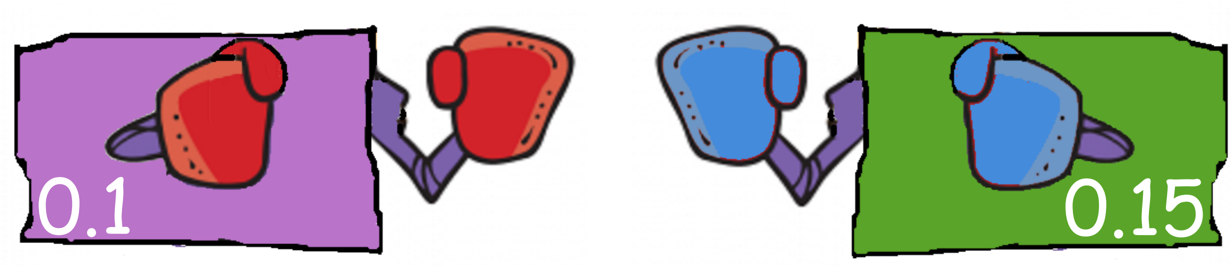
Ládapakolási játékok



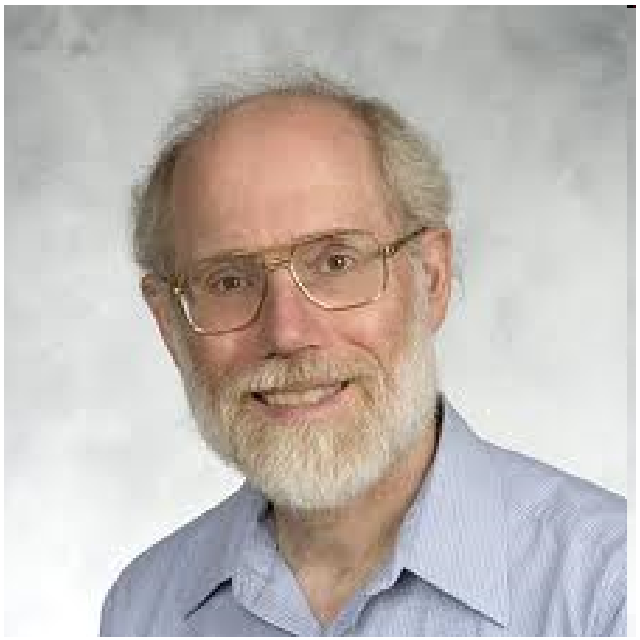
Dósa György Pannon Egyetem
Veszprém, Hungary

XXXII. MOK, Cegléd, 2017 jun 14

A ládapakolási feladat

- *n* tárgy
- Sok láda (1 méretű)
- Tárgyak méretei: (0,1]
- **Mindegyiket be kell pakolni**
- Egy ládába legf. 1 összéret
- Cél: a lehető legkevesebb ládába pakolni

David S. Johnson



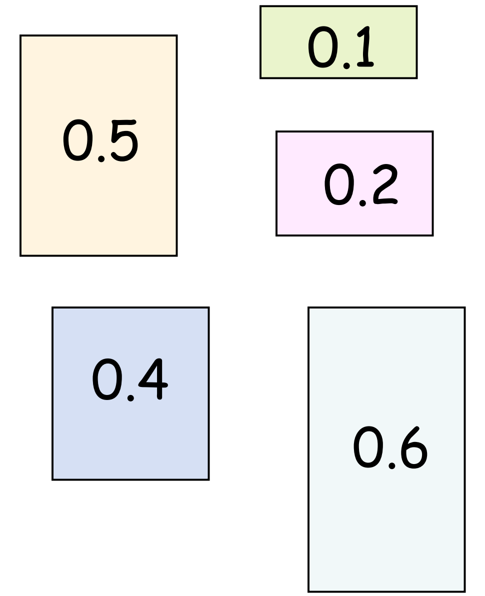
at&t labs

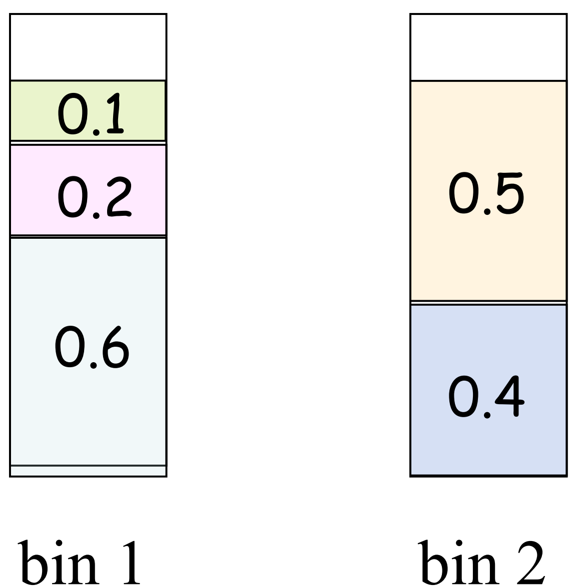
Next Fit (NF)
First Fit (FF)
Best Fit (BF)
Worst Fit (WF)
Any Fit (AF)
...

