Diszkrét Momentum Problémák

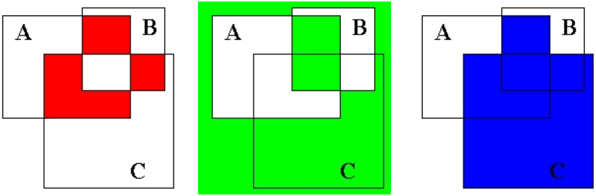
Boros Endre

Rutgers University

XXXII. MOK – 2017. Június 14.

Prékopa András (1929-2016) emlékére

Valószínűségi korlátok (Boole 1854, 1868 (1850))



$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} \cap \mathbf{C}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \qquad Prob(\mathbf{E}_1) = \frac{1}{3}$$

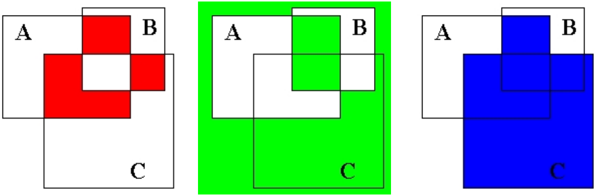
$$\mathbf{E}_2 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{E}_3 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \qquad Prob(\mathbf{E}_3) = \frac{5}{6}$$

$$\mathbf{E}_4 = (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\overline{\mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_4) = ?$$

Milyen nagy (kicsi) lehet $Prob(\mathbf{E}_4)$?

Valószínűségi korlátok (Boole 1854, 1868 (1850))



$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} \cap \mathbf{C}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \qquad Prob(\mathbf{E}_1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{E}_2 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_2) = \frac{1}{2}$$

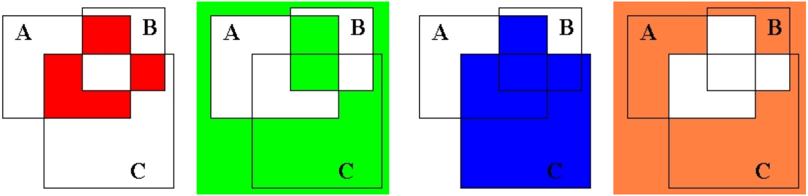
$$\mathbf{E}_3 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \qquad Prob(\mathbf{E}_3) = \frac{5}{6}$$

$$\mathbf{E}_4 = (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\overline{\mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_4) = ?$$

Lehetséges ez?

Milyen nagy (kicsi) lehet $Prob(\mathbf{E}_4)$?

Valószínűségi korlátok (Boole 1854, 1868 (1850))



$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} \cap \mathbf{C}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \qquad Prob(\mathbf{E}_1) = \tfrac{1}{3}$$

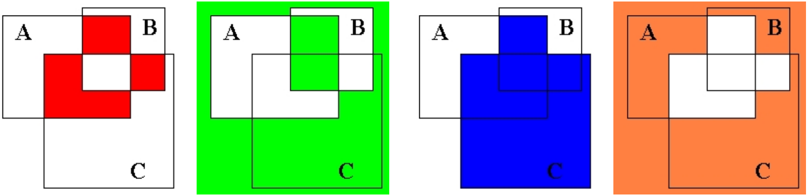
$$\mathbf{E}_2 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_2) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbf{E}_3 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \qquad Prob(\mathbf{E}_3) = \tfrac{5}{6}$$

$$\mathbf{E}_4 = (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\overline{\mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_4) = ?$$

Milyen nagy (kicsi) lehet $Prob(\mathbf{E}_4)$ **?**

Valószínűségi korlátok (Boole 1854, 1868 (1850))



$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} \cap \mathbf{C}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \qquad Prob(\mathbf{E}_1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{E}_2 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{E}_3 = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \qquad Prob(\mathbf{E}_3) = \frac{5}{6}$$

$$\mathbf{E}_4 = (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \cup (\overline{\mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{C}}) \qquad Prob(\mathbf{E}_4) = ?$$

Milyen nagy (kicsi) lehet $Prob(\mathbf{E}_4)$?

Egy fontos speciális eset

- **Események:** $\mathbf{A}_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbf{V} = \{1, 2, ..., n\}$
- **Adottak:** $p_I = Prob\left(\bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i\right)$ $\forall I \subseteq \mathbf{V}$, $|I| \leq m$, $(p_\emptyset = 1)$
- **Probléma:** Talaljunk alsó és felő korlátokat ezen n esemény uniójának a valószínűségére:

$$LB\left(p_I \mid I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m\right) \leq Prob\left(\bigcup_{i \in \mathbf{V}} \mathbf{A}_i\right) \leq UB\left(p_I \mid I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m\right)$$

