil házasítás.

Biz: A férfiak és nők választását is komoton és PI kiválasztási függvények írják le. Lehetséges házasságok egy F halmazára $C_W(F)$ az F által meghatározott legerősebb és leggazdagabb férfiakat rendeli minden nőhöz. Hasonlóan, $C_M(F)$ minden férfhoz az F -beli legcsinosabb és legjobban főző partnert választja. Így mind C_W , mind C_M komoton és PI, tehát a GS algoritmus helyesen működik.

Egy speciális eset

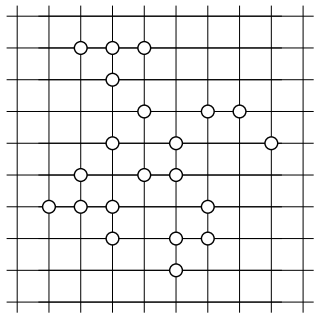


Egy speciális eset



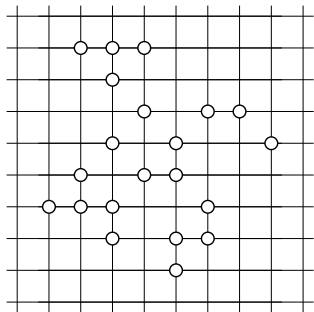
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,

Egy speciális eset



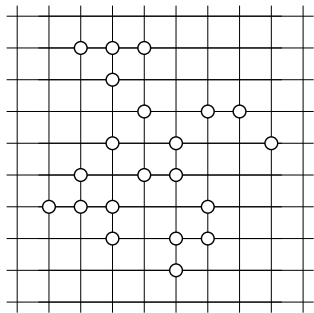
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.

Egy speciális eset



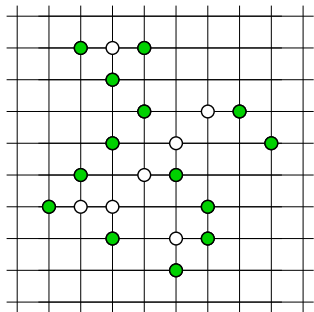
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb

Egy speciális eset



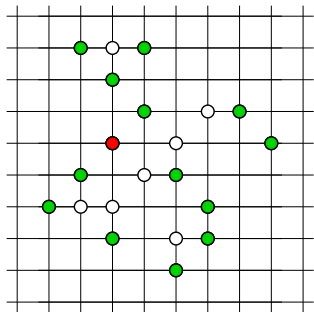
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



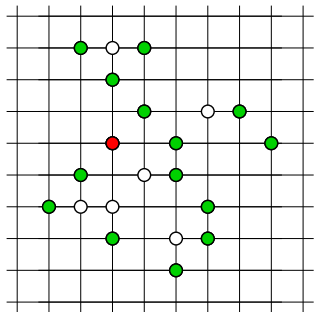
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobbán főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



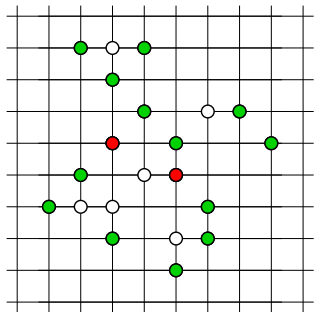
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



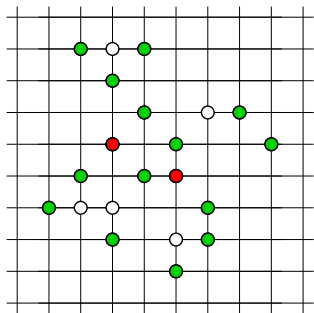
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



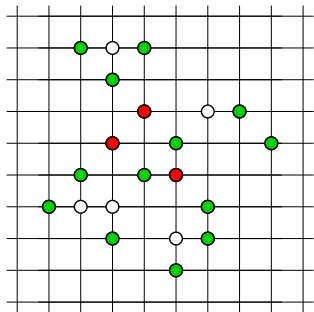
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



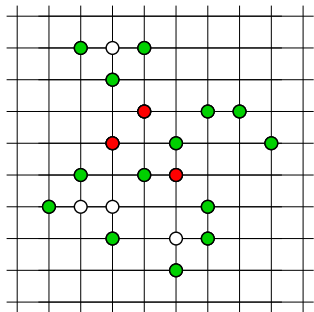
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



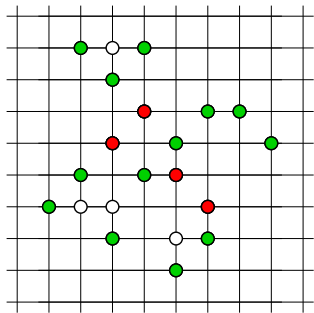
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



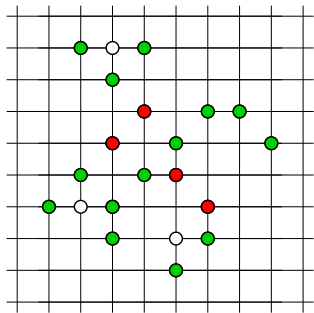
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobbán főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



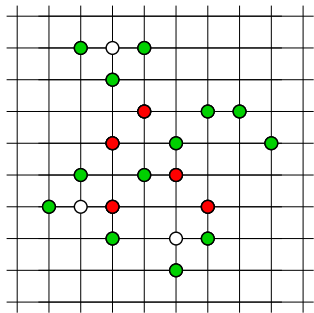
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



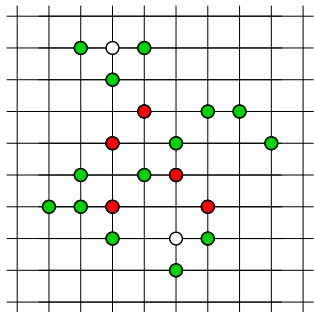
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



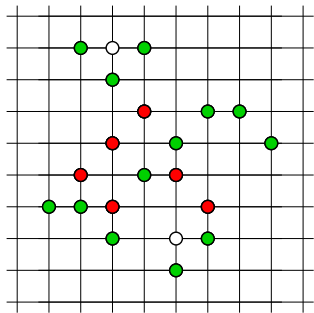
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



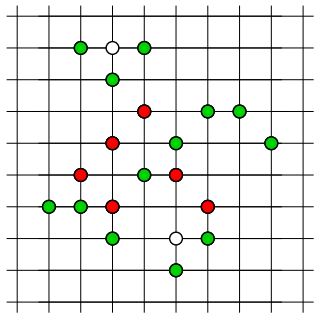
Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

Egy speciális eset



Sorok=fiúk, oszlopok=lányok,
pettyek=lehetséges házasságok.
Bal=csinosabb, jobb=jobban főz,
fel=izmosabb, le=vagyonosabb
Lássuk a GS algoritmust.