Thesis:
Near-optimal bin packing algorithms, 1973 (MIT)

példa

- Tárgyméretek: (0,1]
- 1 méretű ládák





Alkalmazás: computer science, ipar…

Bin Packing Game

ládapakolási játék (mi kell hozzá:)

n "önző" játékos = a tárgyak

mérete $s_i \in (0,1]$

Súlya $w_i > 0$

n láda

Stratégia: az a láda ahova pakolva van

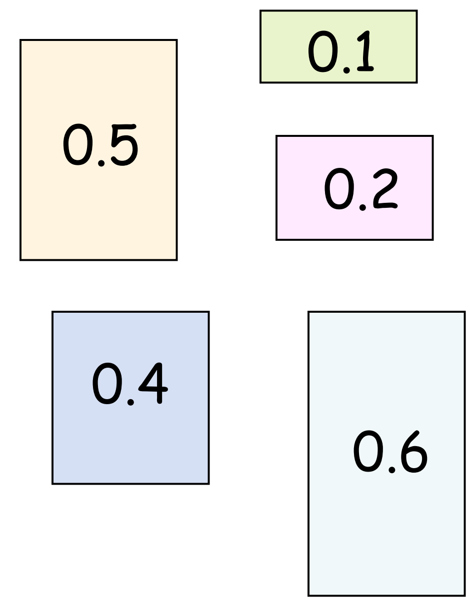
- Minden láda költsége =1. Ezt közösen fizetik a ládában lévő tárgyak (összméretük legf. 1)
- A költség arányos a tárgy súlyával (kis súly: kevesebbet fizet, nagy súly: többet fizet)
  - Egy ládában a költségek összege 1
- social goal: a ládaszámot minimalizálni

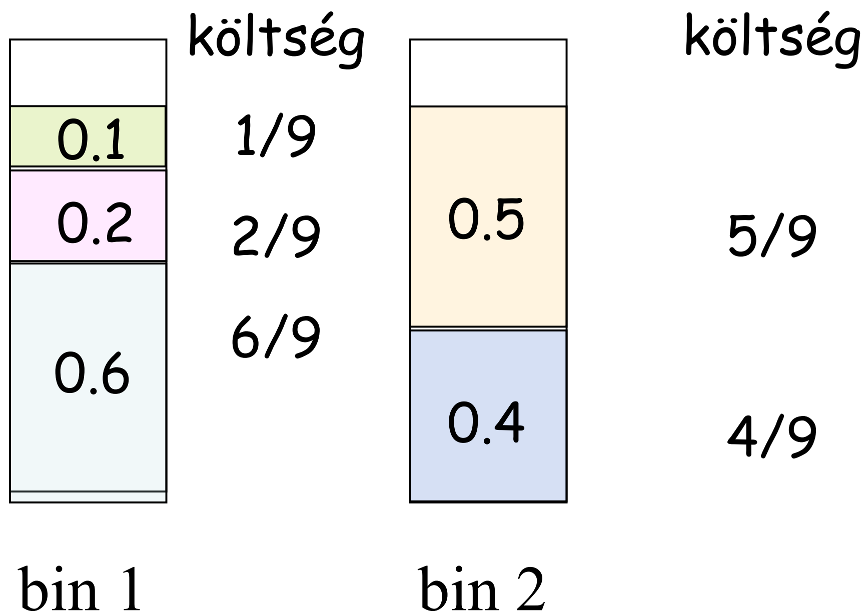
Történet

- Bilò 2005: súly=méret
- Ma, D, Han, Ting, Ye, Zhang 11: súly=1
- D, Epstein 12: tetszőleges súly
- Wang, Han, D, Tuza 15: szimpátia játék, még sokkal általánosabb, de most nem részletezzük

példa, súly=méret

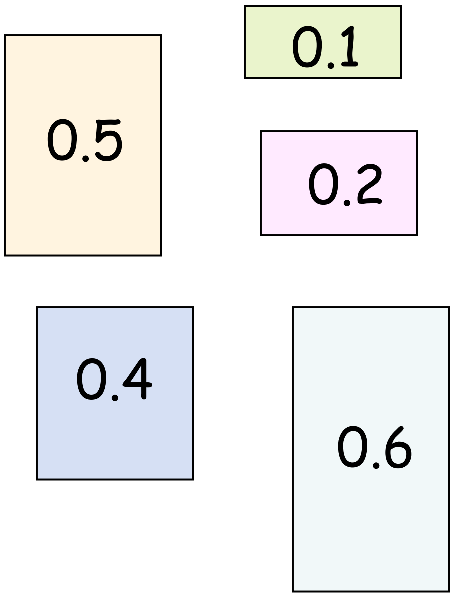
összméret: 0.9 (mindkét ládában)