Egy fontos speciális eset

- **Események:** $\mathbf{A}_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbf{V} = \{1, 2, ..., n\}$
- **Adottak:** $p_I = Prob\left(\bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i\right)$ $\forall I \subseteq \mathbf{V}$, $|I| \leq m$, $(p_\emptyset = 1)$
- **Probléma:** Talaljunk alsó és felő korlátokat ezen n esemény uniójának a valószínűségére:

$$LB\left(p_I \mid I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m\right) \leq Prob\left(\bigcup_{i \in \mathbf{V}} \mathbf{A}_i\right) \leq UB\left(p_I \mid I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m\right)$$

Egy fontos speciális eset

- **Események:** $\mathbf{A}_i \subseteq \Omega,\ i \in \mathbf{V} = \{1, 2, ..., n\}$
- **Adottak:** $p_I = Prob\left(\bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i\right)\ \forall I \subseteq \mathbf{V},\ |I| \leq m,\ (p_\emptyset = 1)$
- **Probléma:** Talaljunk alsó és felő korlátokat ezen n esemény uniójának a valószínűségére:

$$LB\left(p_I \mid I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m\right) \leq Prob\left(\bigcup_{i \in \mathbf{V}} \mathbf{A}_i\right) \leq UB\left(p_I \mid I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m\right)$$

LP model (Hailperin, 1965)

- **Események:** $\mathbf{A}_i \subseteq \Omega,\ i \in \mathbf{V} = \{1, 2, ..., n\}$
- **Adottak:** $p_I = Prob\left(\bigcap_{i\in I} \mathbf{A}_i\right)\ \forall I \subseteq \mathbf{V},\ |I| \le m,\ (p_\emptyset = 1)$
- **Változók:** $\mathbf{x}_J = Prob\left(\left(\bigcap_{i\in J} \mathbf{A}_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\notin J} \overline{\mathbf{A}}_i\right)\right)\ \forall J \subseteq \mathbf{V}$
- Ezzel a jelöléssel a céfüggvény és a feltételek így írhatók:

$$Prob\left(\bigcup_{i\in\mathbf{V}} \mathbf{A}_i\right) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\mathbf{V}} \mathbf{x}_J$$

és

$$p_I = \sum_{\mathbf{V}\supseteq J\supseteq I} \mathbf{x}_J \qquad \forall I \subseteq \mathbf{V}, |I| \le m$$

LP model (Hailperin, 1965)

- **Események:** $\mathbf{A}_i \subseteq \Omega,\ i \in \mathbf{V} = \{1, 2, ..., n\}$
- **Adottak:** $p_I = Prob\left(\bigcap_{i\in I} \mathbf{A}_i\right)\ \forall I \subseteq \mathbf{V},\ |I| \leq m,\ (p_\emptyset = 1)$
- **Változók:** $\mathbf{x}_J = Prob\left(\left(\bigcap_{i\in J} \mathbf{A}_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\notin J} \overline{\mathbf{A}}_i\right)\right)\ \forall J \subseteq \mathbf{V}$
- Ezzel a jelöléssel a céfüggvény és a feltételek így írhatók:

$$Prob\left(\bigcup_{i\in\mathbf{V}} \mathbf{A}_i\right) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\mathbf{V}} \mathbf{x}_J$$

és

$$p_I = \sum_{\mathbf{V}\supseteq J\supseteq I} \mathbf{x}_J \qquad \forall I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m$$

LP model (Hailperin, 1965)

$$LB_m^* = \min \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \mathbf{V}} \mathbf{x}_J \quad \text{és} \quad UB_m^* = \max \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \mathbf{V}} \mathbf{x}_J$$

$$\sum_{\mathbf{V} \supseteq J \supseteq I} \mathbf{x}_J = p_I \quad \forall I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m$$

$$\mathbf{x}_J \geq 0 \quad \forall J \subseteq \mathbf{V}$$

- Megoldhatóság: **NP-nehéz**. (Georgakopoulos, Kavvadias és Papadimitriou 1988)
- Oszlop generálás: **NP-nehéz** (már $m = 2$-re is). (Jaumard, Hansen és Poggi de Aragão 1991)

LP model (Hailperin, 1965)

$$LB_m^* = \min \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \mathbf{V}} \mathbf{x}_J \quad \text{és} \quad UB_m^* = \max \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \mathbf{V}} \mathbf{x}_J$$

$$\sum_{\mathbf{V} \supseteq J \supseteq I} \mathbf{x}_J = p_I \quad \forall I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m$$

$$\mathbf{x}_J \geq 0 \quad \forall J \subseteq \mathbf{V}$$

- Megoldhatóság: **NP-nehéz**. (Georgakopoulos, Kavvadias és Papadimitriou 1988)
- Oszlop generálás: **NP-nehéz** (már $m = 2$-re is). (Jaumard, Hansen és Poggi de Aragão 1991)