A fiú-optimális stabil házasítás a „legszelebb” kívánt tulajdonságú rácsponthalmaz, míg a lány-optimális a „legmagasabb”.

A splitting tulajdonság

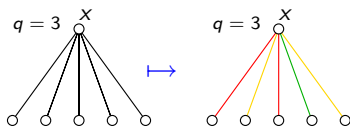
Tétel (Roth): $G = (V, E)$ páros gráf, $q : V \rightarrow \mathbb{N}$ kvóták, $\prec_v$ preferenciák. Ha A_1, A_2 stabil q -párosítások akkor tetszőleges $x \in V$ csúcsra $A_1(x) = A_2(x)$ vagy $|A_1(x)| = |A_2(x)| = q(x)$ teljesül és utóbbi esetben az $A_1(x) \cup A_2(x)$ halmaz $\prec_x$ szerinti legjobb $q(x)$ eleme vagy $A_1(x)$ vagy $A_2(x)$.

A splitting tulajdonság

Tétel (Roth): $G = (V, E)$ páros gráf, $q : V \rightarrow \mathbb{N}$ kvóták, $\prec_v$ preferenciák. Ha A_1, A_2 stabil q -párosítások akkor tetszőleges $x \in V$ csúcsra $A_1(x) = A_2(x)$ vagy $|A_1(x)| = |A_2(x)| = q(x)$ teljesül és utóbbi esetben az $A_1(x) \cup A_2(x)$ halmaz $\prec_x$ szerinti legjobb $q(x)$ eleme vagy $A_1(x)$ vagy $A_2(x)$.

Köv. (splitting tulajdonság): Minden x csúcsra az x -ből induló élek $q(x)$ osztályba sorolhatók úgy, hogy minden stabil q -párosítás legfeljebb egy élt használ minden osztályból.

A splitting tulajdonság

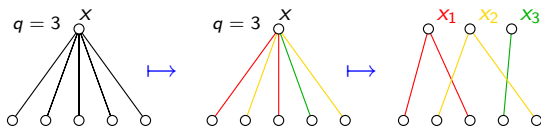


Tétel (Roth): $G = (V, E)$ páros gráf, $q : V \rightarrow \mathbb{N}$ kvóták, $\prec_v$ preferenciák. Ha A_1, A_2 stabil q -párosítások akkor tetszőleges $x \in V$ csúcsra $A_1(x) = A_2(x)$ vagy $|A_1(x)| = |A_2(x)| = q(x)$ teljesül és utóbbi esetben az $A_1(x) \cup A_2(x)$ halmaz $\prec_x$ szerinti legjobb $q(x)$ eleme vagy $A_1(x)$ vagy $A_2(x)$.

Köv. (splitting tulajdonság): Minden x csúcsra az x -ből induló élek $q(x)$ osztályba sorolhatók úgy, hogy minden stabil q -párosítás legfeljebb egy élt használ minden osztályból.

Köv: A stabil q -párosítások poliéderének lineáris leírása. (Implicit leírás következik a hálópoliéderek elméletéből, a splitting- és hálótulajdonságokból egy „explitebb” leírás adódik.)

A splitting tulajdonság



Tétel (Roth): $G = (V, E)$ páros gráf, $q : V \rightarrow \mathbb{N}$ kvóták, $\prec_v$ preferenciák. Ha A_1, A_2 stabil q -párosítások akkor tetszőleges $x \in V$ csúcsra $A_1(x) = A_2(x)$ vagy $|A_1(x)| = |A_2(x)| = q(x)$ teljesül és utóbbi esetben az $A_1(x) \cup A_2(x)$ halmaz $\prec_x$ szerinti legjobb $q(x)$ eleme vagy $A_1(x)$ vagy $A_2(x)$.

Köv. (splitting tulajdonság): Minden x csúcsra az x -ből induló élek $q(x)$ osztályba sorolhatók úgy, hogy minden stabil q -párosítás legfeljebb egy élt használ minden osztályból.

Köv: A stabil q -párosítások poliéderének lineáris leírása.
(Implicit leírás következik a hálópoliéderek elméletéből, a splitting- és hálótulajdonságokból egy „explitebb” leírás adódik.)

Medián stabil párosítások

Tény: Ha M_1, M_2 stabil párosítások és a fiúk a jobbik partnert választják, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben a lányok a rosszabb partnert kapják. (A lányok választásával $M_1 \wedge M_2$ adódna.) $\square$

Medián stabil párosítások

Tény: Ha M_1, M_2 stabil q -párosítások és a fiúk a jobbik partner

almazt választják, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben a lányok a rosszabb partneralmazt kapják. (A lányok választásával $M_1 \wedge M_2$ adódna.) $\square$

Medián stabil párosítások

Tény: Ha M_1, M_2 stabil q -párosítások és a fiúk a jobbik partner

almazt

 választják, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben a lányok a rosszabb partner

almazt

 kapják. (A lányok választásával $M_1 \wedge M_2$ adódna.) □

Tétel (Teo-Sethuraman '98): Ha $M_1, M_2, \dots, M_k$ stabil párosítások a G páros gráfban és minden fiú az ℓ -dik legjobb partnert választja, akkor olyan stabil párosítást kapunk, amelyben minden lány a ℓ -dik legrosszabb partnert kapja. **Biz:** LP

Medián stabil párosítások

Tény: Ha M_1, M_2 stabil q -párosítások és a fiúk a jobbik partner

almazt

 választják, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben a lányok a rosszabb partner

almazt

 kapják. (A lányok választásával $M_1 \wedge M_2$ adódna.) □

Tétel (Teo-Sethuraman '98): Ha $M_1, M_2, \dots, M_k$ stabil párosítások a G páros gráfban és minden fiú az ℓ -dik legjobb partnert választja, akkor olyan stabil párosítást kapunk, amelyben minden lány a ℓ -dik legrosszabb partnert kapja. **Biz:** LP

$M_1, M_2, \dots, M_k$ stabil q -párosítások minden v csúcs számára lineárisan rendezettek: $M_1^v \preceq_v M_2^v \preceq_v \dots \preceq_v M_k^v$.