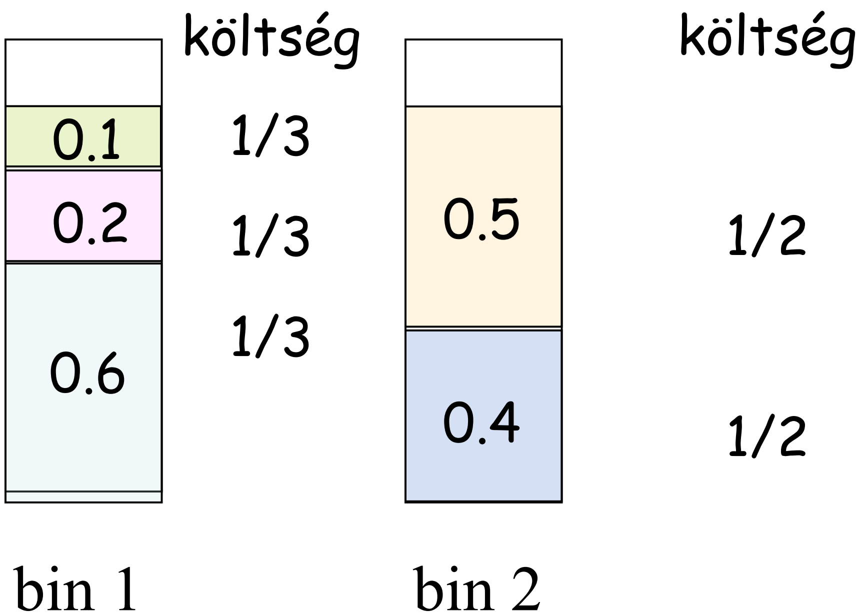




Oda akar menni ahol a láda minél inkább tele lesz

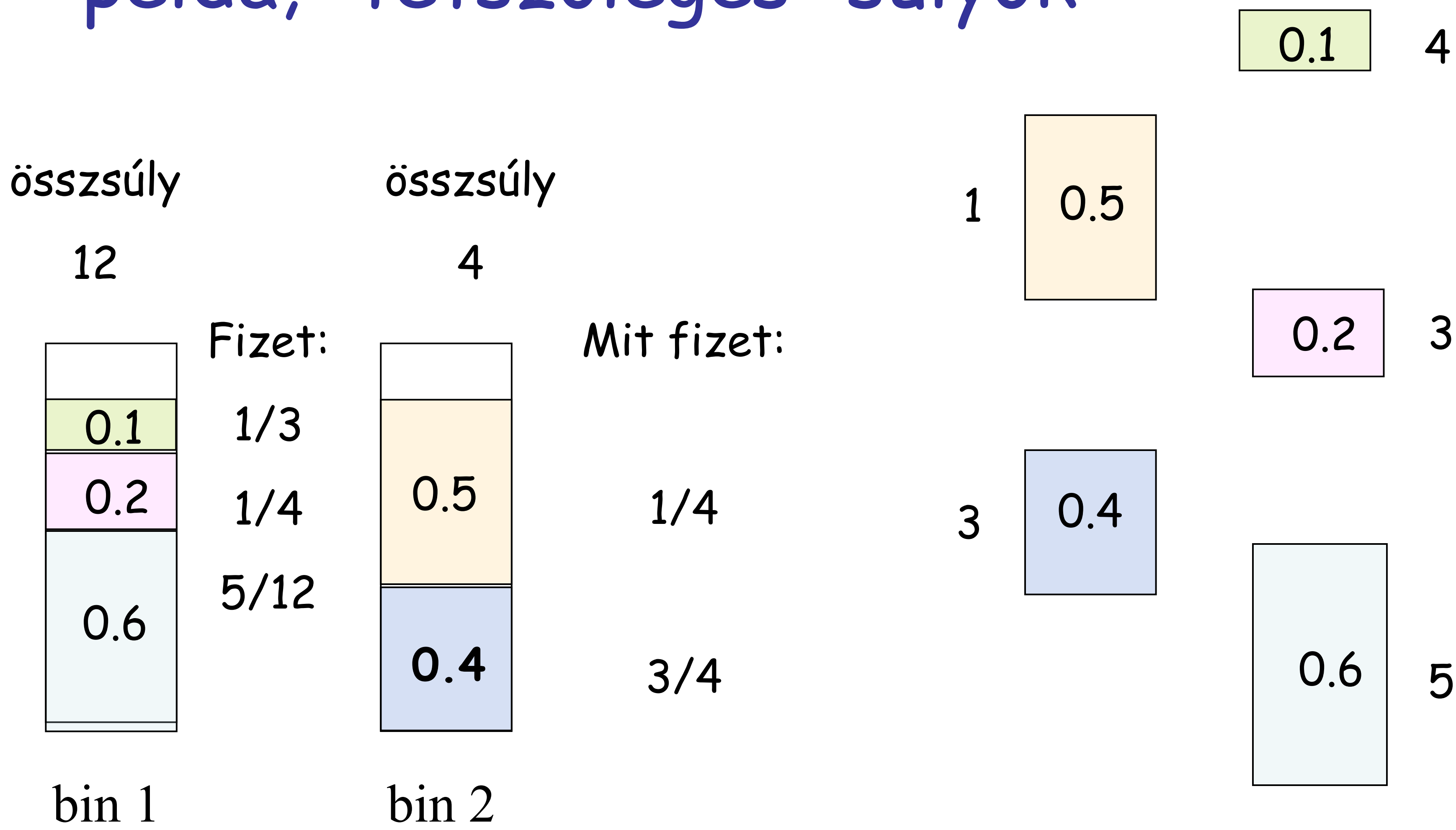
példa, súly=1





Most oda megy ahol sokan vannak

példa, “tetszőleges” súlyok



Oda megy, ahol nagy
az összes súly

NE Packing

- Önző tárgyak: a saját költségét akarja csökkenteni

Improving Step (javító lépés):

- Átmegy egy másik ládába, ha
  - befér
  - Kevesebbet fizet

Nash Equilibrium (*NE*): ha már senki nem tud javító lépést végrehajtani

Strong NE (SNE) Packing

- Erősebb stabil pakolás: tárgyak egy **koalíciója akar javítani** úgy hogy közűlük mindenki jól jár