LP model (Hailperin, 1965)

$$LB_m^* = \min \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \mathbf{V}} \mathbf{x}_J \quad \text{és} \quad UB_m^* = \max \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \mathbf{V}} \mathbf{x}_J$$

$$\sum_{\mathbf{V} \supseteq J \supseteq I} \mathbf{x}_J = p_I \quad \forall I \subseteq \mathbf{V}, |I| \leq m$$

$$\mathbf{x}_J \geq 0 \quad \forall J \subseteq \mathbf{V}$$

- Megoldhatóság: **NP-nehéz**. (Georgakopoulos, Kavvadias és Papadimitriou 1988)
- Oszlop generálás: **NP-nehéz** (már $m = 2$-re is). (Jaumard, Hansen és Poggi de Aragão 1991)

Binomiális Momentum Probléma (Prékopa 1988)

- $\mathbf{S}_k = \sum_{\substack{I \subseteq \mathbf{V} \\ |I|=k}} p_I$ a k-dik binomiális momentuma az n eseménynek.
- Ha ξ jelöli az előforduló események számát, akkor

$$\mathbf{S}_k = Exp\left[\binom{\xi}{k}\right].$$

Binomiális Momentum Probléma (Prékopa 1988)

- $\mathbf{S}_k = \sum_{\substack{I \subseteq \mathbf{V} \\ |I|=k}} p_I$ a k-dik binomiális momentuma az n eseménynek.
- Ha ξ jelöli az előforduló események számát, akkor

$$\mathbf{S}_k = Exp\left[\binom{\xi}{k}\right].$$

Binomiális Momentum Probléma (Prékopa 1988)

$$\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{LB}_m \\ \min\{1, \widetilde{UB}_m\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \min \\ \max \end{array} \right\} \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{k} y_j = \mathbf{S}_k \quad \forall k = 1, ..., m$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, ..., n$$

Theorem 1 (Prékopa (1988))

Egy m elemű részhalmaz $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ egy duálisan megengedett bázist definiál akkor és csak akkor ha a struktúrája a következő:

	m even	m odd
min	$\{i, i+1, ..., t, t+1\}$	$\{i, i+1, ..., t, t+1, n\}$
max	$\{1, i, i+1, ..., t, t+1, n\}$	$\{1, i, i+1, ..., t, t+1\}$

Binomiális Momentum Probléma (Prékopa 1988)

$$\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{LB}_m \\ \min\{1, \widetilde{UB}_m\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \min \\ \max \end{array} \right\} \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{k} y_j = \mathbf{S}_k \quad \forall k = 1, ..., m$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, ..., n$$

Theorem 1 (Prékopa (1988))

Egy m elemű részhalmaz $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ egy duálisan megengedett bázist definiál akkor és csak akkor ha a struktúrája a következő:

	m *even*	m *odd*
min	$\{i, i+1, ..., t, t+1\}$	$\{i, i+1, ..., t, t+1, n\}$
max	$\{1, i, i+1, ..., t, t+1, n\}$	$\{1, i, i+1, ..., t, t+1\}$

Binomiális momentumokon alapuló korlátok

- $\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \cdots - \mathbf{S}_{2s} \leq \widetilde{LB}_{2s}$ and $\widetilde{UB}_{2s+1} \leq \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_{2s+1}$
  (Bonferroni 1937)

- $\widetilde{LB}_2 = \frac{2}{i+1}\mathbf{S}_1 - \frac{2}{i(i+1)}\mathbf{S}_2, \quad i = 1 + \lfloor \frac{2\mathbf{S}_2}{\mathbf{S}_1} \rfloor$
  (Dawson és Sankoff 1967; Kwerel 1975; Galambos 1977)

- $\widetilde{UB}_2 = \mathbf{S}_1 - \frac{2}{n}\mathbf{S}_2$
  (Kwerel 1975; Sathe, Pradhan és Shah 1980; Platz 1985)

Binomiális momentumokon alapuló korlátok

- $\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \cdots - \mathbf{S}_{2s} \le \widetilde{LB}_{2s}$ and $\widetilde{UB}_{2s+1} \le \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_{2s+1}$
  (Bonferroni 1937)
- $\widetilde{LB}_2 = \frac{2}{i+1}\mathbf{S}_1 - \frac{2}{i(i+1)}\mathbf{S}_2, \quad i = 1 + \lfloor \frac{2\mathbf{S}_2}{\mathbf{S}_1} \rfloor$
  (Dawson és Sankoff 1967; Kwerel 1975; Galambos 1977)
- $\widetilde{UB}_2 = \mathbf{S}_1 - \frac{2}{n}\mathbf{S}_2$
  (Kwerel 1975; Sathe, Pradhan és Shah 1980; Platz 1985)

