

Csebisev-polinomok, módosított Csebisev-polinomok, körosztási előpolinomok és körosztási polinomok

Kéri Gerzson

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és jelölések	7
2. A Csebisev-polinomok értelmezési módjai és verziói	10
3. Kevert fajú módosított Csebisev-polinomok	17
4. A módosított Csebisev-polinomok főbb geometriai és analitikus tulajdonságai	20
5. Az $U_n^*(x)$ polinom szélsőértékeinek meghatározása $n \leq 8$ esetén	25
6. A $T_n^*(x) - h$ és $T_n^{**}(x) - h$ polinomok gyökeinek számítása általános h konstans esetén	27
7. A $\overline{T_n^*(x) - h}$ polinom gyökeinek származtatása és ábrázolása a komplex egységkörön $ h \leq 2$ esetén	29
8. Komplex egységgyökök és körosztási polinomok	31

9. A vizsgált polinomok faktorizációja	32
10. Általánosítási lehetőségek	42
11. A $\Psi_n(x)$ körosztási előpolinomok és a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomok generálása	44
12. A faktorizációs képletekből levezethető oszthatósági szabályok	46
13. Táblázatok és ábrák	46
Irodalomjegyzék	119

Táblázatok jegyzéke

1.	Definíció szerinti, ill. közismert vagy könnyen bizonyítható azonosságok	50
2.	Az eredeti és a módosított Csebisev-polinomok rekurzív képzési szabálya	51
3.	Az eredeti és a módosított Csebisev-polinomok explicit előállítás	52
4.	Többszörös szögek szögfüggvényei a módosított Csebisev-polinomokkal	53
5.	A faktorizációs képletek segítségével feltárt kevésbé ismert azonosságok	54
6.	A 'felülvonás' transzformáció eredménye a módosított Csebisev-polinomokra	55
7.	A 'felülvonás' transzformáció főbb tulajdonságai	56
8.	$\overline{T_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 2, \pm 1$) és $\overline{U_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 1$) irreducibilis faktorizációja	56
9.	$T_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 2, \pm 1$) és $U_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$) irreducibilis faktorizációja	57
10.	$\overline{V_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 1$), $\overline{W_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 1$), $\overline{Y_n^*(x)}$ és $\overline{Z_n^*(x)}$ irreducibilis faktorizációja	58
11.	$V_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$), $W_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$), $Y_n^*(x)$ és $Z_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja	59
12.	$T_n^{**}(x) - h$ ($h = 0, \pm 2, \pm 1$), $U_n^{**}(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$) és $W_n^{**}(x) - h$ ($h = \pm 1$) nem bizonyítottan irreducibilis faktorizációja	60
13.	Az elsőfajú módosított Csebisev-polinomok listája	61
14.	$T_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	62
15.	$T_n^*(x) - 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	63

16.	$T_n^*(x) + 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	64
17.	$T_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	65
18.	$T_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	66
19.	A másodfajú módosított Csebisev-polinomok listája	67
20.	$U_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	68
21.	$U_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	69
22.	$U_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	70
23.	A harmadfajú módosított Csebisev-polinomok listája	71
24.	$V_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	72
25.	$V_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	73
26.	$V_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	74
27.	A negyedfajú módosított Csebisev-polinomok listája	75
28.	$W_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	76
29.	$W_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	77
30.	$W_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	78
31.	Az ötödfajú módosított Csebisev-polinomok listája	79
32.	$Y_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	80
33.	A hatodfajú módosított Csebisev-polinomok listája	81
34.	$Z_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	82
35.	A $T_n^{**}(x)$ polinomok listája	83

36.	$T_n^{**}(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	84
37.	$T_n^{**}(x) - 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	85
38.	$T_n^{**}(x) + 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	85
39.	$T_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	86
40.	$T_n^{**}(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	86
41.	Az $U_n^{**}(x)$ polinomok listája	87
42.	$U_n^{**}(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	88
43.	$U_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	89
44.	$U_n^{**}(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	89
45.	A $W_n^{**}(x)$ polinomok listája	90
46.	A $Z_n^{**}(x)$ polinomok listája	91
47.	$W_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	92
48.	$W_n^{**}(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban	93
49.	A körosztási előpolinomok és a körosztási polinomok listája ($1 \leq n \leq 120$)	94
50.	A páratlan indexű $\Psi_n^{**}(x) = \Psi_n(ix)\Psi_{2n}(ix) = \Psi_n(ix)\Psi_n(-ix) $ kifejezések listája	105
51.	$T_n^*(x) - h$ lineáris polinom osztói ($h = 0, \pm 1, \pm 2$)	106
52.	$U_n^*(x) - h$ lineáris polinom osztói ($h = 0, \pm 1$)	106
53.	A $T_n^*(x)$ polinom rajzához tartozó adatok $3 \leq n \leq 6$ esetén .	108
54.	Az $U_n^*(x)$ polinom rajzához tartozó adatok $3 \leq n \leq 6$ esetén .	110

55.	Az $U_n^*(x)$ polinom rajzához tartozó adatok $7 \leq n \leq 8$ esetén .	112
56.	A $V_n^*(x)$ polinom gyökei és szélsőértékei $3 \leq n \leq 8$ esetén . .	113
57.	$T_n^*(x) - h$ ($h = \pm 2, 0, \pm 1$) gyökei	114
58.	$U_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$) gyökei	114

Ábrák jegyzéke

1.	$T_3^*(x), T_4^*(x), T_5^*(x)$ és $T_6^*(x)$ görbéje	107
2.	$U_3^*(x), U_4^*(x), U_5^*(x)$ és $U_6^*(x)$ görbéje	109
3.	$U_7^*(x)$ és $U_8^*(x)$ görbéje	111
4.	$T_n^*(x) - 2$ és $\overline{T_n^*(x) - 2} = (x^n - 1)^2$ gyökei	115
5.	$T_n^*(x) + 2$ és $\overline{T_n^*(x) + 2} = (x^n + 1)^2$ gyökei	115
6.	$T_n^*(x)$ és $\overline{T_n^*(x)} = x^{2n} + 1$ gyökei	116
7.	$T_n^*(x) - 1$ és $\overline{T_n^*(x) - 1} = x^{2n} - x^n + 1$ gyökei	116
8.	$T_n^*(x) + 1$ és $\overline{T_n^*(x) + 1} = x^{2n} + x^n + 1$ gyökei	117
9.	$U_n^*(x)$ és $\overline{U_n^*(x)} = \sum_{k=0}^n x^{2k}$ gyökei	117
10.	$U_n^*(x) - 1$ és $\overline{U_n^*(x) - 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k} - x^n$ gyökei	118
11.	$U_n^*(x) + 1$ és $\overline{U_n^*(x) + 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k} + x^n$ gyökei	118

1. Bevezetés és jelölések

Az alkalmazott jelölések közül az ismert szokásos fogalmak és jelölések értelmezésével nem foglalkozunk. (Szükség esetén segítenek az online keresők.) A továbbiakban azokra az elnevezésekre és jelölésekre koncentrálunk, amelyek első ránézésre esetleg nagyon szokatlannak vagy furcsának tűnhetnek. Ilyeneket magyarázunk a következő felsorolásban:

1. Megnövelt binomiális együtthatónak nevezzük a normál binomiális együtthatóra hasonlító, de jobbról dupla zárójellel lezárt formációt, amit a következőképpen értelmezünk:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{ha } k = 0, \\ \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{ha } 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Definiálhatjuk és gyors kiszámítás céljából használhatjuk őket egy olyan aszimmetrikus Pascal-háromszög elemeiként is, melynek jobb szélső 1-eseit 2 értékre növeljük. Úgy is lehet magyarázni, hogy egy Pascal-háromszöget egy másik, DK-i irányban 1 egységgel eltolt Pascal-háromszöggel szuperponálunk olyan értelemben, hogy az egymást fedő számoknak az összegét vesszük.

A kétféle Pascal-háromszög hasonlóságának és különbözőségének a szemléltetésére megmutatjuk mindkettőnek egy rövid részletét. A normál Pascal-háromszög néhány kezdő sora:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{array}$$

Az aszimmetrikus Pascal-háromszög néhány kezdő sora pedig a következő:

					2									
					1		2							
				1		3		2						
			1		4		5		2					
		1		5		9		7		2				
	1		6		14		16		9		2			
	1		7		20		30		25		11		2	
1		8		27		50		55		36		13		2

Az elemek képzési szabálya mindkét fajta Pascal-háromszögre azonos: Valamennyi belső elem értéke a két fölötte elhelyezkedő elem összegével egyenlő. Vegyük észre azt is, hogy $n \geq 1$ esetén az $(a+b)^n + b(a+b)^{n-1}$ polinom együtthatói éppen az aszimmetrikus Pascal-háromszög elemei.

Egyébként több más, a miénktől többé-kevésbé eltérő aszimmetrikus Pascal-háromszögekről lehet olvasni a szakirodalomban, egy a miénkhez hasonló, ám annak tükörképe (ugyanis a bal peremre helyezi a 2-eseket) látható Belbachir és Szalay [1] cikkében (Figure 2., 1349. old.), több más jellegű Pascal-háromszög ábrájával egyetemben.

Egy további általánosítást fogunk bevezetni a 3. szakaszban, amit csak ott használunk, és ezért ezt a bevezető szakaszt nem bonyolítjuk el vele.

2. Egyváltozós polinom felülvonásával azt a transzformációt jelöljük, amely az n -edfokú $P_n(x)$ polinomot a $2n$ -edfokú $\overline{P_n(x)} = x^n P_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$ polinomba képezi le.

Könnyen látható, hogy ez a transzformáció multiplikatív, tehát fennáll $\overline{P_n(x)Q_m(x)} = \overline{P_n(x)} \cdot \overline{Q_m(x)}$ és következésképpen $[\overline{P_n(x)}]^k = \overline{[P_n(x)]^k}$, ha k pozitív egész.

Ebből az is következik, hogy ha egy $P_n(x)$ polinom osztható egy másik $Q_m(x)$ polinommal, akkor $\overline{P_n(x)/Q_m(x)} = \overline{P_n(x)}/\overline{Q_m(x)}$.

3. A $\Phi_n(x)$ körosztási polinomokhoz társítható $\Psi_n(x)$ függvények értelmezését kibővítjük a következőképpen. Legyen

$$\Psi_1(x) = \sqrt{x-2}, \quad \Psi_2(x) = \sqrt{x+2}.$$

$n \geq 3$ esetére $\Psi_n(x)$ -et az ismert képlettel definiáljuk:

$$\Psi_n(x) = \prod_{\substack{0 < k < n/2 \\ \gcd(k,n)=1}} \left(x - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right).$$

A fenti négyzetgyökös kifejezések, melyeket besoroltunk a $\Psi_n(x)$ polinomok közé, elvileg zavart is okozhatnak egyrészt azzal, hogy az értelmezési tartományuk nem az egész valós számegetes, másrészt az

is megkérdendő, hogy a négyzetgyökök két értéke közül melyiket válasszuk. Ilyen problémák mégsem jelentkeznek amiatt, mivel $\Psi_1(x)$ -nek és $\Psi_2(x)$ -nek mindenütt csak a négyzetét fogjuk használni a továbbiakban. Ettől függetlenül azoknak a képleteknek a helyességét, amelyekben ezek előfordulnak, megkülönböztetett gondossággal ellenőrizzük.

A $\Psi_n(x)$ függvények ilyen kibővített használatával azt nyerjük, hogy a módosított Csebisev-polinomok különböző változatai egységesen tárgyalhatóak, valamint a Csebisev-polinomos kifejezéseknek, ill. azok transzformáltjainak a faktorizációja teljes szinkronba kerülnek egymással, lásd a 8–11. táblázatok képleteit.

Hasonlóan, a következő szakaszban értelmezett $T_n^{**}(x) \pm h$ és $U_n^{**}(x) \pm h$ polinomok faktorizációjának egységes tárgyalását teszi lehetővé, ha bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\Psi_1^{**}(x) = \sqrt{x^2 + 4},$$

$$\Psi_n^{**}(x) = |\Psi_n(ix)\Psi_{2n}(ix)|, \text{ ha } n (> 1) \text{ páratlan egész,}$$

$$\Psi_n^{**}(x) = |\Psi_n(ix)|, \text{ ha } n \text{ osztható 4-gyel.}$$

Nem nehéz megmutatni, hogy $\Psi_n^{**}(x)$ egész együtthatós polinom, ha $n \geq 3$ és n páratlan vagy osztható 4-gyel.

Ismeretes (lásd pl. Kearnes, Kiss és Szendrei [3]), hogy $n \geq 3$ esetén a $\Psi_n(x)$ polinomokból a felülvonás transzformáció alkalmazásával megkapjuk a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomokat, ennek alapján a $\Psi_n(x)$ -eket nevezhetjük körosztási előpolinomoknak. A félreértés elkerülése céljából tegyük mindjárt hozzá, hogy ténylegesen soha nem így állítjuk elő a körosztási polinomokat, hanem a $\Psi_n(x)$ előpolinomokat és a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomokat egymástól függetlenül generáljuk. Az előbbieket a módosított Csebisev-polinomok faktorizációja, az utóbbiakat az $x^n - 1$ vagy ahhoz hasonló polinomok faktorizációja segítségével. A $\Psi_n(x)$ és $\Phi_n(x)$ polinomok ilyen módon történő generálását a 11. szakaszban tárgyaljuk részletesebben.

Köszönetnyilvánítás.

A szerző köszönetét fejezi ki Szilassi Lajosnak és Szilágyi Ferencnek az ábrák gondos elkészítéséért.

2. A Csebisev-polinomok értelmezési módjai és verziói

A Csebisev-polinomokra eredeti formájukban is több különböző definíciót használhatunk. A legegyszerűbb talán az alábbi típusú rekurziós képletek alkalmazása (lásd Wikipédia [19, 20]):

A $T_n(x)$ elsőfajú Csebisev-polinomokra

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

az $U_n(x)$ másodfajú Csebisev-polinomokra pedig

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Egy másik, többszörös szögek szögfüggvényeinek két képletével kifejezett definíció:

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta),$$

$$\sin((n+1)\theta) = \sin \theta U_n(\cos \theta).$$

A fentiekén kívül lehet definíciónak tekinteni az alábbi ismert explicit képleteket is:

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad \text{for } n > 0,$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \quad \text{for } n > 0.$$

A kevésbé ismert harmad-, illetve negyedfajú Csebisev-polinomot Mason és Handscomb [8, 17. old.] az alábbi trigonometrikus képletekkel vezetik be:

$$V_n(\cos \theta) = \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta},$$

illetve

$$W_n(\cos \theta) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta}{\sin \frac{1}{2} \theta}.$$

Az előbbi két egyenlőségéből közismert trigonometrikus azonosságok használatával egyszerűen következik, hogy

$$W_n(\cos \theta) + V_n(\cos \theta) = \frac{2 \sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = 2U_n(\cos \theta)$$

és

$$W_n(\cos \theta) - V_n(\cos \theta) = \frac{2 \sin n\theta}{\sin \theta} = 2U_{n-1}(\cos \theta).$$

Ebből adódóan

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x) \text{ és } W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x).$$

Később kiderül, hogy a $V_n(x)$ és $W_n(x)$ polinomok faktorizációja során szerephez jut a $T_n(x)$ és $T_{n-1}(x)$ polinomok összege, ill. különbsége által definiált két polinom. Ezért talán érdemes lehet az utóbbiakat is a Csebisev-polinomok közé sorolni, ötöd-, ill. hatodfajú Csebisev polinomként, Y , ill. Z betűvel jelölve, azaz legyen

$$Y_n(x) = T_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ és } Z_n(x) = T_n(x) + T_{n-1}(x).$$

A Csebisev-polinomokról szólva nem szabad említés nélkül hagyni ezek alkalmazásának a jelentőségét az approximációelmélet és a differenciálegyenletek területén. Ilyen alkalmazásokkal azonban itt nem kívánunk foglalkozni. Akit a Csebisev polinomok témakörének ez az oldala érdekel, azoknak javasoljuk pl. az oktatásban is már régóta használt Natanszon [9] könyvet. Egyúttal az approximációelmélet művelői számára szeretném javasolni az itt tárgyalt módosított Csebisev-polinomok valamint a következő szakaszban bevezetésre kerülő kevert fajú Csebisev-polinomok tesztelését, alkalmazhatóságának a vizsgálatát.

Ebben a munkában elsősorban a hat Csebisev-polinomból származtatott alábbi $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$, $W_n^*(x)$, $Y_n^*(x)$, $Z_n^*(x)$, $T_n^{**}(x)$, $U_n^{**}(x)$, $W_n^{**}(x)$, és $Z_n^{**}(x)$ módosulatokkal foglalkozunk.

$T_n^*(x)$ -et és $U_n^*(x)$ -et zsugorítást eredményező lineáris transzformációval állítjuk elő a $T_n(x)$ elsőfajú, ill. $U_n(x)$ másodfajú Csebisev-polinomból a következőképpen:

$$T_n^*(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right), \quad U_n^*(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right). \quad (1)$$

Az ilyen módon zsugorított Csebisev polinomok egyik előnye, hogy mindkét polinom főegyütthatója tetszőleges pozitív egész n esetén 1 értékűre változik, tehát lényegesen csökken. A konstans tag esetleges kivételével a többi együttható abszolút értéke is csökken vagy változatlan marad.

Megjegyezzük, hogy ugyanezt a két polinom sorozatot Witula és Słota [13] cikkében a szerzők $\Omega_n(x)$, ill. $V_n(x)$ jelöléssel definiálták első-, ill. másodfajú módosított Csebisev-polinomként. (Ennek a $V_n(x)$ polinomnak semmi köze a fentebb említett harmadfajú Csebisev-polinomhoz; az egyforma jelölés csak véletlen.) Továbbá azt is meg kell még említenünk, hogy az elsőfajú módosított Csebisev-polinomra szokás még a Lucas-polinom elnevezés és az $L_n(x)$ jelölés használata is, lásd Wolfram MathWorld: Lucas Polynomial [23]. Számomra szimpatikusabb a Csebisev-polinomok betűjének a megtartása, csillag jellel történő megkülönböztetéssel, ezáltal kifejezve a kapcsolatot az eredeti Csebisev-polinomok és a megfelelő módosított Csebisev-polinomok között.

Az első két módosított Csebisev-polinomhoz hasonlóan minden pozitív egész n esetén 1 lesz a főegyüttható a

$$V_n^*(x) = U_n^*(x) - U_{n-1}^*(x) = V_n\left(\frac{x}{2}\right), \quad (2)$$

$$W_n^*(x) = U_n^*(x) + U_{n-1}^*(x) = W_n\left(\frac{x}{2}\right), \quad (3)$$

$$Y_n^*(x) = T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x) = 2Y_n\left(\frac{x}{2}\right), \quad (4)$$

és

$$Z_n^*(x) = T_n^*(x) + T_{n-1}^*(x) = 2Z_n\left(\frac{x}{2}\right) \quad (5)$$

zsugorított harmad-, negyed-, ötöd-, ill. hatodfajú Csebisev-polinomban is.

Ismeretes, hogy a $T_n^*(x)$ elsőfajú Csebisev polinom két különböző fokú másodfajú Csebisev-polinom különbségeként megkapható:

$$T_n^*(x) = U_n^*(x) - U_{n-2}^*(x). \quad (6)$$

Ennek alapján az ötöd- és hatodfajú Csebisev-polinomot négy szomszédos másodfajú Csebisev-polinomból tudjuk felépíteni:

$$Y_n^*(x) = U_n^*(x) - U_{n-1}^*(x) - U_{n-2}^*(x) + U_{n-3}^*(x) \quad (7)$$

és

$$Z_n^*(x) = U_n^*(x) + U_{n-1}^*(x) - U_{n-2}^*(x) - U_{n-3}^*(x) \quad (8)$$

További két módosulatot, $T_n^{**}(x)$ -et és $U_n^{**}(x)$ -et, úgy hozunk létre $T_n^*(x)$ -ből és $U_n^*(x)$ -ből, hogy minden negatív együtthatót az ellentettjére, pozitívvá változtatunk. Képlettel kifejezve:

$$T_n^{**}(x) = (-i)^n T_n^*(ix), \quad U_n^{**}(x) = (-i)^n U_n^*(ix). \quad (9)$$

Ezek a módosulatok a hiperbolikus polinomok képleteinek egy részében játszanak ugyanolyan szerepet, mint amelyet $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ a többszörös szögek szögfüggvényeinek a képleteiben.

Bár trigonometrikus vagy hiperbolikus képlettel nem (vagy esetleg csak nagyon bonyolult módon) tudjuk összefüggésbe hozni, a teljesség kedvéért bevezetjük még a $T_n^{**}(x)$ -hoz és $U_n^{**}(x)$ -hoz hasonlóan csupa nemnegatív együtthatót tartalmazó

$$W_n^{**}(x) = U_n^*(x) + U_{n-1}^*(x), \quad Z_n^{**}(x) = T_n^{**}(x) + T_{n-1}^{**}(x) \quad (10)$$

polinomokat.

A Csebisev-polinomok módosulatai közé sorolhatjuk még a $T_n^*(x)$ és $T_n^{**}(x)$ polinomoknak 1-gyel és 2-vel növelt vagy csökkentett értékét, valamint az $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$, $W_n^*(x)$, $Y_n^*(x)$, $Z_n^*(x)$, $U_n^{**}(x)$, $W_n^{**}(x)$ és $Z_n^{**}(x)$ polinomoknak 1-gyel növelt vagy csökkentett értékét, vagy általánosabb értelemben a felsorolt polinomoknak tetszőleges egész számmal növelt vagy csökkentett értékét. Mindezek több vagy kevesebb részletességgel tárgyalásra kerülnek a munka további részében. A felsorolt Csebisev-polinom módosulatok között, mint látni fogjuk, van egy erős kapocs, nevezetesen az a tény, hogy a szóban forgó polinomok faktorizációja a legtöbb esetben minden pozitív egész n -re, néhány esetben pedig minden páros pozitív egész n -re leírható a körosztási előpolinomok segítségével.

Az (1)–(10) képletekkel bevezetett módosított Csebisev-polinomokra független definícióként ugyanazok a lehetőségek állnak rendelkezésre, amelyek az eredeti Csebisev polinomokra. Egyrészt rekurziós képletek:

$$T_0^*(x) = 2$$

$$T_1^*(x) = x$$

$$T_{n+1}^*(x) = xT_n^*(x) - T_{n-1}^*(x),$$

$$U_0^*(x) = 1$$

$$U_1^*(x) = x$$

$$U_{n+1}^*(x) = xU_n^*(x) - U_{n-1}^*(x),$$

$$T_0^{**}(x) = 2$$

$$T_1^{**}(x) = x$$

$$T_{n+1}^{**}(x) = xT_n^{**}(x) + T_{n-1}^{**}(x),$$

ill.

$$U_0^{**}(x) = 1$$

$$U_1^{**}(x) = x$$

$$U_{n+1}^{**}(x) = xU_n^{**}(x) + U_{n-1}^{**}(x).$$

Mivel $V_0^*(x)$, $W_0^*(x)$, $Y_0^*(x)$, $Z_0^*(x)$, $W_0^{**}(x)$ és $Z_0^{**}(x)$ nem értelmezhető, ezért a további esetekre 1-es indexszel történő kezdéssel érvényesek az alábbi rekurziók:

$$V_1^*(x) = x - 1$$

$$V_2^*(x) = x^2 - x - 1$$

$$V_{n+1}^*(x) = xV_n^*(x) - V_{n-1}^*(x),$$

$$W_1^*(x) = x + 1$$

$$W_2^*(x) = x^2 + x - 1$$

$$W_{n+1}^*(x) = xW_n^*(x) - W_{n-1}^*(x),$$

$$W_1^{**}(x) = x + 1$$

$$W_2^{**}(x) = x^2 + x + 1$$

$$W_{n+1}^{**}(x) = xW_n^{**}(x) + W_{n-1}^{**}(x),$$

$$Y_1^*(x) = x - 2$$

$$Y_2^*(x) = x^2 - x - 2$$

$$Y_{n+1}^*(x) = xY_n^*(x) - Y_{n-1}^*(x),$$

$$Z_1^*(x) = x + 2$$

$$Z_2^*(x) = x^2 + x - 2$$

$$Z_{n+1}^*(x) = xZ_n^*(x) - Z_{n-1}^*(x),$$

$$Z_1^{**}(x) = x + 2$$

$$Z_2^{**}(x) = x^2 + x + 2$$

$$Z_{n+1}^{**}(x) = xZ_n^{**}(x) + Z_{n-1}^{**}(x).$$

(Megjegyezzük, hogy ha technikai célból bevezetjük a $V_0^*(x) = W_0^*(x) = W_0^{**}(x) = 1$, $Y_0^*(x) = 2 - x$, $Z_0^*(x) = 2 + x$ és $Z_0^{**}(x) = 2 - x$ jelöléseket,

akkor a fenti rekurziós egyenlőségek már $n = 2$ -re is fennállnak, noha $Y_0^*(x)$, $Z_0^*(x)$ és $Z_0^{**}(x)$ paradox módon nem konstans, hanem elsőfokú polinom, és az is furcsa, hogy $Z_0^{**}(x)$ nem csupa nemnegatív együtthatós polinom.)

Megadhatók többszörös szögek szögfüggvényeivel kifejezett definíciók:

$$2 \cos n\theta = T_n^*(2 \cos \theta), \quad (11)$$

$$2 \sin(n+1)\theta = (2 \sin \theta) U_n^*(2 \cos \theta), \quad (12)$$

$$2 \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta = \left(2 \cos \frac{1}{2} \theta \right) V_n^*(2 \cos \theta), \quad (13)$$

$$2 \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta = \left(2 \sin \frac{1}{2} \theta \right) W_n^*(2 \cos \theta), \quad (14)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \sinh n\theta \\ 2 \cosh n\theta \end{array} \right\} = T_n^{**}(2 \sinh \theta), \quad (15)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \sinh(n+1)\theta \\ 2 \cosh(n+1)\theta \end{array} \right\} = (2 \cosh \theta) U_n^{**}(2 \sinh \theta). \quad (16)$$

Ahol a bal oldalon kapocccsal összekötött két kifejezés áll, ott páratlan n esetén a felső, páros n esetén az alsó kifejezéssel érvényes a képlet. A definícióhoz a többszörös szögek szögfüggvényeinek a képletei közül elég ennyi. A többszörös szögek képleteinek néhány egyéb lehetséges variációját a 4. táblázat tartalmazza.

Végül itt is adhatók definíciók explicit képletekkel:

$$T_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (17)$$

$$U_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (18)$$

$$V_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \quad (19)$$

vagy másképpen

$$V_n^*(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\lceil k/2 \rceil} \binom{\lfloor n - k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} x^{n-k}, \quad (20)$$

$$W_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \quad (21)$$

vagy másképpen

$$W_n^*(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{\lfloor n - k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} x^{n-k}, \quad (22)$$

$$Y_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \quad (23)$$

vagy másképpen

$$Y_n^*(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{\lfloor n - k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} x^{n-k}, \quad (24)$$

$$Z_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \quad (25)$$

vagy másképpen

$$Z_n^*(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{\lfloor n - k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} x^{n-k}, \quad (26)$$

$$T_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (27)$$

$$U_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (28)$$

$$W_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \quad (29)$$

vagy másképpen

$$W_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\lfloor n - k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} x^{n-k}, \quad (30)$$

$$Z_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}. \quad (31)$$

vagy másképpen

$$Z_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\lfloor n - k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} x^{n-k}, \quad (32)$$

3. Kevert fajú módosított Csebisev-polinomok

Értelmezzük az $U_n^*(x)$, $U_{n-1}^*(x)$ és $U_{n-2}^*(x)$ polinomok két valós paraméterrel súlyozott összegét:

$$Q_n^*(x) = U_n^*(x) + aU_{n-1}^*(x) - bU_{n-2}^*(x). \quad (33)$$

($U_n^*(x)$ -hez csak az 1 súlyt engedjük meg annak érdekében, hogy $Q_n^*(x)$ főegyütthatói 1 értékűek legyenek.)

Hasonlóan, három szomszédos fokú $U_k^{**}(x)$ polinom súlyozásával legyen

$$Q_n^{**}(x) = U_n^{**}(x) + aU_{n-1}^{**}(x) + bU_{n-2}^{**}(x). \quad (34)$$

Ezzel egyúttal létrehoztuk az első négy módosított Csebisev-polinom közös általánosítását, abban az értelemben, hogy mind a négy módosított Csebisev-polinom a $Q_n^*(x)$ polinomnak egy-egy speciális esete, mivel $a = 0, b = 1$ választással $Q_n^*(x)$ az elsőfajú, $a = 0, b = 0$ választással a másodfajú, $a = -1, b = 0$ választással a harmadfajú, $a = 1, b = 0$ választással pedig a negyedfajú Csebisev-polinomra redukálódik. Hasonlóan a $Q_n^{**}(x)$ polinom $a = 0, b = 1$ választással a $T_n^{**}(x)$ polinomra, $a = 0, b = 0$ választással az $U_n^{**}(x)$, $a = 1, b = 0$ választással pedig a $W_n^{**}(x)$ polinomra redukálódik.

Ezekre a súlyozott polinomokra is az egyes módosított Csebisev-polinomok esetére az előző szakaszban felírt rekurzív képletekhez hasonló képletek érvényesek:

$$Q_0^*(x) = Q_0^{**}(x) = b + 1, \quad (35)$$

$$Q_1^*(x) = Q_1^{**}(x) = x + a, \quad (36)$$

$$Q_{n+1}^*(x) = xQ_n^*(x) - Q_{n-1}^*(x), \quad (37)$$

$$Q_{n+1}^{**}(x) = xQ_n^{**}(x) + Q_{n-1}^{**}(x). \quad (38)$$

Explicit képletek a $Q_n^*(x)$ és a $Q_n^{**}(x)$ polinomra az $U_n^*(x)$, ill. $U_n^{**}(x)$ polinom explicit képletéből vezethetők le:

$$Q_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} (x+a)x^{n-2k-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k-1} (b+1) x^{n-2k} = \\
& = (-1)^k \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}_b x^{n-2k} + (-1)^k a \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1},
\end{aligned} \tag{39}$$

illetve

$$\begin{aligned}
Q_n^{**}(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} (x+a) x^{n-2k-1} + \\
& + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k-1} (b+1) x^{n-2k} = \\
& = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}_b x^{n-2k} + a \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Új jelölés a fenti két képletben a bevezetésben definiált megnövelt binomiális együttható további általánosításaként

$$\binom{n}{k}_b = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{ha } k=0, \\ \binom{n}{k} + (b-1)\binom{n-1}{k-1} & \text{ha } 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Az alábbiakban megadjuk az együtthatókra lebontott rekurzív összefüggést csak a $Q_n^{**}(x)$ polinomra, melynek valamennyi együtthatója nemnegatív, ha $a, b \geq 0$. A $Q_n^{*}(x)$ polinom együtthatóinak abszolút értéke megegyezik a $Q_n^{**}(x)$ polinom együtthatóival, az előjelek váltakozásának mikéntjét pedig a (39) képlet mutatja.

A (35)–(38) rekurziós szabályból megkapjuk a

$$Q_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^n q_{nk} x^k \tag{41}$$

polinomok együtthatóira lebontott rekurziós összefüggést:

$$\begin{aligned}
q_{n0} &= 1 \quad (n \geq 1), \\
q_{n1} &= a \quad (n \geq 1), \\
q_{nn} &= \begin{cases} b+1 & \text{ha } n \text{ páros } (n \geq 0), \\ a & \text{ha } n \text{ páratlan } (n \geq 1), \end{cases} \\
q_{n+1,k} &= q_{nk} + q_{n-1,k-2} \quad (2 \leq k \leq n).
\end{aligned}$$

$$q_{n,2k} = \binom{n-k-1}{k} + (b+1) \binom{n-k-1}{k-1}$$

kifejezés, a páratlan távolságra lévő együtthatók értékét pedig a

kifejezés adja meg, ahol mindkét esetben $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. A bizonyítás egyszerű, szimpla teljes indukcióval végezhető, amit ezért az olvasóra hagyunk.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
q_{00} & & & & & & & & & & & \\
q_{10} & q_{11} & & & & & & & & & & \\
q_{20} & q_{21} & q_{22} & & & & & & & & & \\
q_{30} & q_{31} & q_{32} = q_{22} + q_{10} & & q_{33} & & & & & & & \\
q_{40} & q_{41} & q_{42} = q_{32} + q_{20} & q_{43} = q_{33} + q_{21} & & q_{44} & & & & & & \\
q_{50} & q_{51} & q_{52} = q_{42} + q_{30} & q_{53} = q_{43} + q_{31} & q_{54} = q_{44} + q_{32} & & q_{55} & & & & & \\
q_{60} & q_{61} & q_{62} = q_{52} + q_{40} & q_{63} = q_{53} + q_{41} & q_{64} = q_{54} + q_{42} & q_{65} = q_{55} + q_{43} & q_{66} & & & & &
\end{array}$$

Ha a fenti séma szerkezetet két részre bontjuk oly módon, hogy két külön táblázatba helyezzük el a páratlan, illetve páros sorszámú oszlopokat, majd minden egyes oszlop kitöltött részét felcsúsztatjuk a táblázat kezdő soraiba, akkor az alábbi két sematikus ábrát kapjuk, melyek mindegyikét jobbra 45 fokkal elforgatva, felül egy aszimmetrikus Pascal-háromszög jelenik meg $b+1$

értékekből álló jobb oldali peremmel, az alsó részt pedig a normál Pascal-háromszög a -val megszorozott elemei töltik ki.

$$\begin{array}{lllll}
q_{00} = b + 1 & q_{22} = b + 1 & q_{44} = b + 1 & q_{66} = b + 1 & q_{88} = b + 1 \\
q_{10} = 1 & q_{32} = b + 2 & q_{54} = 2b + 3 & q_{76} = 3b + 4 & q_{98} = 4b + 5 \\
q_{20} = 1 & q_{42} = b + 3 & q_{64} = 3b + 6 & q_{86} = 6b + 10 & q_{10,8} = 10b + 15 \\
q_{30} = 1 & q_{52} = b + 4 & q_{74} = 4b + 10 & q_{96} = 10b + 20 & \\
q_{40} = 1 & q_{62} = b + 5 & q_{84} = 5b + 15 & & \\
q_{50} = 1 & q_{72} = b + 6 & & & \\
q_{60} = 1 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
q_{11} = a & q_{33} = a & q_{55} = a & q_{77} = a & q_{99} = a \\
q_{21} = a & q_{43} = 2a & q_{65} = 3a & q_{87} = 4a & q_{10,9} = 5a \\
q_{31} = a & q_{53} = 3a & q_{75} = 6a & q_{97} = 10a & q_{11,9} = 15a \\
q_{41} = a & q_{63} = 4a & q_{85} = 10a & q_{10,7} = 20a & \\
q_{51} = a & q_{73} = 5a & q_{95} = 15a & & \\
q_{61} = a & q_{83} = 6a & & & \\
q_{71} = a & & & &
\end{array}$$

Egyébként az ötödfajú $Y_n^*(x)$, a hatodfajú $Z_n^*(x)$ polinom és az utóbbinak $Z_n^{**}(x)$ módosulata is tulajdonképpen kevert Csebisev-polinom, melyek négy szomszédos fokú $U_k^*(x)$, ill. $U_k^{**}(x)$ polinom különböző előjeles összegzésével állíthatók elő.

4. A módosított Csebisev-polinomok főbb geometriai és analitikus tulajdonságai

Szimmetria szempontjából a tárgyalt módosított Csebisev-polinomok közül négy polinom mint függvény egyformán viselkedik. Páratlan n -re $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $T_n^{**}(x)$ és $U_n^{**}(x)$ mindegyike páratlan függvény, páros n -re viszont mindegyikük páros függvény. Ennek alapján a felsorolt polinomokra a további függvényvizsgálatot elég lehet az $x \geq 0$ félsíkra elvégezni, mert az eredményből a páros/páratlan szimmetria miatt könnyen következtetni tudunk a komplementer félsík esetére. Nyilvánvalóan a négy függvény egyike sem korlátos, $+\infty$ -re vonatkozó határértékük egyaránt $+\infty$, a szimmetriájuk folytán pedig a $-\infty$ -re vonatkozó határértékük páros n esetén $+\infty$, páratlan n esetén $-\infty$.

A csupa nemnegatív tagot tartalmazó $T_n^{**}(x)$ és $U_n^{**}(x)$ polinomok nyilvánvalóan monoton növekvők az $x \geq 0$ félegyenesen és n paritásától függően

monoton növekvők vagy csökkenők az $x \leq 0$ félegyenesen. Lokális szélsőértékük csak páros n esetén van, melynek helye $x = 0$, típusa minimum, értéke pedig $T_n^{**}(x)$ esetén 2, $U_n^{**}(x)$ esetén pedig 1. Ennél többet nem érdemes mondani a $T_n^{**}(x)$ és $U_n^{**}(x)$ polinomok geometriai viselkedéséről.

A $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ polinomok függvénygörbéje, különösen az utóbbié már sokkal érdekesebb. Néhány kisebb n esetére ábrával szemléltetjük ezeket a görbéket (1–3. ábra). Ezeknek az ábráknak a kiegészítésére szolgálnak a 53–55. táblázatok, amelyek az ábrák rajzához tartozó fontosabb numerikus adatokat tartalmazzák. Az ábrákról leolvasható, valamint a táblázatokban is megtalálható, hogy a megrajzolt $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ polinomoknak az ábrázolt esetekben n különböző valós gyöke, valamint a gyökök között elhelyezkedő $n - 1$ lokális szélsőértékhelye van. Az utóbbiak fele maximum, fele minimum hely. (Páros n esetén a minimum helyek száma 1-gyel több a maximum helyek számánál.) $T_n^*(x)$ esetén minden n -re valamennyi lokális szélsőérték -2 , ill. $+2$ értékű, $U_n^*(x)$ esetén viszont a lokális szélsőértékek abszolút értékei adott n -re sem azonosak egymással, különböző n -ekre pedig n növelésével a lokális szélsőértékek abszolút értékei is növekvő tendenciát mutatnak. Nem nehéz megmutatni, hogy mindezek a tulajdonságok általánosan, minden pozitív egész n -re érvényesek. Ehhez szükség van a $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ polinomok gyökeire és lehetőség szerint a deriváltjaik gyökeire.

Kezdjük $T_n^*(x)$ gyökeinek a meghatározásával. A trigonometrikus alakra áttérve, az (11) azonosság alapján megállapíthatjuk, hogy $T_n^*(2 \cos \theta) = 0$ ekvivalens a $\cos n\theta = 0$ egyenlettel, melynek összes megoldása

$$\theta = \frac{(4k + 1)\pi}{2n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1),$$

tehát $T_n^*(x)$ gyökei

$$x = 2 \cos \frac{(4k + 1)\pi}{2n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1),$$

vagy másképpen, a π -nél nagyobb koszinusz argumentumokat 2π -ből kivonva, és a gyököket monoton csökkenő sorrendbe szedve,

$$x = 2 \cos \frac{(2k + 1)\pi}{2n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (42)$$

Hasonlóan, a (12) azonosság alapján megállapíthatjuk, hogy $U_n^*(2 \cos \theta) = 0$ esetén szükségképpen $2 \sin(n + 1)\theta = 0$, melynek megoldásai

$$\theta = \frac{k\pi}{n + 1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Mivel az $U_n^*(x)$ polinomnak nem lehet n -nél több gyöke, és a hamis gyök csak a $k = 0$ -hoz tartozó $x = 2 \cos 0 = 2$ lehet, ezért $U_n^*(x)$ gyökei

$$2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (43)$$

Kicsit más a helyzet a $V_n^*(x)$ és $W_n^*(x)$ polinomokkal, mivel ezek – függvényként megrajzolva – nem saját maguknak, hanem egymásnak a tükörképei. Páratlan n esetén $V_n^*(x)$ és $W_n^*(x)$ egymásnak centrális tükörképei az origóra nézve, mivel fennáll $W_n^*(x) = -V_n^*(-x)$ ha n páratlan. Páros n esetén pedig $V_n^*(x)$ és $W_n^*(x)$ egymásnak az y tengelyre vonatkozó tükörképei, mivel fennáll $W_n^*(x) = V_n^*(-x)$ ha n páros. Pontosan ugyanilyen duális viselkedés mondható el az $Y_n^*(x)$ és $Z_n^*(x)$ polinom párról is.