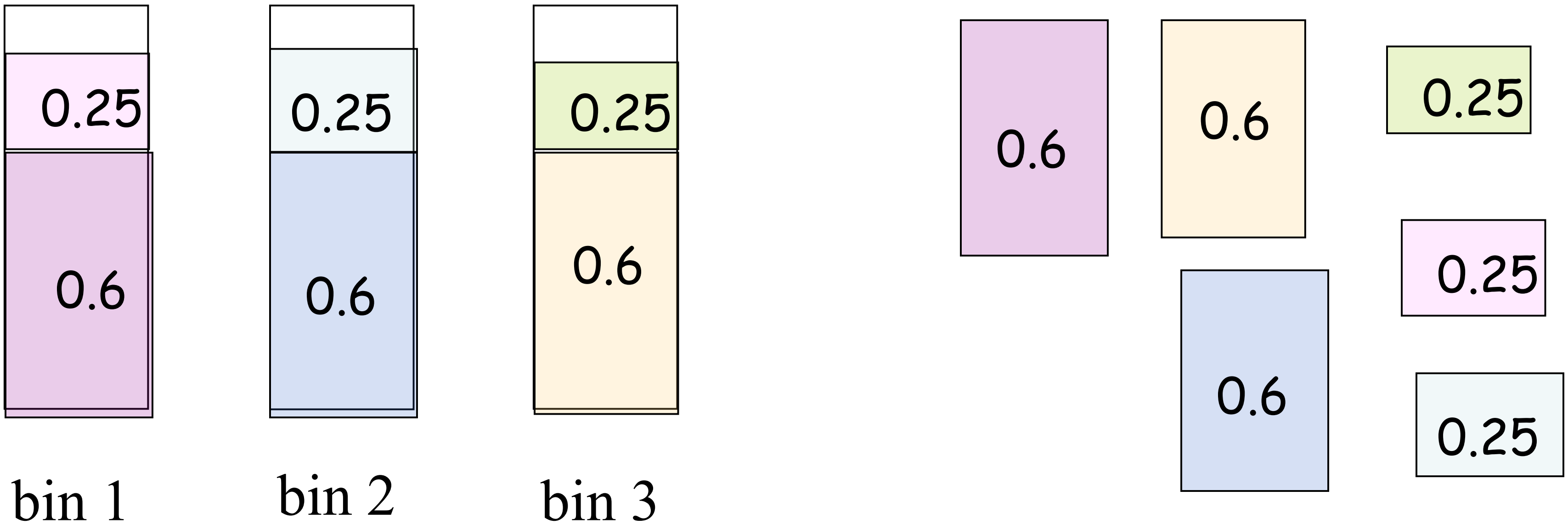
Improving Step:

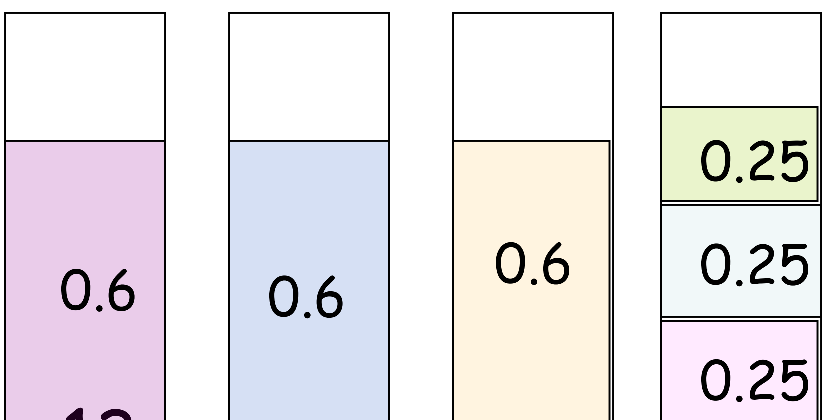
- A koalíció tárgyai egyszerre mozognak úgy hogy
  - Mindenki befér
  - Mindenki kevesebbet fizet mint korábban

Nyilvánvalóan ez (is) egy „local search" lépés

Strong Nash Equilibrium (SNE): amikor nincs olyan koalíció amely javító lépést tudna tenni

Ez most NE de nem SNE (súly=1)

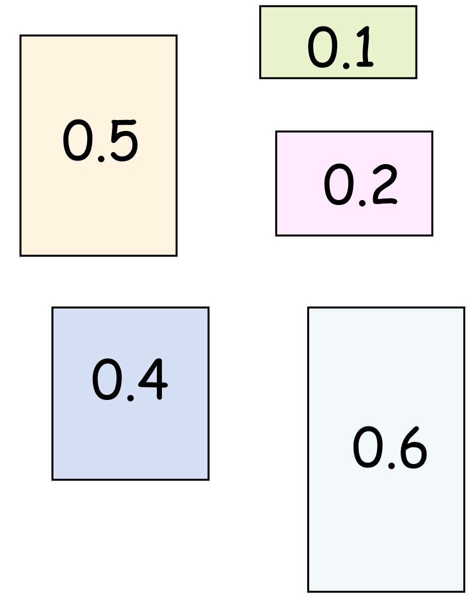


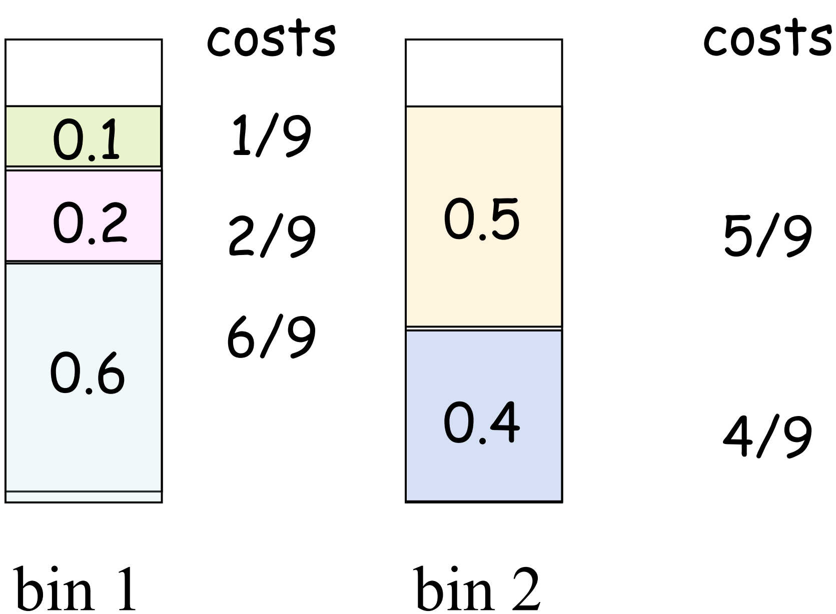


Ez az egyetlen SNE (és ez nem opt pakolás!)