Binomiális momentumokon alapuló korlátok

- $\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \cdots - \mathbf{S}_{2s} \leq \widetilde{LB}_{2s}$ and $\widetilde{UB}_{2s+1} \leq \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_{2s+1}$
  (Bonferroni 1937)

- $\widetilde{LB}_2 = \frac{2}{i+1}\mathbf{S}_1 - \frac{2}{i(i+1)}\mathbf{S}_2, \quad i = 1 + \lfloor \frac{2\mathbf{S}_2}{\mathbf{S}_1} \rfloor$
  (Dawson és Sankoff 1967; Kwerel 1975; Galambos 1977)

- $\widetilde{UB}_2 = \mathbf{S}_1 - \frac{2}{n}\mathbf{S}_2$
  (Kwerel 1975; Sathe, Pradhan és Shah 1980; Platz 1985)

Binomiális momentumokon alapuló korlátok

- $\widetilde{LB}_3 = \frac{i+2n-1}{(i+1)n}\mathbf{S}_1 - \frac{2(2i+n-2)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_2 + \frac{6}{i(i+1)n}\mathbf{S}_3,$

  where $i = 1 + \lfloor \frac{2(n-2)\mathbf{S}_2 - 6\mathbf{S}_3}{(n-1)\mathbf{S}_1 - 2\mathbf{S}_2} \rfloor,$

- $\widetilde{UB}_3 = \mathbf{S}_1 - \frac{2(2i-1)}{i(i+1)}\mathbf{S}_2 + \frac{6}{i(i+1)}\mathbf{S}_3,$

  where $i = 1 + \lfloor \frac{3\mathbf{S}_3}{\mathbf{S}_2} \rfloor$

  (Kwerel 1975; B és Prékopa 1989)

- $\widetilde{UB}_4 = \mathbf{S}_1 - \frac{2((i-1)(i-2)+(2i-1)n)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_2 + \frac{6(2i+n-4)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_3 - \frac{24}{i(i+1)n}\mathbf{S}_4,$

  where $i = 1 + \lfloor \frac{2(n-2)\mathbf{S}_2 + 3(n-5)\mathbf{S}_3 - 12\mathbf{S}_4}{(n-2)\mathbf{S}_2 - 3\mathbf{S}_3} \rfloor$

  (B és Prékopa 1989)

Binomiális momentumokon alapuló korlátok

- $\widetilde{LB}_3 = \frac{i+2n-1}{(i+1)n}\mathbf{S}_1 - \frac{2(2i+n-2)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_2 + \frac{6}{i(i+1)n}\mathbf{S}_3,$
  where $i = 1 + \lfloor \frac{2(n-2)\mathbf{S}_2 - 6\mathbf{S}_3}{(n-1)\mathbf{S}_1 - 2\mathbf{S}_2} \rfloor$,

- $\widetilde{UB}_3 = \mathbf{S}_1 - \frac{2(2i-1)}{i(i+1)}\mathbf{S}_2 + \frac{6}{i(i+1)}\mathbf{S}_3,$
  where $i = 1 + \lfloor \frac{3\mathbf{S}_3}{\mathbf{S}_2} \rfloor$

(Kwerel 1975; B és Prékopa 1989)

- $\widetilde{UB}_4 = \mathbf{S}_1 - \frac{2((i-1)(i-2)+(2i-1)n)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_2 + \frac{6(2i+n-4)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_3 - \frac{24}{i(i+1)n}\mathbf{S}_4,$
  where $i = 1 + \lfloor \frac{2(n-2)\mathbf{S}_2 + 3(n-5)\mathbf{S}_3 - 12\mathbf{S}_4}{(n-2)\mathbf{S}_2 - 3\mathbf{S}_3} \rfloor$

(B és Prékopa 1989)

Binomiális momentumokon alapuló korlátok

- $\widetilde{LB}_3 = \frac{i+2n-1}{(i+1)n}\mathbf{S}_1 - \frac{2(2i+n-2)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_2 + \frac{6}{i(i+1)n}\mathbf{S}_3$,

  where $i = 1 + \lfloor \frac{2(n-2)\mathbf{S}_2 - 6\mathbf{S}_3}{(n-1)\mathbf{S}_1 - 2\mathbf{S}_2} \rfloor$,

- $\widetilde{UB}_3 = \mathbf{S}_1 - \frac{2(2i-1)}{i(i+1)}\mathbf{S}_2 + \frac{6}{i(i+1)}\mathbf{S}_3$,

  where $i = 1 + \lfloor \frac{3\mathbf{S}_3}{\mathbf{S}_2} \rfloor$

  (Kwerel 1975; B és Prékopa 1989)