Most rátérünk $V_n^*(x)$ gyökeinek a meghatározására.

$$V_n^*(2 \cos \theta) = \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta} = 0$$

csak úgy lehetséges, ha

$$\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta = 0,$$

amiből

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1},$$

vagyis

$$x = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}.$$

$V_n^*(x)$ gyökei tehát csökkenő sorrendben, k helyére célszerűen $k-1$ -et téve, és az $x = 2 \cos \pi = -2$ hamis gyököt elhagyva:

$$x = 2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$W_n^*(x)$ gyökei ezek ellentettjei, melyeket megadhatunk a

$$x = 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

képlettel.

A lokális szélsőérték helyek vizsgálata céljából az (11) és (12) trigonometrikus alakok deriválásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{dT_n^*(x)}{dx} = nU_{n-1}^*(x), \quad (44)$$

$$\frac{dU_n^*(x)}{dx} = \frac{(n+1)T_{n+1}^*(x) - xU_n^*(x)}{x^2 - 4}. \quad (45)$$

A (44) egyenlőség szerint $T_n^*(x)$ szélsőértékhelyei azonosak $U_{n-1}^*(x)$ gyökeivel, ennél fogva a szélsőértékek az

$$x = 2 \cos \frac{k\pi}{n}, \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad (46)$$

helyeken vannak, ahol a megfelelő függvényértékek

$$T_n^* \left(2 \cos \frac{k\pi}{n} \right) = 2 \cos k\pi = 2 \cdot (-1)^k,$$

tehát a (46) felsorolásban megadott szélsőértékhelyek páratlan k esetén -2 értékű minimum értékeket, páros k esetén pedig $+2$ értékű maximum értékeket szolgáltatnak.

$U_n^*(x)$ esetén a (45) trigonometrikus alakban felírt derivált bonyolultsága miatt a derivált gyökeit nem tudjuk trigonometrikus módszerrel meghatározni, néhány konkrét n értékre viszont polinomiális egyenletek megoldásával ki tudjuk számítani a szélsőértékhelyeket. Ennek tárgyalását azonban későbbre halasztjuk.

Mivel $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ trigonometrikus definíciója, lásd (11) és (12), csak a $-2 \leq x \leq 2$ intervallumban érvényes, és ezen a szakaszon kívül helyettük a megfelelő hiperbolikus definíció (lásd 4. táblázat) lép érvénybe, ezért érdemes itt még foglalkozni a két függvénynek az $x = \pm 2$ intervallum határokon felvett értékével is. Ezeket az értékeket $T_n^*(2 \cos \theta)$ és $U_n^*(2 \cos \theta)$ egyaránt a $\theta = 0$, ill. $\theta = \pi$ argumentumoknál veszi fel. $T_n^*(x)$ esetén a szóban forgó értékek egyszerű behelyettesítéssel megkaphatók, például

$$T_n^*(-2) = T_n^*(2 \cos \pi) = 2 \cos n\pi = 2 \cdot (-1)^n.$$

$U_n^*(x)$ esetén valamivel több dolgunk van, mivel a trigonometrikus formula használata során az

$$U_n^*(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

azonosság jobb oldalába nem tudjuk a $\theta = 0$, ill. $\theta = \pi$ értékeket csak úgy simán behelyettesíteni, mert ilyenkor a nevező értéke zéró. A megfelelő határértékek azonban ismertek, így pl.

$$U_n^*(2) = U_n^*(2 \cos 0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = n+1.$$

Az ellentétes féltérre vonatkozó helyettesítési értékre a páros/páratlan szimmetria alapján következtethetünk, így $T_n^*(2) = 2$ és $U_n^*(-2) = (n+1) \cdot (-1)^n$.

Láttuk, hogy $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ összes gyöke -2 és $+2$ között helyezkedik el, következésképpen ugyanez fennáll a két polinom lokális szélsőértékhelyeire is. Mivel a legkisebb és a legnagyobb szélsőértékhelyet összekötő intervallumon kívül a $T_n^*(x)$ függvény szükségszerűen monoton, a fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy $T_n^*(x)$ a $(2 \cos(\pi/n), +\infty)$ intervallumban monoton növekvő, a $(-\infty, -2 \cos(\pi/n))$ intervallumban pedig n paritásától függően monoton növekvő vagy monoton csökkenő. A függvény görbéje a gyökök közötti szakaszokon változó hullámhosszú, de azonosan 2 amplitúdójú félhullámokat ír le. A félhullámok hossza, jobbról balra haladva a gyökök között, azok (42) szerinti indexelését alkalmazva,

$$2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} = 4 \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n},$$

ahol $k = 1, 2, \dots, n-1$, tehát a legnagyobb vagy a legkisebb értékű szélső gyöktől befelé haladva egyre hosszabbá válnak a félhullámok. Páros n esetén $k = n/2$ -re, páratlan n esetén $k = (n \pm 1)/2$ -re kapjuk a leghosszabb félhullámot. (Ha a félhullámokat nem a gyökök közötti, hanem az inflexiós pontok közötti görbeszakaszokként értelmezzük, akkor a félhullámhosszakra vonatkozó számítások csekély mértékben módosulnak.)

Ugyanaz a gondolatmenet, amit $T_n^*(x)$ -re alkalmaztunk a monotonitás megállapítására, lényegében véve $U_n^*(x)$ -re, $V_n^*(x)$ -re és $W_n^*(x)$ -re is alkalmazható: A legkisebb és a legnagyobb szélsőértékhelyet összekötő intervallumon kívül ezek is monoton fel- vagy lefutásúak. Sajnos a szélsőértékhelyeket általánosan nem ismerjük, de a legkisebb és legnagyobb gyök értékét használva a legkisebb és legnagyobb szélsőérték x koordinátája helyett, mégis numerikusan is le tudjuk írni, hogy pl. $U_n^*(x)$ a $(2 \cos(\pi/(n+1)), +\infty)$ intervallumban monoton növekvő, a $(-\infty, -2 \cos(\pi/(n+1)))$ intervallumban pedig n paritásától függően monoton növekvő vagy monoton csökkenő. Az $U_n^*(x)$ függvény görbéje a gyökök közötti szakaszokon változó hullámhosszú, és változó amplitúdójú félhullámokat ír le. A félhullámok hossza, jobbról balra haladva a gyökök között

$$2 \cos \frac{k\pi}{n+1} - 2 \cos \frac{(k+1)\pi}{n+1} = 4 \sin \frac{\pi}{2(n+1)} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},$$

ahol $k = 1, 2, \dots, n-1$, tehát a legnagyobb vagy a legkisebb értékű szélső gyöktől befelé haladva egyre hosszabbá válnak a félhullámok. Leghosszabbnak a félhullám páros n esetén $k = n/2$ -nél, páratlan n esetén $k = (n \pm 1)/2$ -nél bizonyul, ugyanúgy, ahogy $T_n^*(x)$ -re is megállapítottuk.

Jelöljük $A_{n,k}$ -val az $U_n^*(x)$ polinom $x_{n,k} = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ és $x_{n,k+1} = 2 \cos \frac{(k+1)\pi}{n+1}$ gyökei közötti félhullám amplitúdóját (ami egyúttal a két gyök közötti lokális szélsőérték abszolút értéke). Bebizonyítjuk a következő tételt.

4.1. Tétel. *Bármely rögzített k esetén az $x_{n,k}$ és $x_{n,k+1}$ gyökök közötti félhullám $A_{n,k}$ amplitúdójára fennáll*

$$A_{n,k} \geq \frac{1}{2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}} \sim \frac{2(n+1)}{(2k+1)\pi},$$

és következésképpen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,k} = +\infty.$$

Bizonyítás. Vegyük két szomszédos gyök kifejezésében szereplő koszinusz argumentumok számtani közepét, valamint az ehhez a középértékhez mint argumentumhoz tartozó

$$y_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$$

helyeket ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Az y_k helyet közrefogó két szomszédos gyök közötti félhullám $A_{n,k}$ amplitúdója nem lehet kisebb, mint az $U_n^*(x)$ függvény abszolút értéke az y_k helyen, melyre az (12) azonosság alapján azt kapjuk, hogy tetszőleges rögzített k esetén

$$|U_n^*(y_k)| = \left| \frac{2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2}}{2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}} \right| = \frac{1}{2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}} \leq A_{n,k}, \quad (47)$$

tehát $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n^*(y_k)| = +\infty$, és következésképpen $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n,k} = +\infty$, valamint fennáll az

$$|U_n^*(y_k)| \sim \frac{2(n+1)}{(2k+1)\pi} \quad (48)$$

aszimptotikus egyenlőség, q.e.d.

Az $|U_n^*(y_k)|$ -ra (47)-ben megadott egyenlőség alapján erősen sejthető, hogy a szomszédos gyökök közötti félhullámok a legnagyobb vagy a legkisebb értékű szélső gyöktől befelé haladva nemcsak egyre hosszabbá, hanem ugyanakkor egyre laposabbá is válnak. Ezt a sejtést erősíti meg, s egyúttal $n \leq 8$ -ra bizonyítja az $U_n^*(x)$ függvénynek néhány n esetre felrajzolt ábrája.

5. Az $U_n^*(x)$ polinom szélsőértékeinek meghatározása $n \leq 8$ esetén

Írjuk fel az $U_n^*(x)$ polinomnak a (18) formula alapján számított deriváltját külön páros és külön páratlan n esetre. Az így kapott képletekben alkalmazzuk a $w = x^2$ jelölést.

Páratlan n -re

$$\frac{dU_n^*(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k (n-2k) \binom{n-k}{k} w^{(n-1)/2-k}, \quad (49)$$

páros n -re pedig

$$\frac{dU_n^*(x)}{dx} = x \cdot \sum_{k=0}^{(n-2)/2} (-1)^k (n-2k) \binom{n-k}{k} w^{(n-2)/2-k}. \quad (50)$$

A derivált gyökeinek a kiszámítása w -ben $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ -edfokú egyenlet megoldását igényli. Az egyenlet $n \leq 10$ esetén legfeljebb negyedfokú és így matematikai módszerrel elvileg megoldható, $n \geq 11$ esetén viszont ötöd- vagy annál magasabb fokú, ezért az Abel–Ruffini tétel (más megnevezéssel Abel lehetetlenségi tétele, lásd Wikipédia [17]) szerint kicsi rá az esély, hogy véletlenül ezek valamelyike megoldható legyen matematikai módszerrel. A legfeljebb harmadfokú egyenlettel megoldható esetek megoldására korlátozódva kiszámítottuk, hogy az $U_n^*(x)$ polinom $2 \leq n \leq 8$ esetén az alábbi x helyeken vesz fel lokális szélsőértéket:

$$\frac{dU_2^*(x)}{dx} = 2x = 0 \text{ egyetlen megoldása } x = 0;$$

$$\frac{dU_3^*(x)}{dx} = 3w - 2 = 0 \text{ két megoldása } x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\frac{dU_4^*(x)}{dx} = x(4w - 6) = 0 \text{ megoldásai } x = 0 \text{ és } x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$\frac{dU_5^*(x)}{dx} = 5w^2 - 12w + 3 = 0 \text{ megoldásai } x = \pm \frac{\sqrt{6 \pm \sqrt{21}}}{5}, \text{ az alternatív előjeleknek mind a 4 variációját figyelembe véve};$$

$$\frac{dU_6^*(x)}{dx} = x(6w^2 - 20w + 12) = 0 \text{ megoldásai } x = 0 \text{ és } x = \pm \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{7}}}{3}, \text{ az alternatív előjeleknek mind a 4 variációját figyelembe véve};$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_7^*(x)}{dx} &= 7w^3 - 30w^2 + 30w - 4 = 0 \text{ megoldásai } x = \\ &\pm \sqrt{\frac{2\sqrt{30} \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{8}{5\sqrt{30}} + \frac{2k\pi}{3}\right] + 10}{7}} \quad (k = 0, \pm 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_8^*(x)}{dx} &= x(8w^3 - 42w^2 + 60w - 20) = 0 \text{ megoldásai } x = 0 \text{ és } x = \\ &\pm \sqrt{\frac{6 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{1}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right] + 7}{4}} \quad (k = 0, \pm 1). \end{aligned}$$

A 54–55. táblázatokban megadjuk a lokális szélsőértékhelyek és az ezeken a helyeken felvett függvényértékek közelítését 5 tizedesjegy pontossággal.

6. A $T_n^*(x) - h$ és $T_n^{}(x) - h$ polinomok gyökeinek számítása általános h konstans esetén**

$T_n^*(x) - h$ valós gyökeinek a meghatározásával kezdjük. Tekintsük először azt az esetet, amikor $|h| \leq 2$. Ebben az esetben $x = 2 \cos \theta$ jelöléssel a trigonometrikus alakra áttérve, az (11) összefüggés szerint

$$T_n^*(2 \cos \theta) - h = 2 \cos n\theta - h = 0$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\theta = \frac{\arccos(h/2) + 2k\pi}{n},$$

tehát $T_n^*(x) - h$ gyökei

$$2 \cos \theta_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad \text{ahol } \theta_k = \frac{\arccos(h/2) + 2k\pi}{n}. \quad (51)$$

$h > 2$ esetén hasonlóan kapjuk az (11) összefüggés hiperbolikus megfelelője (a 4. táblázat középső oszlopának a második képlete) alapján, hogy ilyenkor páratlan n esetén $T_n^*(x) - h$ egyetlen valós gyöke

$$2 \cosh \frac{\operatorname{arcosh}(h/2)}{n},$$

páros n esetén viszont a $T_n^*(x) - h$ polinomnak 2 valós gyöke van. Az egyiket ugyanúgy kapjuk, ahogy páratlan n esetén, a másik pedig annak ellentettje. Ennek az n paritásától függő eltérésnek az az oka, hogy páratlan n esetén $T_n^*(x)$ páratlan függvény, páros n esetén viszont páros függvény. Ugyanez az oka annak is, hogy $h < -2$ esetén páros n -re a vizsgált polinomnak egyáltalán nincs valós gyöke, páratlan n -re viszont ilyenkor is egyetlen valós gyöke van. Ezzel az utóbbi esettel szükségtelen külön foglalkozni, mivel visszajátszható a $h > 2$ esetre, ha a $T_n^*(x) - h$ polinomot $(-x)$ polinomjává alakítjuk át.

Rátérve a $T_n^{**}(x) - h$ polinomra, itt a (15) összefüggés vezet célra. $T_n^*(x) - h$ második ($h > 2$) esetéhez hasonlóan adódik, hogy tetszőleges h és páratlan n esetén az egyetlen valós gyök

$$2 \sinh \frac{\operatorname{arsinh}(h/2)}{n},$$

$h \geq 2$ és páros n esetén pedig 2 valós gyök van, mégpedig

$$\pm 2 \sinh \frac{\operatorname{arcosh}(h/2)}{n},$$

viszont egyetlen valós gyök sincs, ha n páros és $h < 2$.

A fentiek kapcsán érdemes külön említést tenni az $n = 3$ esetről és a harmadfokú egyenlet trigonometrikus, ill. hiperbolikus megoldási módszeréről. A kanonikus alakba hozott harmadfokú egyenletből a változó egy további lineáris transzformációjával elérhető, hogy ennek elvégzése után az egyenlet vagy $x^3 - 3x - h = 0$, azaz $T_3^*(x) - h = 0$ vagy pedig $x^3 + 3x - h = 0$, azaz $T_3^{**}(x) - h = 0$ alakot ölt. A harmadfokú egyenlet matematikai megoldási módszereiről részletes kifejtés található Kéri és Szilágyi [7] munkájában.

Rátérünk a komplex gyökök keresésére. $h > 2$ esetén az (11) képlet hiperbolikus változata alapján az összes (valós és komplex) gyök a következőképpen adható meg:

$$x = 2 \cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \frac{h}{2} + \frac{2k\pi i}{n} \right], \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ebből a $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ azonosság felhasználásával $T_n^*(x) - h$ gyökeire a következő képletet kapjuk:

$$x = 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \frac{h}{2} \right] + 2i \sin \frac{2k\pi}{n} \sinh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \frac{h}{2} \right],$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$). Ebben az esetben a $k = 0$ -hoz tartozó gyök valós. Páros n esetén van még egy valós gyök, amely $k = n/2$ -hez tartozik. A további $n-1$ vagy $n-2$ gyök nem valós értékű.

Ha $h < -2$ és n páratlan, akkor x helyére $-x$ -et helyettesítve az előző eset gondolatmenete alkalmazható, és azt kapjuk, hogy

$$x = -2 \cos \frac{2k\pi}{n} \cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] - 2i \sin \frac{2k\pi}{n} \sinh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \left(-\frac{h}{2} \right) \right],$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$). Ebben az esetben is egyetlen valós gyök van.

Ha $h < -2$ és n páros, akkor a $T_n^*(x) - h$ egyenletnek nincs valós gyöke, ami legegyszerűbben a

$$T_n^*(x) = \left[T_{n/2}^*(x) \right]^2 - 2$$

azonossággal bizonyítható. A komplex gyökök meghatározása ebben az esetben $T_n^*(x) - h$ szorzattá alakításával visszavezethető a

$$T_{n/2}^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} (-1)^k \binom{\frac{n}{2} - k}{k} x^{\frac{n}{2} - 2k} = \pm \sqrt{h+2}$$

egyenletek megoldására.

Végül $T_n^{**}(x) - h$ esetére a (15) azonosság alapján az előző gondolatmenetekhez hasonlóan adódik, hogy

$$x = 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \sinh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \frac{h}{2} \right] + 2i \sin \frac{2k\pi}{n} \cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \frac{h}{2} \right],$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$), ha n páratlan, és

$$x = 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \sinh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \frac{h}{2} \right] + 2i \sin \frac{2k\pi}{n} \cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \frac{h}{2} \right],$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$), ha n páros és $h \geq 2$. Ekkor n paritásától függően a gyökök között 1 vagy 2 valós gyök van.

Legvégül, ha n páros és $h < 2$, akkor az egyenletnek nyilvánvalóan nincs valós gyöke. Az egyenlet ismét dekomponálható két kisebb fokú egyenletre, amelyek most a következők:

$$T_{n/2}^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{\frac{n}{2} - k}{k} x^{\frac{n}{2} - 2k} = \pm \sqrt{h + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2}.$$

7. A $\overline{T_n^*(x) - h}$ polinom gyökeinek származtatása és ábrázolása a komplex egységkörön $|h| \leq 2$ esetén

Az előző szakaszban már alkalmazott $x = 2 \cos \theta$ jelöléssel trigonometrikus alakra átvérve, a $T_n^*(x) - h$ polinom gyöktényezési alakja a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (x - 2 \cos \theta_k)$$

szorzattal fejezhető ki, ahol θ_k a (51) alatt megadott kifejezés.

Következésképpen a felülvonással jelölt transzformáció multiplikatív tulajdonsága szerint

$$\overline{T_n^*(x) - h} = \prod_{k=0}^{n-1} \overline{(x - 2 \cos \theta_k)} = \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - 2 \cos \theta_k x + 1).$$

Komplex aritmetikában az utóbbi szorzat tényezői tovább bonthatók az alábbi gyöktényezőkre:

$$x^2 - 2 \cos \theta_k x + 1 = (x - e^{i\theta_k})(x - e^{-i\theta_k}).$$

Ha most $\overline{T_n^*(x) - h}$ gyöktényezős felbontásában a gyöktényezőket a következőképpen csoportosítjuk:

$$\overline{T_n^*(x) - h} = \prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{i\theta_k}) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{-i\theta_k}), \quad (52)$$

akkor itt mindkét szorzathoz tartozó gyökök egy-egy szabályos n -szög csúcsaiban helyezkednek el a komplex számsík egységkörének a kerületén. A két szabályos n -szög egymásnak a valós tengelyre vonatkozó tükörképe. Előfordulhat, hogy ez a két szabályos n -szög egybeesik, ez a helyzet $h = 2$ és $h = -2$ esetén (lásd 4., ill. 5. ábra). Az első esetben ennek a sokszögnek a csúcsai, tehát $\overline{T_n^*(x) - 2}$ gyökei éppen az n -edik egységgyökök, valamennyi kétszeres multiplicitással. A második esetben a sokszög csúcsai, vagyis $\overline{T_n^*(x) + 2}$ gyökei a páratlan indexű $2n$ -edik egységgyökök, szintén valamennyiük kétszeres multiplicitással. Egy további esetben ($h = 0$) a két n -szög csúcsai együtt egy szabályos $2n$ -szöget alkotnak (6. ábra). Ebben az esetben a két sokszög csúcsai, vagyis $\overline{T_n^*(x)}$ gyökei együttesen a páratlan indexű $4n$ -edik egységgyököknek felelnek meg. Két esetben ($h = 1$ és $h = -1$) a két n -szög csúcsai egy szabályos $3n$ -szög $2n$ csúcsába kerülnek oly módon, hogy a $3n$ -szög csúcsai közül kimaradó csúcsok egy szabályos n -szög csúcsai (7., ill. 8. ábra). Az ebben a bekezdésben említett valamennyi ábrán egy páratlan ($n = 3$) és egy páros ($n = 4$) esetre szemléltettük a $\overline{T_n^*(x) - h}$ polinom gyökeit.

$\overline{T_n^*(x) - h}$ gyökeiből vissza tudunk következtetni $T_n^*(x) - h$ gyökeire, vagy a (51) képlet alapján direkt módon kiszámíthatjuk ezeket a gyököket az előbbi gondolatmenetben szereplő h paraméterértékek esetére. A szóban forgó esetekhez tartozó gyököket a 57. táblázatban adjuk meg.

Az előbbi felsorolásban sorra vett valamennyi esetben $\overline{T_n^*(x) - h}$ gyökei komplex egységgyökök. E tény alapján az itt felsorolt 5 esetben egy-egy általános képlettel megadható a $\overline{T_n^*(x) - h}$ polinom faktorizációja, majd ennek segítségével a $T_n^*(x) - h$ polinom faktorizációja is. Mindezt a 9. szakaszban fogjuk részletesen kifejteni.

A fenti gondolatmenethez kapcsolódóan felvetődik az a kérdés, hogy létezik-e más olyan egész, vagy legalább racionális h érték a $|h| \leq 2$ tartományban, melyre a $\overline{T_n^*(x) - h}$ polinom gyökei komplex egységgyökök. Ehhez az kellene, hogy a fokban kifejezett θ_k és $h = 2 \cos n\theta_k$ mindegyike racionális szám legyen. A válasz nemleges, ami Niven alábbi tételéből ([10, Corollary 3.12]) következik.

7.1. Tétel. Ha a θ szög fokban kifejezve racionális, vagyis $\theta = 2\pi r$ valamely r racionális számra, akkor θ trigonometrikus függvényeinek racionális számú értékei csak a következők: $\sin \theta, \cos \theta = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$; $\sec \theta, \csc \theta = \pm 1, \pm 2$; $\tan \theta, \cot \theta = 0, \pm 1$.

Niven fenti tételéből logikai úton egyszerű következményként adódik az alábbi tétel állításának az igazsága:

7.2. Tétel. Ha $x = 2 \cos \theta$ jelöléssel $e^{i\theta}$ bármilyen rendű komplex egységgyök, akkor $h = T_n^*(x) = 2 \cos n\theta$ értékére a $h = 0, \pm 1, \pm 2$ értékeken kívül más racionális érték nem lehetséges.

8. Komplex egységgyökök és körosztási polinomok

A komplex egységgyökök az $x^n - 1$ polinom gyökei: $e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. Egy n -edik komplex egységgyök primitív egységgyök, ha semmilyen n -nél kisebb m pozitív egész szám esetén nem m -edik egységgyök.

A körosztási polinomok olyan polinomok, melyek gyökei azonos fokú primitív egységgyökök. Tetszőleges pozitív egész n esetén az n -edik körosztási polinom explicit képlete

$$\Phi_n(x) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (x - \xi_k),$$

ahol ξ_k , $(k = 1, 2, \dots, \varphi(n))$ az n -edik primitív egységgyökök, $\varphi(n)$ pedig az Euler-függvény, amely egy adott pozitív egész számhoz a nála nem nagyobb relatív prím pozitív egész számok számát adja meg.

Az alábbiakban felsoroljuk a körosztási polinomok néhány fontos ismert tulajdonságát, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz:

1. A körosztási polinomok olyan egész együtthatós polinomok, amelyek irreducibilisek a racionális számtest felett.
2. Tetszőleges pozitív egész n összes osztójához tartozó körosztási polinom szorzata megadja az $x^n - 1$ polinomot. Képlettel kifejezve:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x). \quad (53)$$

3. Tetszőleges 1-nél nagyobb páratlan n -hez és annak kétszereséhez tartozó körosztási polinom között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x).$$

4. Az első két körosztási polinom $\Phi_1(x) = x-1$ és $\Phi_2(x) = x+1$ kivételével, amelyek elsőfokúak, az összes többi körosztási polinom páros fokú.
5. Tetszőleges pozitív egész n esetén a $\Phi_n(x)$ körosztási polinom gyöktényezős szorzat formájában a következőképpen adható meg:

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} (x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}).$$

Megjegyzés: Mivel $n > 1$ esetén n saját magához nem relatív prím, ezért az $n = 1$ eset kivételével a produktum jel alatti kettős egyenlőtlenség, ha úgy tetszik, $1 \leq k < n$ -re cserélhető.

6. Tetszőleges 2-nél nagyobb n esetén létezik olyan $\varphi(n)/2$ fokú $\Psi_n(x)$ polinom, melyre $\overline{\Psi_n(x)} = \Phi_n(x)$, és amely gyöktényezős alakban a következőképpen adható meg:

$$\Psi_n(x) = \prod_{\substack{0 < k < n/2 \\ \gcd(k,n)=1}} \left(x - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right).$$

Megjegyzés: Mivel 2-nél nagyobb páros n esetén $n/2$ és n nem relatív príme, ezért itt a produktum alatti kettős egyenlőtlenség kivétel nélkül minden esetben tetszés szerint akár $0 < k < n/2$, akár $0 < k \leq n/2$ alakban is megadható. Mindkét változatban helyes a képlet.

7. A körosztási polinomokhoz hasonlóan tetszőleges 2-nél nagyobb n esetén $\Psi_n(x)$ egész együtthatós irreducibilis polinom (lásd Kearnes, Kiss és Szendrei [3, 4.1 Tétel]).

Az $n = 1$ és $n = 2$ esetekre ilyen $\Psi_n(x)$ polinom nem létezik, már csak azért sem létezhet, mert ezekre az n értékekre $\varphi(n)/2$ nem egész szám. $\Phi_1(x) = x - 1$ és $\Phi_2(x) = x + 1$ négyzetéhez viszont hozzárendelhetjük a $[\Psi_1(x)]^2 = x - 2$, ill. $[\Psi_2(x)]^2 = x + 2$ polinomot, melyekre nyilvánvalóan $[\Psi_1(x)]^2 = [\Phi_1(x)]^2$ és $[\Psi_2(x)]^2 = [\Phi_2(x)]^2$.

9. A vizsgált polinomok faktorizációja

Egész együtthatós polinomok faktorizációja alatt az egészek fölötti irreducibilis faktorizációt értjük. A Csebisev-polinomok faktorizációjára vonatkozóan a következő előzményekről tudunk: Hsiao [2] nehezen hozzáférhető

cikkére történő egy hivatkozásban olvasható, hogy a szerző meghatározta, hogyan kell csoportosítani a polinom gyökeit az irreducibilis faktorok előállítására céljából. Ennek az eredménynek a másodfajú Csebisev-polinomokra vonatkozó kiterjesztése Rivlin [11] könyvében olvasható. A *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [12] összeállítás tartalmazza az irreducibilis faktorok darabszámának a sorozatát a $T_n(x)$ első- és $U_n(x)$ másodfajú Csebisev-polinomok, valamint a $T_n(x) - 1$, $T_n(x) + 1$, $U_n(x) - 1$ és $U_n(x) + 1$ polinomok esetére. ($T_n(x) \pm 1$ -nek $T_n^*(x) \pm 2$ felel meg, ha áttérünk a módosított Csebisev-polinomokra.) $T_n^*(x) \pm 1$ azaz $\Omega_n(x) \pm 1$ faktorizációját illetően semmilyen előzményről nem tudunk. A faktoroknak korábbi publikációkban történt explicit megadásáról sem találtam információt. Viszont sok publikáció található olyan számítógépes algoritmusok ismertetésére, amelyek a Csebisev-polinomok együtthatóinak, ill. faktorainak a kiszámításával foglalkoznak.

A módosított Csebisev-polinomok valamennyi esetében az ebben a munkában részletezett faktorizációk a módosított Csebisev-polinomok és a körosztási polinomok kapcsolatán alapulnak. Először megmutatjuk, hogy $\overline{T_n^*(x) \pm h}$ faktorizációjában a h paraméter néhány értéke esetén a bizonyítottan irreducibilis $\Phi_n(x)$ körosztási polinomok jelennek meg. Ebből pedig következtetni tudunk arra, hogy $T_n^*(x) \pm h$ irreducibilis faktorai a $\Psi_n(x)$ körosztási előpolinomok. (Egyes esetekben a nem-polinom $\Psi_1(x)$ és $\Psi_2(x)$ négyzete, amelyek viszont már polinomok.) Hasonló mondható a többi módosított Csebisev-polinomra.

A $T_n^*(x) \pm h$ polinomok faktorizációját nagymértékben megkönnyítik a körosztási polinomoknak az előző szakaszban felsorolt tulajdonságai valamint a felülvonás transzformációra vonatkozó alábbi nyilvánvaló tulajdonságok.

1. Tetszőleges n -edfokú $P_n(x)$ polinom és tetszőleges $a \neq 0, b$ valós számok esetén

$$\overline{aP_n(x) + b} = \overline{aP_n(x)} + \overline{bx^n}. \quad (54)$$

2. Két polinom, $P_n(x)$ és $Q_m(x)$ összegére, ahol $n \geq m$, fennáll

$$\overline{P_n(x) + Q_m(x)} = \overline{P_n(x)} + x^{n-m} \overline{Q_m(x)}. \quad (55)$$

3. Ha valamely $F(x)$ polinomra fennáll

$$\overline{F(x)} = \frac{\prod_{i=1}^N (x^{n_i} - 1)}{\prod_{j=1}^M (x^{m_j} - 1)}, \quad (56)$$

akkor

$$F(x) = \frac{\prod_{i=1}^N \prod_{d|n_i} \Psi_d(x)}{\prod_{j=1}^M \prod_{d|m_j} \Psi_d(x)}. \quad (57)$$

(Ehhez figyelembe vettük a (53) azonosságot is.)

A 7. szakaszban beláttuk, hogy $\overline{T_n^*(x) - 2}$ gyökei egybeesnek az n -edik egységgyökökkel, kétszeres multiplicitással. Ennélfogva

$$\overline{T_n^*(x) - 2} = (x^n - 1)^2 = x^{2n} - 2x^n + 1.$$

Ebből (54) szerint következik, hogy

$$\overline{T_n^*(x) + 2} = x^{2n} + 2x^n + 1 = (x^n + 1)^2 = \frac{(x^{2n} - 1)^2}{(x^n - 1)^2},$$

$$\overline{T_n^*(x)} = x^{2n} + 1 = \frac{x^{4n} - 1}{x^{2n} - 1},$$

$$\overline{T_n^*(x) + 1} = x^{2n} + x^n + 1 = \frac{x^{3n} - 1}{x^n - 1},$$

$$\overline{T_n^*(x) - 1} = x^{2n} - x^n + 1 = \frac{(x^{6n} - 1)(x^n - 1)}{(x^{2n} - 1)(x^{3n} - 1)}.$$

Az itt felsorolt azonosságokra (56)–(57) alkalmazásával megkapjuk $T_n^*(x) \pm h$ faktorizációjának a képletét a tekintetbe vett h értékekre:

$$T_n^*(x) - 2 = \prod_{d|n} [\Psi_d(x)]^2, \quad (58)$$

$$T_n^*(x) + 2 = \frac{\prod_{d|2n} [\Psi_d(x)]^2}{\prod_{d|n} [\Psi_d(x)]^2} = \prod_{\substack{d|2n \\ d \nmid n}} [\Psi_d(x)]^2, \quad (59)$$

$$T_n^*(x) = \frac{\prod_{d|4n} \Psi_d(x)}{\prod_{d|2n} \Psi_d(x)} = \prod_{\substack{d|4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d(x), \quad (60)$$

$$T_n^*(x) + 1 = \frac{\prod_{d|3n} \Psi_d(x)}{\prod_{d|n} \Psi_d(x)} = \prod_{\substack{d|3n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x), \quad (61)$$

$$T_n^*(x) - 1 = \frac{\prod_{d|6n} \Psi_d(x) \prod_{d|n} \Psi_d(x)}{\prod_{d|2n} \Psi_d(x) \prod_{d|3n} \Psi_d(x)} = \prod_{\substack{d|6n \\ d \nmid 2n \\ d \nmid 3n}} \Psi_d(x). \quad (62)$$

Tanulságos lehet megnézni ugyanezeknek a faktorizációs képleteknek az eredeti Csebisev-polinomra átfogalmazott alakját is. melyek a következők:

$$T_n(x) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \prod_{d|n} [\Psi_d(2x)]^2,$$

$$T_n(x) + 1 = \frac{1}{2} \cdot \prod_{\substack{d|2n \\ d \not| n}} [\Psi_d(2x)]^2,$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \prod_{\substack{d|4n \\ d \not| 2n}} \Psi_d(2x),$$

$$T_n(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \prod_{\substack{d|3n \\ d \not| n}} \Psi_d(2x),$$

$$T_n(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \prod_{\substack{d|6n \\ d \not| 2n \\ d \not| 3n}} \Psi_d(2x).$$

Az első három esetben a bal oldalon egész együtthatós polinom áll, ezért a jobb oldalon álló faktorok között kell lenni olyanoknak, amelynek minden együtthatója páros szám. Egy ilyen $\Psi_d(2x)$ polinomot az $1/2$ -szeresére cserélve, s egyúttal a produktum jel elől az $1/2$ szorzót elhagyva, az így származtatott képletek is az egészek fölött irreducibilis felbontást eredményeznek. A két utolsó esetben a bal oldalon álló polinom konstans tagja nem egész szám, ezért ilyenkor nem létezhet olyan irreducibilis faktorokra történő felbontás, ahol minden faktor egész együtthatós polinom. Ezért most két lehetőségünk van. Vagy megelégszünk azzal, hogy az eredeti Csebisev-polinomra történő átfogalmazás után a racionális számtestre vonatkozó irreducibilis felbontást kapunk, vagy úgy kerüljük meg ezt a problémát, hogy $2T_n(x) + 1$ -et, ill. $2T_n(x) - 1$ -et bontjuk fel egészek fölötti irreducibilis faktorokra.

Rátérve a másodfajú módosított Csebisev-polinom faktorizációjára, abból indulhatunk ki, hogy (43) szerint $U_n^*(x)$ gyöktényezős felbontása

$$U_n^*(x) = \prod_{k=1}^n (x - 2 \cos \theta_k).$$

ahol most $\theta_k = k\pi/(n+1)$. Most a 7. szakasz gondolatmenetéhez hasonlóan a transzformáltakra áttérve azt kapjuk, hogy

$$\overline{U_n^*(x)} = \prod_{k=1}^n (x - e^{\frac{k\pi i}{n+1}}) \prod_{k=1}^n (x - e^{-\frac{k\pi i}{n+1}}) = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k}, \quad (63)$$

mivel itt a gyöktényezős szorzat a $+1$ és -1 egységgyökök kivételével az összes többi $(2n+2)$ -edik egységgyököt tartalmazza. Ebből az (54) képlet szerint adódik, hogy

$$\overline{U_n^*(x) - 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k} - x^n = \frac{(x^n - 1)(x^{2n+4} - 1)}{(x^{n+2} - 1)(x^2 - 1)} \quad (64)$$

és

$$\overline{U_n^*(x) + 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k} + x^n = \frac{(x^{n+2} - 1)(x^{2n} - 1)}{(x^n - 1)(x^2 - 1)}. \quad (65)$$

Most ismét (56–(57) alkalmazásával kapjuk $U_n^*(x) \pm h$ faktorizációjának a képletét $h = 0, \pm 1$ -re.

$$U_n^*(x) = \frac{\prod_{d|2n+2} \Psi_d(x)}{\prod_{d|2} \Psi_d(x)} = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2}} \Psi_d(x), \quad (66)$$

$$U_n^*(x) - 1 = \frac{\prod_{d|n} \Psi_d(x) \prod_{d|2n+4} \Psi_d(x)}{\prod_{d|n+2} \Psi_d(x) \prod_{d|2} \Psi_d(x)} = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+4 \\ d \nmid n+2}} \Psi_d(x), \quad (67)$$

$$U_n^*(x) + 1 = \frac{\prod_{d|n+2} \Psi_d(x) \prod_{d|2n} \Psi_d(x)}{\prod_{d|n} \Psi_d(x) \prod_{d|2} \Psi_d(x)} = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|n+2}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x). \quad (68)$$

A harmad- és negyedfajú módosított Csebisev-polinomok faktorizációja céljából először kifejezzük $V_n^*(x)$ és $W_n^*(x)$ transzformáltját

$$\overline{U_n^*(x) \pm U_{n-1}^*(x)} = \overline{U_n^*(x)} \pm x \cdot \overline{U_{n-1}^*(x)} = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} \pm x \cdot \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = \sum_{k=0}^{2n} (\pm 1)^k x^k$$

alakban. Ebből az összefüggésből adódóan

$$\overline{V_n^*(x)} = \frac{x^{2n+1} + 1}{x + 1},$$

$$\overline{W_n^*(x)} = \frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1},$$

és következésképpen

$$\overline{V_n^*(x) - 1} = \frac{(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)}{x + 1},$$

$$\overline{V_n^*(x) + 1} = \frac{(x^n + 1)(x^{n+1} + 1)}{x + 1},$$

$$\overline{W_n^*(x) - 1} = \frac{(x^n - 1)(x^{n+1} + 1)}{x - 1}$$

és

$$\overline{W_n^*(x) + 1} = \frac{(x^n + 1)(x^{n+1} - 1)}{x - 1}.$$

Ezekből az egyenlőségekből a korábban alkalmazott technikákkal és ismét (56)–(57) alkalmazásával kapjuk az alábbi faktorizációs képleteket:

$$V_n^*(x) = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|4n+2 \\ d \nmid 2n+1}} \Psi_d(x), \quad (69)$$

$$W_n^*(x) = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+1}} \Psi_d(x), \quad (70)$$

$$V_n^*(x) - 1 = \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d|n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d|n+1}} \Psi_d(x), \quad (71)$$

$$V_n^*(x) + 1 = \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d|2n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d|2n+2 \\ d \nmid n+1}} \Psi_d(x), \quad (72)$$

$$W_n^*(x) - 1 = \prod_{\substack{d \geq 2 \\ d|n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d|2n+2 \\ d \nmid n+1}} \Psi_d(x), \quad (73)$$

$$W_n^*(x) + 1 = \prod_{\substack{d \geq 2 \\ d|n+1}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d|2n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x). \quad (74)$$

Az ötöd- és hatodfajú módosított Csebisev-polinomok faktorizációjára lényegében megismételhető a harmad- és negyedfajú esetre elvégzett gondolatmenet első része.

$$\begin{aligned} \overline{T_n^*(x) \pm T_{n-1}^*(x)} &= \overline{T_n^*(x)} \pm x \cdot \overline{T_{n-1}^*(x)} = \\ &= (x^{2n} + 1) \pm x(x^{2n-2} + 1) \end{aligned}$$

alakban. Ebből adódóan

$$\overline{Y_n^*(x)} = (x^{2n-1} - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 \overline{W_{n-1}^*(x)} = [\Phi_1(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n-1}} \Phi_d(x)$$

és

$$\overline{Z_n^*(x)} = (x^{2n-1} + 1)(x + 1) = (x + 1)^2 \overline{V_{n-1}^*(x)} = [\Phi_2(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|4n-2 \\ d \nmid 2n-1}} \Phi_d(x).$$

Következésképpen a $Y_n^*(x)$ és $Z_n^*(x)$ polinomokra az alábbi faktorizációs képleteket kapjuk:

$$Y_n^*(x) = [\Psi_1(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n-1}} \Psi_d(x), \quad (75)$$

$$Z_n^*(x) = [\Psi_2(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|4n-2 \\ d|2n-1}} \Psi_d(x). \quad (76)$$

Most felírva az előbbiekből következő

$$\overline{Y_n^*(x) \pm 1} = (x^{2n-1} - 1)(x - 1) \pm x^n = x^{2n} - x^{2n-1} \pm x^n - x + 1$$

és

$$\overline{Z_n^*(x) \pm 1} = (x^{2n-1} + 1)(x + 1) \pm x^n = x^{2n} + x^{2n-1} \pm x^n + x + 1$$

azonosságokat, ezek alapján sajnos azt kell megállapítanunk, hogy nem adható meg a korábbi esetekhez hasonló szép faktorizációs képlet. Azért a Polynomial Factorization [16] alkalmazás használatával megnéztük, hogy az $1 \leq n \leq 20$ tartományra szorítkozva mit mondhatunk e kérdést illetően. Az derült ki, hogy $Y_n^*(x) + 1$ osztható $(x - 1)$ -gyel $n = 3, 7, 9, 13, 15$ és 19 esetén, osztható $(x^2 - x - 1)$ -gyel $n = 4, 12$ és 14 esetén, osztható $(x^2 - 3)$ -mal $n = 3, 4, 15$ és 16 esetén, de irreducibilis $n = 1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 17, 18$ és 20 esetén. $Y_n^*(x) - 1$ osztható $(x - 1)$ -gyel $n = 4, 6, 10, 12, 16$ és 18 esetén, osztható $(x^2 - x - 1)$ -gyel $n = 7, 9, 17$ és 19 esetén, osztható $(x^2 - 3)$ -mal $n = 9$ és 10 esetén, de irreducibilis $n = 1, 2, 3, 5, 8, 11, 13, 14, 15$ és 20 esetén. $Z_n^*(x) + 1$ osztható $(x^2 + x - 1)$ -gyel $n = 4, 7, 9, 12, 14, 17$ és 19 esetén, osztható $(x^2 - 3)$ -mal $n = 4, 9$ és 16 esetén, de irreducibilis $n = 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 18$ és 20 esetén. $Z_n^*(x) - 1$ osztható $(x + 1)$ -gyel $n = 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18$ és 19 esetén, osztható $(x^2 - 3)$ -mal $n = 3, 10$ és 15 esetén, de irreducibilis $n = 1, 2, 5, 8, 11, 14, 17$ és 20 esetén.