súly=méret

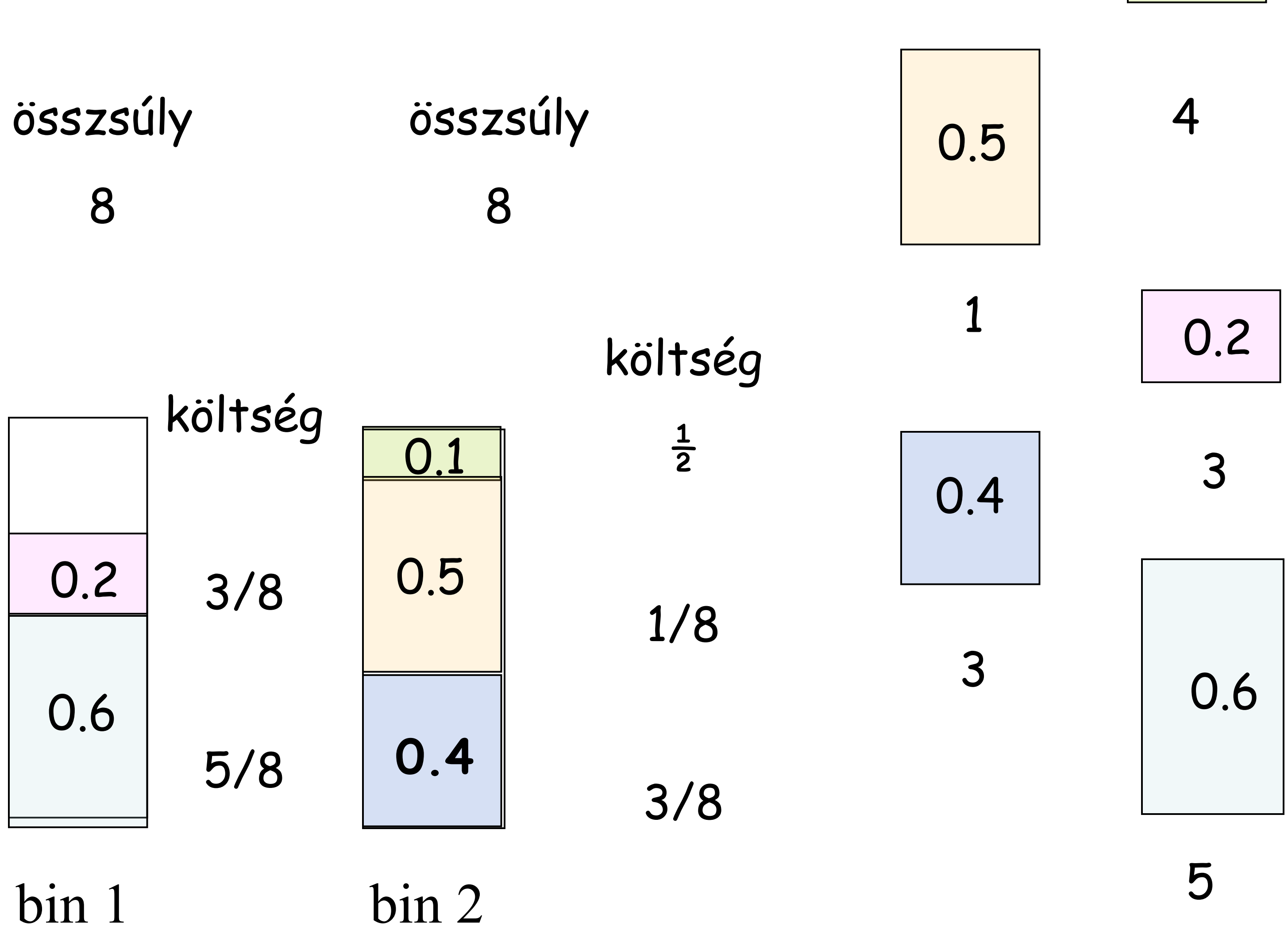
Van javító lépés, 0.1 javítani tud





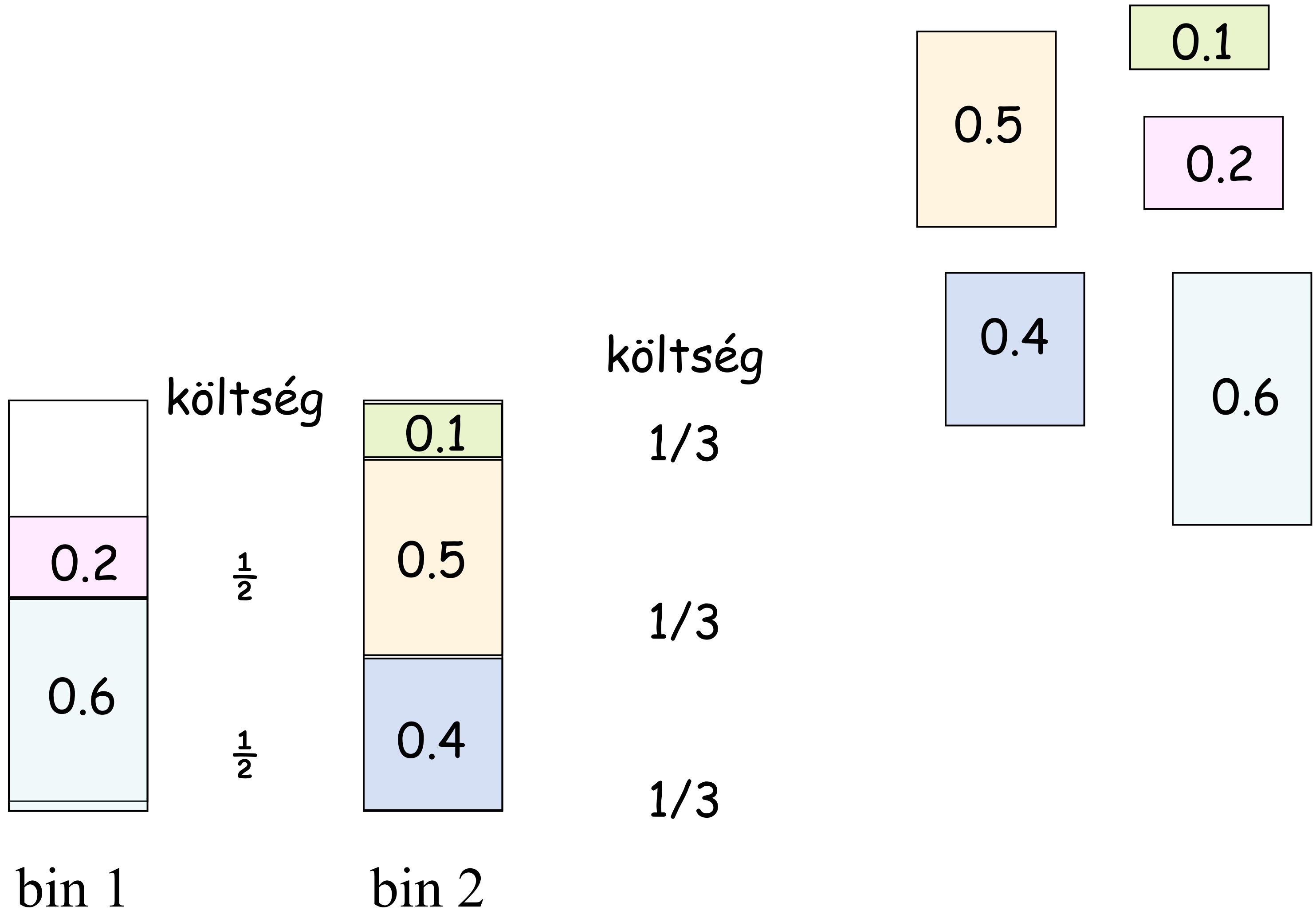
Tetszőleges súlyok

Most 0.1 -nek nem (volt) érdeke menni

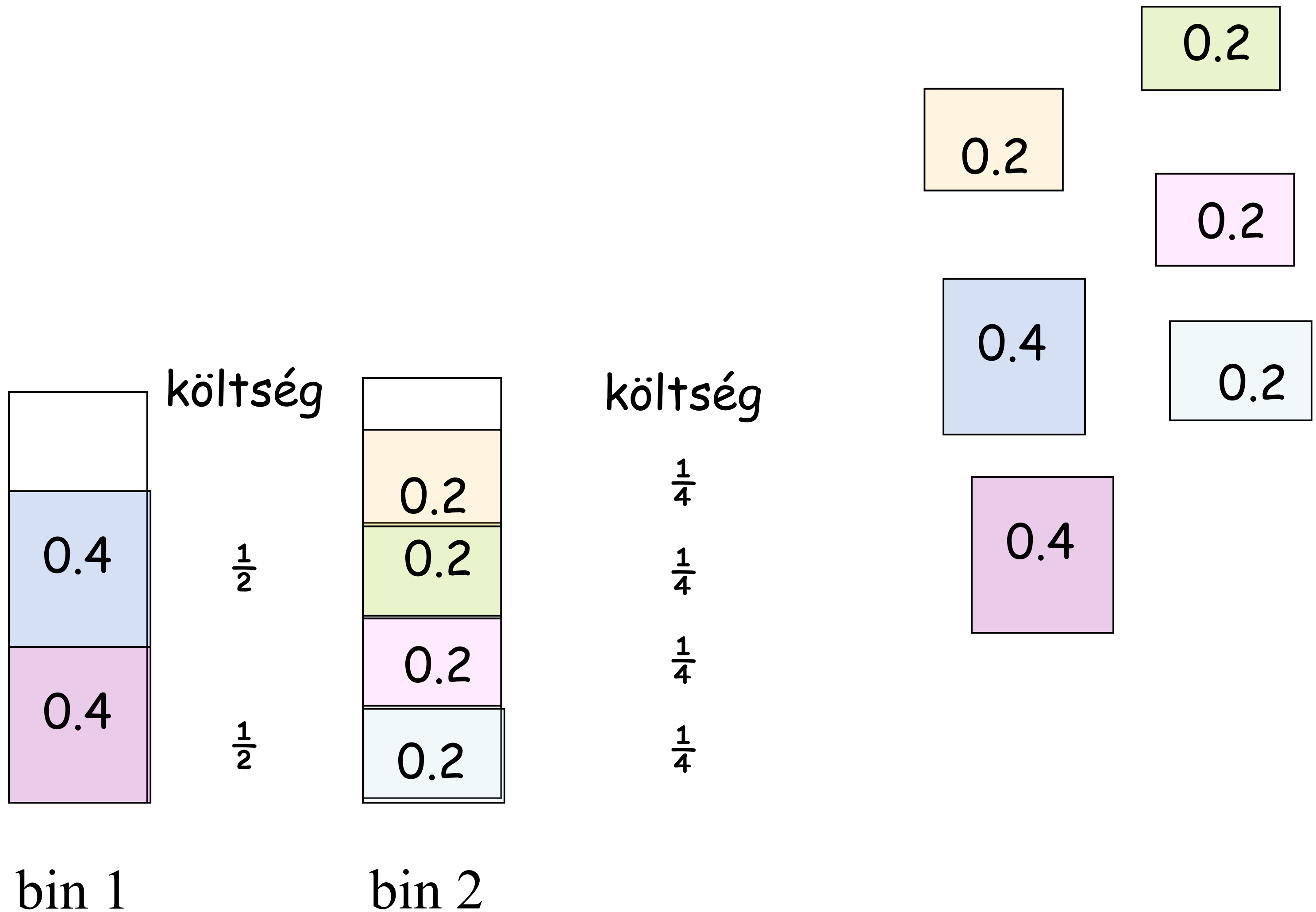


Egyenlő súlyok

most sem akar menni 0.1



Ez most NE ha egyenlők a súlyok
De nem NE ha súly=méret



PoA (price of anarchy)

- PoA= az NE és OPT értékek NE/OPT arányának lim sup-ja
- Mivel az NE pakolás sok esetben valamely approx. algoritmus (ill. local search) eredménye, amit tekintünk: asymptotic approximation ratio

SPoA (strong price of anarchy)

- Mint az előbb, csak most nem az NE/OPT, hanem SNE/OPT limsup-ja
- NE-hez képest az SNE valamely “ügyesebb, rafináltabb” local search eredménye
  - Emiatt itt is: aszimptotikus approximációs arány