Medián stabil párosítások

Tény: Ha M_1, M_2 stabil q -párosítások és a fiúk a jobbik partner

almazt választják, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben a lányok a rosszabb partneralmazt kapják. (A lányok választásával $M_1 \wedge M_2$ adódna.) $\square$

Tétel (Teo-Sethuraman '98): Ha $M_1, M_2, \dots, M_k$ stabil párosítások a G páros gráfban és minden fiú az ℓ -dik legjobb partnert választja, akkor olyan stabil párosítást kapunk, amelyben minden lány a ℓ -dik legrosszabb partnert kapja. **Biz:** LP

$M_1, M_2, \dots, M_k$ stabil q -párosítások minden v csúcs számára lineárisan rendezettek: $M_1^v \preceq_v M_2^v \preceq_v \dots \preceq_v M_k^v$.

Tétel (F '03, Klaus-Klijn '06): A fenti $M_1, M_2, \dots, M_k$ esetén ha minden fiú az ℓ -dik legjobb partnerhalmazt választja akkor olyan stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ -dik legrosszabb partnerhalmazt kapja.

Medián stabil párosítások

Tény: Ha M_1, M_2 stabil q -párosítások és a fiúk a jobbik partnerhalmazt választják, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben a lányok a rosszabb partnerhalmazt kapják. (A lányok választásával $M_1 \wedge M_2$ adódna.) □

$M_1, M_2, \dots, M_k$ stabil q -párosítások minden v csúcs számára lineárisan rendezettek: $M_1^v \preceq_v M_2^v \preceq_v \dots \preceq_v M_k^v$.

Tétel (F '03, Klaus-Klijn '06): A fenti $M_1, M_2, \dots, M_k$ esetén ha minden fiú az ℓ -dik legjobb partnerhalmazt választja akkor olyan stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ -dik legrosszabb partnerhalmazt kapja.

Medián stabil párosítások

Tény: Ha M_1, M_2 stabil q -párosítások és a fiúk a jobbik partner

halmazt választják, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil párosítást kapunk, amelyben a lányok a rosszabb partnerhalmazt kapják. (A lányok választásával $M_1 \wedge M_2$ adódna.) □

$M_1, M_2, \dots, M_k$ stabil q -párosítások minden v csúcs számára lineárisan rendezettek: $M_1^v \preceq_v M_2^v \preceq_v \dots \preceq_v M_k^v$.

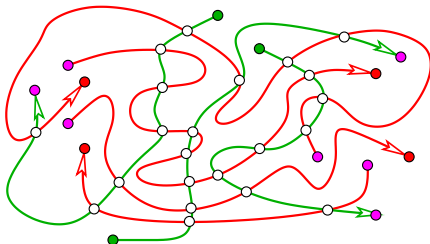
Tétel (F '03, Klaus-Klijn '06): A fenti $M_1, M_2, \dots, M_k$ esetén ha minden fiú az ℓ -dik legjobb partnerhalmazt választja akkor olyan stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ -dik legrosszabb partnerhalmazt kapja.

Biz: Legyen

$$M^{(\ell)} := \bigvee_{v \text{ fiú}} \bigwedge_{i=1}^{\ell} M_i^v.$$

Ez stabil, és minden fiú pontosan az ℓ -dik halmazzal van párosítva. Könnyű belátni, hogy a lányok az ℓ -dik legrosszabb halmazt kapják. □

Utak linking tulajdonsága

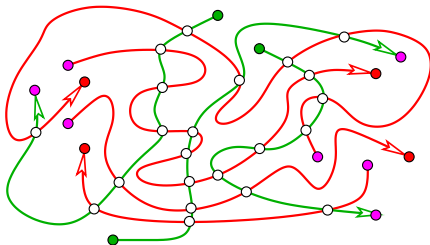


A GS tételből igazolható, hogy a gammoidok matroidok.

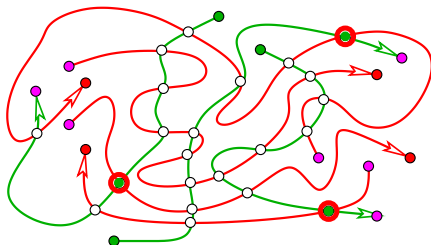
Pym's linking thm: Legyenek $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ a G digráf pontdiszjunkt (piros és zöld) utajaiból álló halmazok. Ekkor található pontdiszjunkt (pink) utaknak olyan $\mathcal{R}$ halmaza, melyre

- ▶ minden pink út egy piros és egy zöld út konkatenációja,
- ▶ minden piros út kezdőpontjából indul, és minden zöld út végpontjába érkezik pink út, és
- ▶ minden pink út egy piros vagy zöld kezdőpontból indul és egy piros vagy zöld végpontba érkezik.

Utak linking tulajdonsága

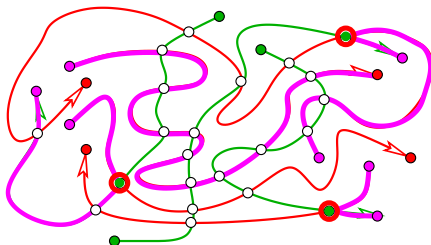


Utak linking tulajdonsága



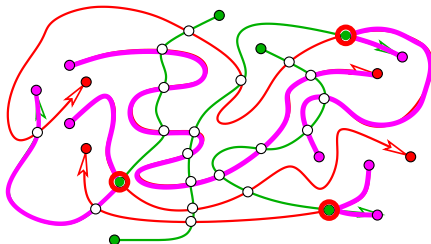
Biz A piros-zöld váltásokat leíró csúcsok halmaza határozza meg az $\mathcal{R}$ úthalmazt, illetve akarunk találni.

Utak linking tulajdonsága



Biz A piros-zöld váltásokat leíró csúcsok halmaza határozza meg az $\mathcal{R}$ úthalmazt, illetve akarunk találni.

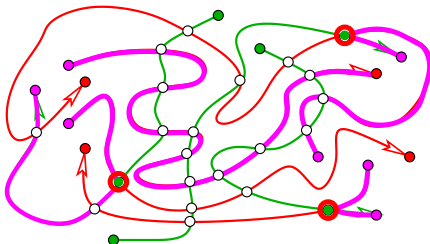
Utak linking tulajdonsága



Biz A piros-zöld váltásokat leíró csúcsok halmaza határozza meg az $\mathcal{R}$ úthalmazt, ilyen akarunk találni.

Stabil házassági modellt készítünk: a piros utak a nők, zöldek a férfiak, közös csúcsok a lehetséges házasságok. (Lehetnek párhuzamos élek is.)

Utak linking tulajdonsága



Biz A piros-zöld váltásokat leíró csúcsok halmaza határozza meg az $\mathcal{R}$ úthalmazt, amelyet akarunk találni.