A $T_n^{**}(x)$ és $U_n^{**}(x)$ polinomok faktorizációjának az előkészítését az alábbi gondolatmenettel kezdjük.

A Csebisev-polinomok transzformáltjának (56) sémájú kifejezései – konkrétan (58–60), illetve (66–68) – folytán kapjuk a Csebisev-polinomok közötti alábbi összefüggéseket:

$$T_{2n}^*(x) + 2 = [T_n^*(x)]^2,$$

$$T_{2n}^*(x) - 2 = [\Psi_1(x)]^2 [\Psi_2(x)]^2 [U_{n-1}^*(x)]^2,$$

$$U_{2n}^*(x) + 1 = T_n^*(x) U_n^*(x),$$

$$U_{2n}^*(x) - 1 = T_{n+1}^*(x) U_{n-1}^*(x).$$

Ha most x helyére ix -et helyettesítünk, akkor a $T_n^{**}(x)$ és az $U_n^{**}(x)$ polinomokra kapunk hasonló összefüggéseket:

$$T_{2n}^{**}(x) + 2 \cdot (-1)^n = [T_n^{**}(x)]^2, \quad (77)$$

$$T_{2n}^{**}(x) - 2 \cdot (-1)^n = [\Psi_1^{**}(x)]^2 [U_{n-1}^{**}(x)]^2, \quad (78)$$

$$U_{2n}^{**}(x) + (-1)^n = T_n^{**}(x) U_n^{**}(x). \quad (79)$$

$$U_{2n}^{**}(x) - (-1)^n = T_{n+1}^{**}(x) U_{n-1}^{**}(x). \quad (80)$$

Mindezek alapján $T_n^{**}(x)$ és $U_n^{**}(x)$ faktorizációjára is tudunk az irreducibilitás határozott állítása nélküli eredményeket megfogalmazni. Ehhez először egy kis trükkel $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ faktorizációs képletét átalakítjuk a következő alakra:

$$T_n^*(x) = \prod_{\substack{d|n \\ 2d \nmid n}} \Psi_{4d}(x), \quad (81)$$

és

$$U_n^*(x) = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \equiv 0 \pmod{4}}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \equiv 1 \pmod{2}}} \Psi_d(x) \Psi_{2d}(x).$$

A páratlan indexű körosztási polinomoknak az 8. szakaszban is említett ismert tulajdonsága alapján egyszerűen következik, hogy tetszőleges páratlan egész d esetén $\Psi_{2d}(x) = \pm \Psi_d(-x)$, ahol az előjelet úgy kell megválasztani, hogy $\pm \Psi_d(-x)$ főegyütthatója $+1$ legyen.

Az utóbbi két képletben álló

$$\Psi_{4d}(x) = \prod_{\substack{0 < k < d \\ \gcd(k, 4d)=1}} \left[x^2 - 4 \cos^2 \left(\frac{k\pi}{2d} \right) \right],$$

ill.

$$\Psi_d(x) \Psi_{2d}(x) = \prod_{\substack{0 < k < d/2 \\ \gcd(k, d)=1}} \left[x^2 - 4 \cos^2 \left(\frac{2k\pi}{d} \right) \right]$$

polinomokban x helyére ix -et téve, és az így kapott polinomok abszolút értékét véve, legyen $\Psi_{4d}^{**}(x) = |\Psi_{4d}(ix)|$, valamint minden 1-nél nagyobb páratlan d -re $\Psi_d^{**}(x) = |\Psi_d(ix) \Psi_{2d}(ix)| = |\Psi_d(ix) \Psi_d(-ix)|$. Ezekkel a jelölésekkel $T_n^{**}(x)$ és $U_n^{**}(x)$ nemnegatív egész együtthatós polinomok szorzataként állítható elő a következő képletekkel:

$$T_n^{**}(x) = \prod_{\substack{d|4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d^{**}(x), \quad (82)$$

ill.

$$U_n^{**}(x) = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x). \quad (83)$$

Hasonló módon bizonyítható, hogy

$$T_{2n}^{**}(x) + (-1)^n = \prod_{\substack{d|6n \\ d|2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x), \quad (84)$$

és

$$T_{2n}^{**}(x) - (-1)^n = \prod_{\substack{d|12n \\ d|4n \\ d|6n}} \Psi_d^{**}(x). \quad (85)$$

Ennél is egyszerűbben adódnak, hasonlóan csak páros fokú polinomokra, a (77)–(80) azonosságok segítségével az alábbi formulák:

$$T_{2n}^{**}(x) + 2 \cdot (-1)^n = \prod_{\substack{d|4n \\ d|2n}} [\Psi_d^{**}(x)]^2, \quad (86)$$

$$T_{2n}^{**}(x) - 2 \cdot (-1)^n = \prod_{\substack{d|2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} [\Psi_d^{**}(x)]^2, \quad (87)$$

$$U_{2n}^{**}(x) + (-1)^n = \prod_{\substack{d|4n \\ d|2n}} \Psi_d^{**}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x), \quad (88)$$

és

$$U_{2n}^{**}(x) - (-1)^n = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|4n+4 \\ d|2n+2}} \Psi_d^{**}(x). \quad (89)$$

Hátra van még a $W_n^{**}(x) \pm h$ és $Z_n^{**}(x) \pm h$ polinomok faktorizációjára vonatkozó vizsgálat. Erre vonatkozóan először is megállapíthatjuk, hogy az online faktorizációs alkalmazások szerint $W_n^{**}(x)$, $Z_n^{**}(x)$ és $Z_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis az $1 \leq n \leq 20$ tartományban, amiből valószínűsíteni lehet, hogy minden más n -re is így van. $W_n^{**}(x) \pm 1$ faktorizálására lényegében ugyanazt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk, amit $T_n^{**}(x) \pm 1$ és $U_n^{**}(x) \pm 1$ esetén is alkalmaztunk. A negyedfajú Csebisev-polinom faktorizációs képletei segítségével direkt következtetéssel adódnak az 5. táblázat bal oldali oszlopában a $W_{2n}^{**}(x) \pm 1$ és $W_{2n+1}^{**}(x) \pm 1$ polinomokra felírt azonosságok. Az x argumentumok helyére ix -et téve bizonyíthatóak az ugyanannak a táblázatnak a

jobb oldali oszlopában megadott $W_{2n}^{**}(x) \pm 1$ -re és $W_{2n+1}^{**}(x) \pm 1$ -re vonatkozó azonosságok. Az utóbbiak jobb oldalán álló kifejezések részét képező $T_n^{**}(x)$, $U_{n-1}^{**}(x)$, $U_n^{**}(x)$ és $T_{n+1}^{**}(x)$ polinomok faktorizációs képletét már ismerjük, a $W_n^{**}(x)$ és $Z_{n+1}^{**}(x)$ résszel pedig nem tudunk mit kezdeni, mivel ezek 20-ig bizonyítottan, 20 fölött pedig lehetséges irreducibilis polinomok. Ezzel eljutottunk a 12. táblázatban megadott, a $W_{2n}^{**}(x) \pm 1$ -re és $W_{2n+1}^{**}(x) \pm 1$ -re vonatkozó faktorizációs képletekhez.

A vizsgált polinomok közül úgy látszik, hogy legkevésbé lehet a $Z_n^{**}(x) \pm h$ polinomokat két vagy több faktor szorzatára bontani, mivel $Z_n^{**}(x)$ -ről és $Z_n^{**}(x) - 1$ -ről kiderült, hogy irreducibilisek az $1 \leq n \leq 20$ tartományban, $Z_n^{**}(x) + 1$ -ről pedig azt találtuk, hogy $n = 3, 4, 9, 10, 15, 16$ kivételével minden más n -re irreducibilis az $1 \leq n \leq 20$ tartományban. Azt pedig általánosan is be tudjuk bizonyítani, hogy ha $n \equiv 3$ vagy $4 \pmod{6}$, akkor $Z_n^{**}(x) + 1$ osztható a $\Psi_{12}^{**}(x) = x^2 + 3$ polinommal, tehát legalább két faktor szorzatára bontható. Ez abból következik, hogy a $T_n^{**}(x)$ -re és $T_n^{**}(x) + 1$ -re kapott faktorizációs képletek szerint megállapítható, hogy $T_n^{**}(x)$ osztható a $\Psi_{12}^{**}(x)$ polinommal, ha $n \equiv 3 \pmod{6}$, $T_n^{**}(x) + 1$ pedig osztható ugyanezzel a polinommal, ha $n \equiv 2$ vagy $4 \pmod{6}$. Ennélfogva a $Z_n^{**}(x)$ polinom definícióját figyelembe véve $Z_n^{**}(x) = T_n^{**}(x) + (T_n^{**}(x) + 1)$ valóban osztható a $\Psi_{12}^{**}(x)$ polinommal, ha $n \equiv 3$ vagy $4 \pmod{6}$.

A faktorizációs eredmények összefoglalása.

1. A $T_n^{*}(x) \pm h$, $U_n^{*}(x) \pm h$, $V_n^{*}(x) \pm h$ és $W_n^{*}(x) \pm h$ polinomok faktorizációját kifejező (58)–(74) általános képletek, valamint az ezeknek megfelelő, a 14–30. táblázatokban az $n \leq 20$ esetre listázott szorzat kifejezések bizonyítottan irreducibilis faktorizációt valósítanak meg.
2. A $T_n^{**}(x) \pm h$ és $U_n^{**}(x) \pm h$ polinomok faktorizációját kifejező (82)–(89) általános képletek esetére az ezekben szereplő $\Psi_d^{**}(x)$ faktorok irreducibilitását általánosan nem tudjuk bizonyítani, csak sejtjük, mivel az ezeknek megfelelő, a 36–44. táblázatokban az $n \leq 20$ esetre listázott szorzat kifejezésekről a Factoring Polynomials Calculator [15] web alkalmazás segítségével egyenként igazoltuk, hogy ebben a tartományban igaz az irreducibilis faktorizáció fennállásának a ténye.
3. Ugyancsak a [15] web alkalmazás használatával bizonyítottuk, hogy $T_n^{**}(x) \pm 2$, $T_n^{**}(x) \pm 1$ és $U_n^{**}(x) \pm 1$ irreducibilis polinom, ha $n < 20$ páratlan egész szám. (Ezért a páratlan n értékekhez tartozó sorokat ki is hagytuk a 37–40. és 43–44. táblázatokból.) Így aztán ezzel is úgy vagyunk, hogy általánosan minden páratlan pozitív egész n -re csak sejtjük, de egyelőre nem tudjuk bizonyítani az irreducibilitást.

4. Szintén a [15] web alkalmazás használatával bizonyítottuk, hogy $W_n^{**}(x)$, $Z_n^{**}(x)$ és $Z_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis, ha $1 \leq n \leq 20$.
5. A $Z_n^{**}(x) + 1$ polinom szintén irreducibilis $n \leq 20$ esetén, kivéve ha $n \equiv 3$ vagy $4 \pmod{6}$. A kivételes esetekben $Z_n^{**}(x) + 1$ osztható a $\Psi_{12}^{**}(x) = x^2 + 3$ polinommal az n nagyságára vonatkozó korlátozás nélkül is.
6. Az általános faktorizációs képleteket egy helyre is összegyűjtöttük a 8–12. táblázatokban, a faktorok számának a megadásával kiegészítve.

10. Általánosítási lehetőségek

A módosított Csebisev-polinomok általánosításaként tekintsük a következő polinomot, amelyről látni fogjuk, hogy az előző szakasz faktorizációs módszereihez hasonlóan körosztási polinomok segítségével faktorizálható.

$$Q_n(x) = U_n^*(x) + \sum_{\substack{R \subseteq S_j \\ R \neq \emptyset}} \left(\prod_{i \in R} \varepsilon_i \right) U_{n - \sum_{i \in R} k_i}^*(x). \quad (90)$$

Itt j adott tetszőleges nemnegatív egész, $S_j = \{1, 2, \dots, j\}$, a k_i adatok egymástól különböző pozitív egészek, az ε_i -k pedig előjel kifejezésére szolgáló adatok, melyekre $\varepsilon_i = +1$ vagy $\varepsilon_i = -1$ ($i \in S_j$).

A 2^j számú tagból álló jobb oldali kifejezés speciális esetként magában foglalja mind a hat módosított Csebisev-polinomot. A legegyszerűbb $j = 0$ esetben $Q_n(x)$ azonos az $U_n^*(x)$ másodfajú módosított Csebisev-polinommal. Ha $j = 1$ és $k_1 = 1$, akkor $Q_n(x) = U_n^*(x) \pm U_{n-1}^*(x)$ az előjeltől függően a harmad- vagy negyedfajú módosított Csebisev-polinomra redukálódik. Ha $j = 1$, $k_1 = 2$ és $\varepsilon_1 = -1$, akkor $Q_n(x)$ az elsőfajú módosított Csebisev-polinomra, ha $j = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ és $\varepsilon_2 = -1$, akkor pedig az ε_1 értéke által meghatározott előjeltől függően az ötöd- vagy hatodfajú módosított Csebisev-polinomra redukálódik.

Ha a $Q_n(x)$ polinom értelmezésére szolgáló adatokra teljesül hogy $n \geq \sum_{i=1}^j k_i$, akkor (90) jobb oldalára az (55) azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\overline{Q_n(x)} = \overline{U_n^*(x)} + \sum_{\substack{R \subseteq S_j \\ R \neq \emptyset}} \left(\prod_{i \in R} \varepsilon_i \right) x^{\sum_{i \in R} k_i} \overline{U_{n - \sum_{i \in R} k_i}^*(x)}. \quad (91)$$

Ha most a (63) képletet (91) jobb oldalának minden tagjára alkalmazzuk, akkor az

$$(x^2 - 1)\overline{Q_n(x)} = x^{2n+2} - 1 + \sum_{\substack{R \subseteq S_j \\ R \neq \emptyset}} \left(\prod_{i \in R} \varepsilon_i \right) x^{2n+2 - \sum_{i \in R} k_i} - \sum_{\substack{R \subseteq S_j \\ R \neq \emptyset}} \left(\prod_{i \in R} \varepsilon_i \right) x^{\sum_{i \in R} k_i} \quad (92)$$

egyenlőséghez jutunk, melynek jobb oldala a következő szorzattá alakítható:

$$(x^2 - 1)\overline{Q_n(x)} = \left(x^{2n+2 - \sum_{i=1}^j k_i} - \prod_{i=1}^j \varepsilon_i \right) \prod_{i=1}^j (x^{k_i} + \varepsilon_i). \quad (93)$$

Annak bizonyításához, hogy (92) és (93) jobb oldala azonos egymással, elég mindkettőben az egymásnak megfelelő együtthatók azonosságát ellenőrizni.

Most $\varepsilon_0 = -\prod_{i=1}^j \varepsilon_i$ és $k_0 = 2n + 2 - \sum_{i=1}^j k_i$ jelöléssel (93) a következő egyöntetűbb alakba írható:

$$\overline{Q_n(x)} = \frac{\prod_{i=0}^j (x^{k_i} + \varepsilon_i)}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i < 0}} \prod_{d|k_i} \Phi_d(x) \right) \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i > 0}} \prod_{\substack{d|2k_i \\ d \nmid k_i}} \Phi_d(x) \right). \quad (94)$$

Jelöljük γ_1 -gyel az $S_j \cup \{0\}$ halmazban lévő indexekhez tartozó negatív ε_i -k számát, γ_2 -vel pedig az $S_j \cup \{0\}$ halmazban lévő indexekhez tartozó azon negatív ε_i -k számát, melyekre k_i páros, plusz azon pozitív ε_i -k számát, melyekre k_i páratlan. Ezekkel a jelölésekkel (94) a következőképpen is írható:

$$\overline{Q_n(x)} = [\Phi_1(x)]^{\gamma_1-1} [\Phi_2(x)]^{\gamma_2-1} \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i < 0}} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|k_i}} \Phi_d(x) \right) \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i > 0}} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2k_i \\ d \nmid k_i}} \Phi_d(x) \right). \quad (95)$$

Most a transzformálatlan polinomra áttérve, $Q_n(x)$ irreducibilis faktorizációjára a következő képletet kapjuk.

$$Q_n(x) = (x-2)^{(\gamma_1-1)/2} (x+2)^{(\gamma_2-1)/2} \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i < 0}} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|k_i}} \Psi_d(x) \right) \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i > 0}} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2k_i \\ d \nmid k_i}} \Psi_d(x) \right). \quad (96)$$

(Mivel nyilvánvalóan $\prod_{i=0}^j \varepsilon_i = -1$ és $\sum_{i=0}^j k_i$ páros, következésképpen γ_1 és γ_2 páratlan, tehát az ezekkel kifejezett kitevők egészek.)

Végül nézzük meg, mit ad az általános (96) képlet arra a viszonylag egyszerűbb speciális esetre, amikor $j = 2$. Ez az eset még mindig általánosabb a hat módosított Csebisev-polinom eseténél, azok mindegyikét magában foglalva, viszont ebben az esetben nincs szükség a legáltalánosabb esetet kissé nehézkessé tevő γ_i -k használatára. Az ε_1 és ε_2 kétféle előjelének, valamint k_1 és k_2 kétféle paritásának megfelelő 16 variáció mindegyikét figyelembe véve könnyen meghatározható, hogy γ_1 és γ_2 mely esetekben veszi fel az 1 értéket és mely esetekben veszi fel a 3 értéket. (Más értékük nem lehetséges, ha $j = 2$.) Ennek alapján azt kapjuk, hogy

$$U_n^*(x) + \varepsilon_1 U_{n-k_1}^*(x) + \varepsilon_2 U_{n-k_2}^*(x) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 U_{n-k_1-k_2}^*(x) = E_\gamma \cdot E_0 \cdot E_1 \cdot E_2, \quad (97)$$

ahol

$$E_\gamma = \begin{cases} (x-2)(x+2) & \text{ha } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0, k_1 \text{ páros és } k_2 \text{ páros,} \\ (x-2) & \text{ha } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0, \text{ de } k_1 \text{ és } k_2 \text{ nem mindegyike páros,} \\ (x+2) & \text{ha } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, k_1 \text{ páratlan és } k_2 \text{ páratlan,} \\ & \text{vagy } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0, k_1 \text{ páratlan és } k_2 \text{ páros,} \\ & \text{vagy } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0, k_1 \text{ páros és } k_2 \text{ páratlan,} \\ 1 & \text{minden más esetben,} \end{cases} \quad (98)$$

$$E_0 = \begin{cases} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2-k_1-k_2}} \Psi_d(x) & \text{ha } \varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0, \\ \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|4n+4-2k_1-2k_2 \\ d|2n+2-k_1-k_2}} \Psi_d(x) & \text{ha } \varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0, \end{cases} \quad (99)$$

$i = 1, 2$ mindegyikére

$$E_i = \begin{cases} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|k_i}} \Psi_d(x) & \text{ha } \varepsilon_i < 0, \\ \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2k_i \\ d \nmid k_i}} \Psi_d(x) & \text{ha } \varepsilon_i > 0. \end{cases} \quad (100)$$

11. A $\Psi_n(x)$ körosztási előpolinomok és a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomok generálása

Az előző szakaszban faktorizációs képletek több sorozatát állítottuk elő a módosított Csebisev-polinomok különböző verzióira. A módszer lényege minden

esetben az volt, hogy adott $P(x)$ polinom esetén először a $\overline{P(x)}$ polinom faktorizálását tűztük ki célul, és ezáltal jutottunk el a $\overline{P(x)}$ polinom irreducibilis faktorizációjához. Valamennyi konkrét esetben $\overline{P(x)}$ faktorai kizárólag a körosztási polinomok közül, és következésképpen $P(x)$ faktorai a $\Psi_n(x)$ körosztási előpolinomok közül kerültek ki. A két polinom típus összefüggésének az értelmezéséhez külön magyarázatra volt szükség azokban az esetekben, amikor a képletekben a nem-polinom $\Psi_1(x)$ és/vagy $\Psi_2(x)$ valamelyike megjelent. Az egyszerűség kedvéért az ilyen eseteket most mellőzzük. Ezt azért is megtehetjük, mivel a faktorizációs képletek közül az ebben a szakaszban megfogalmazott célhoz elég lesz számunkra a $T_n^*(x)$ és a $W_n^*(x)$ módosított Csebisev-polinom. A többi verzióra elvileg itt nem is lenne szükség, azonban bizonyos páratlan n egészek esetén a $T_n^*(x) + 1$ polinom használatával hatékonyabban lehet meghatározni a $\Psi_n(x)$ és $\Phi_n(x)$ faktorokat, mint a $W_n^*(x)$ polinom használatával. (Nevezetesen olyan esetekben, amikor n azonkívül, hogy páratlan, még 3-mal is osztható.)

Ha megnézzük a fent említett faktorizációs képleteket, azt látjuk, hogy $T_n^*(x)$ faktorizációjában minden n esetén részt vesz a $\Psi_{4n}(x)$ polinom, $W_n^*(x)$ faktorizációjában pedig minden n esetén részt vesz a $\Psi_{2n+1}(x)$ polinom. Ezek összegyűjtése után már csak az 1-nél nagyobb páratlan számok kétszereséhez tartozó $\Psi_{4n+2}(x)$ polinomok hiányoznak. Az utóbbiakat megkaphatnánk $V_n^*(x)$ faktorizációja alapján, erre azonban nincs szükség, mivel tudjuk, hogy $\Psi_{4n+2}(x) = \pm \Psi_{2n+1}(-x)$, ahol páros fokú polinom esetén a $+$ előjel, páratlan fokú polinom esetén pedig a $-$ előjel érvényes. A megfelelő körosztási polinomokra viszont közismert, hogy $\Phi_{4n+2}(x) = \Phi_{2n+1}(-x)$, ha n pozitív egész.

A fent körvonalazott módszerrel a $T_n^*(x)$, ill. $\overline{T_n^*(x)} = x^{2n} + 1$ ($1 \leq n \leq 30$) polinomok faktorizációja segítségével meghatároztuk és táblázatba foglaltuk a $\Psi_n(x)$, ill. $\Phi_n(x)$ polinomok kifejezését az $1 \leq n \leq 120$ tartományban a 4-gyel osztható n -ek esetére. Ezt követően a $W_n^*(x)$ polinomok faktorizációjával $n = 31$ környékén elakadtunk, eddig a határig bírta a Factoring Polynomials Calculator [15] alkalmazás kapacitása. Ezáltal az $1 \leq n \leq 63$ tartományba eső páratlan n -ekre tudtuk meghatározni a $\Psi_n(x)$ polinomok kifejezését. Kicsit később találtunk egy olyan web alkalmazást (Polynomial Factorization [16]) melynek segítségével sikerült a 31-nél nagyobb indexekhez tartozó $W_n^*(x)$ polinomok faktorizációját meghatározni, egészen $n = 59$ -ig.

Végül az $n = 4k + 2$ alakú indexekhez tartozó $\Psi_n(x)$ és $\Phi_n(x)$ kifejezéseket az $n = 2k + 1$ -hez tartozó hasonló polinomok előjel váltási szabálya alapján határoztuk meg.

Az ismertetett módszerrel generált $\Psi_n(x)$ és $\Phi_n(x)$ polinomok kifejezését párba állítva a több lapot átfogó 49. táblázatban soroljuk fel.

12. A faktorizációs képletekből levezethető oszthatósági szabályok

A (58)–(68) faktorizációs képletekből kikövetkeztethető, hogy a $T_n^*(x)$, $T_n^*(x) \pm 2$, $T_n^*(x) \pm 1$, $U_n^*(x)$, $U_n^*(x) \pm 1$ polinomok milyen feltételek mellett tartalmazzák osztóként az egyes $\Psi_d(x)$ faktorokat vagy azok négyzetét. A lehetséges lineáris faktorok: $[\Psi_1(x)]^2 = x-2$, $[\Psi_2(x)]^2 = x+2$, $\Psi_3(x) = x+1$, $\Psi_4(x) = x$ és $\Psi_6(x) = x-1$ esetre szorítkozva, a 51. és 52. táblázatban összefoglaltuk ezeket az oszthatósági szabályokat. A két táblázat mutatja egyúttal a tárgyalt polinomok valós gyökeinek a halmazát. Természetesen ugyanezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, hogy a 57. és 58. táblázatban megadott összes (valós és komplex) gyök közül kiválogatjuk a valósakat és a valós gyökökből következtetünk a lineáris faktorokra.

13. Táblázatok és ábrák

Elsőként az 1. táblázat felső szegmensében olyan nyilvánvaló vagy könnyen bizonyítható azonosságokat sorolunk fel, amelyek magyarázatul szolgálnak a 2. táblázatban összegyűjtött rekurzív összefüggésekre, valamint a 3. táblázatban összegyűjtött bonyolultabb explicit képletekre. Az 1. táblázat alsó szegmensében pedig a Pell-egyenlettel kapcsolatos három azonosságot, valamint az elsőfajú Csebisev-polinom kompozíciójára vonatkozó azonosságot fogalmazzuk át az e munkában tárgyalt módosulatok esetére. A következő három táblázatban a módosított Csebisev-polinomok három különböző (rekurzió, explicit képlet, ill. trigonometrikus vagy hiperbolikus függvények segítségével történő) definíciójának megfelelő formulákat soroljuk fel.

Az 5. táblázatban olyan érdekes azonosságokat sorolunk fel, amelyek a 9. szakaszban tárgyalt és a 9. és 11. táblázatban összefoglalt faktorizációs képletekből vezethetők le, ill. a 12. táblázat esetén fordítva, az ott megadott képleteknek a megalapozását képezik. A 6. táblázatban összegyűjtöttük a Csebisev-polinom módosulatoknak a 9. szakaszban végzett tárgyalás során kapott transzformáltjait, amelyekhez felhasználtuk a felülvonás transzformációnak a 7. táblázatban felsorolt szabályait.

Ezután további öt általános érvényű táblázat következik. A 9. és a 11. táblázatban a $T_n^*(x)$, $T_n^*(x) \pm 2$, $T_n^*(x) \pm 1$, $U_n^*(x)$, $U_n^*(x) \pm 1$, ill. a $V_n^*(x)$, $V_n^*(x) \pm 1$,

$W_n^*(x)$, $W_n^*(x) \pm 1$, $Y_n^*(x)$, $Z_n^*(x)$ polinomok irreducibilis faktorizációjára a 9. szakaszban kapott eredményeket gyűjtöttük össze. Az eléjük helyezett 8. és 10. táblázat a szóban forgó polinomok transzformáltjára vonatkozó faktorizációs képleteket tartalmazza, amelyek alapján bizonyítottuk a módosított Csebisev-polinomokra vonatkozó faktorizációs képleteket. Ezeknek a képletsoroknak az egymás mellé állításával arra is rá szeretnénk világítani, hogy – mint a bevezetésben már említettük – a Csebisev-polinomok módosulatainak és azok transzformáltjainak a faktorizációja valamennyi vizsgált esetben teljes szinkronban van egymással annak köszönhetően, hogy a körosztási előpolinomok közé becsempésztünk két négyzetgyökös kifejezést. A faktorok száma viszont a teljes szinkron ellenére eltérést mutat azokban az esetekben, amikor a transzformált polinomok faktorizációjában megjelenik $[\Phi_1(x)]^2$ vagy $[\Phi_2(x)]^2$, mivel itt ezek két faktort jelentenek, a transzformálatlan polinomok faktorizációs képletében viszont az ezeknek megfelelő $[\Psi_1(x)]^2$ és $[\Psi_2(x)]^2$ kifejezések csak egy-egy faktort képeznek. Az ebbe a kategóriába tartozó négy faktorizációs táblázatban a faktorizáció képlete mellett minden egyes polinom esetére megadjuk a faktorok számát $\tau(n)$ segítségével kifejezve, ahol $\tau(n)$ jelöli az n egész osztóinak a számát. Bizonyos esetekben a táblázatok jobb szélén megadjuk még a faktorok számának mint egész sorozatnak az On-line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) [12] adatbázisban szereplő azonosítóját.

A 12. táblázat a $T_n^{**}(x)$, $T_n^{**}(x) \pm 2$, $T_n^{**}(x) \pm 1$, $U_n^{**}(x)$, $U_n^{**}(x) \pm 1$, $W_n^{**}(x) \pm 1$ polinomok egy-egy általános faktorizációs képletét tartalmazza az előző táblázathoz hasonló általános megfogalmazásban. Az ezekben megadott faktorok irreducibilitását azonban nem tudjuk általánosan bizonyítani.

Ezután lista jellegű táblázatok következnek, ahol a Csebisev polinomok módosított változataival kapcsolatos táblázatokban mindenütt az $1 \leq n \leq 20$ tartományra listázunk. Mind a hat módosított Csebisev-polinom esetén ezek sima listázásával kezdjük, majd ezt követően a 9. és a 11. táblázatban megadott faktorizációs képleteket konkrétizáljuk n különböző eseteire. Ugyanígy járunk el a $T_n^{**}(x)$, $U_n^{**}(x)$, $W_n^{**}(x)$ és $Z_n^{**}(x)$ polinomok vonatkozásában is. A 13. és 19. táblázatban az első-, ill. másodfajú módosított Csebisev-polinomoknak a konkrét esetekre történő felsorolását az n -szeres szögek szögfüggvényeinek a régi MTA SZTAKI honlapon található [4] listáiból vettük át, ahol a bővebb $1 \leq n \leq 50$ tartományra történt a listázás. A harmad- és negyedfajú módosított Csebisev-polinomok táblázatának (23. és 27. táblázat) a sorait a másodfajú módosított Csebisev-polinomok 19. táblázatának a sorai alapján, az ötöd- és hatodfajú módosított Csebisev-polinomok táblázatának (31. és 33. táblázat) a sorait pedig az elsőfajú módosított Csebisev-polinomok

13. táblázatának a sorai alapján képeztük.

A módosított Csebisev-polinomok és ezekből származtatott további polinomok faktorizációját konkrét n értékekre ($1 \leq n \leq 20$ esetére) felsorolva a 14–18., 20–22., stb. táblázatban adjuk meg, a táblázatok minden sorát két különböző változatban felírva. Először a $\Psi_n(x)$, $\Psi_n^{**}(x)$ polinomokkal fejezzük ki a faktorizációt a 9. 11. és 12. táblázatok általános képletei alapján, másodsor pedig a $\Psi_n(x)$, $\Psi_n^{**}(x)$ polinomoknak a 49–50. táblázatokban megadott explicit kifejezéseivel.

A több lapot átfogó 49. táblázatban a $\Psi_n(x)$ körosztási előpolinomokat és a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomokat párba állítva listázzuk az $1 \leq n \leq 120$ tartományban. (Hogy miért éppen 120-ig mentünk el, annak az a magyarázata, hogy $\Psi_{120}(x)$ a legnagyobb indexű körosztási előpolinom, ami előfordul a 14–34. táblázatokban.)

A $\Psi_n(x)$ polinomokból származtatott (a bevezetésben definiált) néhány páratlan indexű $\Psi_n^{**}(x)$ polinom kifejezését gyűjtöttük össze a 50. táblázatban. A páratlan indexű $\Psi_n^{**}(x)$ polinomokon kívül más $\Psi_n^{**}(x)$ kifejezések listázása szükségtelen, mivel azokat nagyon egyszerűen megkapjuk a $\Psi_n(x)$ polinomokból úgy, hogy az összes negatív együttható értékét az ellentettjére, pozitívrá változtatjuk.

A 51. és 52. táblázat a 12. szakaszban tárgyalt oszthatósági tulajdonságokat foglalja táblázatba.

A kötet végére helyeztük el az ábrákat és az azokhoz tartozó táblázatokat. Az 1–3. ábrák, amelyek mindegyikét az ábra főbb numerikus adatait tartalmazó egy-egy táblázat követi, a $T_n^*(x)$ és $U_n^*(x)$ polinomok görbéjét szemléltetik kisebb n értékek esetére, az ábrákhoz társított 53–55. számú táblázatok pedig ezeknek a polinomoknak az ábrákon illusztrált rajzokkal megadott vizuális információit egészítik ki a gyökök és szélsőértékek numerikus adataival, valamennyi adatot 5 tizedesjegyre közelítve.

A $V_n^*(x)$ és $W_n^*(x)$ polinomokhoz hasonló ábrákat nem adunk, ezek megrajzolását az olvasóra hagyjuk, amennyiben szeretne ilyen rajzokat is látni. Megadunk azonban egy értéktáblázatot (56. táblázat), melynek segítségével többé vagy kevésbé vizuálisan is el lehet képzelni a $V_n^*(x)$ polinomok görbéjét. Az ebben szereplő adatokat magasabb fokú egyenletek közelítő megoldásával számítottuk ki, de a közelítés jelét elhagytuk a táblázatban. Mivel tudjuk, hogy $V_n^*(x)$ és $W_n^*(x)$ tükörképei egymásnak, ezért fölösleges az ilyen számítást mindkettőre elvégezni.

Az 57. és 58. táblázat rendeltetésüket illetően nem igényel magyarázatot. Azonban az 57. táblázat értelmezéséhez azt a megjegyzést kell tennünk, hogy a táblázat első két sorában – legfeljebb egy vagy két gyök (a 2 abszolút értékű gyök vagy gyökök) kivételével – csupa kétszeres gyök szerepel. A táblázat középső oszlopában a dupla gyökök kétszeresen kerülnek felsorolásra, a jobb oldali oszlopban viszont a rendezés következtében csak egyszeresen. A táblázat többi sorában, valamint az 58. táblázatban megadott gyökök mind egyszeresek.

Végül a nyolc utolsó ábrával az eddigiekben tárgyalt polinomok gyökeit vizuálisan szemléltetjük, párhuzamosan a transzformálatlan $T_n^*(x) - 2$ stb. és a transzformált $\overline{T_n^*(x) - 2}$ stb. polinomokra. Az előbbiek minden esetben a $2 \cos \theta_k$ kifejezéssel megadható, a $[-2, +2]$ intervallumba eső valós számok, az utóbbiak pedig az $e^{\pm i \cos \theta_k}$ kifejezéssel megadható komplex számok, melyek a komplex számsík egységkörén ábrázolhatók vizuálisan. A transzformálatlan polinomok intervallumát felére kicsinyítve, annak ábrázolt mérete azonossá válik az egységkör átmérőjének ábrázolt méretével. Helyezzük el ezeket a valós gyököket tartalmazó szakaszokat úgy, hogy az egységkör vízszintes átmérőjének a síkjára merőlegesen levetítve pontosan fedjék ezt a vízszintes átmérőt. Ekkor a szakaszon ábrázolt valós gyökökből a kör vízszintes átmérőjére merőleges egyeneseknek a körrel való metszés- vagy érintési pontjai által meghatározott komplex számok éppen azonosak a transzformált polinom gyökeivel. A gyökök helyét a szakaszokon és a körökön is a szokásos módon, kis karikával jelöljük. Kétszeres gyök esetén két egymással érintkező kis karikát helyezünk el az egyenes szakasz, ill. a körvonal két oldalán.

A vizuális szemléltetés céljából minden tárgyalt esetben egy páros és egy páratlan n értékhez, konkrétan $n = 3$ -hoz, ill. $n = 4$ -hez tartozó ábrát készítettünk el, következésképpen a rajzokon ábrázolt transzformálatlan polinomoknak 3, ill 4 valós gyöke van, a transzformált polinomoknak pedig 6, ill 8 komplex gyöke. A transzformálatlan polinomok gyökeinek ábrázolásához az 57–58. táblázatokban található képleteket konkretizáljuk $n = 3$ és $n = 4$ esetére.

A 4. és 5. ábra különleges, mivel ezek olyan esetekhez tartoznak, amikor a transzformálatlan polinomok gyökei legfeljebb 1 vagy 2 kivétellel kétszeres gyökök, a transzformált polinomok gyökei pedig kivétel nélkül valamennyien kétszeres gyökök. A 10. és 11. ábrák esetén pedig a gyököket két-két gyökhalmaz definiálja, ezért világosabb az ábra, ha a transzformálatlan polinom gyökeit ezen a két ábrán két-két egyenes szakaszon helyezzük el.