- $\widetilde{UB}_4 = \mathbf{S}_1 - \frac{2((i-1)(i-2)+(2i-1)n)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_2 + \frac{6(2i+n-4)}{i(i+1)n}\mathbf{S}_3 - \frac{24}{i(i+1)n}\mathbf{S}_4$,

  where $i = 1 + \lfloor \frac{2(n-2)\mathbf{S}_2 + 3(n-5)\mathbf{S}_3 - 12\mathbf{S}_4}{(n-2)\mathbf{S}_2 - 3\mathbf{S}_3} \rfloor$

  (B és Prékopa 1989)

Erősebb korlátok

- $LB^*_{m=2} \geq LB_2(GK) \; = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, ahol $p_i = P(\mathbf{A}_i)$, $p_{i,j} = P(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j)$ és $\sum_{j \neq i} \alpha_j p_{i,j} = (1-\alpha_i)p_i$ for $i = 1, \ldots, n$. (Gallot 1966; Kounias 1968)
- $LB^*_2 \geq LB_2(dC) \; = \sum_{i \in \mathbf{V}} \frac{p_i^2}{p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} \geq \widetilde{LB}_2$, (de Caen 1997)
- $LB^*_2 \geq$

  $LB_2(KAT) \; = \sum_{i \in \mathbf{V}} \left(\frac{\theta_i p_i^2}{(2-\theta_i)p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} + \frac{(1-\theta_i)p_i^2}{(1-\theta_i)p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} \right) \geq$

  $\widetilde{LB}_2$,

  where $\theta_i = \frac{\sum_{j \neq i} p_{i,j}}{p_i} - \lfloor \frac{\sum_{j \neq i} p_{i,j}}{p_i} \rfloor$ (Kuai, Alajai és Takahara 2000)

Erősebb korlátok

- $LB^*_{m=2} \geq LB_2(GK) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, ahol $p_i = P(\mathbf{A}_i)$, $p_{i,j} = P(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j)$ és $\sum_{j \neq i} \alpha_j p_{i,j} = (1-\alpha_i) p_i$ for $i = 1, ..., n$. (Gallot 1966; Kounias 1968)
- $LB^*_2 \geq LB_2(dC) \;=\; \sum_{i \in \mathbf{V}} \frac{p_i^2}{p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} \geq \widetilde{LB}_2$, (de Caen 1997)
- $LB^*_2 \geq$
  $LB_2(KAT) \;=\; \sum_{i \in \mathbf{V}} \left(\frac{\theta_i p_i^2}{(2-\theta_i)p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} + \frac{(1-\theta_i)p_i^2}{(1-\theta_i)p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} \right) \geq$
  $\widetilde{LB}_2$,

  where $\theta_i = \frac{\sum_{j \neq i} p_{i,j}}{p_i} - \lfloor \frac{\sum_{j \neq i} p_{i,j}}{p_i} \rfloor$ (Kuai, Alajai és Takahara 2000)

Erősebb korlátok

- $LB^*_{m=2} \geq LB_2(GK) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, ahol $p_i = P(\mathbf{A}_i)$, $p_{i,j} = P(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j)$ és $\sum_{j \neq i} \alpha_j p_{i,j} = (1 - \alpha_i) p_i$ for $i = 1, ..., n$. (Gallot 1966; Kounias 1968)
- $LB^*_2 \geq LB_2(dC) = \sum_{i \in \mathbf{V}} \frac{p_i^2}{p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} \geq \widetilde{LB}_2$, (de Caen 1997)
- $LB^*_2 \geq$

  $$LB_2(KAT) = \sum_{i \in \mathbf{V}} \left(\frac{\theta_i p_i^2}{(2 - \theta_i) p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} + \frac{(1 - \theta_i) p_i^2}{(1 - \theta_i) p_i + \sum_{j \neq i} p_{i,j}} \right) \geq$$

  $\widetilde{LB}_2$,

  where $\theta_i = \frac{\sum_{j \neq i} p_{i,j}}{p_i} - \lfloor \frac{\sum_{j \neq i} p_{i,j}}{p_i} \rfloor$ (Kuai, Alajai és Takahara 2000)

Erősebb korlátok

- $UB_2^* \le UB_2(Ko) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{i \neq k} p_{i,k}$ $\quad$ (k adott) $\quad$ (Kounias 1968)

- $UB_2^* \le UB_2(HW) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{(i,j)\in T} p_{i,j} \le \widetilde{UB}_2,$

  ahol T egy feszítő fa (Hunter 1976; Worsley 1982)

  a legjobb feszítő fa polinom időben meghatározható

- $UB_3^* \le UB_3(BP) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{(i,j)\in \mathcal{E}} p_{i,j} + \sum_{(i,j,k)\in \mathcal{C}} p_{\{i,j,k\}} \le \widetilde{UB}_3,$

  ahol $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ egy cseresznye fa (Bukszár és Prékopa 2001)

  a legjobb cseresznye fa meghatározása NP-nehéz (Scozzari és Tardella, 2017)