Stabil házassági modellt készítünk: a piros utak a nők, zöldek a férfiak, közös csúcsok a lehetséges házasságok. (Lehetnek párhuzamos élek is.)

Preferenciák: Mindenki a saját útjának a lehető legrövidebb részét szeretné a pink útba beadni. A piros út a kezdőponthoz közelebbi, a zöld a végponthoz közelebbi csúcsokat kedveli jobban. A váltásokat leíró csúcshalmaz pontosan akkor lesz megfelelő, ha stabil párosításnak felel meg.

A Dinitz-problémakör

- ▶ Dinitz latin négyzetekről szóló sejtése

A Dinitz-problémakör

- ▶ Dinitz latin négyzetekről szóló sejtése
- ▶ Páros gráf él-listaszínezése

A Dinitz-problémakör

- ▶ Dinitz latin négyzetekről szóló sejtése
- ▶ Páros gráf él-listaszínezése
- ▶ LCC: $\chi'_l(G) = \chi'(G)$

A Dinitz-problémakör

- ▶ Dinitz latin négyzetekről szóló sejtése
- ▶ Páros gráf él-listaszínezése
- ▶ LCC: $\chi'_l(G) = \chi'(G)$
- ▶ Janssen: $\chi'_l(K_{n,n}) \leq n + 1$

A Dinitz-problémakör

- ▶ Dinitz latin négyzetekről szóló sejtése
- ▶ Páros gráf él-listaszínezése
- ▶ LCC: $\chi'_l(G) = \chi'(G)$
- ▶ Janssen: $\chi'_l(K_{n,n}) \leq n + 1$
- ▶ Galvin: Az LCC igaz páros gráfokra

A Dinitz-problémakör

- ▶ Dinitz latin négyzetekről szóló sejtése
- ▶ Páros gráf él-listaszínezése
- ▶ LCC: $\chi'_l(G) = \chi'(G)$
- ▶ Janssen: $\chi'_l(K_{n,n}) \leq n + 1$
- ▶ Galvin: Az LCC igaz páros gráfokra

Újabb apró lépés: Kiterjesztjük Galvin eredményét.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L -él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow N$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L -él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

A G gráf **L -élszínezhető** ha G -nek van L -él-színezése.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L -él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

A G gráf **L -élszínezhető** ha G -nek van L -él-színezése.

Ha G minden olyan L -re L -élszínezhető amire $|L(e)| \geq k$ minden $e \in E$ élre, akkor G **k -él-listaszínezhetőnek** mondjuk.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L -él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

A G gráf **L -élszínezhető** ha G -nek van L -él-színezése.

Ha G minden olyan L -re L -élszínezhető amire $|L(e)| \geq k$ minden $e \in E$ élre, akkor G **k -él-listaszínezhetőnek** mondjuk.

A G gráf **él-listaszínezési száma** $\chi'_l(G) = k$, ha G k -él-listaszínezhető, de nem $(k - 1)$ -él-listaszínezhető.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L -él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

A G gráf **L -élszínezhető** ha G -nek van L -él-színezése.

Ha G minden olyan L -re L -élszínezhető amire $|L(e)| \geq k$ minden $e \in E$ élre, akkor G **k -él-listaszínezhetőnek** mondjuk.

A G gráf **él-listaszínezési száma** $\chi'_l(G) = k$, ha G k -él-listaszínezhető, de nem $(k - 1)$ -él-listaszínezhető.

Megf:

Minden véges, hurokmentes G gráfra $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$ teljesül.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L -él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

A G gráf **L -élszínezhető** ha G -nek van L -él-színezése.

Ha G minden olyan L -re L -élszínezhető amire $|L(e)| \geq k$ minden $e \in E$ élre, akkor G **k -él-listaszínezhetőnek** mondjuk.

A G gráf **él-listaszínezési száma** $\chi'_l(G) = k$, ha G k -él-listaszínezhető, de nem $(k - 1)$ -él-listaszínezhető.

Megf:

Minden véges, hurokmentes G gráfra $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$ teljesül.

LCC: $\chi'(G) = \chi'_l(G)$ teljesül minden hurokmentes gráfra.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L -él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

A G gráf **L -élszínezhető** ha G -nek van L -él-színezése.

Ha G minden olyan L -re L -élszínezhető amire $|L(e)| \geq k$ minden $e \in E$ élre, akkor G **k -él-listaszínezhetőnek** mondjuk.

A G gráf **él-listaszínezési száma** $\chi'_l(G) = k$, ha G k -él-listaszínezhető, de nem $(k - 1)$ -él-listaszínezhető.

Megf:

Minden véges, hurokmentes G gráfra $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$ teljesül.

LCC: $\chi'(G) = \chi'_l(G)$ teljesül minden hurokmentes gráfra.

Tény: A **csúcsok** listaszínezése esetén $\chi(G) < \chi_l(G)$ is lehetséges.

Él-listaszínezések

Def: Adott a $G = (V, E)$ gráf és az $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista G minden e éléhez. A G **L-él-színezése** a G olyan $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ élszínezése, amelyre $c(e) \in L(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre.

A G gráf **L-élszínezhető** ha G -nek van L -él-színezése.

Ha G minden olyan L -re L -élszínezhető amire $|L(e)| \geq k$ minden $e \in E$ élre, akkor G **k-él-listaszínezhetőnek** mondjuk.

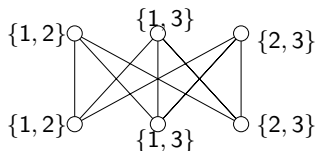
A G gráf **él-listaszínezési száma** $\chi'_l(G) = k$, ha G k -él-listaszínezhető, de nem $(k - 1)$ -él-listaszínezhető.

Megf:

Minden véges, hurokmentes G gráfra $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$ teljesül.

LCC: $\chi'(G) = \chi'_l(G)$ teljesül minden hurokmentes gráfra.

Tény: A **csúcsok** listaszínezése esetén $\chi(G) < \chi_l(G)$ is lehetséges.



A kiterjesztett listaszínezési eredmény

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ennek egy élszínezése, valamint $L(e) \subset \mathbb{N}$ a G minden e élére. Tfh

- ▶ $|L(e)| \geq k$ teljesül a színlistákra és
- ▶ az i -színezhető élek $G_i := (V, L^{-1}(i))$ gráfja minden i színre páros.

Ekkor G is L -él-listaszínezhető.

A kiterjesztett listaszínezési eredmény

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ennek egy élszínezése, valamint $L(e) \subset \mathbb{N}$ a G minden e élére. Tfh

- ▶ $|L(e)| \geq k$ teljesül a színlistákra és
- ▶ az i -színezhető élek $G_i := (V, L^{-1}(i))$ gráfja minden i színre páros.