1. táblázat. Definíció szerinti, ill. közismert vagy könnyen bizonyítható azonosságok

$T_n^*(x) = U_n^*(x) - U_{n-2}^*(x)$ $T_n^*(x) = 2U_n^*(x) - xU_{n-1}^*(x)$ $V_n^*(x) = U_n^*(x) - U_{n-1}^*(x)$ $W_n^*(x) = U_n^*(x) + U_{n-1}^*(x)$ $Y_n^*(x) = T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x)$ $Z_n^*(x) = T_n^*(x) + T_{n-1}^*(x)$	$T_n^{**}(x) = U_n^{**}(x) + U_{n-2}^{**}(x)$ $T_n^{**}(x) = 2U_n^{**}(x) - xU_{n-1}^{**}(x)$ $W_n^{**}(x) = U_n^{**}(x) + U_{n-1}^{**}(x)$ $Z_n^{**}(x) = T_n^{**}(x) + T_{n-1}^{**}(x)$
$T_n^*(x) + U_{n-1}^*(x)\sqrt{x^2 - 4} = \frac{(x+\sqrt{x^2-4})^n}{2^{n-1}}$ $T_n^*(x) - U_{n-1}^*(x)\sqrt{x^2 - 4} = \frac{(x-\sqrt{x^2-4})^n}{2^{n-1}}$ $[T_n^*(x)]^2 - (x^2 - 4) [U_{n-1}^*(x)]^2 = 4$ $T_{mn}^*(x) = T_m^*[T_n^*(x)]$	$T_n^{**}(x) + U_{n-1}^{**}(x)\sqrt{x^2 + 4} = \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^n}{2^{n-1}}$ $T_n^{**}(x) - U_{n-1}^{**}(x)\sqrt{x^2 + 4} = \frac{(x-\sqrt{x^2+4})^n}{2^{n-1}}$ $[T_n^{**}(x)]^2 - (x^2 + 4) [U_{n-1}^{**}(x)]^2 = (-1)^n \cdot 4$ páratlan n esetén $T_{mn}^{**}(x) = T_m^{**}[T_n^{**}(x)]$

2. táblázat. Az eredeti és a módosított Csebisev-polinomok rekurzív képzési szabálya

$T_0(x) = 1$ $U_0(x) = 1$	$T_0^*(x) = T_0^{**}(x) = 2$ $U_0^*(x) = U_0^{**}(x) = 1$
$T_1(x) = x$ $U_1(x) = 2x$	$T_1^*(x) = T_1^{**}(x) = x$ $U_1^*(x) = U_1^{**}(x) = x$
$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$	$T_{n+1}^*(x) = xT_n^*(x) - T_{n-1}^*(x)$ $U_{n+1}^*(x) = xU_n^*(x) - U_{n-1}^*(x)$ $T_{n+1}^{**}(x) = xT_n^{**}(x) + T_{n-1}^{**}(x)$ $U_{n+1}^{**}(x) = xU_n^{**}(x) + U_{n-1}^{**}(x)$
$V_1(x) = 2x - 1, W_1(x) = 2x + 1$ $Y_1(x) = x - 1, Z_1(x) = x + 1$	$V_1^*(x) = x - 1, W_1^*(x) = W_1^{**}(x) = x + 1$ $Y_1^*(x) = x - 2, Z_1^*(x) = Z_1^{**}(x) = x + 2$
$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1, W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$ $Y_2(x) = 2x^2 - x - 1, Z_2(x) = 2x^2 + x - 1$	$V_2^*(x) = x^2 - x - 1, W_2^*(x) = x^2 + x - 1$ $Y_2^*(x) = x^2 - x - 2, Z_2^*(x) = x^2 + x - 2$ $W_2^{**}(x) = x^2 + x + 1$ $Z_2^{**}(x) = x^2 + x + 2$
$V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x)$ $W_{n+1}(x) = 2xW_n(x) - W_{n-1}(x)$ $Y_{n+1}(x) = 2xY_n(x) - Y_{n-1}(x)$ $Z_{n+1}(x) = 2xZ_n(x) - Z_{n-1}(x)$	$V_{n+1}^*(x) = xV_n^*(x) - V_{n-1}^*(x)$ $W_{n+1}^*(x) = xW_n^*(x) - W_{n-1}^*(x)$ $Y_{n+1}^*(x) = xY_n^*(x) - Y_{n-1}^*(x)$ $Z_{n+1}^*(x) = xZ_n^*(x) - Z_{n-1}^*(x)$ $W_{n+1}^{**}(x) = xW_n^{**}(x) + W_{n-1}^{**}(x)$ $Z_{n+1}^{**}(x) = xZ_n^{**}(x) + Z_{n-1}^{**}(x)$

3. táblázat. Az eredeti és a módosított Csebisev-polinomok explicit előállítás

$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k}$ $U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} x^{n-2k}$ $V_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} x^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k-1}$ $W_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k-1}$ $Y_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} x^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k-1}$ $Z_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k-1}$
$T_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$ $U_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$ $V_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}$ $W_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}$ $Y_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}$ $Z_n^*(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}$
$T_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$ $U_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$ $W_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}$ $Z_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}$

Új jelölés:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{ha } k = 0, \\ \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{ha } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

4. táblázat. Többszörös szögek szögfüggvényei a módosított Csebisev-polinomokkal

	$2 \cos n\theta = T_n^*(2 \cos \theta)$ $2 \cosh n\theta = T_n^*(2 \cosh \theta)$
n páratlan: n páros:	$\left. \begin{array}{l} 2 \sin n\theta \\ 2 \cos n\theta \end{array} \right\} = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} T_n^*(2 \sin \theta)$
n páratlan: n páros:	$\left. \begin{array}{l} 2 \sinh n\theta \\ 2 \cosh n\theta \end{array} \right\} = T_n^{**}(2 \sinh \theta)$
n páratlan: n páros:	$\left. \begin{array}{l} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \\ \frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh \theta} \\ \frac{\sin(n+1)\theta}{\cos \theta} \\ \frac{\cos(n+1)\theta}{\cos \theta} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} = U_n^*(2 \cos \theta) \\ = U_n^*(2 \cosh \theta) \\ (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} U_n^*(2 \sin \theta) \end{array}$
n páratlan: n páros:	$\left. \begin{array}{l} \frac{\sinh(n+1)\theta}{\cosh \theta} \\ \frac{\cosh(n+1)\theta}{\cosh \theta} \end{array} \right\} = U_n^{**}(2 \sinh \theta)$
	$\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta = \left(\cos \frac{1}{2} \theta\right) V_n^*(2 \cos \theta)$ $\cosh \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta = \left(\cosh \frac{1}{2} \theta\right) V_n^*(2 \cosh \theta)$
	$\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta = \left(\sin \frac{1}{2} \theta\right) W_n^*(2 \cos \theta)$ $\sinh \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta = \left(\sinh \frac{1}{2} \theta\right) W_n^*(2 \cosh \theta)$

5. táblázat. A faktorizációs képletek segítségével feltárt kevésbé ismert azonosságok

$T_{n+1}^*(x) + T_n^*(x) = W_{n+1}^*(x) - W_{n-1}^*(x) = [\Psi_2(x)]^2 V_n^*(x)$ $T_{n+1}^*(x) - T_n^*(x) = V_{n+1}^*(x) - V_{n-1}^*(x) = [\Psi_1(x)]^2 W_n^*(x)$	
$U_{2n}^*(x) + 1 = T_n^*(x)U_n^*(x)$ $U_{2n}^*(x) - 1 = T_{n+1}^*(x)U_{n-1}^*(x)$ $U_{2n+1}^*(x) = T_{n+1}^*(x)U_n^*(x)$ $T_{2n}^*(x) + 2 = [T_n^*(x)]^2$ $T_{2n}^*(x) - 2 = [\Psi_1(x)]^2 [\Psi_2(x)]^2 [U_{n-1}^*(x)]^2$	$U_{2n}^{**}(x) + (-1)^n = T_n^{**}(x)U_n^{**}(x)$ $U_{2n}^{**}(x) - (-1)^n = T_{n+1}^{**}(x)U_{n-1}^{**}(x)$ $U_{2n+1}^{**}(x) = T_{n+1}^{**}(x)U_n^{**}(x)$ $T_{2n}^{**}(x) + 2 \cdot (-1)^n = [T_n^{**}(x)]^2$ $T_{2n}^{**}(x) - 2 \cdot (-1)^n = [\Psi_1^{**}(x)]^2 [U_{n-1}^{**}(x)]^2$
$V_{2n}^*(x) + 1 = T_n^*(x)V_n^*(x)$ $V_{2n}^*(x) - 1 = [\Psi_1(x)]^2 U_{n-1}^*(x)W_n^*(x)$ $V_{2n+1}^*(x) + 1 = T_{n+1}^*(x)V_n^*(x)$ $V_{2n+1}^*(x) - 1 = [\Psi_1(x)]^2 U_n^*(x)W_n^*(x)$	
$W_{2n}^*(x) + 1 = T_n^*(x)W_n^*(x)$ $W_{2n}^*(x) - 1 = U_{n-1}^*(x)Z_{n+1}^*(x) = [\Psi_2(x)]^2 U_{n-1}^*(x)V_n^*(x)$ $W_{2n+1}^*(x) + 1 = U_n^*(x)Z_{n+1}^*(x) = [\Psi_2(x)]^2 U_n^*(x)V_n^*(x)$ $W_{2n+1}^*(x) - 1 = T_{n+1}^*(x)W_n^*(x)$	$W_{2n}^{**}(x) + (-1)^n = T_n^{**}(x)W_n^{**}(x)$ $W_{2n}^{**}(x) - (-1)^n = U_{n-1}^{**}(x)Z_{n+1}^{**}(x)$ $W_{2n+1}^{**}(x) + (-1)^n = U_n^{**}(x)Z_{n+1}^{**}(x)$ $W_{2n+1}^{**}(x) - (-1)^n = T_{n+1}^{**}(x)W_n^{**}(x)$
$Y_n^*(x) = [\Psi_1(x)]^2 W_{n-1}^*(x) = (x-2)W_{n-1}^*(x)$ $Z_n^*(x) = [\Psi_2(x)]^2 V_{n-1}^*(x) = (x+2)V_{n-1}^*(x)$	

6. táblázat. A 'felülvonás' transzformáció eredménye a módosított Csebisev-polinomokra

$U_n^*(x)$	$\overline{U_n^*(x)} = \sum_{k=1}^n x^{2k}$	$x^n U_n^*(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}$
$T_n^*(x) = U_n^*(x) - U_{n-2}^*(x)$	$\overline{T_n^*(x)} = \overline{U_n^*(x)} - x^2 \overline{U_{n-2}^*(x)}$	$x^n T_n^*(x + \frac{1}{x}) = x^{2n} + 1$
$V_n^*(x) = U_n^*(x) - U_{n-1}^*(x)$	$\overline{V_n^*(x)} = \overline{U_n^*(x)} - x \overline{U_{n-1}^*(x)}$	$x^n V_n^*(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^{2n+1}+1}{x+1}$
$W_n^*(x) = U_n^*(x) + U_{n-1}^*(x)$	$\overline{W_n^*(x)} = \overline{U_n^*(x)} + x \overline{U_{n-1}^*(x)}$	$x^n W_n^*(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$
$Y_n^*(x) = T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x)$	$\overline{Y_n^*(x)} = \overline{T_n^*(x)} - x \overline{T_{n-1}^*(x)}$	$x^n Y_n^*(x + \frac{1}{x}) = (x-1)(x^{2n-1}-1)$
$Z_n^*(x) = T_n^*(x) + T_{n-1}^*(x)$	$\overline{Z_n^*(x)} = \overline{T_n^*(x)} + x \overline{T_{n-1}^*(x)}$	$x^n Z_n^*(x + \frac{1}{x}) = (x+1)(x^{2n-1}+1)$
$U_n^*(x) + 1$	$\overline{U_n^*(x) + 1} = \overline{U_n^*(x)} + x^n$	$x^n [U_n^*(x + \frac{1}{x}) + 1] = \frac{(x^n+1)(x^{n+2}-1)}{x^2-1}$
$U_n^*(x) - 1$	$\overline{U_n^*(x) - 1} = \overline{U_n^*(x)} - x^n$	$x^n [U_n^*(x + \frac{1}{x}) - 1] = \frac{(x^n-1)(x^{n+2}+1)}{x^2-1}$
$T_n^*(x) + 1$	$\overline{T_n^*(x) + 1} = \overline{T_n^*(x)} + x^n$	$x^n [T_n^*(x + \frac{1}{x}) + 1] = \frac{(x^{3n}-1)}{x-1}$
$T_n^*(x) - 1$	$\overline{T_n^*(x) - 1} = \overline{T_n^*(x)} - x^n$	$x^n [T_n^*(x + \frac{1}{x}) - 1] = \frac{(x^{3n}+1)}{x+1}$
$T_n^*(x) + 2$	$\overline{T_n^*(x) + 2} = \overline{T_n^*(x)} + 2x^n$	$x^n [T_n^*(x + \frac{1}{x}) + 2] = (x^n + 1)^2$
$T_n^*(x) - 2$	$\overline{T_n^*(x) - 2} = \overline{T_n^*(x)} - 2x^n$	$x^n [T_n^*(x + \frac{1}{x}) - 2] = (x^n - 1)^2$
$V_n^*(x) + 1$	$\overline{V_n^*(x) + 1} = \overline{V_n^*(x)} + x^n$	$x^n [V_n^*(x + \frac{1}{x}) + 1] = \frac{(x^n+1)(x^{n+1}+1)}{x+1}$
$V_n^*(x) - 1$	$\overline{V_n^*(x) - 1} = \overline{V_n^*(x)} - x^n$	$x^n [V_n^*(x + \frac{1}{x}) - 1] = \frac{(x^n-1)(x^{n+1}-1)}{x+1}$
$W_n^*(x) + 1$	$\overline{W_n^*(x) + 1} = \overline{W_n^*(x)} + x^n$	$x^n [W_n^*(x + \frac{1}{x}) + 1] = \frac{(x^n+1)(x^{n+1}-1)}{x-1}$
$W_n^*(x) - 1$	$\overline{W_n^*(x) - 1} = \overline{W_n^*(x)} - x^n$	$x^n [W_n^*(x + \frac{1}{x}) - 1] = \frac{(x^n-1)(x^{n+1}+1)}{x-1}$

7. táblázat. A 'felülvonás' transzformáció főbb tulajdonságai

	$\overline{P_n(x) + a} = \overline{P_n(x)} + ax^n$
$n \geq m$ esetén	$\overline{P_n(x) + Q_m(x)} = \overline{P_n(x)} + x^{n-m} \overline{Q_m(x)}$
	$\overline{aP_n(x)} = a \overline{P_n(x)}$
	$\overline{P_n(x)Q_m(x)} = \overline{P_n(x)} \cdot \overline{Q_m(x)}$
ha a $P_n(x)$ polinom osztható a $Q_m(x)$ polinommal, akkor	$\overline{P_n(x)/Q_m(x)} = \overline{P_n(x)}/\overline{Q_m(x)}$

8. táblázat. $\overline{T_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 2, \pm 1$) és $\overline{U_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 1$) irreducibilis faktorizációja

polinom	faktorizáció	faktorok száma	OEIS
$\overline{T_n^*(x)} = x^{2n} + 1$	$\prod_{\substack{d 4n \\ d \nmid 2n}} \Phi_d(x)$	$\tau(2n) - \tau(n)$	
$\overline{T_n^*(x) - 2} = (x^n - 1)^2$	$\prod_{d n} [\Phi_d(x)]^2$	$2\tau(n)$	A062011
$\overline{T_n^*(x) + 2} = (x^n + 1)^2$	$\prod_{\substack{d 2n \\ d \nmid n}} [\Phi_d(x)]^2$	$2\tau(2n) - 2\tau(n)$	A054844
$\overline{T_n^*(x) - 1} = \frac{x^{3n} + 1}{x^n + 1}$	$\prod_{\substack{d 6n \\ d \nmid 2n \\ d \nmid 3n}} \Phi_d(x)$	$\tau(6n) - \tau(2n) - \tau(3n) + \tau(n)$	
$\overline{T_n^*(x) + 1} = \frac{x^{3n} - 1}{x^n - 1}$	$\prod_{\substack{d 3n \\ d \nmid n}} \Phi_d(x)$	$\tau(3n) - \tau(n)$	
$\overline{U_n^*(x)} = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}$	$\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+2}} \Phi_d(x)$	$\tau(2n+2) - 2$	
$\overline{U_n^*(x) - 1} = \frac{(x^n - 1)(x^{n+2} + 1)}{x^2 - 1}$	$\prod_{d n} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+4 \\ d \nmid n+2}} \Phi_d(x)$	$\tau(2n+4) + \tau(n) - \tau(n+2) - 2$	
$\overline{U_n^*(x) + 1} = \frac{(x^n + 1)(x^{n+2} - 1)}{x^2 - 1}$	$\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d n+2}} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n \\ d \nmid n}} \Phi_d(x)$	$\tau(2n) + \tau(n+2) - \tau(n) - 2$	

9. táblázat. $T_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 2, \pm 1$) és $U_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$) irreducibilis faktorizációja

polinom	faktorizáció	faktorok száma	OEIS
$T_n^*(x)$	$\prod_{\substack{d 4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d(x)$	$\tau(2n) - \tau(n)$	A001227
$T_n^*(x) - 2$	$\prod_{d n} [\Psi_d(x)]^2$	$2\tau(n) - 1$ (páratlan n esetén) $2\tau(n) - 2$ (páros n esetén)	A086369
$T_n^*(x) + 2$	$\prod_{\substack{d 2n \\ d \nmid n}} [\Psi_d(x)]^2$	$2\tau(2n) - 2\tau(n) - 1$ (páratlan n) $2\tau(2n) - 2\tau(n)$ (páros n)	A086374
$T_n^*(x) - 1$	$\prod_{\substack{d 6n \\ d \nmid 2n \\ d \nmid 3n}} \Psi_d(x)$	$\tau(6n) - \tau(2n) - \tau(3n) + \tau(n)$	—
$T_n^*(x) + 1$	$\prod_{\substack{d 3n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x)$	$\tau(3n) - \tau(n)$	—
$U_n^*(x)$	$\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+2}} \Psi_d(x)$	$\tau(2n+2) - 2$	A086327
$U_n^*(x) - 1$	$\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+4 \\ d \nmid n+2}} \Psi_d(x)$	$\tau(2n+4) + \tau(n) - \tau(n+2) - 2$	A086389
$U_n^*(x) + 1$	$\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d n+2}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x)$	$\tau(2n) + \tau(n+2) - \tau(n) - 2$	A086375

10. táblázat. $\overline{V_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 1$), $\overline{W_n^*(x) - h}$ ($h = 0, \pm 1$), $\overline{Y_n^*(x)}$ és $\overline{Z_n^*(x)}$ irreducibilis faktORIZÁCIÓJA

polinom	faktORIZÁCIÓ	faktorok száma
$\overline{V_n^*(x)} = \frac{x^{2n+1}+1}{x+1}$ $\overline{W_n^*(x)} = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$	$\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 4n+2 \\ d \nmid 2n+1}} \Phi_d(x)$ $\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+1}} \Phi_d(x)$	$\tau(2n+1) - 1$
$\overline{V_n^*(x) - 1} = \frac{(x^n-1)(x^{n+1}-1)}{x+1}$ $\overline{V_n^*(x) + 1} = \frac{(x^n+1)(x^{n+1}+1)}{x+1}$ $\overline{W_n^*(x) - 1} = \frac{(x^n-1)(x^{n+1}+1)}{x-1}$ $\overline{W_n^*(x) + 1} = \frac{(x^n+1)(x^{n+1}-1)}{x-1}$	$\prod_{\substack{d \neq 2 \\ d n}} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d n+1}} \Phi_d(x)$ $\prod_{\substack{d \neq 2 \\ d 2n \\ d \nmid n}} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d 2n+2 \\ d \nmid n+1}} \Phi_d(x)$ $\prod_{\substack{d \geq 2 \\ d n}} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d 2n+2 \\ d \nmid n+1}} \Phi_d(x)$ $\prod_{\substack{d \geq 2 \\ d n+1}} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d 2n \\ d \nmid n}} \Phi_d(x)$	$\tau(n+1) + \tau(n) - 1$ $\tau(2n+2) - \tau(n+1) + \tau(2n) - \tau(n) - 1$ $\tau(2n+2) - \tau(n+1) + \tau(n) - 1$ $\tau(2n) - \tau(n) + \tau(n+1) - 1$
$\overline{Y_n^*(x)} = (x-1)(x^{2n-1}-1)$ $\overline{Z_n^*(x)} = (x+1)(x^{2n-1}+1)$	$[\Phi_1(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n-1}} \Phi_d(x)$ $[\Phi_2(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 4n-2 \\ d \nmid 2n-1}} \Phi_d(x)$	$\tau(2n-1) + 1$

11. táblázat. $V_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$), $W_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$), $Y_n^*(x)$ és $Z_n^*(x)$ irreducibilis faktORIZÁCIÓJA

polinom	faktORIZÁCIÓ	faktorok száma	OEIS
$V_n^*(x)$ $W_n^*(x)$	$\prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 4n+2 \\ d 2n+1}} \Psi_d(x)$	$\tau(2n+1) - 1$	A095374
$V_n^*(x) - 1$ $V_n^*(x) + 1$ $W_n^*(x) - 1$ $W_n^*(x) + 1$	$\prod_{\substack{d \neq 2 \\ d n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d n+1}} \Psi_d(x)$ $\prod_{\substack{d \neq 2 \\ d 2n \\ d n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \neq 2 \\ d 2n+2 \\ d n+1}} \Psi_d(x)$ $\prod_{\substack{d \geq 2 \\ d n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d 2n+2 \\ d n+1}} \Psi_d(x)$ $\prod_{\substack{d \geq 2 \\ d n+1}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d 2n \\ d n}} \Psi_d(x)$	$\tau(n+1) + \tau(n) - 2$ $\tau(2n+2) - \tau(n+1) + \tau(2n) - \tau(n) - 1$ $\tau(2n+2) - \tau(n+1) + \tau(n) - 1$ (páratlan n) $\tau(2n+2) - \tau(n+1) + \tau(n) - 2$ (páros n) $\tau(2n) - \tau(n) + \tau(n+1) - 2$ (páratlan n) $\tau(2n) - \tau(n) + \tau(n+1) - 1$ (páros n)	-- -- -- --
$Y_n^*(x)$ $Z_n^*(x)$	$[\Psi_1(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n-1}} \Psi_d(x)$ $[\Psi_2(x)]^2 \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 4n-2 \\ d 2n-1}} \Psi_d(x)$	$\tau(2n-1)$	A099774

12. táblázat. $T_n^{**}(x) - h$ ($h = 0, \pm 2, \pm 1$), $U_n^{**}(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$) és $W_n^{**}(x) - h$ ($h = \pm 1$) nem bizonyítottan irreducibilis faktorizációja

$T_n^{**}(x)$	$= \prod_{\substack{d 4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d^{**}(x)$
$T_{2n}^{**}(x) + 2 \cdot (-1)^n$	$= \prod_{\substack{d 4n \\ d \nmid 2n}} [\Psi_d^{**}(x)]^2$
$T_{2n}^{**}(x) - 2 \cdot (-1)^n$	$= \prod_{\substack{d 2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} [\Psi_d^{**}(x)]^2$
$T_{2n}^{**}(x) + (-1)^n$	$= \prod_{\substack{d 6n \\ d \nmid 2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x)$
$T_{2n}^{**}(x) - (-1)^n$	$= \prod_{\substack{d 12n \\ d 4n \\ d \nmid 6n}} \Psi_d^{**}(x)$
$U_n^{**}(x)$	$= \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+2 \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x)$
$U_{2n}^{**}(x) + (-1)^n$	$= \prod_{\substack{d 4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d^{**}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+2 \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x)$
$U_{2n}^{**}(x) - (-1)^n$	$= \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 4n+4 \\ d \nmid 2n+2}} \Psi_d^{**}(x)$
$W_{2n}^{**}(x) + (-1)^n$	$= W_n^{**}(x) \prod_{\substack{d 4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d^{**}(x)$
$W_{2n}^{**}(x) - (-1)^n$	$= Z_{n+1}^{**}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x)$
$W_{2n+1}^{**}(x) + (-1)^n$	$= Z_{n+1}^{**}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d 2n+2 \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{**}(x)$
$W_{2n+1}^{**}(x) - (-1)^n$	$= W_n^{**}(x) \prod_{\substack{d 4n+4 \\ d \nmid 2n+2}} \Psi_d^{**}(x)$

13. táblázat. Az elsőfajú módosított Csebisev-polinomok listája

n	$T_n^*(x)$
1	x
2	$x^2 - 2$
3	$x^3 - 3x$
4	$x^4 - 4x^2 + 2$
5	$x^5 - 5x^3 + 5x$
6	$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$
7	$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$
8	$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$
9	$x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$
10	$x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25x^2 - 2$
11	$x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x$
12	$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 2$
13	$x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x$
14	$x^{14} - 14x^{12} + 77x^{10} - 210x^8 + 294x^6 - 196x^4 + 49x^2 - 2$
15	$x^{15} - 15x^{13} + 90x^{11} - 275x^9 + 450x^7 - 378x^5 + 140x^3 - 15x$
16	$x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 2$
17	$x^{17} - 17x^{15} + 119x^{13} - 442x^{11} + 935x^9 - 1122x^7 + 714x^5 - 204x^3 + 17x$
18	$x^{18} - 18x^{16} + 135x^{14} - 546x^{12} + 1287x^{10} - 1782x^8 + 1386x^6 - 540x^4 + 81x^2 - 2$
19	$x^{19} - 19x^{17} + 152x^{15} - 665x^{13} + 1729x^{11} - 2717x^9 + 2508x^7 - 1254x^5 + 285x^3 - 19x$
20	$x^{20} - 20x^{18} + 170x^{16} - 800x^{14} + 2275x^{12} - 4004x^{10} + 4290x^8 - 2640x^6 + 825x^4 - 100x^2 + 2$

14. táblázat. $T_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$T_n^*(x)$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$T_n^*(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_4(x)$	x
2	$\Psi_8(x)$	$x^2 - 2$
3	$\Psi_4(x)\Psi_{12}(x)$	$x(x^2 - 3)$
4	$\Psi_{16}(x)$	$x^4 - 4x^2 + 2$
5	$\Psi_4(x)\Psi_{20}(x)$	$x(x^4 - 5x^2 + 5)$
6	$\Psi_8(x)\Psi_{24}(x)$	$(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 1)$
7	$\Psi_4(x)\Psi_{28}(x)$	$x(x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7)$
8	$\Psi_{32}(x)$	$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$
9	$\Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{36}(x)$	$x(x^2 - 3)(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)$
10	$\Psi_8(x)\Psi_{40}(x)$	$(x^2 - 2)(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1)$
11	$\Psi_4(x)\Psi_{44}(x)$	$x(x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11)$
12	$\Psi_{16}(x)\Psi_{48}(x)$	$(x^4 - 4x^2 + 2)(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 1)$
13	$\Psi_4(x)\Psi_{52}(x)$	$x(x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 156x^6 + 182x^4 - 91x^2 + 13)$
14	$\Psi_8(x)\Psi_{56}(x)$	$(x^2 - 2)(x^{12} - 12x^{10} + 53x^8 - 104x^6 + 86x^4 - 24x^2 + 1)$
15	$\Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{20}(x)\Psi_{60}(x)$	$x(x^2 - 3)(x^4 - 5x^2 + 5)(x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 8x^2 + 1)$
16	$\Psi_{64}(x)$	$x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 2$
17	$\Psi_4(x)\Psi_{68}(x)$	$x(x^{16} - 17x^{14} + 119x^{12} - 442x^{10} + 935x^8 - 1122x^6 + 714x^4 - 204x^2 + 17)$
18	$\Psi_8(x)\Psi_{24}(x)\Psi_{72}(x)$	$(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 1)(x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 1)$
19	$\Psi_4(x)\Psi_{76}(x)$	$x(x^{18} - 19x^{16} + 152x^{14} - 665x^{12} + 1729x^{10} - 2717x^8 + 2508x^6 - 1254x^4 + 285x^2 - 19)$
20	$\Psi_{16}(x)\Psi_{80}(x)$	$(x^4 - 4x^2 + 2)(x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 659x^8 - 664x^6 + 316x^4 - 48x^2 + 1)$

15. táblázat. $T_n^*(x) - 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$T_n^*(x) - 2$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$T_n^*(x) - 2$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$[\Psi_1(x)]^2$	$x - 2$
2	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)$
3	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_3(x)]^2$	$(x - 2)(x + 1)^2$
4	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_4(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)x^2$
5	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_5(x)]^2$	$(x - 2)(x^2 + x - 1)^2$
6	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_3(x)]^2[\Psi_6(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)(x + 1)^2(x - 1)^2$
7	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_7(x)]^2$	$(x - 2)(x^3 + x^2 - 2x - 1)^2$
8	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_4(x)]^2[\Psi_8(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)x^2(x^2 - 2)^2$
9	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_3(x)]^2[\Psi_9(x)]^2$	$(x - 2)(x + 1)^2(x^3 - 3x + 1)^2$
10	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_5(x)]^2[\Psi_{10}(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)(x^2 + x - 1)^2(x^2 - x - 1)^2$
11	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_{11}(x)]^2$	$(x - 2)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)^2$
12	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_3(x)]^2[\Psi_4(x)]^2$ $[\Psi_6(x)]^2[\Psi_{12}(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)(x + 1)^2x^2(x - 1)^2(x^2 - 3)^2$
13	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_{13}(x)]^2$	$(x - 2)(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)^2$
14	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_7(x)]^2[\Psi_{14}(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)(x^3 + x^2 - 2x - 1)^2$ $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^2$
15	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_3(x)]^2[\Psi_5(x)]^2[\Psi_{15}(x)]^2$	$(x - 2)(x + 1)^2(x^2 + x - 1)^2$ $(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)^2$
16	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_4(x)]^2[\Psi_8(x)]^2[\Psi_{16}(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)x^2(x^2 - 2)^2(x^4 - 4x^2 + 2)^2$
17	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_{17}(x)]^2$	$(x - 2)(x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 +$ $+10x^3 - 10x^2 - 4x + 1)^2$
18	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_3(x)]^2[\Psi_6(x)]^2$ $[\Psi_9(x)]^2[\Psi_{18}(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)(x + 1)^2(x - 1)^2$ $(x^3 - 3x + 1)^2(x^3 - 3x - 1)^2$
19	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_{19}(x)]^2$	$(x - 2)(x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 +$ $+15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1)^2$
20	$[\Psi_1(x)]^2[\Psi_2(x)]^2[\Psi_4(x)]^2[\Psi_5(x)]^2$ $[\Psi_{10}(x)]^2[\Psi_{20}(x)]^2$	$(x - 2)(x + 2)x^2(x^2 + x - 1)^2(x^2 - x - 1)^2$ $(x^4 - 5x^2 + 5)^2$

16. táblázat. $T_n^*(x) + 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$T_n^*(x) + 2$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$T_n^*(x) + 2$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$[\Psi_2(x)]^2$	$x + 2$
2	$[\Psi_4(x)]^2$	x^2
3	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_6(x)]^2$	$(x + 2)(x - 1)^2$
4	$[\Psi_8(x)]^2$	$(x^2 - 2)^2$
5	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_{10}(x)]^2$	$(x + 2)(x^2 - x - 1)^2$
6	$[\Psi_4(x)]^2[\Psi_{12}(x)]^2$	$x^2(x^2 - 3)^2$
7	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_{14}(x)]^2$	$(x + 2)(x^3 - x^2 - 2x + 1)^2$
8	$[\Psi_{16}(x)]^2$	$(x^4 - 4x^2 + 2)^2$
9	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_6(x)]^2[\Psi_{18}(x)]^2$	$(x + 2)(x - 1)^2(x^3 - 3x - 1)^2$
10	$[\Psi_4(x)]^2[\Psi_{20}(x)]^2$	$x^2(x^4 - 5x^2 + 5)^2$
11	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_{22}(x)]^2$	$(x + 2)(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)^2$
12	$[\Psi_8(x)]^2[\Psi_{24}(x)]^2$	$(x^2 - 2)^2(x^4 - 4x^2 + 1)^2$
13	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_{26}(x)]^2$	$(x + 2)(x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1)^2$
14	$[\Psi_4(x)]^2[\Psi_{28}(x)]^2$	$x^2(x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7)^2$
15	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_6(x)]^2[\Psi_{10}(x)]^2[\Psi_{30}(x)]^2$	$(x + 2)(x - 1)^2(x^2 - x - 1)^2(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2$
16	$[\Psi_{32}(x)]^2$	$(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2)^2$
17	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_{34}(x)]^2$	$(x + 2)(x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1)^2$
18	$[\Psi_4(x)]^2[\Psi_{12}(x)]^2[\Psi_{36}(x)]^2$	$x^2(x^2 - 3)^2(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)^2$
19	$[\Psi_2(x)]^2[\Psi_{38}(x)]^2$	$(x + 2)(x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 +$ $+ 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1)^2$
20	$[\Psi_8(x)]^2[\Psi_{40}(x)]^2$	$(x^2 - 2)^2(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1)^2$

17. táblázat. $T_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$T_n^*(x) - 1$ kif. a Ψ fv-ekkel	$T_n^*(x) - 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_6(x)$	$x - 1$
2	$\Psi_{12}(x)$	$x^2 - 3$
3	$\Psi_{18}(x)$	$x^3 - 3x - 1$
4	$\Psi_{24}(x)$	$x^4 - 4x^2 + 1$
5	$\Psi_6(x)\Psi_{30}(x)$	$(x - 1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$
6	$\Psi_{36}(x)$	$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3$
7	$\Psi_6(x)\Psi_{42}(x)$	$(x - 1)(x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1)$
8	$\Psi_{48}(x)$	$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 1$
9	$\Psi_{54}(x)$	$x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1$
10	$\Psi_{12}(x)\Psi_{60}(x)$	$(x^2 - 3)(x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 8x^2 + 1)$
11	$\Psi_6(x)\Psi_{66}(x)$	$(x - 1)(x^{10} + x^9 - 10x^8 - 10x^7 + 34x^6 + 34x^5 - 43x^4 -$ $-43x^3 + 12x^2 + 12x + 1)$
12	$\Psi_{72}(x)$	$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 1$
13	$\Psi_6(x)\Psi_{78}(x)$	$(x - 1)(x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 12x^9 + 53x^8 + 53x^7 -$ $-103x^6 - 103x^5 + 79x^4 + 79x^3 - 12x^2 - 12x + 1)$
14	$\Psi_{12}(x)\Psi_{84}(x)$	$(x^2 - 3)(x^{12} - 11x^{10} + 44x^8 - 78x^6 + 60x^4 - 16x^2 + 1)$
15	$\Psi_{18}(x)\Psi_{90}(x)$	$(x^3 - 3x - 1)(x^{12} - 12x^{10} + x^9 + 54x^8 - 9x^7 - 112x^6 + 27x^5$ $+105x^4 - 31x^3 - 36x^2 + 12x + 1)$
16	$\Psi_{96}(x)$	$x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 1$
17	$\Psi_6(x)\Psi_{102}(x)$	$(x - 1)(x^{16} + x^{15} - 16x^{14} - 16x^{13} + 103x^{12} + 103x^{11} - 339x^{10} - 339x^9 +$ $+596x^8 + 596x^7 - 526x^6 - 526x^5 + 188x^4 + 188x^3 - 16x^2 - 16x + 1)$
18	$\Psi_{108}(x)$	$x^{18} - 18x^{16} + 135x^{14} - 546x^{12} + 1287x^{10} - 1782x^8 + 1386x^6 - 540x^4 + 81x^2 - 3$
19	$\Psi_6(x)\Psi_{114}(x)$	$(x - 1)(x^{18} + x^{17} - 18x^{16} - 18x^{15} + 134x^{14} + 134x^{13} - 531x^{12} -$ $-531x^{11} + 1198x^{10} + 1198x^9 - 1519x^8 - 1519x^7 +$ $+989x^6 + 989x^5 - 265x^4 - 265x^3 + 20x^2 + 20x + 1)$
20	$\Psi_{24}(x)\Psi_{120}(x)$	$(x^4 - 4x^2 + 1)(x^{16} - 16x^{14} + 105x^{12} - 364x^{10} + 714x^8 - 784x^6 +$ $+440x^4 - 96x^2 + 1)$

18. táblázat. $T_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$T_n^*(x) + 1$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$T_n^*(x) + 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_3(x)$	$x + 1$
2	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)$	$(x + 1)(x - 1)$
3	$\Psi_9(x)$	$x^3 - 3x + 1$
4	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^2 - 3)$
5	$\Psi_3(x)\Psi_{15}(x)$	$(x + 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$
6	$\Psi_9(x)\Psi_{18}(x)$	$(x^3 - 3x + 1)(x^3 - 3x - 1)$
7	$\Psi_3(x)\Psi_{21}(x)$	$(x + 1)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1)$
8	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{24}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^2 - 3)(x^4 - 4x^2 + 1)$
9	$\Psi_{27}(x)$	$x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x + 1$
10	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$
11	$\Psi_3(x)\Psi_{33}(x)$	$(x + 1)(x^{10} - x^9 - 10x^8 + 10x^7 + 34x^6 - 34x^5 - 43x^4 +$ $+ 43x^3 + 12x^2 - 12x + 1)$
12	$\Psi_9(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{36}(x)$	$(x^3 - 3x + 1)(x^3 - 3x - 1)(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)$
13	$\Psi_3(x)\Psi_{39}(x)$	$(x + 1)(x^{12} - x^{11} - 12x^{10} + 12x^9 + 53x^8 - 53x^7 -$ $- 103x^6 + 103x^5 + 79x^4 - 79x^3 - 12x^2 + 12x + 1)$
14	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{21}(x)\Psi_{42}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1)$ $(x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1)$
15	$\Psi_9(x)\Psi_{45}(x)$	$(x^3 - 3x + 1)(x^{12} - 12x^{10} - x^9 + 54x^8 + 9x^7 - 112x^6 - 27x^5 +$ $+ 105x^4 + 31x^3 - 36x^2 - 12x + 1)$
16	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{24}(x)$ $\Psi_{48}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^2 - 3)(x^4 - 4x^2 + 1)$ $(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 1)$
17	$\Psi_3(x)\Psi_{51}(x)$	$(x + 1)(x^{16} - x^{15} - 16x^{14} + 16x^{13} + 103x^{12} - 103x^{11} -$ $- 339x^{10} + 339x^9 + 596x^8 - 596x^7 - 526x^6 +$ $+ 526x^5 + 188x^4 - 188x^3 - 16x^2 + 16x + 1)$
18	$\Psi_{27}(x)\Psi_{54}(x)$	$(x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x + 1)$ $(x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1)$
19	$\Psi_3(x)\Psi_{57}(x)$	$(x + 1)(x^{18} - x^{17} - 18x^{16} + 18x^{15} + 134x^{14} - 134x^{13} - 531x^{12} +$ $+ 531x^{11} + 1198x^{10} - 1198x^9 - 1519x^8 + 1519x^7 +$ $+ 989x^6 - 989x^5 - 265x^4 + 265x^3 + 20x^2 - 20x + 1)$
20	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{15}(x)$ $\Psi_{30}(x)\Psi_{60}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^2 - 3)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$ $(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)(x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 8x^2 + 1)$

19. táblázat. A másodfajú módosított Csebisev-polinomok listája

n	$U_n^*(x)$
1	x
2	$x^2 - 1$
3	$x^3 - 2x$
4	$x^4 - 3x^2 + 1$
5	$x^5 - 4x^3 + 3x$
6	$x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$
7	$x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x$
8	$x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1$
9	$x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x$
10	$x^{10} - 9x^8 + 28x^6 - 35x^4 + 15x^2 - 1$
11	$x^{11} - 10x^9 + 36x^7 - 56x^5 + 35x^3 - 6x$
12	$x^{12} - 11x^{10} + 45x^8 - 84x^6 + 70x^4 - 21x^2 + 1$
13	$x^{13} - 12x^{11} + 55x^9 - 120x^7 + 126x^5 - 56x^3 + 7x$
14	$x^{14} - 13x^{12} + 66x^{10} - 165x^8 + 210x^6 - 126x^4 + 28x^2 - 1$
15	$x^{15} - 14x^{13} + 78x^{11} - 220x^9 + 330x^7 - 252x^5 + 84x^3 - 8x$
16	$x^{16} - 15x^{14} + 91x^{12} - 286x^{10} + 495x^8 - 462x^6 + 210x^4 - 36x^2 + 1$
17	$x^{17} - 16x^{15} + 105x^{13} - 364x^{11} + 715x^9 - 792x^7 + 462x^5 - 120x^3 + 9x$
18	$x^{18} - 17x^{16} + 120x^{14} - 455x^{12} + 1001x^{10} - 1287x^8 + 924x^6 - 330x^4 + 45x^2 - 1$
19	$x^{19} - 18x^{17} + 136x^{15} - 560x^{13} + 1365x^{11} - 2002x^9 + 1716x^7 - 792x^5 + 165x^3 - 10x$
20	$x^{20} - 19x^{18} + 153x^{16} - 680x^{14} + 1820x^{12} - 3003x^{10} + 3003x^8 - 1716x^6 + 495x^4 - 55x^2 + 1$