Ami most jön:

- Áttekintés a korábbi eredményekről
- Újfajta equilibrium (stabil pakolás): MNE, vagyis Massive NE, és a vonatkozó mérték: MPoA

súly=méret

- Bilò, 2006.
  - Mindig NE lesz előbb-utóbb
  - $1.6 \leq PoA \leq 5/3$
- Epstein & Kleiman, 2008.
  - $1.6416 \leq PoA \leq 1.6428$
  - Elég szoros, a jelenlegi legjobb?

súly=1

- Ma, D, Han, Ting, Ye, & Zhang, 2011
  - Mindig beáll az NE
  - PoA ≤ 1.7 (rögtön jön FF arányából)
- Lépésszám: NE ≤ $O(n^2)$

D., Epstein12, erősebb korlátok

- Azonos súlyok: PoA<1.7 !!!

  Jobb korlátok: 1.6994 <PoA <1.6966

tetszőleges súlyok:

- Az First-Fit (FF) algoritmus alkalmazása
  - Bármely NE egy FF pakolás eredménye
- Emiatt PoA = 1.7
  - Az éles alsó korlát a nehéz rész

SPoA, súly=méret

SPoA: analóg módon definiálódik mint a PoA, csak erős equilibria esetére

- Epstein & Kleiman, 2008.

SpoA=a “Subset-Sum” algoritmus approximációs aránya

  - Exp. futásidő
  - Lépésenként max. összeméretű tárgy egy-egy ládába

- Epstein, Kleiman, & Mestre, 2009.
  – Éles arány: 1.6067 (Graham régi sejtése)

Súly=1 vagy súly=tetsz, D., Epstein 12

	Unit weights lower bound	Unit weights upper bound	Arbitrary weights lower and upper bound
PoA	1.696646	1.6993996	1.7
SPoA	1.69103	1.69103	1.7

Most: Masszív NE (MNE)

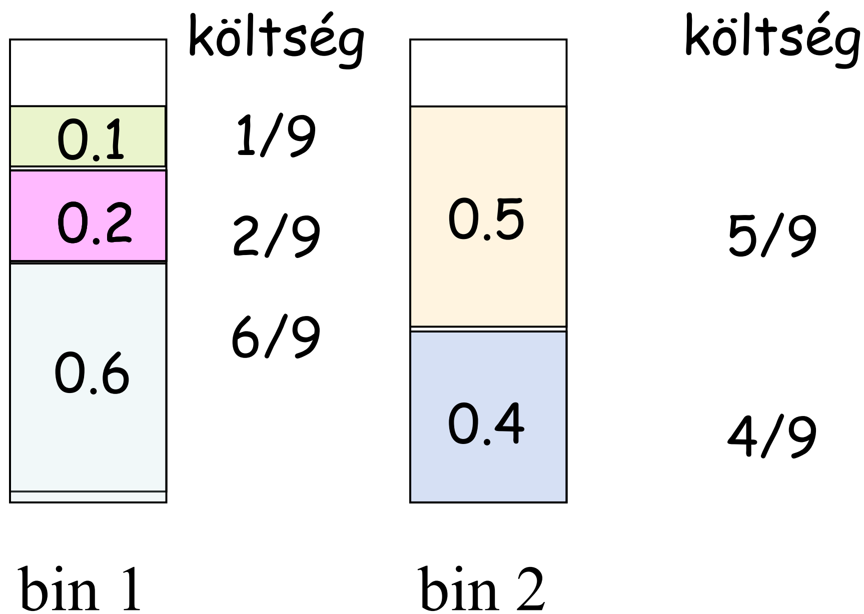
- weight=size, csak ezt az esetet vizsgáltuk
- Javító lépés:
- Egy tárgy helyet cserélhet egy másik láda valamely üres vagy nem üres S halmazával, ha:
- (i) Befér (S eltávolítása után)
- (ii) Előnyös számára a csere
- (iii) A mérete nagyobb mint S összmérete