Ekkor G is L -él-listaszínezhető.

Biz: Galvint utánozzuk, egyedül a preferenciasorrendekkel kell vigyázni.

A kiterjesztett listaszínezési eredmény

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ennek egy élszínezése, valamint $L(e) \subset \mathbb{N}$ a G minden e élére. Tfh

- ▶ $|L(e)| \geq k$ teljesül a színlistákra és
- ▶ az i -színezhető élek $G_i := (V, L^{-1}(i))$ gráfja minden i színre páros.

Ekkor G is L -él-listaszínezhető.

Biz: Galvint utánozzuk, egyedül a preferenciasorrendekkel kell vigyázni. Legyen $E_i := c^{-1}(i)$ (a c színezésben i -színű élek halmaza) és $F_i := E_{2i} \cup E_{2i-1}$. Az F_i minden komponense út vagy kör. Irányítsuk G éleit úgy, hogy minden ilyen komponens **irányított** út ill. kör legyen.

A kiterjesztett listaszínezési eredmény

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ennek egy élszínezése, valamint $L(e) \subset \mathbb{N}$ a G minden e élére. Tfh

- ▶ $|L(e)| \geq k$ teljesül a színlistákra és
- ▶ az i -színezhető élek $G_i := (V, L^{-1}(i))$ gráfja minden i színre páros.

Ekkor G is L -él-listaszínezhető.

Biz: Galvint utánozzuk, egyedül a preferenciasorrendekkel kell vigyázni. Legyen $E_i := c^{-1}(i)$ (a c színezésben i -színű élek halmaza) és $F_i := E_{2i} \cup E_{2i-1}$. Az F_i minden komponense út vagy kör. Irányítsuk G éleit úgy, hogy minden ilyen komponens **irányított** út ill. kör legyen. Minden $e \in E(v)$ éltre legyen

$$r(e, v) = \begin{cases} i & \text{ha } e \text{ a } v\text{-be mutat} \\ k + 1 - i & \text{ha } e \text{ a } v\text{-ből indul.} \end{cases}$$

A kiterjesztett listaszínezési eredmény

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ennek egy élszínezése, valamint $L(e) \subset \mathbb{N}$ a G minden e élére. Tfh

- ▶ $|L(e)| \geq k$ teljesül a színlistákra és
- ▶ az i -színezhető élek $G_i := (V, L^{-1}(i))$ gráfja minden i színre páros.

Ekkor G is L -él-listaszínezhető.

Biz: Galvint utánozzuk, egyedül a preferenciasorrendekkel kell vigyázni. Legyen $E_i := c^{-1}(i)$ (a c színezésben i -színű élek halmaza) és $F_i := E_{2i} \cup E_{2i-1}$. Az F_i minden komponense út vagy kör. Irányítsuk G éleit úgy, hogy minden ilyen komponens **irányított** út ill. kör legyen. Minden $e \in E(v)$ éltre legyen

$$r(e, v) = \begin{cases} i & \text{ha } e \text{ a } v\text{-be mutat} \\ k + 1 - i & \text{ha } e \text{ a } v\text{-ből indul.} \end{cases}$$

Legyen $e \prec_v f$ ha $r(e, v) < r(f, v)$. Világos, hogy ha $r(e, v) = r(f, v)$, akkor $e = f$. Ezért $\prec_v$ lineáris rendezés $E(v)$ -n.

A kiterjesztett listaszínezési eredmény

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ennek egy élszínezése, valamint $L(e) \subset \mathbb{N}$ a G minden e élére. Tfh

- ▶ $|L(e)| \geq k$ teljesül a színlistákra és
- ▶ az i -színezhető élek $G_i := (V, L^{-1}(i))$ gráfja minden i színre páros.

Ekkor G is L -él-listaszínezhető.

Biz: Galvint utánozzuk, egyedül a preferenciasorrendekkel kell vigyázni. Legyen $E_i := c^{-1}(i)$ (a c színezésben i -színű élek halmaza) és $F_i := E_{2i} \cup E_{2i-1}$. Az F_i minden komponense út vagy kör. Irányítsuk G éleit úgy, hogy minden ilyen komponens **irányított** út ill. kör legyen. Minden $e \in E(v)$ éltre legyen

$$r(e, v) = \begin{cases} i & \text{ha } e \text{ a } v\text{-be mutat} \\ k + 1 - i & \text{ha } e \text{ a } v\text{-ből indul.} \end{cases}$$

Legyen $e \prec_v f$ ha $r(e, v) < r(f, v)$. Világos, hogy ha $r(e, v) = r(f, v)$, akkor $e = f$. Ezért $\prec_v$ lineáris rendezés $E(v)$ -n. Ezáltal minden e élhez legfeljebb $k - 1$ olyan él tartozhat, amelyik e -t valamelyik fenti rendezésben megelőzi.

A Galvin-féle színezési trükk

Innen Galvin módszerét követjük. Feltettük, hogy $G_i := (V, L^{-1}(i))$ páros gráf. Legyen

- ▶ M_1 a G_1 egy stabil párosítása,
- ▶ M_2 a $G_2 - M_1$ egy stabil párosítása,
- ▶ M_3 a $G_3 - M_1 - M_2$ egy stabil párosítása,
- ▶ ...

A Galvin-féle színezési trükk

Innen Galvin módszerét követjük. Feltettük, hogy

$G_i := (V, L^{-1}(i))$ páros gráf. Legyen

- ▶ M_1 a G_1 egy stabil párosítása,
- ▶ M_2 a $G_2 - M_1$ egy stabil párosítása,
- ▶ M_3 a $G_3 - M_1 - M_2$ egy stabil párosítása,
- ▶ ...

Színezzük M_i éleit az i színnel. Nyilván minden e él a saját $L(e)$ listájából kap színt és azonos színű éleknek nincs közös pontja.

Pusztán annyit kell igazolnunk, hogy nem marad kiszínezetlen él.

A Galvin-féle színezési trükk

Innen Galvin módszerét követjük. Feltettük, hogy

$G_i := (V, L^{-1}(i))$ páros gráf. Legyen

- ▶ M_1 a G_1 egy stabil párosítása,
- ▶ M_2 a $G_2 - M_1$ egy stabil párosítása,
- ▶ M_3 a $G_3 - M_1 - M_2$ egy stabil párosítása,
- ▶ ...

Színezzük M_i éleit az i színnel. Nyilván minden e él a saját $L(e)$ listájából kap színt és azonos színű éleknek nincs közös pontja.

Pusztán annyit kell igazolnunk, hogy nem marad kiszínezetlen él.