20. táblázat. $U_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$U_n^*(x)$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$U_n^*(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_4(x)$	x
2	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)$	$(x+1)(x-1)$
3	$\Psi_4(x)\Psi_8(x)$	$x(x^2-2)$
4	$\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)$	$(x^2+x-1)(x^2-x-1)$
5	$\Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)$	$(x+1)x(x-1)(x^2-3)$
6	$\Psi_7(x)\Psi_{14}(x)$	$(x^3+x^2-2x-1)(x^3-x^2-2x+1)$
7	$\Psi_4(x)\Psi_8(x)\Psi_{16}(x)$	$x(x^2-2)(x^4-4x^2+2)$
8	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_9(x)\Psi_{18}(x)$	$(x+1)(x-1)(x^3-3x+1)(x^3-3x-1)$
9	$\Psi_4(x)\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{20}(x)$	$x(x^2+x-1)(x^2-x-1)(x^4-5x^2+5)$
10	$\Psi_{11}(x)\Psi_{22}(x)$	$(x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1)$ $(x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1)$
11	$\Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_8(x)$ $\Psi_{12}(x)\Psi_{24}(x)$	$(x+1)x(x-1)(x^2-2)(x^2-3)(x^4-4x^2+1)$
12	$\Psi_{13}(x)\Psi_{26}(x)$	$(x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1)$ $(x^6-x^5-5x^4+4x^3+6x^2-3x-1)$
13	$\Psi_4(x)\Psi_7(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{28}(x)$	$x(x^3+x^2-2x-1)(x^3-x^2-2x+1)$ $(x^6-7x^4+14x^2-7)$
14	$\Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)$ $\Psi_{15}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x+1)(x^2+x-1)(x-1)(x^2-x-1)$ $(x^4-x^3-4x^2+4x+1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$
15	$\Psi_4(x)\Psi_8(x)\Psi_{16}(x)\Psi_{32}(x)$	$x(x^2-2)(x^4-4x^2+2)(x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2)$
16	$\Psi_{17}(x)\Psi_{34}(x)$	$(x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1)$ $(x^8-x^7-7x^6+6x^5+15x^4-10x^3-10x^2+4x+1)$
17	$\Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_9(x)\Psi_{12}(x)$ $\Psi_{18}(x)\Psi_{36}(x)$	$(x+1)x(x-1)(x^3-3x+1)(x^2-3)$ $(x^3-3x-1)(x^6-6x^4+9x^2-3)$
18	$\Psi_{19}(x)\Psi_{38}(x)$	$(x^9+x^8-8x^7-7x^6+21x^5+15x^4-20x^3-10x^2+5x+1)$ $(x^9-x^8-8x^7+7x^6+21x^5-15x^4-20x^3+10x^2+5x-1)$
19	$\Psi_4(x)\Psi_5(x)\Psi_8(x)\Psi_{10}(x)$ $\Psi_{20}(x)\Psi_{40}(x)$	$x(x^2+x-1)(x^2-2)(x^2-x-1)(x^4-5x^2+5)$ $(x^8-8x^6+19x^4-12x^2+1)$
20	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_7(x)\Psi_{14}(x)$ $\Psi_{21}(x)\Psi_{42}(x)$	$(x+1)(x-1)(x^3+x^2-2x-1)(x^3-x^2-2x+1)$ $(x^6-x^5-6x^4+6x^3+8x^2-8x+1)$ $(x^6+x^5-6x^4-6x^3+8x^2+8x+1)$

21. táblázat. $U_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$U_n^*(x) - 1$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$U_n^*(x) - 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_6(x)$	$x - 1$
2	$\Psi_8(x)$	$x^2 - 2$
3	$\Psi_3(x)\Psi_{10}(x)$	$(x + 1)(x^2 - x - 1)$
4	$[\Psi_4(x)]^2\Psi_{12}(x)$	$x^2(x^2 - 3)$
5	$\Psi_5(x)\Psi_{14}(x)$	$(x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$
6	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{16}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^4 - 4x^2 + 2)$
7	$\Psi_6(x)\Psi_7(x)\Psi_{18}(x)$	$(x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^3 - 3x - 1)$
8	$[\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{20}(x)$	$x^2(x^2 - 2)(x^4 - 5x^2 + 5)$
9	$\Psi_3(x)\Psi_9(x)\Psi_{22}(x)$	$(x + 1)(x^3 - 3x + 1)(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)$
10	$\Psi_5(x)\Psi_8(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{24}(x)$	$(x^2 + x - 1)(x^2 - 2)(x^2 - x - 1)(x^4 - 4x^2 + 1)$
11	$\Psi_{11}(x)\Psi_{26}(x)$	$(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)$ $(x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1)$
12	$\Psi_3(x)[\Psi_4(x)]^2\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{28}(x)$	$(x + 1)x^2(x - 1)(x^2 - 3)(x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7)$
13	$\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{13}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)$ $(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$
14	$\Psi_7(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{32}(x)$	$(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$ $(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2)$
15	$\Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{34}(x)$	$(x + 1)(x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)(x^8 - x^7 -$ $- 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1)$
16	$[\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{16}(x)\Psi_{36}(x)$	$x^2(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^4 - 4x^2 + 2)(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)$
17	$\Psi_{17}(x)\Psi_{38}(x)$	$(x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1)$ $(x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1)$
18	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_8(x)\Psi_9(x)$ $\Psi_{18}(x)\Psi_{40}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^2 - 2)(x^3 - 3x + 1)(x^3 - 3x - 1)$ $(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1)$
19	$\Psi_6(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{19}(x)\Psi_{42}(x)$	$(x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$ $(x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1)$ $(x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1)$
20	$[\Psi_4(x)]^2\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{20}(x)\Psi_{44}(x)$	$x^2(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)(x^4 - 5x^2 + 5)$ $(x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11)$

22. táblázat. $U_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$U_n^*(x) + 1$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$U_n^*(x) + 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_3(x)$	$x + 1$
2	$[\Psi_4(x)]^2$	x^2
3	$\Psi_5(x)\Psi_6(x)$	$(x^2 + x - 1)(x - 1)$
4	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_8(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^2 - 2)$
5	$\Psi_7(x)\Psi_{10}(x)$	$(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^2 - x - 1)$
6	$[\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{12}(x)$	$x^2(x^2 - 2)(x^2 - 3)$
7	$\Psi_3(x)\Psi_9(x)\Psi_{14}(x)$	$(x + 1)(x^3 - 3x + 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$
8	$\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{16}(x)$	$(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)(x^4 - 4x^2 + 2)$
9	$\Psi_6(x)\Psi_{11}(x)\Psi_{18}(x)$	$(x - 1)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)(x^3 - 3x - 1)$
10	$\Psi_3(x)[\Psi_4(x)]^2\Psi_6(x)$ $\Psi_{12}(x)\Psi_{20}(x)$	$(x + 1)x^2(x - 1)(x^2 - 3)(x^4 - 5x^2 + 5)$
11	$\Psi_{13}(x)\Psi_{22}(x)$	$(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)$ $(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)$
12	$\Psi_7(x)\Psi_8(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{24}(x)$	$(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2)(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^4 - 4x^2 + 1)$
13	$\Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{26}(x)$	$(x + 1)(x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$ $(x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1)$
14	$[\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{16}(x)\Psi_{28}(x)$	$x^2(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)(x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7)$
15	$\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{17}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$
16	$\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_9(x)\Psi_{18}(x)$ $\Psi_{32}(x)$	$(x + 1)(x - 1)(x^3 - 3x + 1)(x^3 - 3x - 1)$ $(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2)$
17	$\Psi_{19}(x)\Psi_{34}(x)$	$(x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1)$ $(x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1)$
18	$[\Psi_4(x)]^2\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{12}(x)$ $\Psi_{20}(x)\Psi_{36}(x)$	$x^2(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)(x^2 - 3)$ $(x^4 - 5x^2 + 5)(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)$
19	$\Psi_3(x)\Psi_7(x)\Psi_{21}(x)\Psi_{38}(x)$	$(x + 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1)$ $(x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1)$
20	$\Psi_8(x)\Psi_{11}(x)\Psi_{22}(x)\Psi_{40}(x)$	$(x^2 - 2)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1)$

23. táblázat. A harmadfajú módosított Csebisev-polinomok listája

n	$V_n^*(x)$
1	$x - 1$
2	$x^2 - x - 1$
3	$x^3 - x^2 - 2x + 1$
4	$x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
5	$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
6	$x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1$
7	$x^7 - x^6 - 6x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 4x + 1$
8	$x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1$
9	$x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1$
10	$x^{10} - x^9 - 9x^8 + 8x^7 + 28x^6 - 21x^5 - 35x^4 + 20x^3 + 15x^2 - 5x - 1$
11	$x^{11} - x^{10} - 10x^9 + 9x^8 + 36x^7 - 28x^6 - 56x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 15x^2 - 6x + 1$
12	$x^{12} - x^{11} - 11x^{10} + 10x^9 + 45x^8 - 36x^7 - 84x^6 + 56x^5 + 70x^4 - 35x^3 - 21x^2 + 6x + 1$
13	$x^{13} - x^{12} - 12x^{11} + 11x^{10} + 55x^9 - 45x^8 - 120x^7 + 84x^6 + 126x^5 - 70x^4 - 56x^3 + 21x^2 + 7x - 1$
14	$x^{14} - x^{13} - 13x^{12} + 12x^{11} + 66x^{10} - 55x^9 - 165x^8 + 120x^7 + 210x^6 - 126x^5 - 126x^4 +$ $+ 56x^3 + 28x^2 - 7x - 1$
15	$x^{15} - x^{14} - 14x^{13} + 13x^{12} + 78x^{11} - 66x^{10} - 220x^9 + 165x^8 + 330x^7 - 210x^6 - 252x^5 +$ $+ 126x^4 + 84x^3 - 28x^2 - 8x + 1$
16	$x^{16} - x^{15} - 15x^{14} + 14x^{13} + 91x^{12} - 78x^{11} - 286x^{10} + 220x^9 + 495x^8 - 330x^7 - 462x^6 + 252x^5 +$ $+ 210x^4 - 84x^3 - 36x^2 + 8x + 1$
17	$x^{17} - x^{16} - 16x^{15} + 15x^{14} + 105x^{13} - 91x^{12} - 364x^{11} + 286x^{10} + 715x^9 - 495x^8 - 792x^7 +$ $+ 462x^6 + 462x^5 - 210x^4 - 120x^3 + 36x^2 + 9x - 1$
18	$x^{18} - x^{17} - 17x^{16} + 16x^{15} + 120x^{14} - 105x^{13} - 455x^{12} + 364x^{11} + 1001x^{10} - 715x^9 - 1287x^8 +$ $+ 792x^7 + 924x^6 - 462x^5 - 330x^4 + 120x^3 + 45x^2 - 9x - 1$
19	$x^{19} - x^{18} - 18x^{17} + 17x^{16} + 136x^{15} - 120x^{14} - 560x^{13} + 455x^{12} + 1365x^{11} - 1001x^{10} - 2002x^9 +$ $+ 1287x^8 + 1716x^7 - 924x^6 - 792x^5 + 330x^4 + 165x^3 - 45x^2 - 10x + 1$
20	$x^{20} - x^{19} - 19x^{18} + 18x^{17} + 153x^{16} - 136x^{15} - 680x^{14} + 560x^{13} + 1820x^{12} - 1365x^{11} - 3003x^{10} +$ $+ 2002x^9 + 3003x^8 - 1716x^7 - 1716x^6 + 792x^5 + 495x^4 - 165x^3 - 55x^2 + 10x + 1$

24. táblázat. $V_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$V_n^*(x)$ kif. a Ψ függvényekkel	$V_n^*(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_6(x)$	$x - 1$
2	$\Psi_{10}(x)$	$x^2 - x - 1$
3	$\Psi_{14}(x)$	$x^3 - x^2 - 2x + 1$
4	$\Psi_6(x)\Psi_{18}(x)$	$(x - 1)(x^3 - 3x - 1)$
5	$\Psi_{22}(x)$	$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
6	$\Psi_{26}(x)$	$x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1$
7	$\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$
8	$\Psi_{34}(x)$	$x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1$
9	$\Psi_{38}(x)$	$x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1$
10	$\Psi_6(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{42}(x)$	$(x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1)$
11	$\Psi_{46}(x)$	$x^{11} - x^{10} - 10x^9 + 9x^8 + 36x^7 - 28x^6 - 56x^5 + 35x^4 + 35x^3 -$ $-15x^2 - 6x + 1$
12	$\Psi_{10}(x)\Psi_{50}(x)$	$(x^2 - x - 1)(x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - x^5 - 50x^4 + 5x^3 + 25x^2 -$ $-5x - 1)$
13	$\Psi_6(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{54}(x)$	$(x - 1)(x^3 - 3x - 1)(x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1)$
14	$\Psi_{58}(x)$	$x^{14} - x^{13} - 13x^{12} + 12x^{11} + 66x^{10} - 55x^9 - 165x^8 + 120x^7 +$ $+210x^6 - 126x^5 - 126x^4 + 56x^3 + 28x^2 - 7x - 1$
15	$\Psi_{62}(x)$	$x^{15} - x^{14} - 14x^{13} + 13x^{12} + 78x^{11} - 66x^{10} - 220x^9 + 165x^8 +$ $+330x^7 - 210x^6 - 252x^5 + 126x^4 + 84x^3 - 28x^2 - 8x + 1$
16	$\Psi_6(x)\Psi_{22}(x)\Psi_{66}(x)$	$(x - 1)(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)(x^{10} + x^9 - 10x^8 -$ $-10x^7 + 34x^6 + 34x^5 - 43x^4 - 43x^3 + 12x^2 + 12x + 1)$
17	$\Psi_{10}(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{70}(x)$	$(x^2 - x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 11x^9 +$ $+54x^8 + 43x^7 - 113x^6 - 71x^5 + 110x^4 +$ $+46x^3 - 40x^2 - 8x + 1)$
18	$\Psi_{74}(x)$	$x^{18} - x^{17} - 17x^{16} + 16x^{15} + 120x^{14} - 105x^{13} - 455x^{12} +$ $+364x^{11} + 1001x^{10} - 715x^9 - 1287x^8 + 792x^7 +$ $+924x^6 - 462x^5 - 330x^4 + 120x^3 + 45x^2 - 9x - 1$
19	$\Psi_6(x)\Psi_{26}(x)\Psi_{78}(x)$	$(x - 1)(x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1)(x^{12} + x^{11} -$ $-12x^{10} - 12x^9 + 53x^8 + 53x^7 - 103x^6 - 103x^5 +$ $+79x^4 + 79x^3 - 12x^2 - 12x + 1)$
20	$\Psi_{82}(x)$	$x^{20} - x^{19} - 19x^{18} + 18x^{17} + 153x^{16} - 136x^{15} - 680x^{14} +$ $+560x^{13} + 1820x^{12} - 1365x^{11} - 3003x^{10} + 2002x^9 +$ $+3003x^8 - 1716x^7 - 1716x^6 + 792x^5 + 495x^4 - 165x^3 -$ $-55x^2 + 10x + 1$

25. táblázat. $V_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$V_n^*(x) - 1$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$V_n^*(x) - 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$[\Psi_1(x)]^2$	$x - 2$
2	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x)$	$(x - 2)(x + 1)$
3	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_4(x)$	$(x - 2)(x + 1)x$
4	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_5(x)$	$(x - 2)x(x^2 + x - 1)$
5	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_5(x) \Psi_6(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1)(x - 1)$
6	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_6(x) \Psi_7(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)$
7	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_7(x) \Psi_8(x)$	$(x - 2)x(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2)$
8	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_4(x) \Psi_8(x) \Psi_9(x)$	$(x - 2)(x + 1)x(x^2 - 2)(x^3 - 3x + 1)$
9	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_5(x) \Psi_9(x) \Psi_{10}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1)(x^3 - 3x + 1)(x^2 - x - 1)$
10	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_5(x) \Psi_{10}(x) \Psi_{11}(x)$	$(x - 2)(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)$
11	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_4(x) \Psi_6(x)$ $\Psi_{11}(x) \Psi_{12}(x)$	$(x - 2)(x + 1)x(x - 1)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3)$
12	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_4(x) \Psi_6(x)$ $\Psi_{12}(x) \Psi_{13}(x)$	$(x - 2)(x + 1)x(x - 1)(x^2 - 3)$ $(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)$
13	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_7(x) \Psi_{13}(x) \Psi_{14}(x)$	$(x - 2)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 +$ $+ 6x^2 + 3x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$
14	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_5(x) \Psi_7(x) \Psi_{14}(x)$ $\Psi_{15}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)$ $(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$
15	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_4(x) \Psi_5(x) \Psi_8(x)$ $\Psi_{15}(x) \Psi_{16}(x)$	$(x - 2)(x + 1)x(x^2 + x - 1)(x^2 - 2)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$ $(x^4 - 4x^2 + 2)$
16	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_8(x) \Psi_{16}(x)$ $\Psi_{17}(x)$	$(x - 2)x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)$ $(x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1)$
17	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_6(x) \Psi_9(x) \Psi_{17}(x)$ $\Psi_{18}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x - 1)(x^3 - 3x + 1)(x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 +$ $+ 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1)(x^3 - 3x - 1)$
18	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_6(x) \Psi_9(x) \Psi_{18}(x)$ $\Psi_{19}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x - 1)(x^3 - 3x + 1)(x^3 - 3x - 1)(x^9 + x^8 -$ $- 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1)$
19	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_5(x) \Psi_{10}(x)$ $\Psi_{19}(x) \Psi_{20}(x)$	$(x - 2)x(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)(x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 +$ $+ 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1)(x^4 - 5x^2 + 5)$
20	$[\Psi_1(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_4(x) \Psi_5(x) \Psi_7(x)$ $\Psi_{10}(x) \Psi_{20}(x) \Psi_{21}(x)$	$(x - 2)(x + 1)x(x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^2 - x - 1)$ $(x^4 - 5x^2 + 5)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1)$

26. táblázat. $V_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$V_n^*(x) + 1$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$V_n^*(x) + 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_4(x)$	x
2	$\Psi_4(x)\Psi_6(x)$	$x(x-1)$
3	$\Psi_6(x)\Psi_8(x)$	$(x-1)(x^2-2)$
4	$\Psi_8(x)\Psi_{10}(x)$	$(x^2-2)(x^2-x-1)$
5	$\Psi_4(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{12}(x)$	$x(x^2-x-1)(x^2-3)$
6	$\Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{14}(x)$	$x(x^2-3)(x^3-x^2-2x+1)$
7	$\Psi_{14}(x)\Psi_{16}(x)$	$(x^3-x^2-2x+1)(x^4-4x^2+2)$
8	$\Psi_6(x)\Psi_{16}(x)\Psi_{18}(x)$	$(x-1)(x^4-4x^2+2)(x^3-3x-1)$
9	$\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{20}(x)$	$x(x-1)(x^3-3x-1)(x^4-5x^2+5)$
10	$\Psi_4(x)\Psi_{20}(x)\Psi_{22}(x)$	$x(x^4-5x^2+5)(x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1)$
11	$\Psi_8(x)\Psi_{22}(x)\Psi_{24}(x)$	$(x^2-2)(x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1)(x^4-4x^2+1)$
12	$\Psi_8(x)\Psi_{24}(x)\Psi_{26}(x)$	$(x^2-2)(x^4-4x^2+1)(x^6-x^5-5x^4+4x^3+6x^2-3x-1)$
13	$\Psi_4(x)\Psi_{26}(x)\Psi_{28}(x)$	$x(x^6-x^5-5x^4+4x^3+6x^2-3x-1)(x^6-7x^4+14x^2-7)$
14	$\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{28}(x)$	$x(x-1)(x^2-x-1)(x^6-7x^4+14x^2-7)$
	$\Psi_{30}(x)$	$(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$
15	$\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x-1)(x^2-x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$
	$\Psi_{32}(x)$	$(x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2)$
16	$\Psi_{32}(x)\Psi_{34}(x)$	$(x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2)$
		$(x^8-x^7-7x^6+6x^5+15x^4-10x^3-10x^2+4x+1)$
17	$\Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{34}(x)$	$x(x^2-3)(x^8-x^7-7x^6+6x^5+15x^4-10x^3-10x^2+4x+1)$
	$\Psi_{36}(x)$	$(x^6-6x^4+9x^2-3)$
18	$\Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{36}(x)$	$x(x^2-3)(x^6-6x^4+9x^2-3)$
	$\Psi_{38}(x)$	$(x^9-x^8-8x^7+7x^6+21x^5-15x^4-20x^3+10x^2+5x-1)$
19	$\Psi_8(x)\Psi_{38}(x)\Psi_{40}(x)$	$(x^2-2)(x^9-x^8-8x^7+7x^6+21x^5-15x^4-20x^3+10x^2+5x-1)(x^8-8x^6+19x^4-12x^2+1)$
20	$\Psi_6(x)\Psi_8(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{40}(x)$	$(x-1)(x^2-2)(x^3-x^2-2x+1)(x^8-8x^6+19x^4-12x^2+1)$
	$\Psi_{42}(x)$	$(x^6+x^5-6x^4-6x^3+8x^2+8x+1)$

27. táblázat. A negyedfajú módosított Csebisev-polinomok listája

n	$W_n^*(x)$
1	$x + 1$
2	$x^2 + x - 1$
3	$x^3 + x^2 - 2x - 1$
4	$x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$
5	$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
6	$x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1$
7	$x^7 + x^6 - 6x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 4x - 1$
8	$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1$
9	$x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1$
10	$x^{10} + x^9 - 9x^8 - 8x^7 + 28x^6 + 21x^5 - 35x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 5x - 1$
11	$x^{11} + x^{10} - 10x^9 - 9x^8 + 36x^7 + 28x^6 - 56x^5 - 35x^4 + 35x^3 + 15x^2 - 6x - 1$
12	$x^{12} + x^{11} - 11x^{10} - 10x^9 + 45x^8 + 36x^7 - 84x^6 - 56x^5 + 70x^4 + 35x^3 - 21x^2 - 6x + 1$
13	$x^{13} + x^{12} - 12x^{11} - 11x^{10} + 55x^9 + 45x^8 - 120x^7 - 84x^6 + 126x^5 + 70x^4 - 56x^3 - 21x^2 + 7x + 1$
14	$x^{14} + x^{13} - 13x^{12} - 12x^{11} + 66x^{10} + 55x^9 - 165x^8 - 120x^7 + 210x^6 + 126x^5 - 126x^4 -$ $-56x^3 + 28x^2 + 7x - 1$
15	$x^{15} + x^{14} - 14x^{13} - 13x^{12} + 78x^{11} + 66x^{10} - 220x^9 - 165x^8 + 330x^7 + 210x^6 - 252x^5 -$ $-126x^4 + 84x^3 + 28x^2 - 8x - 1$
16	$x^{16} + x^{15} - 15x^{14} - 14x^{13} + 91x^{12} + 78x^{11} - 286x^{10} - 220x^9 + 495x^8 + 330x^7 - 462x^6 - 252x^5 +$ $+210x^4 + 84x^3 - 36x^2 - 8x + 1$
17	$x^{17} + x^{16} - 16x^{15} - 15x^{14} + 105x^{13} + 91x^{12} - 364x^{11} - 286x^{10} + 715x^9 + 495x^8 - 792x^7 -$ $-462x^6 + 462x^5 + 210x^4 - 120x^3 - 36x^2 + 9x + 1$
18	$x^{18} + x^{17} - 17x^{16} - 16x^{15} + 120x^{14} + 105x^{13} - 455x^{12} - 364x^{11} + 1001x^{10} + 715x^9 - 1287x^8 -$ $-792x^7 + 924x^6 + 462x^5 - 330x^4 - 120x^3 + 45x^2 + 9x - 1$
19	$x^{19} + x^{18} - 18x^{17} - 17x^{16} + 136x^{15} + 120x^{14} - 560x^{13} - 455x^{12} + 1365x^{11} + 1001x^{10} - 2002x^9 -$ $-1287x^8 + 1716x^7 + 924x^6 - 792x^5 - 330x^4 + 165x^3 + 45x^2 - 10x - 1$
20	$x^{20} + x^{19} - 19x^{18} - 18x^{17} + 153x^{16} + 136x^{15} - 680x^{14} - 560x^{13} + 1820x^{12} + 1365x^{11} - 3003x^{10} -$ $-2002x^9 + 3003x^8 + 1716x^7 - 1716x^6 - 792x^5 + 495x^4 + 165x^3 - 55x^2 - 10x + 1$

28. táblázat. $W_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$W_n^*(x)$ kif. a Ψ függvényekkel	$W_n^*(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_3(x)$	$x + 1$
2	$\Psi_5(x)$	$x^2 + x - 1$
3	$\Psi_7(x)$	$x^3 + x^2 - 2x - 1$
4	$\Psi_3(x)\Psi_9(x)$	$(x + 1)(x^3 - 3x + 1)$
5	$\Psi_{11}(x)$	$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
6	$\Psi_{13}(x)$	$x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1$
7	$\Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_{15}(x)$	$(x + 1)(x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$
8	$\Psi_{17}(x)$	$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1$
9	$\Psi_{19}(x)$	$x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1$
10	$\Psi_3(x)\Psi_7(x)\Psi_{21}(x)$	$(x + 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1)$
11	$\Psi_{23}(x)$	$x^{11} + x^{10} - 10x^9 - 9x^8 + 36x^7 + 28x^6 - 56x^5 - 35x^4 + 35x^3 +$ $+15x^2 - 6x - 1$
12	$\Psi_5(x)\Psi_{25}(x)$	$(x^2 + x - 1)(x^{10} - 10x^8 + 35x^6 + x^5 - 50x^4 - 5x^3 + 25x^2 +$ $+5x - 1)$
13	$\Psi_3(x)\Psi_9(x)\Psi_{27}(x)$	$(x + 1)(x^3 - 3x + 1)(x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x + 1)$
14	$\Psi_{29}(x)$	$x^{14} + x^{13} - 13x^{12} - 12x^{11} + 66x^{10} + 55x^9 - 165x^8 - 120x^7 +$ $+210x^6 + 126x^5 - 126x^4 - 56x^3 + 28x^2 + 7x - 1$
15	$\Psi_{31}(x)$	$x^{15} + x^{14} - 14x^{13} - 13x^{12} + 78x^{11} + 66x^{10} - 220x^9 - 165x^8 +$ $+330x^7 + 210x^6 - 252x^5 - 126x^4 + 84x^3 + 28x^2 - 8x - 1$
16	$\Psi_3(x)\Psi_{11}(x)\Psi_{33}(x)$	$(x + 1)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)(x^{10} - x^9 - 10x^8 +$ $+10x^7 + 34x^6 - 34x^5 - 43x^4 + 43x^3 + 12x^2 - 12x + 1)$
17	$\Psi_5(x)\Psi_7(x)\Psi_{35}(x)$	$(x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^{12} - x^{11} - 12x^{10} + 11x^9 +$ $+54x^8 - 43x^7 - 113x^6 + 71x^5 + 110x^4 -$ $-46x^3 - 40x^2 + 8x + 1)$
18	$\Psi_{37}(x)$	$x^{18} + x^{17} - 17x^{16} - 16x^{15} + 120x^{14} + 105x^{13} - 455x^{12} -$ $-364x^{11} + 1001x^{10} + 715x^9 - 1287x^8 - 792x^7 +$ $+924x^6 + 462x^5 - 330x^4 - 120x^3 + 45x^2 + 9x - 1$
19	$\Psi_3(x)\Psi_{13}(x)\Psi_{39}(x)$	$(x + 1)(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)(x^{12} - x^{11} -$ $-12x^{10} + 12x^9 + 53x^8 - 53x^7 - 103x^6 + 103x^5 +$ $+79x^4 - 79x^3 - 12x^2 + 12x + 1)$
20	$\Psi_{41}(x)$	$x^{20} + x^{19} - 19x^{18} - 18x^{17} + 153x^{16} + 136x^{15} - 680x^{14} -$ $-560x^{13} + 1820x^{12} + 1365x^{11} - 3003x^{10} - 2002x^9 +$ $+3003x^8 + 1716x^7 - 1716x^6 - 792x^5 + 495x^4 + 165x^3 -$ $-55x^2 - 10x + 1$

29. táblázat. $W_n^*(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$W_n^*(x) - 1$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$W_n^*(x) - 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_4(x)$	x
2	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_6(x)$	$(x+2)(x-1)$
3	$\Psi_3(x) \Psi_8(x)$	$(x+1)(x^2-2)$
4	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_{10}(x)$	$(x+2)x(x^2-x-1)$
5	$\Psi_4(x) \Psi_5(x) \Psi_{12}(x)$	$x(x^2+x-1)(x^2-3)$
6	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_6(x) \Psi_{14}(x)$	$(x+2)(x+1)(x-1)(x^3-x^2-2x+1)$
7	$\Psi_7(x) \Psi_{16}(x)$	$(x^3+x^2-2x-1)(x^4-4x^2+2)$
8	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_6(x) \Psi_8(x) \Psi_{18}(x)$	$(x+2)x(x-1)(x^2-2)(x^3-3x-1)$
9	$\Psi_3(x) \Psi_4(x) \Psi_9(x) \Psi_{20}(x)$	$(x+1)x(x^3-3x+1)(x^4-5x^2+5)$
10	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_5(x) \Psi_{10}(x) \Psi_{22}(x)$	$(x+2)(x^2+x-1)(x^2-x-1)(x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1)$
11	$\Psi_8(x) \Psi_{11}(x) \Psi_{24}(x)$	$(x^2-2)(x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1)(x^4-4x^2+1)$
12	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_4(x) \Psi_6(x) \Psi_{12}(x) \Psi_{26}(x)$	$(x+2)(x+1)x(x-1)(x^2-3)(x^6-x^5-5x^4+4x^3+6x^2-3x-1)$
13	$\Psi_4(x) \Psi_{13}(x) \Psi_{28}(x)$	$x(x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1)(x^6-7x^4+14x^2-7)$
14	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_6(x) \Psi_7(x) \Psi_{10}(x) \Psi_{14}(x) \Psi_{30}(x)$	$(x+2)(x-1)(x^3+x^2-2x-1)(x^2-x-1)(x^3-x^2-2x+1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$
15	$\Psi_3(x) \Psi_5(x) \Psi_{15}(x) \Psi_{32}(x)$	$(x+1)(x^2+x-1)(x^4-x^3-4x^2+4x+1)(x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2)$
16	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_8(x) \Psi_{16}(x) \Psi_{34}(x)$	$(x+2)x(x^2-2)(x^4-4x^2+2)(x^8-x^7-7x^6+6x^5+15x^4-10x^3-10x^2+4x+1)$
17	$\Psi_4(x) \Psi_{12}(x) \Psi_{17}(x) \Psi_{36}(x)$	$x(x^2-3)(x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1)(x^6-6x^4+9x^2-3)$
18	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_3(x) \Psi_6(x) \Psi_9(x) \Psi_{18}(x) \Psi_{38}(x)$	$(x+2)(x+1)(x-1)(x^3-3x+1)(x^3-3x-1)(x^9-x^8-8x^7+7x^6+21x^5-15x^4-20x^3+10x^2+5x-1)$
19	$\Psi_8(x) \Psi_{19}(x) \Psi_{40}(x)$	$(x^2-2)(x^9+x^8-8x^7-7x^6+21x^5+15x^4-20x^3-10x^2+5x+1)(x^8-8x^6+19x^4-12x^2+1)$
20	$[\Psi_2(x)]^2 \Psi_4(x) \Psi_5(x) \Psi_6(x) \Psi_{10}(x) \Psi_{14}(x) \Psi_{20}(x) \Psi_{42}(x)$	$(x+2)x(x^2+x-1)(x-1)(x^2-x-1)(x^3-x^2-2x+1)(x^4-5x^2+5)(x^6+x^5-6x^4-6x^3+8x^2+8x+1)$

30. táblázat. $W_n^*(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$W_n^*(x) + 1$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$W_n^*(x) + 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$[\Psi_2(x)]^2$	$x + 2$
2	$\Psi_3(x)\Psi_4(x)$	$(x + 1)x$
3	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_4(x)\Psi_6(x)$	$(x + 2)x(x - 1)$
4	$\Psi_5(x)\Psi_8(x)$	$(x^2 + x - 1)(x^2 - 2)$
5	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)$	$(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x^2 - x - 1)$
6	$\Psi_4(x)\Psi_7(x)\Psi_{12}(x)$	$x(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^2 - 3)$
7	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_4(x)\Psi_8(x)\Psi_{14}(x)$	$(x + 2)x(x^2 - 2)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$
8	$\Psi_3(x)\Psi_9(x)\Psi_{16}(x)$	$(x + 1)(x^3 - 3x + 1)(x^4 - 4x^2 + 2)$
9	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_5(x)\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{18}(x)$	$(x + 2)(x^2 + x - 1)(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^3 - 3x - 1)$
10	$\Psi_4(x)\Psi_{11}(x)\Psi_{20}(x)$	$x(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)(x^4 - 5x^2 + 5)$
11	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)$ $\Psi_{22}(x)$	$(x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x^2 - 3)$ $(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)$
12	$\Psi_8(x)\Psi_{13}(x)\Psi_{24}(x)$	$(x^2 - 2)(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)(x^4 - 4x^2 + 1)$
13	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_7(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{26}(x)$	$(x + 2)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$ $(x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1)$
14	$\Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_5(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{28}(x)$	$(x + 1)x(x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$ $(x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7)$
15	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_8(x)\Psi_{10}(x)$ $\Psi_{16}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x + 2)x(x - 1)(x^2 - 2)(x^2 - x - 1)(x^4 - 4x^2 + 2)$ $(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$
16	$\Psi_{17}(x)\Psi_{32}(x)$	$(x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1)$ $(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2)$
17	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_9(x)\Psi_{18}(x)$ $\Psi_{34}(x)$	$(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x^3 - 3x + 1)(x^3 - 3x - 1)$ $(x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1)$
18	$\Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{19}(x)\Psi_{36}(x)$	$x(x^2 - 3)(x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 -$ $-10x^2 + 5x + 1)(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)$
19	$[\Psi_2(x)]^2\Psi_4(x)\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{20}(x)$ $\Psi_{38}(x)$	$(x + 2)x(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)(x^4 - 5x^2 + 5)(x^9 - x^8 -$ $-8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1)$
20	$\Psi_3(x)\Psi_7(x)\Psi_8(x)\Psi_{21}(x)\Psi_{40}(x)$	$(x + 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 +$ $+8x^2 - 8x + 1)(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1)$

31. táblázat. Az ötödfajú módosított Csebisev-polinomok listája

n	$Y_n^*(x)$
1	$x - 2$
2	$x^2 - x - 2$
3	$x^3 - x^2 - 3x + 2$
4	$x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2$
5	$x^5 - x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x - 2$
6	$x^6 - x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 5x - 2$
7	$x^7 - x^6 - 7x^5 + 6x^4 + 14x^3 - 9x^2 - 7x + 2$
8	$x^8 - x^7 - 8x^6 + 7x^5 + 20x^4 - 14x^3 - 16x^2 + 7x + 2$
9	$x^9 - x^8 - 9x^7 + 8x^6 + 27x^5 - 20x^4 - 30x^3 + 16x^2 + 9x - 2$
10	$x^{10} - x^9 - 10x^8 + 9x^7 + 35x^6 - 27x^5 - 50x^4 + 30x^3 + 25x^2 - 9x - 2$
11	$x^{11} - x^{10} - 11x^9 + 10x^8 + 44x^7 - 35x^6 - 77x^5 + 50x^4 + 55x^3 - 25x^2 - 11x + 2$
12	$x^{12} - x^{11} - 12x^{10} + 11x^9 + 54x^8 - 44x^7 - 112x^6 + 77x^5 + 105x^4 - 55x^3 - 36x^2 + 11x + 2$
13	$x^{13} - x^{12} - 13x^{11} + 12x^{10} + 65x^9 - 54x^8 - 156x^7 + 112x^6 + 182x^5 - 105x^4 - 91x^3 +$ $+ 36x^2 + 13x - 2$
14	$x^{14} - x^{13} - 14x^{12} + 13x^{11} + 77x^{10} - 65x^9 - 210x^8 + 156x^7 + 294x^6 - 182x^5 - 196x^4 +$ $+ 91x^3 + 49x^2 - 13x - 2$
15	$x^{15} - x^{14} - 15x^{13} + 14x^{12} + 90x^{11} - 77x^{10} - 275x^9 + 210x^8 + 450x^7 - 294x^6 - 378x^5 +$ $+ 196x^4 + 140x^3 - 49x^2 - 15x + 2$
16	$x^{16} - x^{15} - 16x^{14} + 15x^{13} + 104x^{12} - 90x^{11} - 352x^{10} + 275x^9 + 660x^8 - 450x^7 - 672x^6 +$ $+ 378x^5 + 336x^4 - 140x^3 - 64x^2 + 15x + 2$
17	$x^{17} - x^{16} - 17x^{15} + 16x^{14} + 119x^{13} - 104x^{12} - 442x^{11} + 352x^{10} + 935x^9 - 660x^8 -$ $- 1122x^7 + 672x^6 + 714x^5 - 336x^4 - 204x^3 + 64x^2 + 17x - 2$
18	$x^{18} - x^{17} - 18x^{16} + 17x^{15} + 135x^{14} - 119x^{13} - 546x^{12} + 442x^{11} + 1287x^{10} - 935x^9 -$ $- 1782x^8 + 1122x^7 + 1386x^6 - 714x^5 - 540x^4 + 204x^3 + 81x^2 - 17x - 2$
19	$x^{19} - x^{18} - 19x^{17} + 18x^{16} + 152x^{15} - 135x^{14} - 665x^{13} + 546x^{12} + 1729x^{11} - 1287x^{10} -$ $- 2717x^9 + 1782x^8 + 2508x^7 - 1386x^6 - 1254x^5 + 540x^4 + 285x^3 - 81x^2 - 19x + 2$
20	$x^{20} - x^{19} - 20x^{18} + 19x^{17} + 170x^{16} - 152x^{15} - 800x^{14} + 665x^{13} + 2275x^{12} - 1729x^{11} -$ $- 4004x^{10} + 2717x^9 + 4290x^8 - 2508x^7 - 2640x^6 + 1254x^5 + 825x^4 - 285x^3 -$ $- 100x^2 + 19x + 2$

32. táblázat. $Y_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$Y_n^*(x)$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$Y_n^*(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$[\Psi_1]^2(x)$	$x - 2$
2	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_3(x)$	$(x - 2)(x + 1)$
3	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_5(x)$	$(x - 2)(x^2 + x - 1)$
4	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_7(x)$	$(x - 2)(x^3 + x^2 - 2x - 1)$
5	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_3(x)\Psi_9(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^3 - 3x + 1)$
6	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{11}(x)$	$(x - 2)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)$
7	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{13}(x)$	$(x - 2)(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)$
8	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_{15}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$
9	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{17}(x)$	$(x - 2)(x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1)$
10	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{19}(x)$	$(x - 2)(x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 -$ $-10x^2 + 5x + 1)$
11	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_3(x)\Psi_7(x)\Psi_{21}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 +$ $+8x^2 - 8x + 1)$
12	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{23}(x)$	$(x - 2)(x^{11} + x^{10} - 10x^9 - 9x^8 + 36x^7 + 28x^6 - 56x^5 - 35x^4 +$ $+35x^3 + 15x^2 - 6x - 1)$
13	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_5(x)\Psi_{25}(x)$	$(x - 2)(x^2 + x - 1)(x^{10} - 10x^8 + 35x^6 + x^5 - 50x^4 - 5x^3 +$ $+25x^2 + 5x - 1)$
14	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_3(x)\Psi_9(x)\Psi_{27}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^3 - 3x + 1)(x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x + 1)$
15	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{29}(x)$	$(x - 2)(x^{14} + x^{13} - 13x^{12} - 12x^{11} + 66x^{10} + 55x^9 - 165x^8 -$ $-120x^7 + 210x^6 + 126x^5 - 126x^4 - 56x^3 + 28x^2 + 7x - 1)$
16	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{31}(x)$	$(x - 2)(x^{15} + x^{14} - 14x^{13} - 13x^{12} + 78x^{11} + 66x^{10} - 220x^9 -$ $-165x^8 + 330x^7 + 210x^6 - 252x^5 - 126x^4 + 84x^3 +$ $+28x^2 - 8x - 1)$
17	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_3(x)\Psi_{11}(x)\Psi_{33}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)(x^{10} - x^9 - 10x^8 +$ $+10x^7 + 34x^6 - 34x^5 - 43x^4 + 43x^3 + 12x^2 - 12x + 1)$
18	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_5(x)\Psi_7(x)\Psi_{35}(x)$	$(x - 2)(x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^{12} - x^{11} - 12x^{10} +$ $+11x^9 + 54x^8 - 43x^7 - 113x^6 + 71x^5 + 110x^4 -$ $-46x^3 - 40x^2 + 8x + 1)$
19	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_{37}(x)$	$(x - 2)(x^{18} + x^{17} - 17x^{16} - 16x^{15} + 120x^{14} + 105x^{13} - 455x^{12} -$ $-364x^{11} + 1001x^{10} + 715x^9 - 1287x^8 - 792x^7 +$ $+924x^6 + 462x^5 - 330x^4 - 120x^3 + 45x^2 + 9x - 1)$
20	$[\Psi_1]^2(x)\Psi_3(x)\Psi_{13}(x)\Psi_{39}(x)$	$(x - 2)(x + 1)(x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1)(x^{12} - x^{11} -$ $-12x^{10} + 12x^9 + 53x^8 - 53x^7 - 103x^6 + 103x^5 +$ $+79x^4 - 79x^3 - 12x^2 + 12x + 1)$