Erősebb korlátok

- $UB_2^* \leq UB_2(Ko) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{i \neq k} p_{i,k}$ (k adott) (Kounias 1968)

- $UB_2^* \leq UB_2(HW) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{(i,j) \in T} p_{i,j} \leq \widetilde{UB}_2,$

  ahol T egy feszítő fa (Hunter 1976; Worsley 1982)

  a legjobb feszítő fa polinom időben meghatározható

- $UB_3^* \leq UB_3(BP) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} p_{i,j} + \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{C}} p_{\{i,j,k\}} \leq \widetilde{UB}_3,$

  ahol $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ egy cseresznye fa (Bukszár és Prékopa 2001)

  a legjobb cseresznye fa meghatározása NP-nehéz (Scozzari és Tardella, 2017)

Erősebb korlátok

- $UB_2^* \leq UB_2(Ko) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{i \neq k} p_{i,k} \quad (k \text{ adott}) \qquad \text{(Kounias 1968)}$

- $UB_2^* \leq UB_2(HW) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{(i,j) \in T} p_{i,j} \leq \widetilde{UB}_2,$

  ahol T egy feszítő fa (Hunter 1976; Worsley 1982)

  a legjobb feszítő fa polinom időben meghatározható

- $UB_3^* \leq UB_3(BP) \;=\; \mathbf{S}_1 - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} p_{i,j} + \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{C}} p_{\{i,j,k\}} \leq \widetilde{UB}_3,$

  ahol $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ egy cseresznye fa (Bukszár és Prékopa 2001)

  a legjobb cseresznye fa meghatározása NP-nehéz (Scozzari és Tardella, 2017)

Részleges aggregáció (Prékopa és Gao, 2005)

- Legyen $S_{ik} = \dfrac{1}{k} \sum_{\substack{I \subseteq V, |I|=k \\ i \in I}} p_I .$
- Tekintsük a következő részlegesen aggregált LP-t:

$$\left\{ \begin{array}{c} LB_m(PG) \\ UB_m(PG) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \min \\ \max \end{array} \right\} = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} y_{ij}$$

$$\sum_{j \in V} \binom{j}{k} y_{ij} = S_{ik} \quad \forall i \in V, \text{ és } k = 1, ..., m.$$

Theorem 2 (Prékopa és Gao, 2005)

$LB_2(PG) = LB_2(KAT)$ *és* $UB_2(PG) = UB_2(KW) = \widetilde{UB}_2$.

Részleges aggregáció (Prékopa és Gao, 2005)

- Legyen $S_{ik} = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{\substack{I \subseteq V, |I|=k \\ i \in I}} p_I$.
- Tekintsük a következő részlegesen aggregált LP-t:

$$\left\{ \begin{array}{c} LB_m(PG) \\ UB_m(PG) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \min \\ \max \end{array} \right\} = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} y_{ij}$$

$$\sum_{j \in V} \binom{j}{k} y_{ij} = S_{ik} \quad \forall i \in V, \text{ és } k = 1, \dots, m.$$

Theorem 2 (Prékopa és Gao, 2005)

$LB_2(PG) = LB_2(KAT)$ *és* $UB_2(PG) = UB_2(KW) = \widetilde{UB}_2$.

Részleges aggregáció (Prékopa és Gao, 2005)

- Legyen $S_{ik} = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{\substack{I \subseteq V, |I|=k \\ i \in I}} p_I$.
- Tekintsük a következő részlegesen aggregált LP-t:

$$\left\{ \begin{array}{c} LB_m(PG) \\ UB_m(PG) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \min \\ \max \end{array} \right\} = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} y_{ij}$$

$$\sum_{j \in V} \binom{j}{k} y_{ij} = S_{ik} \quad \forall i \in V, \text{ és } k = 1, \dots, m.$$

Theorem 2 (Prékopa és Gao, 2005)

$LB_2(PG) = LB_2(KAT)$ *és* $UB_2(PG) = UB_2(KW) = \widetilde{UB}_2$.

A duális feladat megszorítása

- A primális relaxaciójához a duális megszorításával is eljuthatunk.
- Bizonyos megszorítások a duális feladatot megkönnyítik.
- Tekintsuk a következő lineáris programot $LP(\mathcal{F})$, ahol $\mathcal{F}$ egy konvex halmaz:

$$\left\{ \begin{array}{c} LB_m(\mathcal{F}) \\ UB_m(\mathcal{F}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \max \\ \min \end{array} \right\} = \sum_{\substack{I \subseteq V \\ 1 \leq |I| \leq m}} p_I y_I$$

$$\textstyle\sum_{I \subseteq S} y_I \quad \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} 1 \quad \forall S \subseteq V,\ S \neq \emptyset$$

$$y \quad \in \mathcal{F}$$

- Legyen $M = n + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{m}$, és definiáljuk

$$\mathcal{F}_N = \{ y \in \mathbb{R}^M \mid y_I \leq 0 \quad \forall 1 < |I| \leq m \}$$

$$\mathcal{F}_D = \left\{ y \in \mathbb{R}^M \,\middle|\, y_I = \sum_{i \in I} z_i^{|I|} \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{c} z_i^1, \ldots, z_i^m \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in V \end{array} \right\}$$