Ha az e él nem kap meg egy $i \in L(e)$ színt, akkor az M_i stabilitása miatt egy $f \prec_v e$ él i színű lett. Mivel $L(e)$ legalább k színt tartalmaz és az f legfeljebb $(k-1)$ -féle lehet, elképzelhetetlen, hogy $L(e)$ semelyik színét se kapja meg az e él. Vagyis minden élt kiszíneztünk, tehát a bizonyítással végeztünk. $\square$

A Galvin-féle színezési trükk

Innen Galvin módszerét követjük. Feltettük, hogy $G_i := (V, L^{-1}(i))$ páros gráf. Legyen

- ▶ M_1 a G_1 egy stabil párosítása,
- ▶ M_2 a $G_2 - M_1$ egy stabil párosítása,
- ▶ M_3 a $G_3 - M_1 - M_2$ egy stabil párosítása,
- ▶ ...

Színezzük M_i éleit az i színnel. Nyilván minden e él a saját $L(e)$ listájából kap színt és azonos színű éleknek nincs közös pontja. Pusztán annyit kell igazolnunk, hogy nem marad kiszínezetlen él. Ha az e él nem kap meg egy $i \in L(e)$ színt, akkor az M_i stabilitása miatt egy $f \prec_v e$ él i színű lett. Mivel $L(e)$ legalább k színt tartalmaz és az f legfeljebb $(k-1)$ -féle lehet, elképzelhetetlen, hogy $L(e)$ semelyik színét se kapja meg az e él. Vagyis minden élt kiszíneztünk, tehát a bizonyítással végeztünk. $\square$

Kérdés: Mennyire általánosítható Galvin módszere?

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Gale-Shapley: az egyetemi felvételi problémában (szigorú rendezés, keretszámok) mindig van stabil megoldás.

(GS, optimalitás, hálótul)

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Sőt: ha szakok halmazári is van keretszám, akkor is NP-teljes a stabil megoldás létezése.

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság:

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság: Az alsó kvóták nem jól kezelhetők.

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság: Az alsó kvóták nem jól kezelhetők.

Meglepetés: Huang „Classified stable matching” modellje. Ebben a szakhalmazokon keretszámok mellett alsó kvóták is vannak.

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság: Az alsó kvóták nem jól kezelhetők.

Meglepetés: Huang „Classified stable matching” modellje. Ebben a szakhalmazokon keretszámok mellett alsó kvóták is vannak.

Eredmény: ha a kvótahalmazok lamináris rendszert alkotnak, akkor van hatékony algoritmus a stabil megoldás keresésére.

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság: Az alsó kvóták nem jól kezelhetők.

Meglepetés: Huang „Classified stable matching” modellje. Ebben a szakhalmazokon keretszámok mellett alsó kvóták is vannak.

Eredmény: ha a kvótahalmazok lamináris rendszert alkotnak, akkor van hatékony algoritmus a stabil megoldás keresésére.

???

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság: Az alsó kvóták nem jól kezelhetők.

Meglepetés: Huang „Classified stable matching” modellje. Ebben a szakhalmazokon keretszámok mellett alsó kvóták is vannak.

Eredmény: ha a kvótahalmazok lamináris rendszert alkotnak, akkor van hatékony algoritmus a stabil megoldás keresésére.

???

Magyarázat: Egy jelentkezés akkor is visszautasítható, ha a felvételtől egy látszólag független alsó kvóta sérülne.

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság: Az alsó kvóták nem jól kezelhetők.

Meglepetés: Huang „Classified stable matching” modellje. Ebben a szakhalmazokon keretszámok mellett alsó kvóták is vannak.

Eredmény: ha a kvótahalmazok lamináris rendszert alkotnak, akkor van hatékony algoritmus a stabil megoldás keresésére.

???

Magyarázat: Egy jelentkezés akkor is visszautasítható, ha a felvételtől egy látszólag független alsó kvóta sérülne.

Cél: Huang eredményének általánosítása.

Egy módosított egyetemi felvételi probléma

Hamada-Miyazaki-Iwama: Ha a szakoknak alsó kvótája is van, akkor nem közelíthető a blokkoló élek minimális száma.

Biró-F-Irving-Manlove: A szaknak alsó kvótái vannak, és egy szak nem indul el, ha nincs elég jelentkező. A stabil megoldás eldöntése NP-teljes.

Tanulság: Az alsó kvóták nem jól kezelhetők.

Meglepetés: Huang „Classified stable matching” modellje. Ebben a szakhalmazokon keretszámok mellett alsó kvóták is vannak.

Eredmény: ha a kvótahalmazok lamináris rendszert alkotnak, akkor van hatékony algoritmus a stabil megoldás keresésére.

???

Magyarázat: Egy jelentkezés akkor is visszautasítható, ha a felvételtől egy látszólag független alsó kvóta sérülne.

Cél: Huang eredményének általánosítása.

Eszköz: matroid-alapú kiválasztási függvények.

Matroid gyorstalpaló

Matroid: $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ st (1) $\emptyset \in \mathcal{I}$, (2) $A \subseteq B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$,
(3) $A, B \in \mathcal{I}$, $|A| < |B| \Rightarrow \exists b \in B \setminus A : A \cup \{b\} \in \mathcal{I}$.

Példák: (1) **Lineáris matroid** (lin. ftn. vektorok)

(2) **Grafikus matroid** (gráf körmentes élhalmazai)

(3) **Triviális matroid** ($\mathcal{I} = 2^E$)

(4) **Uniform matroid** triviális csonkolása

(5) **Partíciós matroid**

($E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$ partíció. $I \in \mathcal{I}$ ha $|I \cap E_i| \leq 1$).

(6) **Uniform matroidok direkt összege** ($E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$
egy partíció, $b_1, b_2, \dots, b_k$ adottak. $I \in \mathcal{I}$ ha $|I \cap E_i| \leq b_i \forall i$).

Bázis: E -beli maximális ftn (számossága csak $\mathcal{M}$ -től függ)

Rang fv: $rk(A) = \max\{|A'| : A' \subseteq A \text{ független}\}$.

Span: $sp(A) := \{e \in E : rk(A \cup \{e\}) = rk(A)\}$.

Mohó tul: Egy maxsúlyú független halmaz megkapható mohón,
egyenként döntve az elemek beviteléről, csökkenő súlysorrendben.

Köv: A mohó algoritmus matroidon növekvő komoton
kiválasztási függvényt definiál.

Matroidok és stabil megoldások

Köv: A mohó algoritmus matroidon növekvő komoton kiválasztási függvényt definiál.