33. táblázat. A hatodfajú módosított Csebisev-polinomok listája

n	$Z_n^*(x)$
1	$x + 2$
2	$x^2 + x - 2$
3	$x^3 + x^2 - 3x - 2$
4	$x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
5	$x^5 + x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x + 2$
6	$x^6 + x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 9x^2 + 5x - 2$
7	$x^7 + x^6 - 7x^5 - 6x^4 + 14x^3 + 9x^2 - 7x - 2$
8	$x^8 + x^7 - 8x^6 - 7x^5 + 20x^4 + 14x^3 - 16x^2 - 7x + 2$
9	$x^9 + x^8 - 9x^7 - 8x^6 + 27x^5 + 20x^4 - 30x^3 - 16x^2 + 9x + 2$
10	$x^{10} + x^9 - 10x^8 - 9x^7 + 35x^6 + 27x^5 - 50x^4 - 30x^3 + 25x^2 + 9x - 2$
11	$x^{11} + x^{10} - 11x^9 - 10x^8 + 44x^7 + 35x^6 - 77x^5 - 50x^4 + 55x^3 + 25x^2 - 11x - 2$
12	$x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 11x^9 + 54x^8 + 44x^7 - 112x^6 - 77x^5 + 105x^4 + 55x^3 - 36x^2 - 11x + 2$
13	$x^{13} + x^{12} - 13x^{11} - 12x^{10} + 65x^9 + 54x^8 - 156x^7 - 112x^6 + 182x^5 + 105x^4 - 91x^3 -$ $-36x^2 + 13x + 2$
14	$x^{14} + x^{13} - 14x^{12} - 13x^{11} + 77x^{10} + 65x^9 - 210x^8 - 156x^7 + 294x^6 + 182x^5 - 196x^4 -$ $-91x^3 + 49x^2 + 13x - 2$
15	$x^{15} + x^{14} - 15x^{13} - 14x^{12} + 90x^{11} + 77x^{10} - 275x^9 - 210x^8 + 450x^7 + 294x^6 - 378x^5 -$ $-196x^4 + 140x^3 + 49x^2 - 15x - 2$
16	$x^{16} + x^{15} - 16x^{14} - 15x^{13} + 104x^{12} + 90x^{11} - 352x^{10} - 275x^9 + 660x^8 + 450x^7 - 672x^6 -$ $-378x^5 + 336x^4 + 140x^3 - 64x^2 - 15x + 2$
17	$x^{17} + x^{16} - 17x^{15} - 16x^{14} + 119x^{13} + 104x^{12} - 442x^{11} - 352x^{10} + 935x^9 + 660x^8 -$ $-1122x^7 - 672x^6 + 714x^5 + 336x^4 - 204x^3 - 64x^2 + 17x + 2$
18	$x^{18} + x^{17} - 18x^{16} - 17x^{15} + 135x^{14} + 119x^{13} - 546x^{12} - 442x^{11} + 1287x^{10} + 935x^9 -$ $-1782x^8 - 1122x^7 + 1386x^6 + 714x^5 - 540x^4 - 204x^3 + 81x^2 + 17x - 2$
19	$x^{19} + x^{18} - 19x^{17} - 18x^{16} + 152x^{15} + 135x^{14} - 665x^{13} - 546x^{12} + 1729x^{11} + 1287x^{10} -$ $-2717x^9 - 1782x^8 + 2508x^7 + 1386x^6 - 1254x^5 - 540x^4 + 285x^3 + 81x^2 - 19x - 2$
20	$x^{20} + x^{19} - 20x^{18} - 19x^{17} + 170x^{16} + 152x^{15} - 800x^{14} - 665x^{13} + 2275x^{12} + 1729x^{11} -$ $-4004x^{10} - 2717x^9 + 4290x^8 + 2508x^7 - 2640x^6 - 1254x^5 + 825x^4 + 285x^3 -$ $-100x^2 - 19x + 2$

34. táblázat. $Z_n^*(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$Z_n^*(x)$ kifejezése a Ψ függvényekkel	$Z_n^*(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$[\Psi_2]^2(x)$	$x + 2$
2	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_6(x)$	$(x + 2)(x - 1)$
3	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{10}(x)$	$(x + 2)(x^2 - x - 1)$
4	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{14}(x)$	$(x + 2)(x^3 - x^2 - 2x + 1)$
5	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_6(x)\Psi_{18}(x)$	$(x + 2)(x - 1)(x^3 - 3x - 1)$
6	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{22}(x)$	$(x + 2)(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)$
7	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{26}(x)$	$(x + 2)(x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1)$
8	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{30}(x)$	$(x + 2)(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$
9	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{34}(x)$	$(x + 2)(x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1)$
10	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{38}(x)$	$(x + 2)(x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1)$
11	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_6(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{42}(x)$	$(x + 2)(x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1)$
12	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{46}(x)$	$(x + 2)(x^{11} - x^{10} - 10x^9 + 9x^8 + 36x^7 - 28x^6 - 56x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 15x^2 - 6x + 1)$
13	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{50}(x)$	$(x + 2)(x^2 - x - 1)(x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - x^5 - 50x^4 + 5x^3 + 25x^2 - 5x - 1)$
14	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_6(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{54}(x)$	$(x + 2)(x - 1)(x^3 - 3x - 1)(x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1)$
15	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{58}(x)$	$(x + 2)(x^{14} - x^{13} - 13x^{12} + 12x^{11} + 66x^{10} - 55x^9 - 165x^8 + 120x^7 + 210x^6 - 126x^5 - 126x^4 + 56x^3 + 28x^2 - 7x - 1)$
16	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{62}(x)$	$(x + 2)(x^{15} - x^{14} - 14x^{13} + 13x^{12} + 78x^{11} - 66x^{10} - 220x^9 + 165x^8 + 330x^7 - 210x^6 - 252x^5 + 126x^4 + 84x^3 - 28x^2 - 8x + 1)$
17	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_6(x)\Psi_{22}(x)\Psi_{66}(x)$	$(x + 2)(x - 1)(x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1)(x^{10} + x^9 - 10x^8 - 10x^7 + 34x^6 + 34x^5 - 43x^4 - 43x^3 + 12x^2 + 12x + 1)$
18	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{70}(x)$	$(x + 2)(x^2 - x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 11x^9 + 54x^8 + 43x^7 - 113x^6 - 71x^5 + 110x^4 + 46x^3 - 40x^2 - 8x + 1)$
19	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_{74}(x)$	$(x + 2)(x^{18} - x^{17} - 17x^{16} + 16x^{15} + 120x^{14} - 105x^{13} - 455x^{12} + 364x^{11} + 1001x^{10} - 715x^9 - 1287x^8 + 792x^7 + 924x^6 - 462x^5 - 330x^4 + 120x^3 + 45x^2 - 9x - 1)$
20	$[\Psi_2]^2(x)\Psi_6(x)\Psi_{26}(x)\Psi_{78}(x)$	$(x + 2)(x - 1)(x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1)(x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 12x^9 + 53x^8 + 53x^7 - 103x^6 - 103x^5 + 79x^4 + 79x^3 - 12x^2 - 12x + 1)$

35. táblázat. A $T_n^{**}(x)$ polinomok listája

n	$T_n^{**}(x)$
1	x
2	$x^2 + 2$
3	$x^3 + 3x$
4	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$
8	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x$
10	$x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2$
11	$x^{11} + 11x^9 + 44x^7 + 77x^5 + 55x^3 + 11x$
12	$x^{12} + 12x^{10} + 54x^8 + 112x^6 + 105x^4 + 36x^2 + 2$
13	$x^{13} + 13x^{11} + 65x^9 + 156x^7 + 182x^5 + 91x^3 + 13x$
14	$x^{14} + 14x^{12} + 77x^{10} + 210x^8 + 294x^6 + 196x^4 + 49x^2 + 2$
15	$x^{15} + 15x^{13} + 90x^{11} + 275x^9 + 450x^7 + 378x^5 + 140x^3 + 15x$
16	$x^{16} + 16x^{14} + 104x^{12} + 352x^{10} + 660x^8 + 672x^6 + 336x^4 + 64x^2 + 2$
17	$x^{17} + 17x^{15} + 119x^{13} + 442x^{11} + 935x^9 + 1122x^7 + 714x^5 + 204x^3 + 17x$
18	$x^{18} + 18x^{16} + 135x^{14} + 546x^{12} + 1287x^{10} + 1782x^8 + 1386x^6 + 540x^4 + 81x^2 + 2$
19	$x^{19} + 19x^{17} + 152x^{15} + 665x^{13} + 1729x^{11} + 2717x^9 + 2508x^7 + 1254x^5 + 285x^3 + 19x$
20	$x^{20} + 20x^{18} + 170x^{16} + 800x^{14} + 2275x^{12} + 4004x^{10} + 4290x^8 + 2640x^6 + 825x^4 + 100x^2 + 2$

36. táblázat. $T_n^{**}(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$T_n^{**}(x)$ kifejezése a Ψ^{**} függvényekkel	$T_n^{**}(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_4^{**}(x)$	x
2	$\Psi_8^{**}(x)$	$x^2 + 2$
3	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)$	$x(x^2 + 3)$
4	$\Psi_{16}^{**}(x)$	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{20}^{**}(x)$	$x(x^4 + 5x^2 + 5)$
6	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{24}^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 1)$
7	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{28}^{**}(x)$	$x(x^6 + 7x^4 + 14x^2 + 7)$
8	$\Psi_{32}^{**}(x)$	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{36}^{**}(x)$	$x(x^2 + 3)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3)$
10	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{40}^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^8 + 8x^6 + 19x^4 + 12x^2 + 1)$
11	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{44}^{**}(x)$	$x(x^{10} + 11x^8 + 44x^6 + 77x^4 + 55x^2 + 11)$
12	$\Psi_{16}^{**}(x)\Psi_{48}^{**}(x)$	$(x^4 + 4x^2 + 2)(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 1)$
13	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{52}^{**}(x)$	$x(x^{12} + 13x^{10} + 65x^8 + 156x^6 + 182x^4 + 91x^2 + 13)$
14	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{56}^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^{12} + 12x^{10} + 53x^8 + 104x^6 + 86x^4 + 24x^2 + 1)$
15	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{20}^{**}(x)\Psi_{60}^{**}(x)$	$x(x^2 + 3)(x^4 + 5x^2 + 5)(x^8 + 7x^6 + 14x^4 + 8x^2 + 1)$
16	$\Psi_{64}^{**}(x)$	$x^{16} + 16x^{14} + 104x^{12} + 352x^{10} + 660x^8 + 672x^6 + 336x^4 + 64x^2 + 2$
17	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{68}^{**}(x)$	$x(x^{16} + 17x^{14} + 119x^{12} + 442x^{10} + 935x^8 + 1122x^6 + 714x^4 + 204x^2 + 17)$
18	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{24}^{**}(x)\Psi_{72}^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 1)(x^{12} + 12x^{10} + 54x^8 + 112x^6 + 105x^4 + 36x^2 + 1)$
19	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{76}^{**}(x)$	$x(x^{18} + 19x^{16} + 152x^{14} + 665x^{12} + 1729x^{10} + 2717x^8 + 2508x^6 + 1254x^4 + 285x^2 + 19)$
20	$\Psi_{16}^{**}(x)\Psi_{80}^{**}(x)$	$(x^4 + 4x^2 + 2)(x^{16} + 16x^{14} + 104x^{12} + 352x^{10} + 659x^8 + 664x^6 + 316x^4 + 48x^2 + 1)$

37. táblázat. $T_n^{**}(x) - 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a Ψ^{**} függvényekkel	közvetlen kifejezés faktorizáltan
2	$[\Psi_4^{**}(x)]^2$	x^2
4	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_4^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)x^2$
6	$[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_{12}^{**}(x)]^2$	$x^2(x^2 + 3)^2$
8	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_8^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)x^2(x^2 + 2)^2$
10	$[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_{20}^{**}(x)]^2$	$x^2(x^4 + 5x^2 + 5)^2$
12	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_3^{**}(x)]^2[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_{12}^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)(x^2 + 1)^2x^2(x^2 + 3)^2$
14	$[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_{28}^{**}(x)]^2$	$x^2(x^6 + 7x^4 + 14x^2 + 7)^2$
16	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_8^{**}(x)]^2\Psi_{16}^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)x^2(x^2 + 2)^2(x^4 + 4x^2 + 2)^2$
18	$[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_{12}^{**}(x)]^2\Psi_{36}^{**}(x)]^2$	$x^2(x^2 + 3)^2(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3)^2$
20	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_4^{**}(x)]^2[\Psi_5^{**}(x)]^2\Psi_{20}^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)x^2(x^4 + 3x^2 + 1)^2(x^4 + 5x^2 + 5)^2$

38. táblázat. $T_n^{**}(x) + 2$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a Ψ^{**} függvényekkel	közvetlen kifejezés faktorizáltan
2	$[\Psi_1^{**}(x)]^2$	$x^2 + 4$
4	$[\Psi_8^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 2)^2$
6	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_3^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)(x^2 + 1)^2$
8	$[\Psi_{16}^{**}(x)]^2$	$(x^4 + 4x^2 + 2)^2$
10	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_5^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)(x^4 + 3x^2 + 1)^2$
12	$[\Psi_8^{**}(x)]^2[\Psi_{24}^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 2)^2(x^4 + 4x^2 + 1)^2$
14	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_7^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1)^2$
16	$[\Psi_{32}^{**}(x)]^2$	$(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2)^2$
18	$[\Psi_1^{**}(x)]^2[\Psi_3^{**}(x)]^2\Psi_9^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 4)(x^2 + 1)^2(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)^2$
20	$[\Psi_8^{**}(x)]^2[\Psi_{40}^{**}(x)]^2$	$(x^2 + 2)^2(x^8 + 8x^6 + 19x^4 + 12x^2 + 1)^2$

39. táblázat. $T_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	$T_n^{**}(x) - 1$ kifejezése a Ψ^{**} függvényekkel	$T_n^{**}(x) - 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
2	$\Psi_3^{**}(x)$	$x^2 + 1$
4	$\Psi_{24}^{**}(x)$	$x^4 + 4x^2 + 1$
6	$\Psi_9^{**}(x)$	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1$
8	$\Psi_{48}^{**}(x)$	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 1$
10	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_{15}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^8 + 9x^6 + 26x^4 + 24x^2 + 1)$
12	$\Psi_{72}^{**}(x)$	$x^{12} + 12x^{10} + 54x^8 + 112x^6 + 105x^4 + 36x^2 + 1$
14	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_{21}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^{12} + 13x^{10} + 64x^8 + 146x^6 + 148x^4 + 48x^2 + 1)$
16	$\Psi_{96}^{**}(x)$	$x^{16} + 16x^{14} + 104x^{12} + 352x^{10} + 660x^8 + 672x^6 + 336x^4 + 64x^2 + 1$
18	$\Psi_{27}^{**}(x)$	$x^{18} + 18x^{16} + 135x^{14} + 546x^{12} + 1287x^{10} + 1782x^8 +$ $+1386x^6 + 540x^4 + 81x^2 + 1$
20	$\Psi_{24}^{**}(x)\Psi_{120}^{**}(x)$	$(x^4 + 4x^2 + 1)(x^{16} + 16x^{14} + 105x^{12} + 364x^{10} + 714x^8 + 784x^6 +$ $+440x^4 + 96x^2 + 1)$

40. táblázat. $T_n^{**}(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a Ψ^{**} függvényekkel	közvetlen kifejezés faktorizáltan
2	$\Psi_{12}^{**}(x)$	$x^2 + 3$
4	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^2 + 3)$
6	$\Psi_{36}^{**}(x)$	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3$
8	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{24}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^2 + 3)(x^4 + 4x^2 + 1)$
10	$\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{60}^{**}(x)$	$(x^2 + 3)(x^8 + 7x^6 + 14x^4 + 8x^2 + 1)$
12	$\Psi_9^{**}(x)\Psi_{36}^{**}(x)$	$(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3)$
14	$\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{84}^{**}(x)$	$(x^2 + 3)(x^{12} + 11x^{10} + 44x^8 + 78x^6 + 60x^4 + 16x^2 + 1)$
16	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{24}^{**}(x)\Psi_{48}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^2 + 3)(x^4 + 4x^2 + 1)(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 1)$
18	$\Psi_{108}^{**}(x)$	$x^{18} + 18x^{16} + 135x^{14} + 546x^{12} + 1287x^{10} + 1782x^8 +$ $+1386x^6 + 540x^4 + 81x^2 + 3$
20	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{15}^{**}(x)\Psi_{60}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^2 + 3)(x^8 + 9x^6 + 26x^4 + 24x^2 + 1)$ $(x^8 + 7x^6 + 14x^4 + 8x^2 + 1)$

41. táblázat. Az $U_n^{**}(x)$ polinomok listája

n	$U_n^{**}(x)$
1	x
2	$x^2 + 1$
3	$x^3 + 2x$
4	$x^4 + 3x^2 + 1$
5	$x^5 + 4x^3 + 3x$
6	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$
7	$x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$
8	$x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$
9	$x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$
10	$x^{10} + 9x^8 + 28x^6 + 35x^4 + 15x^2 + 1$
11	$x^{11} + 10x^9 + 36x^7 + 56x^5 + 35x^3 + 6x$
12	$x^{12} + 11x^{10} + 45x^8 + 84x^6 + 70x^4 + 21x^2 + 1$
13	$x^{13} + 12x^{11} + 55x^9 + 120x^7 + 126x^5 + 56x^3 + 7x$
14	$x^{14} + 13x^{12} + 66x^{10} + 165x^8 + 210x^6 + 126x^4 + 28x^2 + 1$
15	$x^{15} + 14x^{13} + 78x^{11} + 220x^9 + 330x^7 + 252x^5 + 84x^3 + 8x$
16	$x^{16} + 15x^{14} + 91x^{12} + 286x^{10} + 495x^8 + 462x^6 + 210x^4 + 36x^2 + 1$
17	$x^{17} + 16x^{15} + 105x^{13} + 364x^{11} + 715x^9 + 792x^7 + 462x^5 + 120x^3 + 9x$
18	$x^{18} + 17x^{16} + 120x^{14} + 455x^{12} + 1001x^{10} + 1287x^8 + 924x^6 + 330x^4 + 45x^2 + 1$
19	$x^{19} + 18x^{17} + 136x^{15} + 560x^{13} + 1365x^{11} + 2002x^9 + 1716x^7 + 792x^5 + 165x^3 + 10x$
20	$x^{20} + 19x^{18} + 153x^{16} + 680x^{14} + 1820x^{12} + 3003x^{10} + 3003x^8 + 1716x^6 + 495x^4 + 55x^2 + 1$

42. táblázat. $U_n^{**}(x)$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a Ψ^{**} függvényekkel	$U_n^{**}(x)$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$\Psi_4^{**}(x)$	x
2	$\Psi_3^{**}(x)$	$x^2 + 1$
3	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)$	$x(x^2 + 2)$
4	$\Psi_5^{**}(x)$	$x^4 + 3x^2 + 1$
5	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)x(x^2 + 3)$
6	$\Psi_7^{**}(x)$	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$
7	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)\Psi_{16}^{**}(x)$	$x(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 2)$
8	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_9^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)$
9	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_5^{**}(x)\Psi_{20}^{**}(x)$	$x(x^4 + 3x^2 + 1)(x^4 + 5x^2 + 5)$
10	$\Psi_{11}^{**}(x)$	$x^{10} + 9x^8 + 28x^6 + 35x^4 + 15x^2 + 1$
11	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)$ $\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{24}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)x(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^4 + 4x^2 + 1)$
12	$\Psi_{13}^{**}(x)$	$x^{12} + 11x^{10} + 45x^8 + 84x^6 + 70x^4 + 21x^2 + 1$
13	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_7^{**}(x)\Psi_{28}^{**}(x)$	$x(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1)(x^6 + 7x^4 + 14x^2 + 7)$
14	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_5^{**}(x)\Psi_{15}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^4 + 3x^2 + 1)(x^8 + 9x^6 + 26x^4 + 24x^2 + 1)$
15	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)\Psi_{16}^{**}(x)\Psi_{32}^{**}(x)$	$x(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 2)(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2)$
16	$\Psi_{17}^{**}(x)$	$x^{16} + 15x^{14} + 91x^{12} + 286x^{10} + 495x^8 +$ $+462x^6 + 210x^4 + 36x^2 + 1$
17	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_4^{**}(x)\Psi_9^{**}(x)$ $\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{36}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)x(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)(x^2 + 3)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3)$
18	$\Psi_{19}^{**}(x)$	$x^{18} + 17x^{16} + 120x^{14} + 455x^{12} + 1001x^{10} + 1287x^8 +$ $+924x^6 + 330x^4 + 45x^2 + 1$
19	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_5^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)$ $\Psi_{20}^{**}(x)\Psi_{40}^{**}(x)$	$x(x^4 + 3x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^4 + 5x^2 + 5)$ $(x^8 + 8x^6 + 19x^4 + 12x^2 + 1)$
20	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_7^{**}(x)\Psi_{21}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1)$ $(x^{12} + 13x^{10} + 64x^8 + 146x^6 + 148x^4 + 48x^2 + 1)$

43. táblázat. $U_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a Ψ^{**} függvényekkel	közvetlen kifejezés faktorizáltan
2	$[\Psi_4^{**}(x)]^2$	x^2
4	$[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_{12}^{**}(x)$	$x^2(x^2 + 3)$
6	$[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_8^{**}(x) \Psi_{12}^{**}(x)$	$x^2(x^2 + 2)(x^2 + 3)$
8	$[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_8^{**}(x) \Psi_{20}^{**}(x)$	$x^2(x^2 + 2)(x^4 + 5x^2 + 5)$
10	$\Psi_3^{**}(x)[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_{12}^{**}(x) \Psi_{20}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)x^2(x^2 + 3)(x^4 + 5x^2 + 5)$
12	$\Psi_3^{**}(x)[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_{12}^{**}(x) \Psi_{28}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)x^2(x^2 + 3)(x^6 + 7x^4 + 14x^2 + 7)$
14	$[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_8^{**}(x) \Psi_{16}^{**}(x) \Psi_{28}^{**}(x)$	$x^2(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 2)(x^6 + 7x^4 + 14x^2 + 7)$
16	$[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_8^{**}(x) \Psi_{12}^{**}(x) \Psi_{16}^{**}(x) \Psi_{36}^{**}(x)$	$x^2(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^4 + 4x^2 + 2)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3)$
18	$[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_5^{**}(x) \Psi_{12}^{**}(x)$	$x^2(x^4 + 3x^2 + 1)(x^2 + 3)(x^4 + 5x^2 + 5)$
	$\Psi_{20}^{**}(x) \Psi_{36}^{**}(x)$	$(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3)$
20	$[\Psi_4^{**}(x)]^2 \Psi_5^{**}(x) \Psi_{20}^{**}(x) \Psi_{44}^{**}(x)$	$x^2(x^4 + 3x^2 + 1)(x^4 + 5x^2 + 5)$ $(x^{10} + 11x^8 + 44x^6 + 77x^4 + 55x^2 + 11)$

44. táblázat. $U_n^{**}(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a Ψ^{**} függvényekkel	közvetlen kifejezés faktorizáltan
2	$\Psi_8^{**}(x)$	$x^2 + 2$
4	$\Psi_3^{**}(x) \Psi_8^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^2 + 2)$
6	$\Psi_3^{**}(x) \Psi_{16}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^4 + 4x^2 + 2)$
8	$\Psi_5^{**}(x) \Psi_{16}^{**}(x)$	$(x^4 + 3x^2 + 1)(x^4 + 4x^2 + 2)$
10	$\Psi_5^{**}(x) \Psi_8^{**}(x) \Psi_{24}^{**}(x)$	$(x^4 + 3x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 1)$
12	$\Psi_7^{**}(x) \Psi_8^{**}(x) \Psi_{24}^{**}(x)$	$(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 1)$
14	$\Psi_7^{**}(x) \Psi_{32}^{**}(x)$	$(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1)(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2)$
16	$\Psi_3^{**}(x) \Psi_9^{**}(x) \Psi_{32}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2)$
18	$\Psi_3^{**}(x) \Psi_8^{**}(x) \Psi_9^{**}(x) \Psi_{40}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)$ $(x^8 + 8x^6 + 19x^4 + 12x^2 + 1)$
20	$\Psi_8^{**}(x) \Psi_{11}^{**}(x) \Psi_{40}^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^{10} + 9x^8 + 28x^6 + 35x^4 + 15x^2 + 1)$ $(x^8 + 8x^6 + 19x^4 + 12x^2 + 1)$

45. táblázat. A $W_n^{**}(x)$ polinomok listája

n	$W_n^{**}(x)$
1	$x + 1$
2	$x^2 + x + 1$
3	$x^3 + x^2 + 2x + 1$
4	$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
5	$x^5 + x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
6	$x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x + 1$
7	$x^7 + x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
8	$x^8 + x^7 + 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 4x + 1$
9	$x^9 + x^8 + 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
10	$x^{10} + x^9 + 9x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 5x + 1$
11	$x^{11} + x^{10} + 10x^9 + 9x^8 + 36x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 15x^2 + 6x + 1$
12	$x^{12} + x^{11} + 11x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 36x^7 + 84x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 6x + 1$
13	$x^{13} + x^{12} + 12x^{11} + 11x^{10} + 55x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 84x^6 + 126x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 21x^2 + 7x + 1$
14	$x^{14} + x^{13} + 13x^{12} + 12x^{11} + 66x^{10} + 55x^9 + 165x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 126x^5 + 126x^4 +$ $+ 56x^3 + 28x^2 + 7x + 1$
15	$x^{15} + x^{14} + 14x^{13} + 13x^{12} + 78x^{11} + 66x^{10} + 220x^9 + 165x^8 + 330x^7 + 210x^6 + 252x^5 +$ $+ 126x^4 + 84x^3 + 28x^2 + 8x + 1$
16	$x^{16} + x^{15} + 15x^{14} + 14x^{13} + 91x^{12} + 78x^{11} + 286x^{10} + 220x^9 + 495x^8 + 330x^7 + 462x^6 + 252x^5 +$ $+ 210x^4 + 84x^3 + 36x^2 + 8x + 1$
17	$x^{17} + x^{16} + 16x^{15} + 15x^{14} + 105x^{13} + 91x^{12} + 364x^{11} + 286x^{10} + 715x^9 + 495x^8 + 792x^7 +$ $+ 462x^6 + 462x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 36x^2 + 9x + 1$
18	$x^{18} + x^{17} + 17x^{16} + 16x^{15} + 120x^{14} + 105x^{13} + 455x^{12} + 364x^{11} + 1001x^{10} + 715x^9 + 1287x^8 +$ $+ 792x^7 + 924x^6 + 462x^5 + 330x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 9x + 1$
19	$x^{19} + x^{18} + 18x^{17} + 17x^{16} + 136x^{15} + 120x^{14} + 560x^{13} + 455x^{12} + 1365x^{11} + 1001x^{10} + 2002x^9 +$ $+ 1287x^8 + 1716x^7 + 924x^6 + 792x^5 + 330x^4 + 165x^3 + 45x^2 + 10x + 1$
20	$x^{20} + x^{19} + 19x^{18} + 18x^{17} + 153x^{16} + 136x^{15} + 680x^{14} + 560x^{13} + 1820x^{12} + 1365x^{11} + 3003x^{10} +$ $+ 2002x^9 + 3003x^8 + 1716x^7 + 1716x^6 + 792x^5 + 495x^4 + 165x^3 + 55x^2 + 10x + 1$

46. táblázat. A $Z_n^{**}(x)$ polinomok listája

n	$Z_n^{**}(x)$
1	$x + 2$
2	$x^2 + x + 2$
3	$x^3 + x^2 + 3x + 2$
4	$x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2$
5	$x^5 + x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
6	$x^6 + x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x + 2$
7	$x^7 + x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 9x^2 + 7x + 2$
8	$x^8 + x^7 + 8x^6 + 7x^5 + 20x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 7x + 2$
9	$x^9 + x^8 + 9x^7 + 8x^6 + 27x^5 + 20x^4 + 30x^3 + 16x^2 + 9x + 2$
10	$x^{10} + x^9 + 10x^8 + 9x^7 + 35x^6 + 27x^5 + 50x^4 + 30x^3 + 25x^2 + 9x + 2$
11	$x^{11} + x^{10} + 11x^9 + 10x^8 + 44x^7 + 35x^6 + 77x^5 + 50x^4 + 55x^3 + 25x^2 + 11x + 2$
12	$x^{12} + x^{11} + 12x^{10} + 11x^9 + 54x^8 + 44x^7 + 112x^6 + 77x^5 + 105x^4 + 55x^3 + 36x^2 + 11x + 2$
13	$x^{13} + x^{12} + 13x^{11} + 12x^{10} + 65x^9 + 54x^8 + 156x^7 + 112x^6 + 182x^5 + 105x^4 + 91x^3 +$ $+ 36x^2 + 13x + 2$
14	$x^{14} + x^{13} + 14x^{12} + 13x^{11} + 77x^{10} + 65x^9 + 210x^8 + 156x^7 + 294x^6 + 182x^5 + 196x^4 +$ $+ 91x^3 + 49x^2 + 13x + 2$
15	$x^{15} + x^{14} + 15x^{13} + 14x^{12} + 90x^{11} + 77x^{10} + 275x^9 + 210x^8 + 450x^7 + 294x^6 + 378x^5 +$ $+ 196x^4 + 140x^3 + 49x^2 + 15x + 2$
16	$x^{16} + x^{15} + 16x^{14} + 15x^{13} + 104x^{12} + 90x^{11} + 352x^{10} + 275x^9 + 660x^8 + 450x^7 + 672x^6 +$ $+ 378x^5 + 336x^4 + 140x^3 + 64x^2 + 15x + 2$
17	$x^{17} + x^{16} + 17x^{15} + 16x^{14} + 119x^{13} + 104x^{12} + 442x^{11} + 352x^{10} + 935x^9 + 660x^8 +$ $+ 1122x^7 + 672x^6 + 714x^5 + 336x^4 + 204x^3 + 64x^2 + 17x + 2$
18	$x^{18} + x^{17} + 18x^{16} + 17x^{15} + 135x^{14} + 119x^{13} + 546x^{12} + 442x^{11} + 1287x^{10} + 935x^9 +$ $+ 1782x^8 + 1122x^7 + 1386x^6 + 714x^5 + 540x^4 + 204x^3 + 81x^2 + 17x + 2$
19	$x^{19} + x^{18} + 19x^{17} + 18x^{16} + 152x^{15} + 135x^{14} + 665x^{13} + 546x^{12} + 1729x^{11} + 1287x^{10} +$ $+ 2717x^9 + 1782x^8 + 2508x^7 + 1386x^6 + 1254x^5 + 540x^4 + 285x^3 + 81x^2 + 19x + 2$
20	$x^{20} + x^{19} + 20x^{18} + 19x^{17} + 170x^{16} + 152x^{15} + 800x^{14} + 665x^{13} + 2275x^{12} + 1729x^{11} +$ $+ 4004x^{10} + 2717x^9 + 4290x^8 + 2508x^7 + 2640x^6 + 1254x^5 + 825x^4 + 285x^3 +$ $+ 100x^2 + 19x + 2$

47. táblázat. $W_n^{**}(x) - 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a Ψ^{**} , W^{**} , Z^{**} függvényekkel	$W_n^{**}(x) - 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	Ψ_4^{**}	x
2	$\Psi_4^{**}(x)W_1^{**}(x)$	$x(x+1)$
3	$\Psi_4^{**}(x)Z_2^{**}(x)$	$x(x^2+x+2)$
4	$\Psi_4^{**}(x)Z_3^{**}(x)$	$x(x^3+x^2+3x+2)$
5	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)W_2^{**}(x)$	$x(x^2+3)(x^2+x+1)$
6	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)W_3^{**}(x)$	$x(x^2+3)(x^3+x^2+2x+1)$
7	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)Z_4^{**}(x)$	$x(x^2+2)(x^4+x^3+4x^2+3x+2)$
8	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)Z_5^{**}(x)$	$x(x^2+2)(x^5+x^4+5x^3+4x^2+5x+2)$
9	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{20}^{**}(x)W_4^{**}(x)$	$x(x^4+5x^2+5)(x^4+x^3+3x^2+2x+1)$
10	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{20}^{**}(x)W_5^{**}(x)$	$x(x^4+5x^2+5)(x^5+x^4+4x^3+3x^2+3x+1)$
11	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)Z_6^{**}(x)$	$(x^2+1)x(x^2+3)(x^6+x^5+6x^4+5x^3+9x^2+5x+2)$
12	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)Z_7^{**}(x)$	$(x^2+1)x(x^2+3)(x^7+x^6+7x^5+6x^4+14x^3+9x^2+7x+2)$
13	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{28}^{**}(x)W_6^{**}(x)$	$x(x^6+7x^4+14x^2+7)(x^6+x^5+5x^4+4x^3+6x^2+3x+1)$
14	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{28}^{**}(x)W_7^{**}(x)$	$x(x^6+7x^4+14x^2+7)(x^7+x^6+6x^5+5x^4+10x^3+6x^2+4x+1)$
15	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)\Psi_{16}^{**}(x)Z_8^{**}(x)$	$x(x^2+2)(x^4+4x^2+2)(x^8+x^7+8x^6+7x^5+20x^4+14x^3+16x^2+7x+2)$
16	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_8^{**}(x)\Psi_{16}^{**}(x)Z_9^{**}(x)$	$x(x^2+2)(x^4+4x^2+2)(x^9+x^8+9x^7+8x^6+27x^5+20x^4+30x^3+16x^2+9x+2)$
17	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{36}^{**}(x)W_8^{**}(x)$	$x(x^2+3)(x^6+6x^4+9x^2+3)(x^8+x^7+7x^6+6x^5+15x^4+10x^3+10x^2+4x+1)$
18	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_{12}^{**}(x)\Psi_{36}^{**}(x)W_9^{**}(x)$	$x(x^2+3)(x^6+6x^4+9x^2+3)(x^9+x^8+8x^7+7x^6+21x^5+15x^4+20x^3+10x^2+5x+1)$
19	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_5^{**}(x)\Psi_{20}^{**}(x)Z_{10}^{**}(x)$	$x(x^4+3x^2+1)(x^4+5x^2+5)(x^{10}+x^9+10x^8+9x^7+35x^6+27x^5+50x^4+30x^3+25x^2+9x+2)$
20	$\Psi_4^{**}(x)\Psi_5^{**}(x)\Psi_{20}^{**}(x)Z_{11}^{**}(x)$	$x(x^4+3x^2+1)(x^4+5x^2+5)(x^{11}+x^{10}+11x^9+10x^8+44x^7+35x^6+77x^5+50x^4+55x^3+25x^2+11x+2)$

48. táblázat. $W_n^{**}(x) + 1$ irreducibilis faktorizációja az $1 \leq n \leq 20$ tartományban

n	kifejezés a $\Psi^{**}, W^{**}, Z^{**}$ függvényekkel	$W_n^{**}(x) + 1$ közvetlen kifejezése faktorizáltan
1	$Z_1^{**}(x)$	$x + 2$
2	$Z_2^{**}(x)$	$x^2 + x + 2$
3	$\Psi_8^{**}(x)W_1^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x + 1)$
4	$\Psi_8^{**}(x)W_2^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$
5	$\Psi_3^{**}(x)Z_3^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 3x + 2)$
6	$\Psi_3^{**}(x)Z_4^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2)$
7	$\Psi_{16}^{**}(x)W_3^{**}(x)$	$(x^4 + 4x^2 + 2)(x^3 + x^2 + 2x + 1)$
8	$\Psi_{16}^{**}(x)W_4^{**}(x)$	$(x^4 + 4x^2 + 2)(x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$
9	$\Psi_5^{**}(x)Z_5^{**}(x)$	$(x^4 + 3x^2 + 1)(x^5 + x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$
10	$\Psi_5^{**}(x)Z_6^{**}(x)$	$(x^4 + 3x^2 + 1)(x^6 + x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x + 2)$
11	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{24}^{**}(x)W_5^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 1)(x^5 + x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$
12	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{24}^{**}(x)W_6^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 1)(x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x + 1)$
13	$\Psi_7^{**}(x)Z_7^{**}(x)$	$(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1)(x^7 + x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 9x^2 + 7x + 2)$
14	$\Psi_7^{**}(x)Z_8^{**}(x)$	$(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1)(x^8 + x^7 + 8x^6 + 7x^5 + 20x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 7x + 2)$
15	$\Psi_{32}^{**}(x)W_7^{**}(x)$	$(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2)(x^7 + x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$
16	$\Psi_{32}^{**}(x)W_8^{**}(x)$	$(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2)(x^8 + x^7 + 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 4x + 1)$
17	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_9^{**}(x)Z_9^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)(x^9 + x^8 + 9x^7 + 8x^6 + 27x^5 + 20x^4 + 30x^3 + 16x^2 + 9x + 2)$
18	$\Psi_3^{**}(x)\Psi_9^{**}(x)Z_{10}^{**}(x)$	$(x^2 + 1)(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1)(x^{10} + x^9 + 10x^8 + 9x^7 + 35x^6 + 27x^5 + 50x^4 + 30x^3 + 25x^2 + 9x + 2)$
19	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{40}^{**}(x)W_9^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^8 + 8x^6 + 19x^4 + 12x^2 + 1)(x^9 + x^8 + 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 5x + 1)$
20	$\Psi_8^{**}(x)\Psi_{40}^{**}(x)W_{10}^{**}(x)$	$(x^2 + 2)(x^8 + 8x^6 + 19x^4 + 12x^2 + 1)x^{10} + x^9 + 9x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 5x + 1$

49. táblázat. A körosztási előpolinomok és a körosztási polinomok listája ($1 \leq n \leq 120$)

n	$\Psi_n(x)$ (körosztási előpolinomok)	$\Phi_n(x)$ (körosztási polinomok)
1	$\sqrt{x-2}$	$x-1$
2	$\sqrt{x+2}$	$x+1$
3	$x+1$	$\sum_{k=0}^2 x^k$
4	x	x^2+1
5	x^2+x-1	$\sum_{k=0}^4 x^k$
6	$x-1$	$\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^k$
7	x^3+x^2-2x-1	$\sum_{k=0}^6 x^k$
8	x^2-2	x^4+1
9	x^3-3x+1	$\sum_{k=0}^2 x^{3k}$
10	x^2-x-1	$\sum_{k=0}^4 (-1)^k x^k$
11	$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$	$\sum_{k=0}^{10} x^k$
12	x^2-3	$\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{2k}$
13	$x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1$	$\sum_{k=0}^{12} x^k$
14	x^3-x^2-2x+1	$\sum_{k=0}^6 (-1)^k x^k$
15	$x^4-x^3-4x^2+4x+1$	$x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$
16	x^4-4x^2+2	x^8+1
17	$x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1$	$\sum_{k=0}^{16} x^k$
18	x^3-3x-1	$\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{3k}$
19	$x^9+x^8-8x^7-7x^6+21x^5+15x^4-20x^3-10x^2+5x+1$	$\sum_{k=0}^{18} x^k$
20	x^4-5x^2+5	$\sum_{k=0}^4 (-1)^k x^{2k}$

n	$\Psi_n(x)$ (kőrosztási előpolinomok) $\Phi_n(x)$ (kőrosztási polinomok)
21	$x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1$ $x^{12} - x^{11} + x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
22	$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k x^k$
23	$x^{11} + x^{10} - 10x^9 - 9x^8 + 36x^7 + 28x^6 - 56x^5 - 35x^4 + 35x^3 + 15x^2 - 6x - 1$ $\sum_{k=0}^{22} x^k$
24	$x^4 - 4x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{4k}$
25	$x^{10} - 10x^8 + 35x^6 + x^5 - 50x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 5x - 1$ $\sum_{k=0}^4 x^{5k}$
26	$x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1$ $\sum_{k=0}^{12} (-1)^k x^k$
27	$x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x + 1$ $\sum_{k=0}^2 x^{9k}$
28	$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7$ $\sum_{k=0}^6 (-1)^k x^{2k}$
29	$\sum_{k=0}^6 (-1)^k \left[\binom{14-k}{k} x^{14-2k} + \binom{13-k}{k} x^{13-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{28} x^k$
30	$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ $x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$
31	$\sum_{k=0}^7 (-1)^k \left[\binom{15-k}{k} x^{15-2k} + \binom{14-k}{k} x^{14-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{30} x^k$
32	$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$ $x^{16} + 1$