- Ha nincs ilyen javító lépés: MNE
- MNE/OPT limsup-ja: Massive Price of Anarchy (MPoA)
- Ez is egyfajta local search (hatékonyabb mint ami NE-t eredményez, kevésbé bonyolult mint ami SNE-t eredményez)
- SPoA ≤ MPoA ≤ PoA

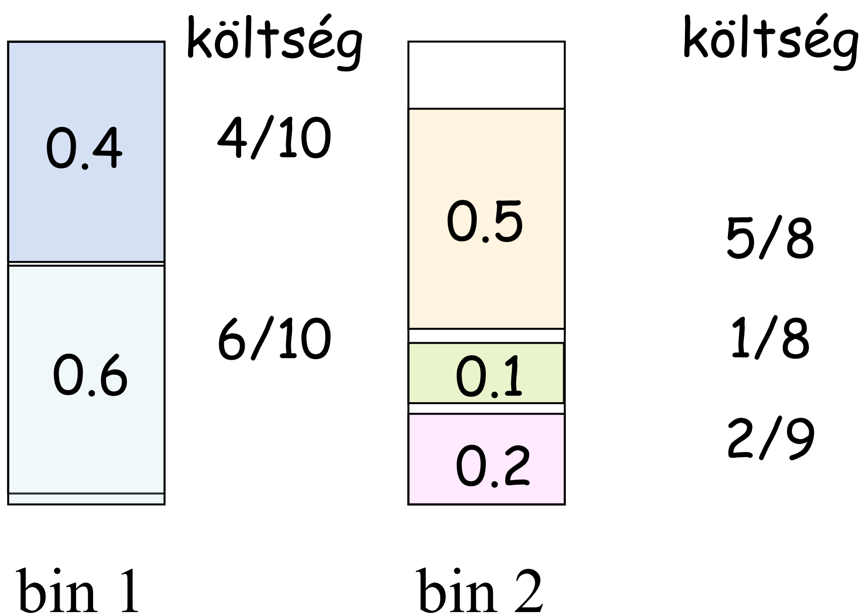
példa

Van javító lépés

0.4 cserél
0.2 és 0.1 - gyel
(de 0.1 egyedül is tudna mozogni mint az előbb,
és 0.6 is cserélhet 0.5 -tel)



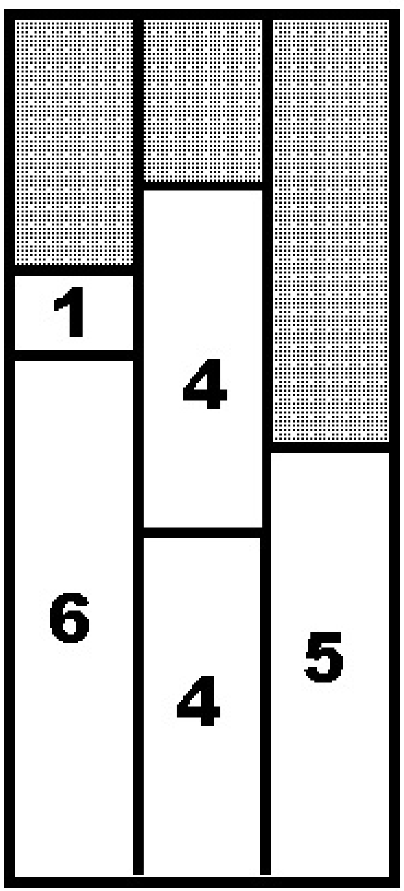
A javító csere után:



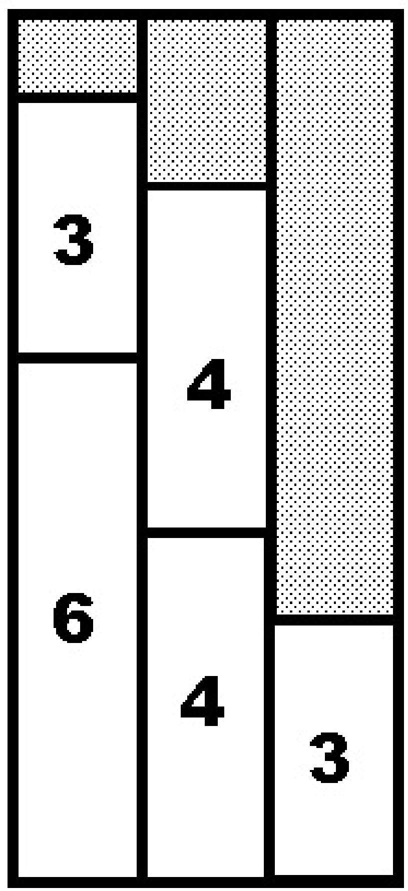
Ez már MNE:

- A kékek nem akarnak cserélni
- A többi nem tud cserélni

Nem NE



NE de nem MNE



De: MNE de nem SNE: 15 láda, mindegyikben 3,3,3,5

Mit tudunk:

- $1.6067 \leq \text{MPoA} \leq 1.6095$
- SPoA=SPoS=1.6067 (Epstein-Kleiman 08)
- Sejtés: az alsó korlát éles
- Felső korlát: sok lemmán keresztül

mit nem tudunk (OPEN):

- Tightness?
- Általános súlyok esete (vagy weight=1)?
- Más játékok esetén MPoA=?

k
ö
s
z
ö
n
m

e
ö
a
f
i
g
y

l
m
e
t
!