Köv: Ha $\mathcal{C}_C$ és $\mathcal{C}_A$ mohó kiv. fv.-k, akkor mindig van stabil megoldás, a GS algoritmus ezt megtalálja, és természetes hálóművelet van a stabil megoldásokon.

Matroidok és stabil megoldások

Köv: A mohó algoritmus matroidon növekvő komonoton kiválasztási függvényt definiál.

Köv: Ha $\mathcal{C}_C$ és $\mathcal{C}_A$ mohó kiv. fv.-k, akkor mindig van stabil megoldás, a GS algoritmus ezt megtalálja, és természetes hálóművelet van a stabil megoldásokon.

Példák: (1) **Stabil házasságok** $\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_W$ partíciós matroidok.

(2) **Egyetemi felvételi keretszámokkal**

$\mathcal{C}_A$: partíciós matroid, $\mathcal{C}_C$: uniform matroidok direkt összege.

(3) **Kvóták meghatározta poligám házasságok**

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$: uniform matroidok direkt összege.

(4) **Egyetemi felvételi keretszámokkal lamináris szakhalmazokon**

$\mathcal{C}_A$: partíciós matroid,

$\mathcal{C}_C$: triviális matroidokon csonkolások és direkt összegképzések.

(A **k-csonkolás** függetlenjei a legfeljebb k méretű függetlenek.

Direkt összeg: diszjunkt matroidok egyesítése.)

Matroidok és stabil megoldások

Köv: A mohó algoritmus matroidon növekvő komonoton kiválasztási függvényt definiál.

Köv: Ha $\mathcal{C}_C$ és $\mathcal{C}_A$ mohó kiv. fv.-k, akkor mindig van stabil megoldás, a GS algoritmus ezt megtalálja, és természetes hálóművelet van a stabil megoldásokon.

Példák: (1) **Stabil házasságok** $\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_W$ partíciós matroidok.

(2) **Egyetemi felvételi keretszámokkal**

$\mathcal{C}_A$: partíciós matroid, $\mathcal{C}_C$: uniform matroidok direkt összege.

(3) **Kvóták meghatározta poligám házasságok**

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$: uniform matroidok direkt összege.

(4) **Egyetemi felvételi keretszámokkal lamináris szakhalmazokon**

$\mathcal{C}_A$: partíciós matroid,

$\mathcal{C}_C$: triviális matroidokon csonkolások és direkt összegképzések.

(A **k-csonkolás** függetlenjei a legfeljebb k méretű függetlenek.

Direkt összeg: diszjunkt matroidok egyesítése.)

„Rural hospitals” Tétel: Ha $\mathcal{C}_C$ és $\mathcal{C}_A$ is mohó kiv. fv.-k, akkor a stabil megoldások spanje mindig ugyanaz.

A „classified stable matching” probléma

Input: $G = (C \cup A, E)$ páros gráf, E a jelentkezések halmaza, $\mathcal{Q}_C, \mathcal{Q}_A \subseteq 2^E$ lamináris halmazrendszerek (elemei a kvótahalmazok), $l, u : \mathcal{Q}_A \cup \mathcal{Q}_A \rightarrow \mathbb{N}_+$ alsó és felső kvóták (keretszámok) és $\prec_C$ ill. $\prec_A$ preferenciarendezések, amelyekre minden kvótahalmaz lineárisan rendezett.

A „classified stable matching” probléma

Input: $G = (C \cup A, E)$ páros gráf, E a jelentkezések halmaza, $\mathcal{Q}_C, \mathcal{Q}_A \subseteq 2^E$ lamináris halmazrendszerek (elemei a kvótahalmazok), $l, u : \mathcal{Q}_A \cup \mathcal{Q}_A \rightarrow \mathbb{N}_+$ alsó és felső kvóták (keretszámok) és $\prec_C$ ill. $\prec_A$ preferenciarendezések, amelyekre minden kvótahalmaz lineárisan rendezett.

Megoldás: Olyan $F \subset E$, amely teljesíti a kvótakövetelményeket:
$$l(Q) \leq |F \cap Q| \leq u(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_C \cup \mathcal{Q}_A .$$

A „classified stable matching” probléma

Input: $G = (C \cup A, E)$ páros gráf, E a jelentkezések halmaza, $\mathcal{Q}_C, \mathcal{Q}_A \subseteq 2^E$ lamináris halmazrendszerek (elemei a kvótahalmazok), $l, u : \mathcal{Q}_A \cup \mathcal{Q}_C \rightarrow \mathbb{N}_+$ alsó és felső kvóták (keretszámok) és $\prec_C$ ill. $\prec_A$ preferenciarendezések, amelyekre minden kvótahalmaz lineárisan rendezett.

Megoldás: Olyan $F \subset E$, amely teljesíti a kvótakövetelményeket:
$$l(Q) \leq |F \cap Q| \leq u(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_C \cup \mathcal{Q}_A .$$

Az F megoldást az $F \not\ni e = ca$ jelentkezés **blokkolja**, ha

- ▶ $F \cup \{e\}$ minden $\mathcal{Q}_C$ -hez tartozó kvótát teljesít, vagy ha van olyan $e \prec_C f \in F$ jelentkezés, amelyre $F \cup \{e\} \setminus \{f\}$ teljesít minden $\mathcal{Q}_C$ -hez tartozó kvótát és
- ▶ „ugyanaz” teljesül $\mathcal{Q}_A$ -ra és $\prec_A$ -ra is.

Stabil megoldás: olyan megoldás, amit semmi sem blokkol.

A „classified stable matching” probléma

Input: $G = (C \cup A, E)$ páros gráf, E a jelentkezések halmaza, $\mathcal{Q}_C, \mathcal{Q}_A \subseteq 2^E$ lamináris halmazrendszerek (elemei a kvótahalmazok), $l, u : \mathcal{Q}_A \cup \mathcal{Q}_A \rightarrow \mathbb{N}_+$ alsó és felső kvóták (keretszámok) és $\prec_C$ ill. $\prec_A$ preferenciarendezések, amelyekre minden kvótahalmaz lineárisan rendezett.