33	$x^{10} - x^9 - 10x^8 + 10x^7 + 34x^6 - 34x^5 - 43x^4 + 43x^3 + 12x^2 - 12x + 1$ $x^{20} - x^{19} + x^{17} - x^{16} + x^{14} - x^{13} + x^{11} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
34	$x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1$ $\sum_{k=0}^{16} (-1)^k x^k$
35	$x^{12} - x^{11} - 12x^{10} + 11x^9 + 54x^8 - 43x^7 - 113x^6 + 71x^5 + 110x^4 - 46x^3 - 40x^2 + 8x + 1$ $x^{24} - x^{23} + x^{19} - x^{18} + x^{17} - x^{16} + x^{14} - x^{13} + x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x + 1$
36	$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3$ $\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{6k}$
37	$\sum_{k=0}^8 (-1)^k \left[\binom{18-k}{k} x^{18-2k} + \binom{17-k}{k} x^{17-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{36} x^k$
38	$x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1$ $\sum_{k=0}^{18} (-1)^k x^k$
39	$x^{12} - x^{11} - 12x^{10} + 12x^9 + 53x^8 - 53x^7 - 103x^6 + 103x^5 + 79x^4 - 79x^3 - 12x^2 + 12x + 1$ $x^{24} - x^{23} + x^{21} - x^{20} + x^{18} - x^{17} + x^{15} - x^{14} + x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
40	$x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^4 (-1)^k x^{4k}$
41	$\sum_{k=0}^9 (-1)^k \left[\binom{20-k}{k} x^{20-2k} + \binom{19-k}{k} x^{19-2k} \right] + 1$ $\sum_{k=0}^{40} x^k$
42	$x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1$ $x^{12} + x^{11} - x^9 - x^8 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$
43	$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \left[\binom{21-k}{k} x^{21-2k} + \binom{20-k}{k} x^{20-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{42} x^k$
44	$x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11$ $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k x^{2k}$
45	$x^{12} - 12x^{10} - x^9 + 54x^8 + 9x^7 - 112x^6 - 27x^5 + 105x^4 + 31x^3 - 36x^2 - 12x + 1$ $x^{24} - x^{21} + x^{15} - x^{12} + x^9 - x^3 + 1$

46	$x^{11} - x^{10} - 10x^9 + 9x^8 + 36x^7 - 28x^6 - 56x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 15x^2 - 6x + 1$ $\sum_{k=0}^{22} (-1)^k x^k$
47	$\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \left[\binom{23-k}{k} x^{23-2k} + \binom{22-k}{k} x^{22-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{46} x^k$
48	$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{8k}$
49	$x^{21} - 21x^{19} + 189x^{17} - 952x^{15} + x^{14} + 2940x^{13} - 14x^{12} - 5733x^{11} + 77x^{10} + 7007x^9 -$ $-210x^8 - 5147x^7 + 294x^6 + 2072x^5 - 196x^4 - 371x^3 + 49x^2 + 14x - 1$ $\sum_{k=0}^6 x^{7k}$
50	$x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - x^5 - 50x^4 + 5x^3 + 25x^2 - 5x - 1$ $\sum_{k=0}^4 (-1)^k x^{5k}$
51	$x^{16} - x^{15} - 16x^{14} + 16x^{13} + 103x^{12} - 103x^{11} - 339x^{10} + 339x^9 + 596x^8 - 596x^7 - 526x^6 +$ $+526x^5 + 188x^4 - 188x^3 - 16x^2 + 16x + 1$ $x^{32} - x^{31} + x^{29} - x^{28} + x^{26} - x^{25} + x^{23} - x^{22} + x^{20} - x^{19} + x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{13} + x^{12} -$ $-x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
52	$x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 156x^6 + 182x^4 - 91x^2 + 13$ $\sum_{k=0}^{12} (-1)^k x^{2k}$
53	$\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \left[\binom{26-k}{k} x^{26-2k} + \binom{25-k}{k} x^{25-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{52} x^k$
54	$x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1$ $\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{9k}$
55	$x^{20} - x^{19} - 20x^{18} + 19x^{17} + 170x^{16} - 151x^{15} - 801x^{14} + 650x^{13} + 2289x^{12} - 1639x^{11} -$ $-4080x^{10} + 2442x^9 + 4489x^8 - 2058x^7 - 2891x^6 + 877x^5 + 951x^4 - 151x^3 - 108x^2 + 12x + 1$ $x^{40} - x^{39} + x^{35} - x^{34} + x^{30} - x^{28} + x^{25} - x^{23} + x^{20} - x^{17} + x^{15} - x^{12} + x^{10} - x^6 + x^5 -$ $-x + 1$
56	$x^{12} - 12x^{10} + 53x^8 - 104x^6 + 86x^4 - 24x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^6 (-1)^k x^{4k}$

57	$x^{18} - x^{17} - 18x^{16} + 18x^{15} + 134x^{14} - 134x^{13} - 531x^{12} + 531x^{11} + 1198x^{10} - 1198x^9 - 1519x^8 + 1519x^7 + 989x^6 - 989x^5 - 265x^4 + 265x^3 + 20x^2 - 20x + 1$ $x^{36} - x^{35} + x^{33} - x^{32} + x^{30} - x^{29} + x^{27} - x^{26} + x^{24} - x^{23} + x^{21} - x^{20} + x^{18} - x^{16} + x^{15} - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
58	$\sum_{k=0}^6 (-1)^k \left[\binom{14-k}{k} x^{14-2k} - \binom{13-k}{k} x^{13-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{28} (-1)^k x^k$
59	$\sum_{k=0}^{14} (-1)^k \left[\binom{29-k}{k} x^{29-2k} + \binom{28-k}{k} x^{28-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{58} x^k$
60	$x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 8x^2 + 1$ $x^{16} + x^{14} - x^{10} - x^8 - x^6 + x^2 + 1$
61	$\sum_{k=0}^{14} (-1)^k \left[\binom{30-k}{k} x^{30-2k} + \binom{29-k}{k} x^{29-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{60} x^k$
62	$\sum_{k=0}^7 (-1)^k \left[\binom{15-k}{k} x^{15-2k} - \binom{14-k}{k} x^{14-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{30} (-1)^k x^k$
63	$x^{18} - 18x^{16} - x^{15} + 135x^{14} + 15x^{13} - 546x^{12} - 90x^{11} + 1287x^{10} + 276x^9 - 1782x^8 - 459x^7 + 1385x^6 + 405x^5 - 534x^4 - 170x^3 + 72x^2 + 24x + 1$ $x^{36} - x^{33} + x^{27} - x^{24} + x^{18} - x^{12} + x^9 - x^3 + 1$
64	$x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 2$ $x^{32} + 1$
65	$x^{24} - x^{23} - 24x^{22} + 23x^{21} + 252x^{20} - 229x^{19} - 1521x^{18} + 1292x^{17} + 5832x^{16} - 4540x^{15} - 14822x^{14} + 10282x^{13} + 25284x^{12} - 15001x^{11} - 28667x^{10} + 13653x^9 + 20886x^8 - 7168x^7 - 9126x^6 + 1802x^5 + 2085x^4 - 101x^3 - 180x^2 - 12x + 1$ $x^{48} - x^{47} + x^{43} - x^{42} + x^{38} - x^{37} + x^{35} - x^{34} + x^{33} - x^{32} + x^{30} - x^{29} + x^{28} - x^{27} + x^{25} - x^{24} + x^{23} - x^{21} + x^{20} - x^{19} + x^{18} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^{13} - x^{11} + x^{10} - x^6 + x^5 - x + 1$
66	$x^{10} + x^9 - 10x^8 - 10x^7 + 34x^6 + 34x^5 - 43x^4 - 43x^3 + 12x^2 + 12x + 1$ $x^{20} + x^{19} - x^{17} - x^{16} + x^{14} + x^{13} - x^{11} - x^{10} - x^9 + x^7 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$
67	$\sum_{k=0}^{16} (-1)^k \left[\binom{33-k}{k} x^{33-2k} + \binom{32-k}{k} x^{32-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{66} x^k$

68	$x^{16} - 17x^{14} + 119x^{12} - 442x^{10} + 935x^8 - 1122x^6 + 714x^4 - 204x^2 + 17$ $\sum_{k=0}^{16} (-1)^k x^{2k}$
69	$x^{22} - x^{21} - 22x^{20} + 22x^{19} + 208x^{18} - 208x^{17} - 1103x^{16} + 1103x^{15} + 3589x^{14} - 3589x^{13} -$ $-7359x^{12} + 7359x^{11} + 9385x^{10} - 9385x^9 - 7060x^8 + 7060x^7 + 2807x^6 - 2807x^5 - 482x^4 +$ $+482x^3 + 24x^2 - 24x + 1$ $x^{44} - x^{43} + x^{41} - x^{40} + x^{38} - x^{37} + x^{35} - x^{34} + x^{32} - x^{31} + x^{29} - x^{28} + x^{26} - x^{25} + x^{23} -$ $-x^{22} + x^{21} - x^{19} + x^{18} - x^{16} + x^{15} - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
70	$x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 11x^9 + 54x^8 + 43x^7 - 113x^6 - 71x^5 + 110x^4 + 46x^3 - 40x^2 - 8x + 1$ $x^{24} + x^{23} - x^{19} - x^{18} - x^{17} - x^{16} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} - x^8 - x^7 - x^6 -$ $-x^5 + x + 1$
71	$\sum_{k=0}^{17} (-1)^k \left[\binom{35-k}{k} x^{35-2k} + \binom{34-k}{k} x^{34-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{70} x^k$
72	$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{12k}$
73	$\sum_{k=0}^{17} (-1)^k \left[\binom{36-k}{k} x^{36-2k} + \binom{35-k}{k} x^{35-2k} \right] + 1$ $\sum_{k=0}^{72} x^k$
74	$\sum_{k=0}^8 (-1)^k \left[\binom{18-k}{k} x^{18-2k} - \binom{17-k}{k} x^{17-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{36} (-1)^k x^k$
75	$x^{20} - 20x^{18} + 170x^{16} - x^{15} - 800x^{14} + 15x^{13} + 2275x^{12} - 90x^{11} - 4004x^{10} + 275x^9 + 4290x^8 -$ $-450x^7 - 2640x^6 + 379x^5 + 825x^4 - 145x^3 - 100x^2 + 20x + 1$ $x^{40} - x^{35} + x^{25} - x^{20} + x^{15} - x^5 + 1$
76	$x^{18} - 19x^{16} + 152x^{14} - 665x^{12} + 1729x^{10} - 2717x^8 + 2508x^6 - 1254x^4 + 285x^2 - 19$ $\sum_{k=0}^{18} (-1)^k x^{2k}$
77	$x^{30} - x^{29} - 30x^{28} + 29x^{27} + 405x^{26} - 377x^{25} - 3250x^{24} + 2901x^{23} + 17249x^{22} - 14697x^{21} -$ $-63734x^{20} + 51590x^{19} + 168035x^{18} - 128611x^{17} - 318629x^{16} + 229651x^{15} + 432159x^{14} -$ $-292608x^{13} - 411241x^{12} + 261924x^{11} + 264472x^{10} - 159873x^9 - 107406x^8 + 63143x^7 + 24051x^6 -$ $-14609x^5 - 2010x^4 + 1562x^3 - 72x^2 - 24x + 1$ $x^{60} - x^{59} + x^{53} - x^{52} + x^{49} - x^{48} + x^{46} - x^{45} + x^{42} - x^{41} + x^{39} - x^{37} + x^{35} - x^{34} +$ $+x^{32} - x^{30} + x^{28} - x^{26} + x^{25} - x^{23} + x^{21} - x^{19} + x^{18} - x^{15} + x^{14} - x^{12} + x^{11} - x^8 +$ $+x^7 - x + 1$

78	$x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 12x^9 + 53x^8 + 53x^7 - 103x^6 - 103x^5 + 79x^4 + 79x^3 - 12x^2 - 12x + 1$ $x^{24} + x^{23} - x^{21} - x^{20} + x^{18} + x^{17} - x^{15} - x^{14} + x^{12} - x^{10} - x^9 + x^7 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$
79	$\sum_{k=0}^{19} (-1)^k \left[\binom{39-k}{k} x^{39-2k} + \binom{38-k}{k} x^{38-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{78} x^k$
80	$x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 659x^8 - 664x^6 + 316x^4 - 48x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^4 (-1)^k x^{8k}$
81	$x^{27} - 27x^{25} + 324x^{23} - 2277x^{21} + 10395x^{19} - 32319x^{17} + 69768x^{15} - 104652x^{13} + 107406x^{11} - 72930x^9 + 30888x^7 - 7371x^5 + 819x^3 - 27x + 1$ $\sum_{k=0}^2 x^{27k}$
82	$\sum_{k=0}^9 (-1)^k \left[\binom{20-k}{k} x^{20-2k} - \binom{19-k}{k} x^{19-2k} \right] + 1$ $\sum_{k=0}^{40} (-1)^k x^k$
83	$\sum_{k=0}^{20} (-1)^k \left[\binom{41-k}{k} x^{41-2k} + \binom{40-k}{k} x^{40-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{82} x^k$
84	$x^{12} - 11x^{10} + 44x^8 - 78x^6 + 60x^4 - 16x^2 + 1$ $x^{24} + x^{22} - x^{18} - x^{16} + x^{12} - x^8 - x^6 + x^2 + 1$
85	$x^{32} - x^{31} - 32x^{30} + 31x^{29} + 464x^{28} - 433x^{27} - 4033x^{26} + 3600x^{25} + 23426x^{24} - 19826x^{23} - 95978x^{22} + 76152x^{21} + 285340x^{20} - 209188x^{19} - 623732x^{18} + 414544x^{17} + 1004699x^{16} - 590154x^{15} - 1183593x^{14} + 593422x^{13} + 1001431x^{12} - 407890x^{11} - 589403x^{10} + 181071x^9 + 228888x^8 - 46882x^7 - 53690x^6 + 5686x^5 + 6516x^4 - 116x^3 - 304x^2 - 16x + 1$ $x^{64} - x^{63} + x^{59} - x^{58} + x^{54} - x^{53} + x^{49} - x^{48} + x^{47} - x^{46} + x^{44} - x^{43} + x^{42} - x^{41} + x^{39} - x^{38} + x^{37} - x^{36} + x^{34} - x^{33} + x^{32} - x^{31} + x^{30} - x^{28} + x^{27} - x^{26} + x^{25} - x^{23} + x^{22} - x^{21} + x^{20} - x^{18} + x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{11} + x^{10} - x^6 + x^5 - x + 1$
86	$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \left[\binom{21-k}{k} x^{21-2k} - \binom{20-k}{k} x^{20-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{42} (-1)^k x^k$
87	$x^{28} - x^{27} - 28x^{26} + 28x^{25} + 349x^{24} - 349x^{23} - 2551x^{22} + 2551x^{21} + 12123x^{20} - 12123x^{19} - 39236x^{18} + 39236x^{17} + 88045x^{16} - 88045x^{15} - 136763x^{14} + 136763x^{13} + 144247x^{12} - 144247x^{11} - 99295x^{10} + 99295x^9 + 41703x^8 - 41703x^7 - 9569x^6 + 9569x^5 + 987x^4 - 987x^3 - 28x^2 + 28x + 1$ $x^{56} - x^{55} + x^{53} - x^{52} + x^{50} - x^{49} + x^{47} - x^{46} + x^{44} - x^{43} + x^{41} - x^{40} + x^{38} - x^{37} + x^{35} - x^{34} + x^{32} - x^{31} + x^{29} - x^{28} + x^{27} - x^{25} + x^{24} - x^{22} + x^{21} - x^{19} + x^{18} - x^{16} + x^{15} - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$

88	$x^{20} - 20x^{18} + 169x^{16} - 784x^{14} + 2172x^{12} - 3664x^{10} + 3683x^8 - 2072x^6 + 575x^4 - 60x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k x^{4k}$
89	$\sum_{k=0}^{21} (-1)^k \left[\binom{44-k}{k} x^{44-2k} + \binom{43-k}{k} x^{43-2k} \right] + 1$ $\sum_{k=0}^{88} x^k$
90	$x^{12} - 12x^{10} + x^9 + 54x^8 - 9x^7 - 112x^6 + 27x^5 + 105x^4 - 31x^3 - 36x^2 + 12x + 1$ $x^{24} + x^{21} - x^{15} - x^{12} - x^9 + x^3 + 1$
91	$x^{36} - x^{35} - 36x^{34} + 35x^{33} + 594x^{32} - 560x^{31} - 5952x^{30} + 5426x^{29} + 40454x^{28} - 35554x^{27} -$ $-197288x^{26} + 166634x^{25} + 712180x^{24} - 576199x^{23} - 1934944x^{22} + 1494700x^{21} + 3983738x^{20} -$ $-2928983x^{19} - 6208136x^{18} + 4331906x^{17} + 7259749x^{16} - 4795428x^{15} - 6263633x^{14} +$ $+3907332x^{13} + 3879994x^{12} - 2278575x^{11} - 1655004x^{10} + 908896x^9 + 456052x^8 - 230058x^7 -$ $-73571x^6 + 32327x^5 + 6018x^4 - 1922x^3 - 216x^2 + 24x + 1$ $x^{72} - x^{71} + x^{65} - x^{64} + x^{59} - x^{57} + x^{52} - x^{50} + x^{46} - x^{43} + x^{39} - x^{36} + x^{33} - x^{29} +$ $+x^{26} - x^{22} + x^{20} - x^{15} + x^{13} - x^8 + x^7 - x + 1$
92	$x^{22} - 23x^{20} + 230x^{18} - 1311x^{16} + 4692x^{14} - 10948x^{12} + 16744x^{10} - 16445x^8 + 9867x^6 -$ $-3289x^4 + 506x^2 - 23$ $\sum_{k=0}^{22} (-1)^k x^{2k}$
93	$x^{30} - x^{29} - 30x^{28} + 30x^{27} + 404x^{26} - 404x^{25} - 3223x^{24} + 3223x^{23} + 16927x^{22} - 16927x^{21} -$ $-61503x^{20} + 61503x^{19} + 158101x^{18} - 158101x^{17} - 288950x^{16} + 288950x^{15} + 371908x^{14} -$ $-371908x^{13} - 329002x^{12} + 329002x^{11} + 191674x^{10} - 191674x^9 - 68664x^8 + 68664x^7 +$ $+13548x^6 - 13548x^5 - 1208x^4 + 1208x^3 + 32x^2 - 32x + 1$ $x^{60} - x^{59} + x^{57} - x^{56} + x^{54} - x^{53} + x^{51} - x^{50} + x^{48} - x^{47} + x^{45} - x^{44} + x^{42} - x^{41} + x^{39} -$ $-x^{38} + x^{36} - x^{35} + x^{33} - x^{32} + x^{30} - x^{28} + x^{27} - x^{25} + x^{24} - x^{22} + x^{21} - x^{19} + x^{18} -$ $-x^{16} + x^{15} - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
94	$\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \left[\binom{23-k}{k} x^{23-2k} - \binom{22-k}{k} x^{22-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{46} (-1)^k x^k$
95	$x^{36} - x^{35} - 36x^{34} + 35x^{33} + 594x^{32} - 559x^{31} - 5953x^{30} + 5394x^{29} + 40485x^{28} - 35091x^{27} -$ $-197720x^{26} + 162629x^{25} + 715754x^{24} - 553125x^{23} - 1954471x^{22} + 1401346x^{21} + 4057888x^{20} -$ $-2656542x^{19} - 6408680x^{18} + 3752139x^{17} + 7649116x^{16} - 3896996x^{15} - 6803518x^{14} +$ $+2906674x^{13} + 4404908x^{12} - 1498899x^{11} - 2000649x^{10} + 503479x^9 + 601194x^8 - 100432x^7 -$ $-108458x^6 + 10534x^5 + 9885x^4 - 605x^3 - 340x^2 + 20x + 1$ $x^{72} - x^{71} + x^{67} - x^{66} + x^{62} - x^{61} + x^{57} - x^{56} + x^{53} - x^{51} + x^{48} - x^{46} + x^{43} - x^{41} + x^{38} -$ $-x^{36} + x^{34} - x^{31} + x^{29} - x^{26} + x^{24} - x^{21} + x^{19} - x^{16} + x^{15} - x^{11} + x^{10} - x^6 + x^5 - x + 1$
96	$x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^2 (-1)^k x^{16k}$

97	$\sum_{k=0}^{23} (-1)^k \left[\binom{48-k}{k} x^{48-2k} + \binom{47-k}{k} x^{47-2k} \right] + 1$ $\sum_{k=0}^{96} x^k$
98	$x^{21} - 21x^{19} + 189x^{17} - 952x^{15} - x^{14} + 2940x^{13} + 14x^{12} - 5733x^{11} - 77x^{10} + 7007x^9 + 210x^8 - 5147x^7 - 294x^6 + 2072x^5 + 196x^4 - 371x^3 - 49x^2 + 14x + 1$ $\sum_{k=0}^6 (-1)^k x^{7k}$
99	$x^{30} - 30x^{28} - x^{27} + 405x^{26} + 27x^{25} - 3250x^{24} - 324x^{23} + 17250x^{22} + 2278x^{21} - 63756x^{20} - 10416x^{19} + 168244x^{18} + 32508x^{17} - 319752x^{16} - 70720x^{15} + 435915x^{14} + 107592x^{13} - 419353x^{12} - 113139x^{11} + 275835x^{10} + 79936x^9 - 117504x^8 - 36027x^7 + 29442x^6 + 9423x^5 - 3555x^4 - 1173x^3 + 108x^2 + 36x + 1$ $x^{60} - x^{57} + x^{51} - x^{48} + x^{42} - x^{39} + x^{33} - x^{30} + x^{27} - x^{21} + x^{18} - x^{12} + x^9 - x^3 + 1$
100	$x^{20} - 20x^{18} + 170x^{16} - 800x^{14} + 2275x^{12} - 4005x^{10} + 4300x^8 - 2675x^6 + 875x^4 - 125x^2 + 5$ $\sum_{k=0}^4 (-1)^k x^{10k}$
101	$\sum_{k=0}^{24} (-1)^k \left[\binom{50-k}{k} x^{50-2k} + \binom{49-k}{k} x^{49-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{100} x^k$
102	$x^{16} + x^{15} - 16x^{14} - 16x^{13} + 103x^{12} + 103x^{11} - 339x^{10} - 339x^9 + 596x^8 + 596x^7 - 526x^6 - 526x^5 + 188x^4 + 188x^3 - 16x^2 - 16x + 1$ $x^{32} + x^{31} - x^{29} - x^{28} + x^{26} + x^{25} - x^{23} - x^{22} + x^{20} + x^{19} - x^{17} - x^{16} - x^{15} + x^{13} + x^{12} - x^{10} - x^9 + x^7 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$
103	$\sum_{k=0}^{25} (-1)^k \left[\binom{51-k}{k} x^{51-2k} + \binom{50-k}{k} x^{50-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{102} x^k$
104	$x^{24} - 24x^{22} + 251x^{20} - 1500x^{18} + 5645x^{16} - 13904x^{14} + 22580x^{12} - 23792x^{10} + 15622x^8 - 5936x^6 + 1141x^4 - 84x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^{12} (-1)^k x^{4k}$
105	$x^{24} + x^{23} - 23x^{22} - 23x^{21} + 230x^{20} + 229x^{19} - 1312x^{18} - 1294x^{17} + 4709x^{16} + 4573x^{15} - 11067x^{14} - 10506x^{13} + 17187x^{12} + 15810x^{11} - 17391x^{10} - 15333x^9 + 11034x^8 + 9189x^7 - 4088x^6 - 3142x^5 + 784x^4 + 528x^3 - 64x^2 - 32x + 1$ $x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1$
106	$\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \left[\binom{26-k}{k} x^{26-2k} - \binom{25-k}{k} x^{25-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{52} (-1)^k x^k$

107	$\sum_{k=0}^{26} (-1)^k \left[\binom{53-k}{k} x^{53-2k} + \binom{52-k}{k} x^{52-2k} \right]$ $\sum_{k=0}^{106} x^k$
108	$x^{18} - 18x^{16} + 135x^{14} - 546x^{12} + 1287x^{10} - 1782x^8 + 1386x^6 - 540x^4 + 81x^2 - 3$ $x^{36} - x^{18} + 1$
109	$\sum_{k=0}^{26} (-1)^k \left[\binom{54-k}{k} x^{54-2k} + \binom{53-k}{k} x^{53-2k} \right] - 1$ $\sum_{k=0}^{108} x^k$
110	$x^{20} + x^{19} - 20x^{18} - 19x^{17} + 170x^{16} + 151x^{15} - 801x^{14} - 650x^{13} + 2289x^{12} + 1639x^{11} -$ $-4080x^{10} - 2442x^9 + 4489x^8 + 2058x^7 - 2891x^6 - 877x^5 + 951x^4 + 151x^3 - 108x^2 - 12x + 1$ $x^{40} + x^{39} - x^{35} - x^{34} + x^{30} - x^{28} - x^{25} + x^{23} + x^{20} + x^{17} - x^{15} - x^{12} + x^{10} - x^6 -$ $-x^5 + x + 1$
111	$x^{36} - x^{35} - 36x^{34} + 36x^{33} + 593x^{32} - 593x^{31} - 5919x^{30} + 5919x^{29} + 39961x^{28} - 39961x^{27} -$ $-192880x^{26} + 192880x^{25} + 685907x^{24} - 685907x^{23} - 1824913x^{22} + 1824913x^{21} +$ $+3651272x^{20} - 3651272x^{19} - 5475703x^{18} + 5475703x^{17} + 6085132x^{16} - 6085132x^{15} -$ $-4909788x^{14} + 4909788x^{13} + 2786656x^{12} - 2786656x^{11} - 1061566x^{10} + 1061566x^9 +$ $+253044x^8 - 253044x^7 - 33780x^6 + 33780x^5 + 2073x^4 - 2073x^3 - 36x^2 + 36x + 1$ $x^{72} - x^{71} + x^{69} - x^{68} + x^{66} - x^{65} + x^{63} - x^{62} + x^{60} - x^{59} + x^{57} - x^{56} + x^{54} - x^{53} + x^{51} -$ $-x^{50} + x^{48} - x^{47} + x^{45} - x^{44} + x^{42} - x^{41} + x^{39} - x^{38} + x^{36} - x^{34} + x^{33} - x^{31} + x^{30} -$ $-x^{28} + x^{27} - x^{25} + x^{24} - x^{22} + x^{21} - x^{19} + x^{18} - x^{16} + x^{15} - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 -$ $-x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$
112	$x^{24} - 24x^{22} + 252x^{20} - 1520x^{18} + 5813x^{16} - 14672x^{14} + 24648x^{12} - 27104x^{10} + 18646x^8 -$ $-7344x^6 + 1400x^4 - 96x^2 + 1$ $\sum_{k=0}^6 (-1)^k x^{8k}$
113	$\sum_{k=0}^{27} (-1)^k \left[\binom{56-k}{k} x^{56-2k} + \binom{55-k}{k} x^{55-2k} \right] + 1$ $\sum_{k=0}^{112} x^k$
114	$x^{18} + x^{17} - 18x^{16} - 18x^{15} + 134x^{14} + 134x^{13} - 531x^{12} - 531x^{11} + 1198x^{10} + 1198x^9 -$ $-1519x^8 - 1519x^7 + 989x^6 + 989x^5 - 265x^4 - 265x^3 + 20x^2 + 20x + 1$ $x^{36} + x^{35} - x^{33} - x^{32} + x^{30} + x^{29} - x^{27} - x^{26} + x^{24} + x^{23} - x^{21} - x^{20} + x^{18} - x^{16} - x^{15} +$ $+x^{13} + x^{12} - x^{10} - x^9 + x^7 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$

115	$ \begin{aligned} & x^{44} - x^{43} - 44x^{42} + 43x^{41} + 902x^{40} - 859x^{39} - 11441x^{38} + 10582x^{37} + 100567x^{36} - 89985x^{35} - \\ & -650236x^{34} + 560251x^{33} + 3203650x^{32} - 2643399x^{31} - 12294569x^{30} + 9651170x^{29} + 37253225x^{28} - \\ & -27602055x^{27} - 89808680x^{26} + 62206625x^{25} + 172779011x^{24} - 110572386x^{23} - 265002643x^{22} + \\ & +154430258x^{21} + 322457859x^{20} - 168027624x^{19} - 308473797x^{18} + 140446403x^{17} + 228768475x^{16} - \\ & -88323383x^{15} - 128871012x^{14} + 40552321x^{13} + 53558102x^{12} - 13016729x^{11} - 15742859x^{10} + \\ & +2742874x^9 + 3073662x^8 - 347233x^7 - 361455x^6 + 24089x^5 + 21786x^4 - \\ & -986x^3 - 504x^2 + 24x + 1 \\ & \\ & x^{88} - x^{87} + x^{83} - x^{82} + x^{78} - x^{77} + x^{73} - x^{72} + x^{68} - x^{67} + x^{65} - x^{64} + x^{63} - x^{62} + x^{60} - \\ & -x^{59} + x^{58} - x^{57} + x^{55} - x^{54} + x^{53} - x^{52} + x^{50} - x^{49} + x^{48} - x^{47} + x^{45} - x^{44} + x^{43} - \\ & -x^{41} + x^{40} - x^{39} + x^{38} - x^{36} + x^{35} - x^{34} + x^{33} - x^{31} + x^{30} - x^{29} + x^{28} - x^{26} + x^{25} - \\ & -x^{24} + x^{23} - x^{21} + x^{20} - x^{16} + x^{15} - x^{11} + x^{10} - x^6 + x^5 - x + 1 \end{aligned} $
116	$ \begin{aligned} & x^{28} - 29x^{26} + 377x^{24} - 2900x^{22} + 14674x^{20} - 51359x^{18} + 127281x^{16} - 224808x^{14} + \\ & +281010x^{12} - 243542x^{10} + 140998x^8 - 51272x^6 + 10556x^4 - 1015x^2 + 29 \\ & \\ & \sum_{k=0}^{28} (-1)^k x^{2k} \end{aligned} $
117	$ \begin{aligned} & x^{36} - 36x^{34} - x^{33} + 594x^{32} + 33x^{31} - 5952x^{30} - 495x^{29} + 40455x^{28} + 4467x^{27} - 197316x^{26} - \\ & -27054x^{25} + 712529x^{24} + 116154x^{23} - 1937496x^{22} - 364067x^{21} + 3995883x^{20} + \\ & +845295x^{19} - 6247579x^{18} - 1459998x^{17} + 7348878x^{16} + 1867585x^{15} - 6403833x^{14} - \\ & -1746123x^{13} + 4030936x^{12} + 1165464x^{11} - 1761969x^{10} - 534544x^9 + 502173x^8 + \\ & +158337x^7 - 83631x^6 - 27162x^5 + 6471x^4 + 2145x^3 - 108x^2 - 36x + 1 \\ & \\ & x^{72} - x^{69} + x^{63} - x^{60} + x^{54} - x^{51} + x^{45} - x^{42} + x^{36} - x^{30} + x^{27} - x^{21} + x^{18} - x^{12} + \\ & +x^9 - x^3 + 1 \end{aligned} $
118	$ \begin{aligned} & \sum_{k=0}^{14} (-1)^k \left[\binom{29-k}{k} x^{29-2k} - \binom{28-k}{k} x^{28-2k} \right] \\ & \\ & \sum_{k=0}^{58} (-1)^k x^k \end{aligned} $
119	$ \begin{aligned} & x^{48} - x^{47} - 48x^{46} + 47x^{45} + 1080x^{44} - 1034x^{43} - 15136x^{42} + 14148x^{41} + 148091x^{40} - 134931x^{39} - \\ & -1074488x^{38} + 952717x^{37} + 5994444x^{36} - 5163498x^{35} - 26311919x^{34} + 21979367x^{33} + 92220138x^{32} - \\ & -74573322x^{31} - 260447090x^{30} + 203520550x^{29} + 595550236x^{28} - 448955699x^{27} - 1103970115x^{26} + \\ & +801604023x^{25} + 1655619772x^{24} - 1156350782x^{23} - 1998238943x^{22} + 1341017921x^{21} + \\ & +1924029811x^{20} - 1239775442x^{19} - 1459008975x^{18} + 902369642x^{17} + 855733436x^{16} - 507960152x^{15} - \\ & -378612663x^{14} + 215647349x^{13} + 122048196x^{12} - 66587715x^{11} - 27295100x^{10} + 14169142x^9 + \\ & +3952116x^8 - 1909570x^7 - 338276x^6 + 141792x^5 + 15784x^4 - 4584x^3 - 352x^2 + 32x + 1 \\ & \\ & x^{96} - x^{95} + x^{89} - x^{88} + x^{82} - x^{81} + x^{79} - x^{78} + x^{75} - x^{74} + x^{72} - x^{71} + x^{68} - x^{67} + x^{65} - \\ & -x^{64} + x^{62} - x^{60} + x^{58} - x^{57} + x^{55} - x^{53} + x^{51} - x^{50} + x^{48} - x^{46} + x^{45} - x^{43} + x^{41} - \\ & -x^{39} + x^{38} - x^{36} + x^{34} - x^{32} + x^{31} - x^{29} + x^{28} - x^{25} + x^{24} - x^{22} + x^{21} - x^{18} + x^{17} - \\ & -x^{15} + x^{14} - x^8 + x^7 - x + 1 \end{aligned} $
120	$ \begin{aligned} & x^{16} - 16x^{14} + 105x^{12} - 364x^{10} + 714x^8 - 784x^6 + 440x^4 - 96x^2 + 1 \\ & \\ & x^{32} + x^{28} - x^{20} - x^{16} - x^{12} + x^4 + 1 \end{aligned} $

50. táblázat. A páratlan indexű $\Psi_n^{**}(x) = |\Psi_n(ix)\Psi_{2n}(ix)| = |\Psi_n(ix)\Psi_n(-ix)|$ kifejezések listája

n	$\Psi_n^{**}(x)$ (n páratlan)
1	$\sqrt{x^2 + 4}$
3	$x^2 + 1$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$
7	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$
9	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1$
11	$x^{10} + 9x^8 + 28x^6 + 35x^4 + 15x^2 + 1$
13	$x^{12} + 11x^{10} + 45x^8 + 84x^6 + 70x^4 + 21x^2 + 1$
15	$x^8 + 9x^6 + 26x^4 + 24x^2 + 1$
17	$x^{16} + 15x^{14} + 91x^{12} + 286x^{10} + 495x^8 + 462x^6 + 210x^4 + 36x^2 + 1$
19	$x^{18} + 17x^{16} + 120x^{14} + 455x^{12} + 1001x^{10} + 1287x^8 + 924x^6 + 330x^4 + 45x^2 + 1$
21	$x^{12} + 13x^{10} + 64x^8 + 146x^6 + 148x^4 + 48x^2 + 1$
23	$x^{22} + 21x^{20} + 190x^{18} + 969x^{16} + 3060x^{14} + 6188x^{12} + 8008x^{10} + 6435x^8 +$ $+3003x^6 + 715x^4 + 66x^2 + 1$
25	$x^{20} + 20x^{18} + 170x^{16} + 800x^{14} + 2275x^{12} + 4003x^{10} + 4280x^8 + 2605x^6 + 775x^4 + 75x^2 + 1$
27	$x^{18} + 18x^{16} + 135x^{14} + 546x^{12} + 1287x^{10} + 1782x^8 + 1386x^6 + 540x^4 + 81x^2 + 1$

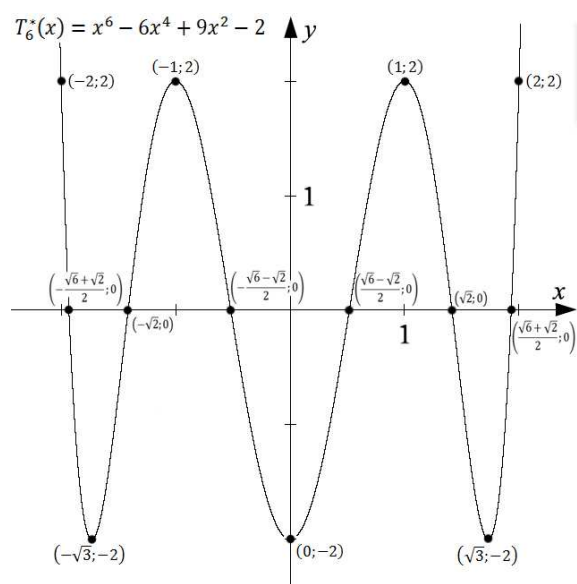
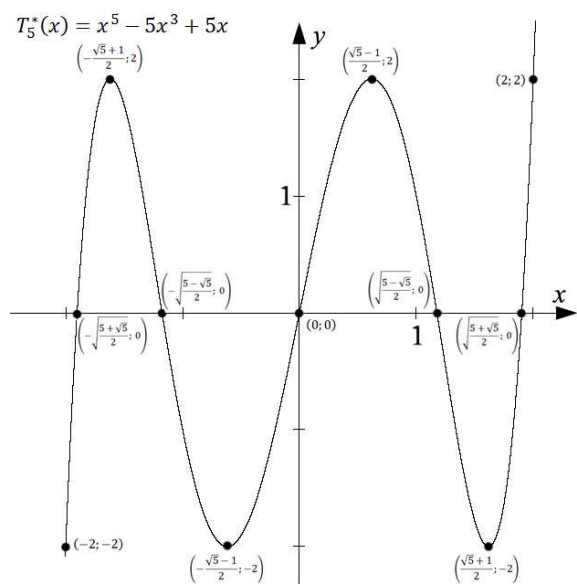
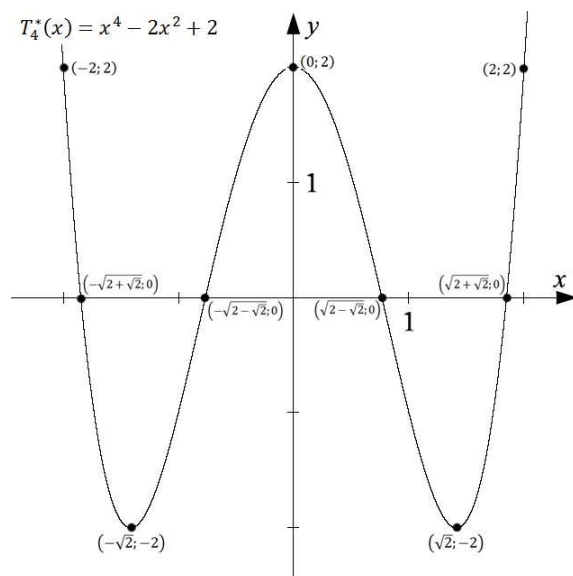
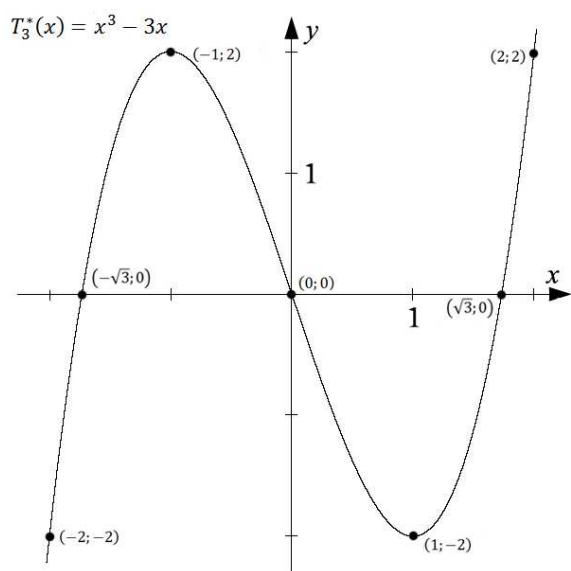
51. táblázat. $T_n^*(x) - h$ lineáris polinom osztói ($h = 0, \pm 1, \pm 2$)

osztó	$T_n^*(x)$	$T_n^*(x) - 2$	$T_n^*(x) + 2$	$T_n^*(x) - 1$	$T_n^*(x) + 1$
$[\Psi_1(x)]^2 = x - 2$		minden n			
$[\Psi_2(x)]^2 = x + 2$		$n \equiv 0 \pmod{2}$	$n \equiv 1 \pmod{2}$		
$\Psi_3(x) = x + 1$		$n \equiv 0 \pmod{3}$			$n \equiv 1 \pmod{3}$ $n \equiv 2 \pmod{3}$
$[\Psi_3(x)]^2 = (x + 1)^2$		$n \equiv 0 \pmod{3}$			
$\Psi_4(x) = x$	$n \equiv 1 \pmod{2}$	$n \equiv 0 \pmod{4}$	$n \equiv 2 \pmod{4}$		
$[\Psi_4(x)]^2 = x^2$		$n \equiv 0 \pmod{4}$	$n \equiv 2 \pmod{4}$		
$\Psi_6(x) = x - 1$		$n \equiv 0 \pmod{6}$	$n \equiv 3 \pmod{6}$	$n \equiv 1 \pmod{6}$ $n \equiv 5 \pmod{6}$	$n \equiv 2 \pmod{6}$ $n \equiv 4 \pmod{6}$
$[\Psi_6(x)]^2 = (x - 1)^2$		$n \equiv 0 \pmod{6}$	$n \equiv 3 \pmod{6}$		