A duális feladat megszorítása

- A primális relaxaciójához a duális megszorításával is eljuthatunk.
- Bizonyos megszorítások a duális feladatot megkönnyítik.
- Tekintsuk a következő lineáris programot $LP(\mathcal{F})$, ahol $\mathcal{F}$ egy konvex halmaz:

$$\left\{\begin{array}{c} LB_m(\mathcal{F}) \\ UB_m(\mathcal{F}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \max \\ \min \end{array}\right\} = \sum_{\substack{I \subseteq V \\ 1 \leq |I| \leq m}} p_I y_I$$

$$\sum_{I \subseteq S} y_I \quad \left\{\begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array}\right\} 1 \quad \forall S \subseteq V,\ S \neq \emptyset$$

$$y \quad \in \mathcal{F}$$

- Legyen $M = n + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{m}$, és definiáljuk

$$\mathcal{F}_N = \{y \in \mathbb{R}^M \mid y_I \leq 0 \quad \forall 1 < |I| \leq m\}$$

$$\mathcal{F}_D = \left\{ y \in \mathbb{R}^M \,\middle|\, y_I = \sum_{i \in I} z_i^{|I|} \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{c} z_i^1, \ldots, z_i^m \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in V \end{array} \right\}$$

A duális feladat megszorítása

- A primális relaxációjához a duális megszorításával is eljuthatunk.
- Bizonyos megszorítások a duális feladatot megkönnyítik.
- Tekintsuk a követkeő lineáris programot $LP(\mathcal{F})$, ahol $\mathcal{F}$ egy konvex halmaz:

$$\left\{ \begin{array}{c} LB_m(\mathcal{F}) \\ UB_m(\mathcal{F}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \max \\ \min \end{array} \right\} = \sum_{\substack{I \subseteq V \\ 1 \le |I| \le m}} p_I y_I$$

$$\textstyle\sum_{I \subseteq S} y_I \quad \left\{ \begin{array}{c} \le \\ \ge \end{array} \right\} 1 \quad \forall S \subseteq V,\ S \neq \emptyset$$

$$y \quad \in \mathcal{F}$$

- Legyen $M = n + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{m}$, és definiáljuk

$$\mathcal{F}_N = \{ y \in \mathbb{R}^M \mid y_I \le 0 \quad \forall 1 < |I| \le m \}$$

$$\mathcal{F}_D = \left\{ y \in \mathbb{R}^M \,\middle|\, y_I = \sum_{i \in I} z_i^{|I|} \ \text{ ahol } \ \begin{array}{c} z_i^1, \dots, z_i^m \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in V \end{array} \right\}$$

A duális feladat megszorítása

- A primális relaxációjához a duális megszorításával is eljuthatunk.
- Bizonyos megszorítások a duális feladatot megkönnyítik.
- Tekintsuk a következő lineáris programot $LP(\mathcal{F})$, ahol $\mathcal{F}$ egy konvex halmaz:

$$\left\{ \begin{array}{c} LB_m(\mathcal{F}) \\ UB_m(\mathcal{F}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \max \\ \min \end{array} \right\} = \sum_{\substack{I \subseteq V \\ 1 \le |I| \le m}} p_I y_I$$

$$\sum_{I \subseteq S} y_I \quad \left\{ \begin{array}{c} \le \\ \ge \end{array} \right\} 1 \quad \forall S \subseteq V,\ S \neq \emptyset$$

$$y \quad \in \mathcal{F}$$

- Legyen $M = n + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{m}$, és definiáljuk

$$\mathcal{F}_N = \{ y \in \mathbb{R}^M \mid y_I \le 0 \ \ \forall 1 < |I| \le m \}$$

$$\mathcal{F}_D = \left\{ y \in \mathbb{R}^M \middle| y_I = \sum_{i \in I} z_i^{|I|} \ \text{ ahol } \begin{array}{c} z_i^1, \ldots, z_i^m \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in V \end{array} \right\}$$

A duális feladat megszorítása

Theorem 3 (B, Scozzari, Tardella, és Veneziani, 2015)