Megoldás: Olyan $F \subset E$, amely teljesíti a kvótakövetelményeket:
$$l(Q) \leq |F \cap Q| \leq u(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_C \cup \mathcal{Q}_A .$$

Az F megoldást az $F \not\ni e = ca$ jelentkezés **blokkolja**, ha

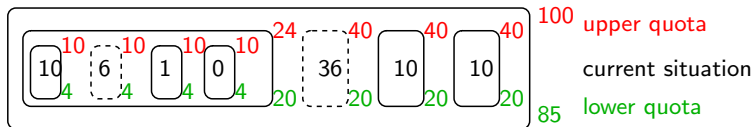
- ▶ $F \cup \{e\}$ minden $\mathcal{Q}_C$ -hez tartozó kvótát teljesít, vagy ha van olyan $e \prec_C f \in F$ jelentkezés, amelyre $F \cup \{e\} \setminus \{f\}$ teljesít minden $\mathcal{Q}_C$ -hez tartozó kvótát és
- ▶ „ugyanaz” teljesül $\mathcal{Q}_A$ -ra és $\prec_A$ -ra is.

Stabil megoldás: olyan megoldás, amit semmi sem blokkol.

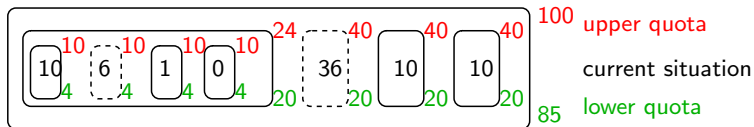
Módszer: A fenti eredmények felhasználása.

Kulcskérdés: hogyan döntünk az egyes jelentkezések elfogadásáról, ha azok csökkenő preferenciasorrendben érkeznek.

A szakok kiválasztási függvénye

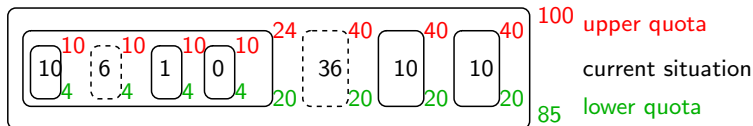


A szakok kiválasztási függvénye



Megf: A szaggatott kvótahalmazok „implicit” telítettek, oda már nem lehet felvenni senkit.

A szakok kiválasztási függvénye



Megf: A szaggatott kvótahalmazok „implicit” telítettek, oda már nem lehet felvenni senkit.

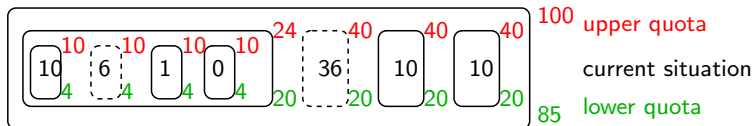
Rekurzív definíció: $F \subseteq E$, ha Q a $\mathcal{Q}_C$ egy legszűkebb tagja, akkor

$$d(Q, F) := \max\{|F \cap Q|, l(Q)\}.$$

Ha $Q \in \mathcal{Q}_C$ maximális fiai $Q_1, \dots, Q_k$ akkor

$$d(Q, F) := \max\{d(Q_1, F) + \dots + d(Q_k, F), l(Q)\}$$

A szakok kiválasztási függvénye



Megf: A szaggatott kvótahalmazok „implicit” telítettek, oda már nem lehet felvenni senkit.

Rekurzív definíció: $F \subseteq E$, ha Q a $\mathcal{Q}_C$ egy legszűkebb tagja, akkor

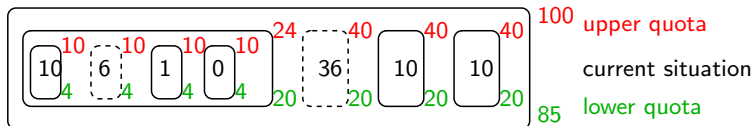
$$d(Q, F) := \max\{|F \cap Q|, l(Q)\}.$$

Ha $Q \in \mathcal{Q}_C$ maximális fiai $Q_1, \dots, Q_k$ akkor

$$d(Q, F) := \max\{d(Q_1, F) + \dots + d(Q_k, F), l(Q)\}$$

Kulcs: $\mathcal{I}_C := \{F \subseteq E : d(Q, F) \leq u(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_C\}$ matroidot.

A szakok kiválasztási függvénye



Megf: A szaggatott kvótahalmazok „implicit” telítettek, oda már nem lehet felvenni senkit.

Rekurzív definíció: $F \subseteq E$, ha Q a $\mathcal{Q}_C$ egy legszűkebb tagja, akkor

$$d(Q, F) := \max\{|F \cap Q|, l(Q)\}.$$

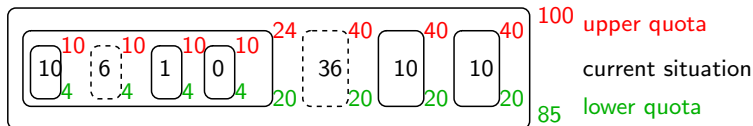
Ha $Q \in \mathcal{Q}_C$ maximális fiai $Q_1, \dots, Q_k$ akkor

$$d(Q, F) := \max\{d(Q_1, F) + \dots + d(Q_k, F), l(Q)\}$$

Kulcs: $\mathcal{I}_C := \{F \subseteq E : d(Q, F) \leq u(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_C\}$ matroidot.

Köv: A $\mathcal{C}_C$ és $\mathcal{C}_A$ kiv. fv-ekhez mindig van $\mathcal{C}_C \mathcal{C}_A$ -stabil megoldás.

A szakok kiválasztási függvénye



Megf: A szaggatott kvótahalmazok „implicit” telítettek, oda már nem lehet felvenni senkit.

Rekurzív definíció: $F \subseteq E$, ha Q a $\mathcal{Q}_C$ egy legszűkebb tagja, akkor

$$d(Q, F) := \max\{|F \cap Q|, l(Q)\}.$$

Ha $Q \in \mathcal{Q}_C$ maximális fiai $Q_1, \dots, Q_k$ akkor

$$d(Q, F) := \max\{d(Q_1, F) + \dots + d(Q_k, F), l(Q)\}$$

Kulcs: $\mathcal{I}_C := \{F \subseteq E : d(Q, F) \leq u(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_C\}$ matroidot.

Köv: A $\mathcal{C}_C$ és $\mathcal{C}_A$ kiv. fv-ekhez mindig van $\mathcal{C}_C \mathcal{C}_A$ -stabil megoldás.

Trükk: A „rural hospital” tétel általánosítása miatt vagy minden $\mathcal{C}_C \mathcal{C}_A$ -stabil megoldás teljesíti az alsó kvótákat is, és ezért stabil megoldás az eredeti feladatra is, vagy egyetlen egy $\mathcal{C}_C \mathcal{C}_A$ -stabil megoldás sem teljesíti az alsó kvótákat, ezért nincs az eredeti feladatnak stabil megoldása. Ha tehát a GS algoritmus adta megoldás nem jó, akkor egyáltalán nincs stabil megoldás.

Köszönöm a figyelmet!