52. táblázat. $U_n^*(x) - h$ lineáris polinom osztói ($h = 0, \pm 1$)

osztó	$U_n^*(x)$	$U_n^*(x) - 1$	$U_n^*(x) + 1$
$\Psi_3(x) = x + 1$	$n \equiv 2 \pmod{3}$	$n \equiv 0 \pmod{3}$	$n \equiv 1 \pmod{3}$
$\Psi_4(x) = x$	$n \equiv 1 \pmod{2}$	$n \equiv 0 \pmod{4}$	$n \equiv 2 \pmod{4}$
$[\Psi_4(x)]^2 = x^2$		$n \equiv 0 \pmod{4}$	$n \equiv 2 \pmod{4}$
$\Psi_6(x) = x - 1$	$n \equiv 2 \pmod{3}$	$n \equiv 0 \pmod{6}$ $n \equiv 1 \pmod{6}$	$n \equiv 3 \pmod{6}$ $n \equiv 4 \pmod{6}$

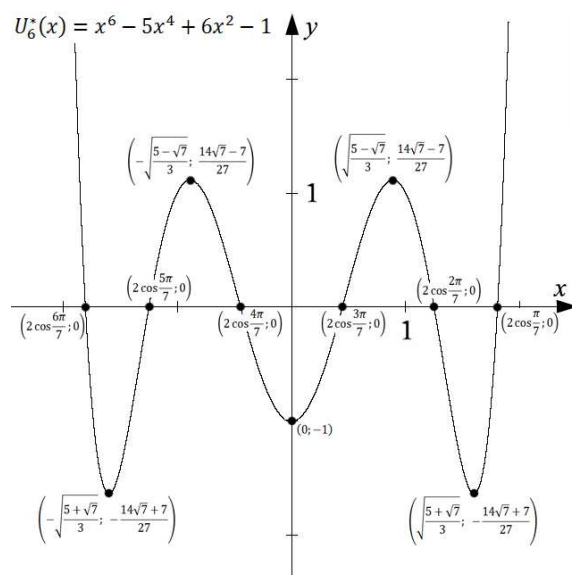
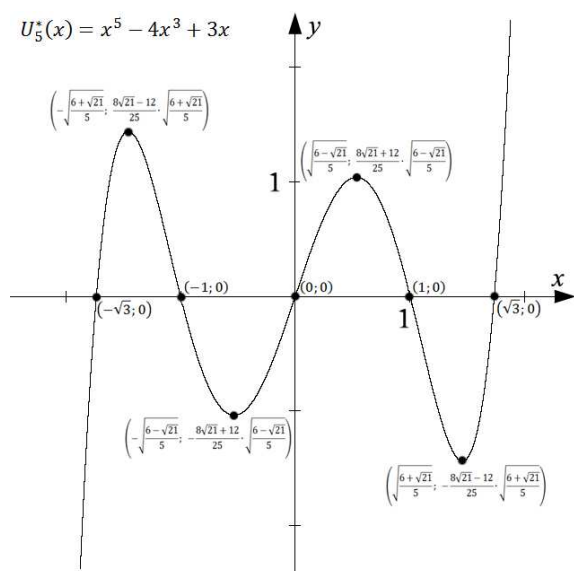
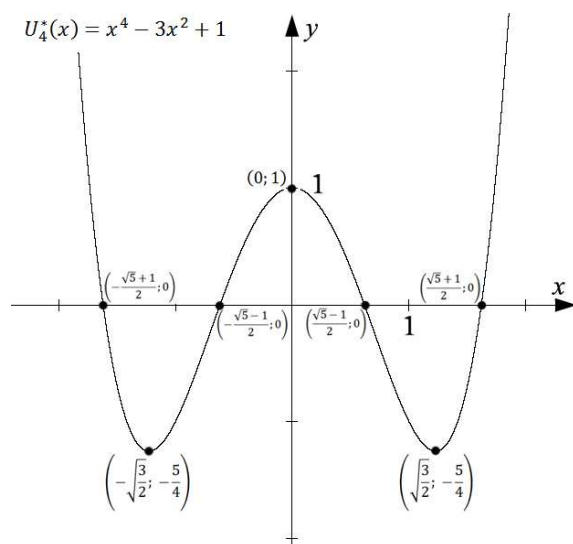
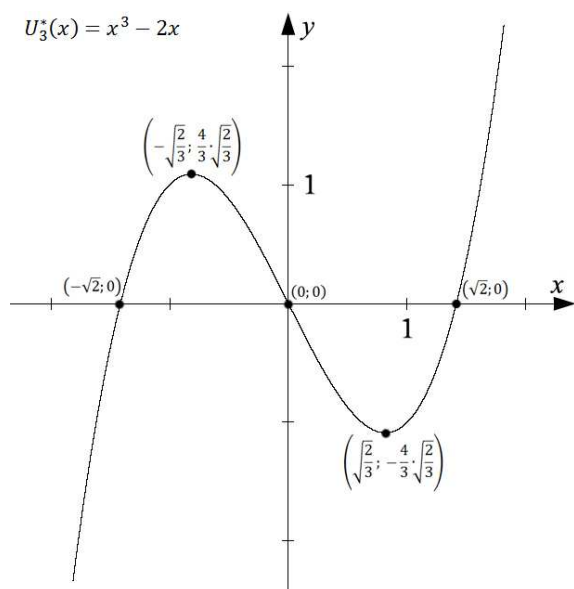
1. ábra. $T_3^*(x)$, $T_4^*(x)$, $T_5^*(x)$ és $T_6^*(x)$ görbéje



53. táblázat. A $T_n^*(x)$ polinom rajzához tartozó adatok $3 \leq n \leq 6$ esetén

	$T_3^*(x)$	$T_4^*(x)$	$T_5^*(x)$	$T_6^*(x)$
gyökök	$\pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73205$ 0	$\pm\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \pm 1,84776$ $\pm\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx \pm 0,76537$	$\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \approx \pm 1,90211$ $\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx \pm 1,17557$ 0	$\pm\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{2} \approx \pm 1,93185$ $\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41421$ $\pm\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{2} \approx \pm 0,51764$
min/max helyek	± 1	$\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41421$ 0	$\pm\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} \approx \pm 1,61803$ $\pm\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \approx \pm 0,61803$	$\pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73205$ ± 1 0
inflexiós pontok	0	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0,81650$	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1,22474$ 0	$\pm\frac{\sqrt{6+\sqrt{21}}}{5} \approx \pm 1,45482$ $\pm\frac{\sqrt{6-\sqrt{21}}}{5} \approx \pm 0,53243$
inflexiós p. fv. értékek	0	$-\frac{2}{9} \approx -0,22222$	$\approx \mp 0,30619$ 0	$\approx -0,34796$ $\approx 0,09196$

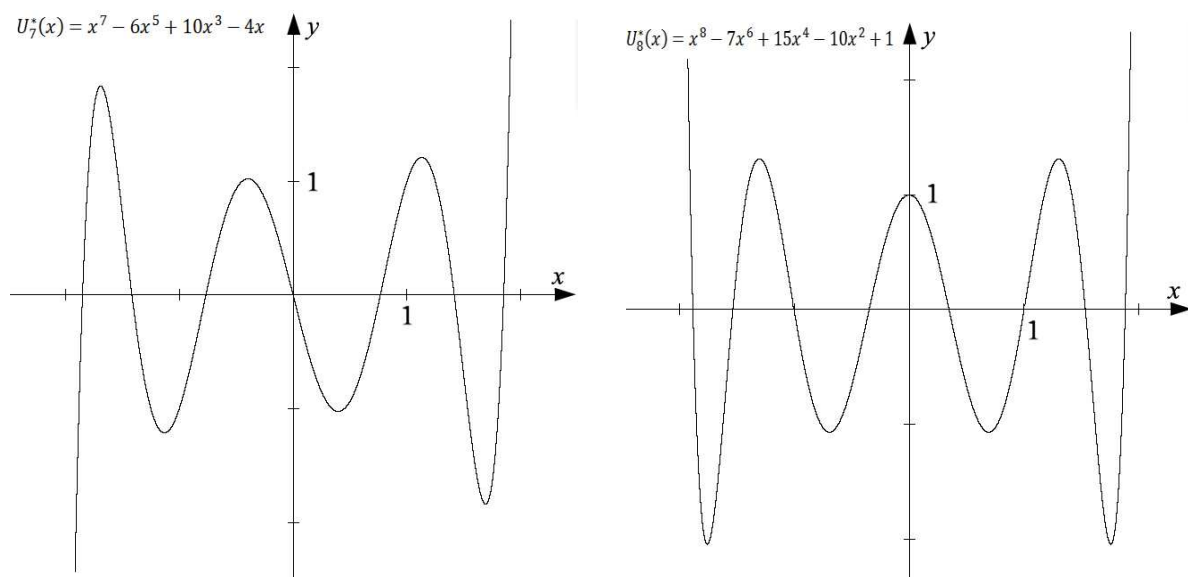
2. ábra. $U_3^*(x)$, $U_4^*(x)$, $U_5^*(x)$ és $U_6^*(x)$ görbéje



54. táblázat. Az $U_n^*(x)$ polinom rajzához tartozó adatok $3 \leq n \leq 6$ esetén

	$U_3^*(x)$	$U_4^*(x)$	$U_5^*(x)$	$U_6^*(x)$
gyökök	$\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41421$ 0	$\pm\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} \approx \pm 1,61803$ $\pm\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \approx \pm 0,61803$	$\pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73205$ $\pm 1,00000$ 0	$\pm 2 \cos \frac{\pi}{7} \approx \pm 1,80194$ $\pm 2 \cos \frac{2\pi}{7} \approx \pm 1,24698$ $\pm 2 \cos \frac{3\pi}{7} \approx \pm 0,44504$
min/max helyek	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0,81650$	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1,22474$ 0	$\pm\frac{\sqrt{6+\sqrt{21}}}{5} \approx \pm 1,45482$ $\pm\frac{\sqrt{6-\sqrt{21}}}{5} \approx \pm 0,53243$	$\pm\frac{\sqrt{5+\sqrt{7}}}{3} \approx \pm 1,59643$ $\pm\frac{\sqrt{5-\sqrt{7}}}{3} \approx \pm 0,88586$ 0
min/max értékek	$\mp\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \mp 1,08866$	$-\frac{5}{4} = 1,25$ 1	$\approx \mp 1,43507$ $\approx \pm 1,03634$	$\approx -1,59643$ $\approx 1,11261$ -1
inflexiós pontok	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,70711$	$\pm\sqrt{\frac{6}{5}} \approx \pm 1,09545$ 0	$\pm\frac{\sqrt{5+\sqrt{15}}}{5} \approx \pm 1,33214$ $\pm\frac{\sqrt{5-\sqrt{15}}}{5} \approx \pm 0,47477$
inflexiós p. fv. értékek	0	$-\frac{1}{4} = -0,25$	$\approx \mp 0,39436$ 0	$\approx -0,50984$ $\approx 0,10984$

3. ábra. $U_7^*(x)$ és $U_8^*(x)$ görbéje



55. táblázat. Az $U_n^*(x)$ polinom rajzához tartozó adatok $7 \leq n \leq 8$ esetén

	$U_7^*(x)$	$U_8^*(x)$
gyökök	$\pm 2 \cos \frac{\pi}{8} \approx \pm 1,84776$ $\pm 2 \cos \frac{\pi}{4} \approx \pm 1,41421$ $\pm 2 \cos \frac{3\pi}{8} \pm 0,76537$ 0	$\pm 2 \cos \frac{\pi}{9} \approx \pm 1,87939$ $\pm 2 \cos \frac{2\pi}{9} \approx \pm 1,53209$ ± 1 $\pm 2 \cos \frac{4\pi}{9} \approx \pm 0,34730$
min/max	$\pm \sqrt{\frac{2\sqrt{30} \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{8}{5\sqrt{30}}\right] + 10}{7}} \approx \pm 1,68950$	$\pm \sqrt{\frac{6 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{1}{9}\right] + 7}{4}} \approx \pm 1,75384$
helyek	$\pm \sqrt{\frac{2\sqrt{30} \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{8}{5\sqrt{30}} - \frac{2\pi}{3}\right] + 10}{7}} \approx \pm 1,12880$	$\pm \sqrt{\frac{6 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{1}{9} - \frac{2\pi}{3}\right] + 7}{4}} \approx \pm 1,30167$
	$\pm \sqrt{\frac{2\sqrt{30} \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{8}{5\sqrt{30}} + \frac{2\pi}{3}\right] + 10}{7}} \approx \pm 0,39638$	$\pm \sqrt{\frac{6 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{1}{9} + \frac{2\pi}{3}\right] + 7}{4}} \approx \pm 0,69259$
		0
min/max	$\approx \mp 1,83325$	$\approx -2,03912$
értékek	$\approx \pm 1,20698$	$\approx 1,31121$
	$\approx \mp 1,01991$	$\approx -1,06506$
		1
inflexiós	$\pm \frac{\sqrt{10+\sqrt{30}}}{7} \approx \pm 1,48695$	$\pm \sqrt{\frac{2\sqrt{385} \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{7}{\sqrt{385}}\right] + 35}{28}} \approx \pm 1,59367$
pontok	$\pm \frac{\sqrt{10-\sqrt{30}}}{7} \approx \pm 0,80381$	$\pm \sqrt{\frac{2\sqrt{385} \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{7}{\sqrt{385}} - \frac{2\pi}{3}\right] + 35}{28}} \approx \pm 1,03923$
	0	$\pm \sqrt{\frac{2\sqrt{385} \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{7}{\sqrt{385}} + \frac{2\pi}{3}\right] + 35}{28}} \approx \pm 0,36084$
		0
inflexiós p.	$\approx -0,61362$	$\approx -0,71155$
fv. értékek	$\approx 0,18172$	$\approx 0,23850$
	0	$\approx -0,06290$

56. táblázat. A $V_n^*(x)$ polinom gyökei és szélsőértékei $3 \leq n \leq 8$ esetén

	$V_3^*(x)$	$V_4^*(x)$	$V_5^*(x)$	$V_6^*(x)$	$V_7^*(x)$	$V_8^*(x)$
gyökök	-1,24698	-1,53209	-1,68251	-1,77091	-1,82709	-1,86494
	0,44504	-0,34730	-0,83083	-1,13613	-1,33826	-1,47802
	1,80194	1	0,28463	-0,24107	-0,61803	-0,89148
		1,87939	1,30972	0,70921	0,20906	-0,18454
			1,91899	1,49702	1	0,54733
				1,94188	1,61803	1,20527
					1,95630	1,70043
						1,96595
min/max	-0,54858	-1,07597	-1,36551	-1,53908	-1,65065	-1,72637
helyek	1,21525	0,30566	-0,32294	-0,74163	-1,02691	-1,22762
		1,52031	0,81125	0,22005	-0,22884	-0,56506
			1,67719	1,12581	0,60566	0,17190
				1,76818	1,33234	0,88376
					1,82554	1,47439
						1,86400
min/max	1,63113	-2,03912	2,45754	-2,88118	3,30783	-3,73638
értékek	-1,11261	1,31121	-1,53562	1,77151	-2,01359	2,25942
		-1,06506	1,19076	-1,33912	1,49862	-1,66447
			-1,04259	1,13029	-1,23753	1,35512
				-1,03011	1,09512	-1,17695
					-1,02244	1,07270
						-1,01738

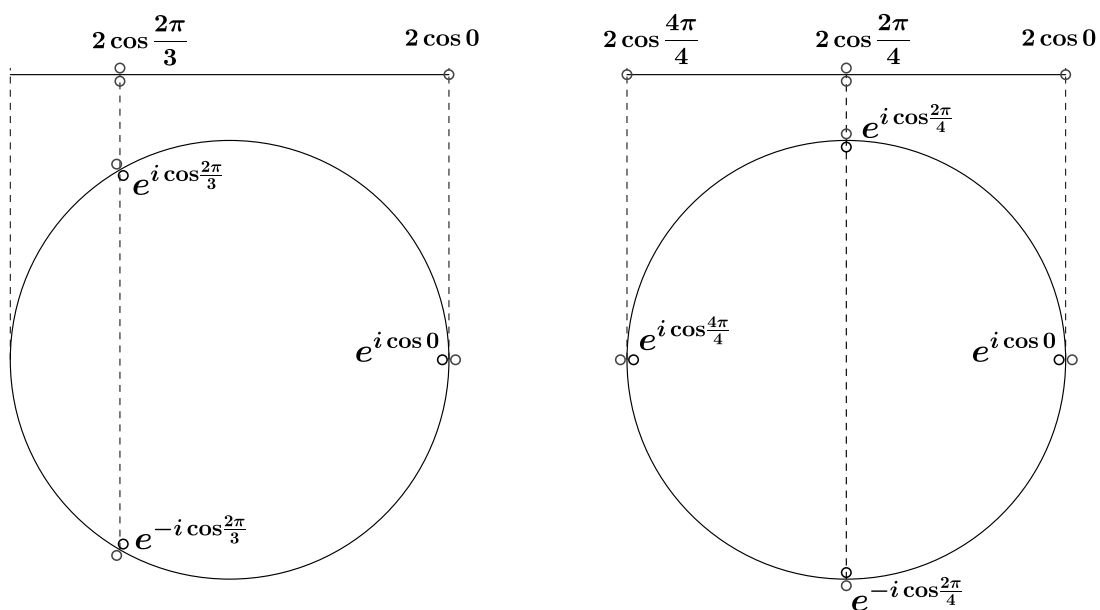
57. táblázat. $T_n^*(x) - h$ ($h = \pm 2, 0, \pm 1$) gyökei

	a (51) képlet szerint nyert gyökök	gyökök monoton csökkenő sorrendben
$T_n^*(x) - 2$	$2 \cos \frac{2k\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$	$2 \cos \frac{2k\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$
$T_n^*(x) + 2$	$2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$	$2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)$
$T_n^*(x)$	$2 \cos \frac{(2k+1/2)\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$	$2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$
$T_n^*(x) - 1$	$2 \cos \frac{(2k+1/3)\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$	$2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{3n}, (k = 0, 2, 3, 5, \dots, \lfloor \frac{3n-2}{2} \rfloor)$
$T_n^*(x) + 1$	$2 \cos \frac{(2k+2/3)\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$	$2 \cos \frac{(2k+2)\pi}{3n}, (k = 0, 1, 3, 4, \dots, \lfloor \frac{3n-3}{2} \rfloor)$

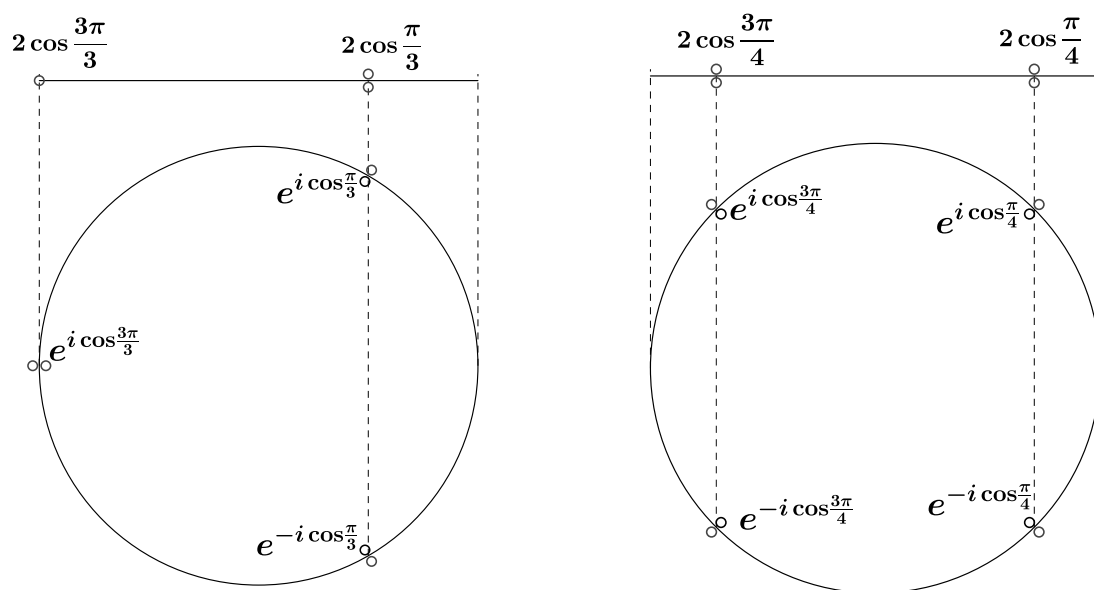
58. táblázat. $U_n^*(x) - h$ ($h = 0, \pm 1$) gyökei

polinom	gyökök sora
$U_n^*(x)$	$2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, (k = 1, \dots, n)$
$U_n^*(x) - 1$	$2 \cos \frac{2k\pi}{n}, (k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor); 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n+2}, (k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$
$U_n^*(x) + 1$	$2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor); 2 \cos \frac{2k\pi}{n+2}, (k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)$

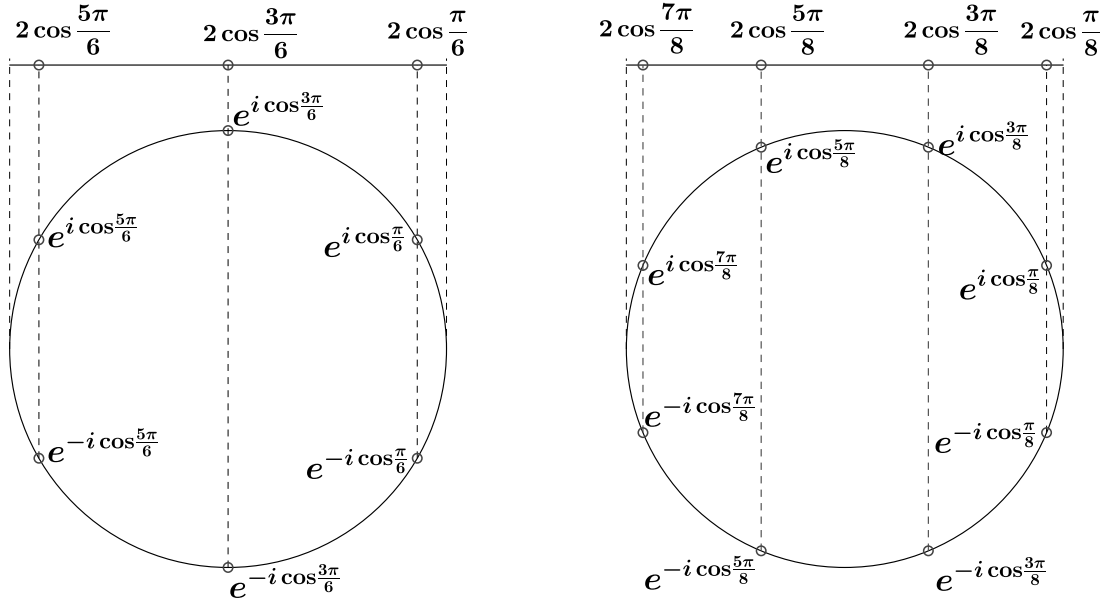
4. ábra. $T_n^*(x) - 2$ és $\overline{T_n^*(x) - 2} = (x^n - 1)^2$ gyökei



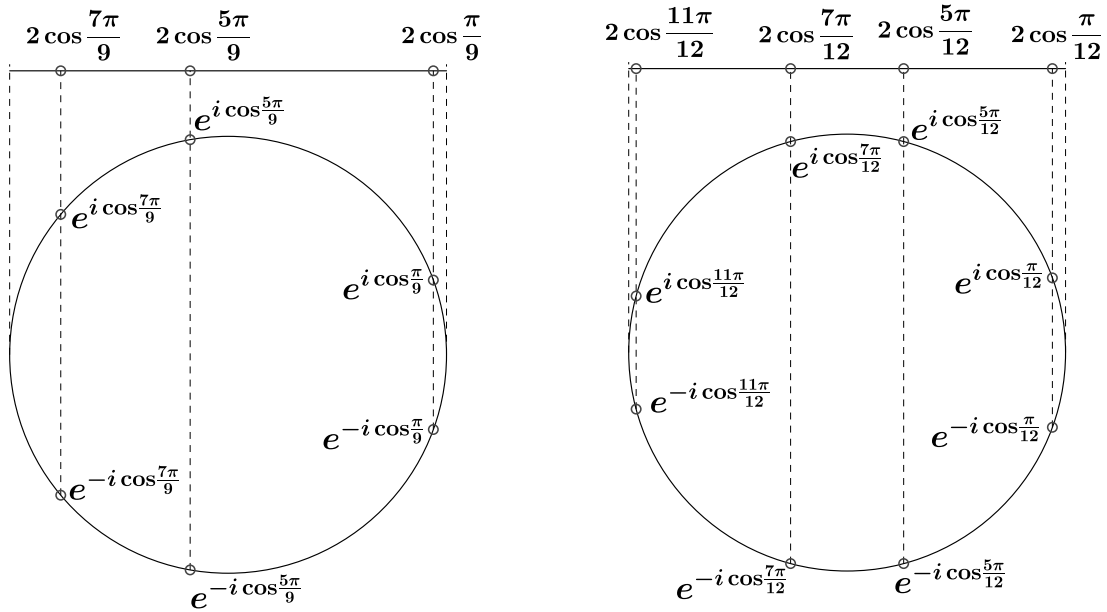
5. ábra. $T_n^*(x) + 2$ és $\overline{T_n^*(x) + 2} = (x^n + 1)^2$ gyökei



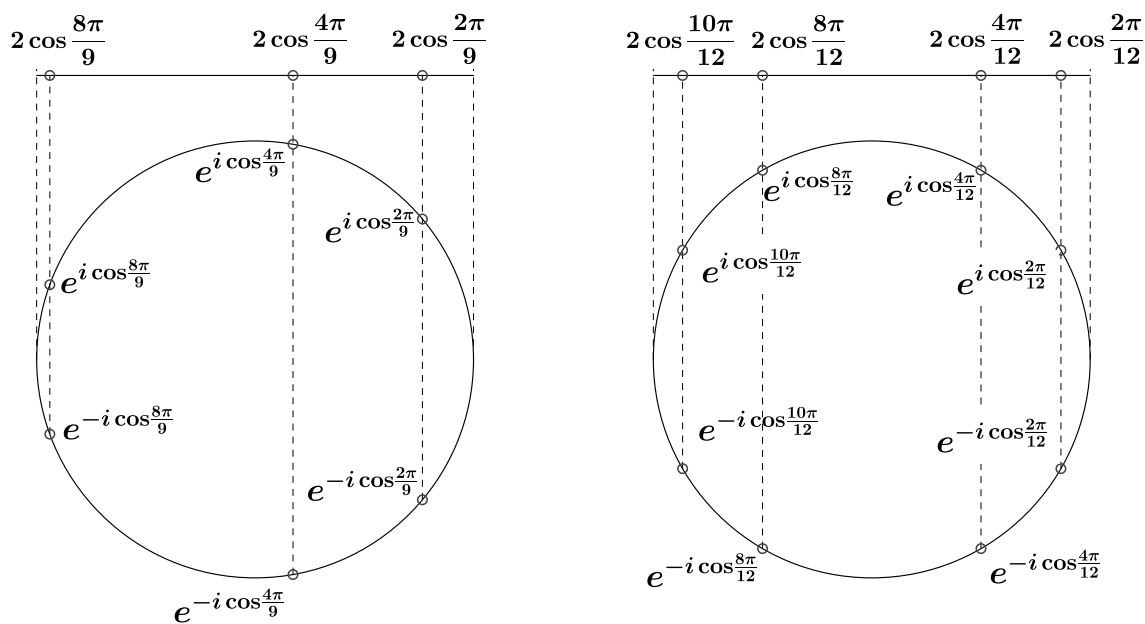
6. ábra. $T_n^*(x)$ és $\overline{T_n^*(x)} = x^{2n} + 1$ gyökei



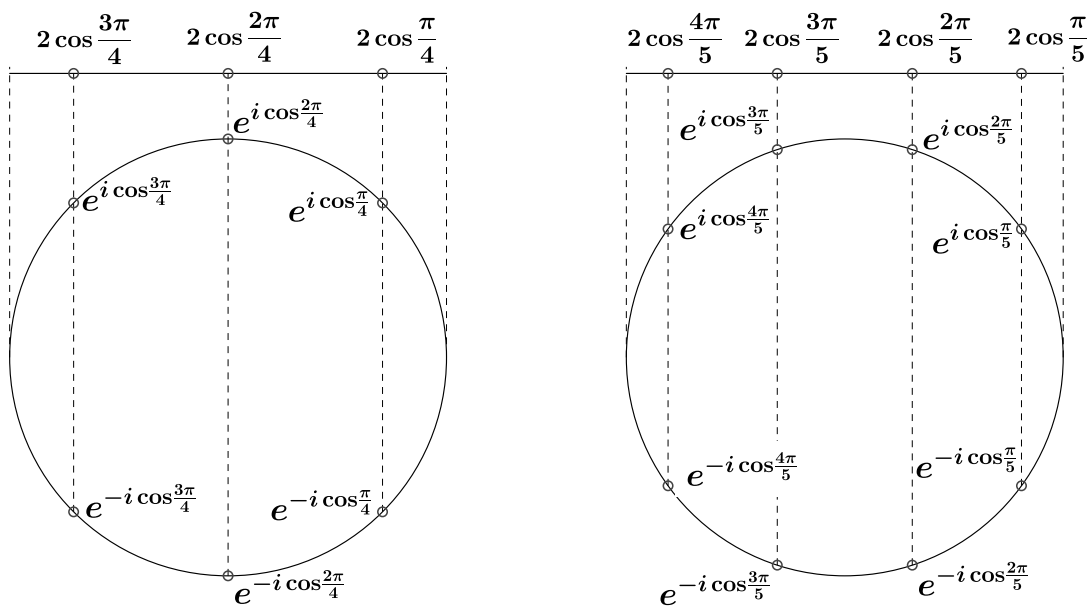
7. ábra. $T_n^*(x) - 1$ és $\overline{T_n^*(x) - 1} = x^{2n} - x^n + 1$ gyökei



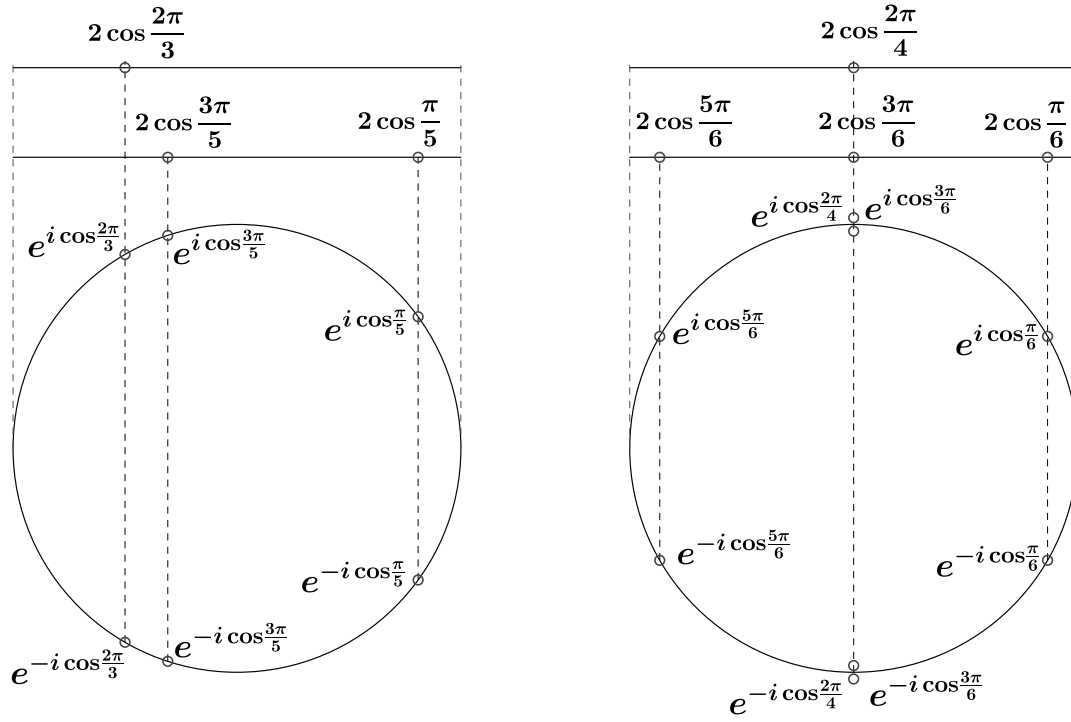
8. ábra. $T_n^*(x) + 1$ és $\overline{T_n^*(x) + 1} = x^{2n} + x^n + 1$ gyökei



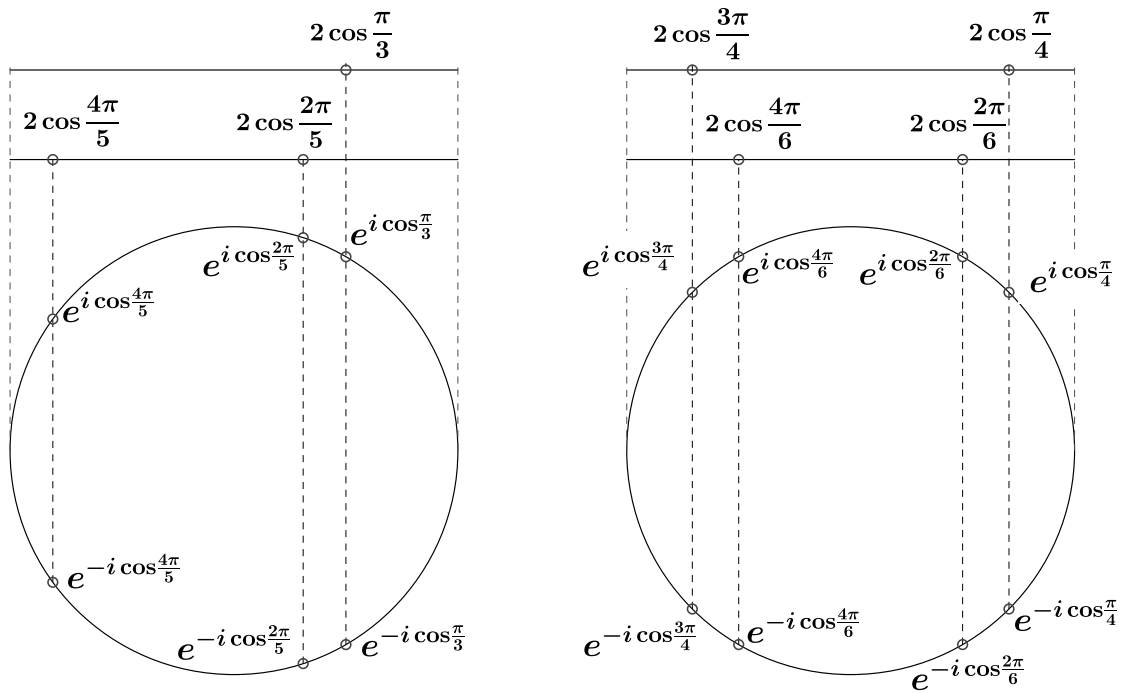
9. ábra. $U_n^*(x)$ és $\overline{U_n^*(x)} = \sum_{k=0}^n x^{2k}$ gyökei



10. ábra. $U_n^*(x) - 1$ és $\overline{U_n^*(x) - 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k} - x^n$ gyökei



11. ábra. $U_n^*(x) + 1$ és $\overline{U_n^*(x) + 1} = \sum_{k=0}^n x^{2k} + x^n$ gyökei



Hivatkozások

- [1] Belbachir, H. és Szalay, L., *Fibonacci, and Lucas Pascal triangles*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **45** (5) (2016) 1231–1240.
- [2] Hsiao, H. J., *On factorization of Chebyshev's polynomials of the first kind*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica **12** (1) (1984) 89–94.
- [3] Kearnes, K. Kiss, E. és Szendrei, Á., *Gauss-egészek és Dirichlet tétele, 2. rész*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (2010 április).
<https://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/wp-content/uploads/2014/11/Dirichlet2.pdf>
- [4] Kéri, G., *Többszörös szögek táblázatai*, MTA SZTAKI, 1997.
<http://old.sztaki.hu/~keri/math/mult.htm>
- [5] Kéri, G., *Compressed Chebyshev Polynomials and Multiple-Angle Formulas*, Omniscritum Publishing Group, 2021.
- [6] Kéri, G., *Compressed Chebyshev Polynomials and Multiple-Angle Formulas II*, Omniscritum Publishing Group, 2022.
- [7] Kéri, G. és Szilágyi, F., *Trigonometric/hyperbolic method versus Cardano's formula for solving the cubic equation*, Chapter 1 (5–14. old.) in [5].
- [8] Mason, J. C. és Handscomb, D. C., *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2003).
- [9] Natanszon, I. P., *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- [10] Niven, I. M., *Irrational Numbers*, The Carus Mathematical Monographs, No. 11. The Mathematical Association of America, Wiley, New York (1956).
- [11] Rivlin, T. J., *The Chebyshev Polynomials—From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, Wiley-Interscience, John Wiley, (1990).
- [12] Sloane, N. J. A., The on-line encyclopedia of integer sequences,
<http://www.research.att.com/~njas/sequences>.
- [13] Witula, R. és Słota, D. *On modified Chebyshev polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006) 321–343.
- [14] eMathHelp: Equation Solver
<https://www.emathhelp.net/calculators/algebra-2/equation-solver-calculator/>
- [15] Factoring Polynomials Calculator - eMathHelp
<https://www.emathhelp.net/calculators/algebra-1/factoring-polynomials-calculator/>
- [16] Polynomial Factorization
<https://www.dcode.fr/polynomial-factorization>
- [17] Wikipedia, the free encyclopedia: Abel–Ruffini theorem
https://en.wikipedia.org/wiki/Abel–Ruffini_theorem
- [18] Wikipédia, a szabad enciklopédia: Euler-függvény
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Euler-függvény>
- [19] Wikipédia, a szabad enciklopédia: Csebisev-polinomok
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Csebisev-polinomok>

- [20] Wikipedia, the free encyclopedia: Chebyshev polynomials
https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials
- [21] Wikipédia, a szabad enciklopédia: Körosztási polinom
https://hu.wikipedia.org/wiki/Körosztási_polinom
- [22] Wikipedia, the free encyclopedia: Cyclotomic polynomial
https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclotomic_polynomial
- [23] Wolfram MathWorld: Lucas Polynomial
<https://mathworld.wolfram.com/LucasPolynomial.html>