Az $LP(\mathcal{F}_N)$ és $LP(\mathcal{F}_D)$ problémák polinomiális időben megoldhatók, és az ebből eredő korlátok legalább olyan jók, mint bármely más jelenleg ismert polinom időben kiszámítható korlát. Például a következő relációk teljesülnek:

$$UB_2(\mathcal{F}_N) \;=\; UB_2(HW) \;\leq\; UB_2(\mathcal{F}_D) \;=\; UB_2(K0),$$

$$UB_m(\mathcal{F}_D) \leq UB_m(PG), \qquad \textit{és}$$

$$LB_m(\mathcal{F}_D) \geq LB_m(PG).$$

$LP(\mathcal{F}_N)$ felső korlát

$$\max Prob\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\begin{aligned} Prob(A_i) &= p_i \quad \forall i = 1, ..., n \\ Prob\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\geq p_I \quad \forall I \subseteq V,\ |I| \leq m \end{aligned}$$

- Ennek a feladatnak az optimuma egybeesik az $LP(\mathcal{F}_N)$ felső korláttal.
- **Polinomiális időben meghatározható.**

$LP(\mathcal{F}_N)$ felső korlát

$$\max Prob\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\begin{aligned} Prob(A_i) &= p_i & \forall i = 1, ..., n \\ Prob\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\geq p_I & \forall I \subseteq V,\ |I| \leq m \end{aligned}$$

- Ennek a feladatnak az optimuma egybeesik az $LP(\mathcal{F}_N)$ felső korláttal.
- **Polinomiális időben meghatározható.**

$LP(\mathcal{F}_N)$ felső korlát

$$\max Prob\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\begin{aligned} Prob(A_i) &= p_i \quad \forall i = 1, ..., n \\ Prob\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\geq p_I \quad \forall I \subseteq V,\ |I| \leq m \end{aligned}$$

- Ennek a feladatnak az optimuma egybeesik az $LP(\mathcal{F}_N)$ felső korláttal.
- **Polinomiális időben meghatározható.**

$LP(\mathcal{F}_N)$ felső korlát az $m = 2$ esetben

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i \in V} p_i w_i^1 + \sum_{i,j \in V} p_{i,j} w_{i,j}^2 & & \\
\sum_{i \in S} w_i^1 + \sum_{i,j \in S} w_{i,j}^2 & \geq 1 & \forall S \subseteq V,\ S \neq \emptyset \\
w_{i,j}^2 & \leq 0 & \forall i,j \in V
\end{aligned}
$$

Theorem 4 (B, Scozzari, Tardella, és Veneziani, 2015)

A megengedett megoldások poliéderének csúcsai pontosan a következő (w^1, w^2) vektor párok:

$$w^1 = (1, \ldots, 1) \quad \textit{és} \quad w^2 = -\chi(T)$$

ahol T egy feszítő fa.

Érdekes, nem intuitív tény:

Az eredeti, nem megszorított, duális feladat optimumában a w^2 vektornak lehetnek pozitív komponensei!

$LP(\mathcal{F}_N)$ felső korlát az $m = 2$ esetben

$$\begin{aligned} \min \sum_{i \in V} p_i w_i^1 + \sum_{i,j \in V} p_{i,j} w_{i,j}^2 & \\ \sum_{i \in S} w_i^1 + \sum_{i,j \in S} w_{i,j}^2 &\geq 1 \quad \forall S \subseteq V,\ S \neq \emptyset \\ w_{i,j}^2 &\leq 0 \quad \forall i,j \in V \end{aligned}$$

Theorem 4 (B, Scozzari, Tardella, és Veneziani, 2015)

A megengedett megoldások poliéderének csúcsai pontosan a következő (w^1, w^2) vektor párok:

$$w^1 = (1, ..., 1) \quad \textit{és} \quad w^2 = -\chi(T)$$

ahol T egy feszítő fa.

Érdekes, nem intuitív tény:

Az eredeti, nem megszorított, duális feladat optimumában a w^2 vektornak lehetnek pozitív komponensei!

$LP(\mathcal{F}_N)$ felső korlát az $m = 2$ esetben

$$\begin{aligned} \min \sum_{i \in V} p_i w_i^1 + \sum_{i,j \in V} p_{i,j} w_{i,j}^2 & & \\ \sum_{i \in S} w_i^1 + \sum_{i,j \in S} w_{i,j}^2 & \geq 1 & \forall S \subseteq V,\ S \neq \emptyset \\ w_{i,j}^2 & \leq 0 & \forall i,j \in V \end{aligned}$$

Theorem 4 (B, Scozzari, Tardella, és Veneziani, 2015)

A megengedett megoldások poliéderének csúcsai pontosan a következő (w^1, w^2) vektor párok:

$$w^1 = (1, \ldots, 1) \quad \textit{és} \quad w^2 = -\chi(T)$$

ahol T egy feszítő fa.

Érdekes, nem intuitív tény:

Az eredeti, nem megszorított, duális feladat optimumában a w^2 vektornak lehetnek pozitív komponensei!

Köszönöm szépen a figyelmüket!