A HÁROMSZÖG

Összeállította:

Dr. Bártfai Pál

Javítás, ellenőrzés alatt álló kézirat
Legutolsó frissítés: 2023.04.01.

2023.

Előszó

Sokáig kacérkodtam a tréfásnak tekinthető alcímmel: „amit a háromszögről tudni illik”. De azért ez erős túlzás! „Amit a háromszögről tudni érdemes” alcím pedig túl banális, így az alcímet elhagytam. Pedig az alcímek fejezik ki a lényeget! A háromszögben több ezer (!) nevezetes pontot definiáltak, és a nevezetes vonalaknak, köröknek is se szeri se száma, ezek közül kellett kiválasztani azokat, amelyekkel érdemes foglalkozni, és a tudnivalókat is hasonlóan selejtezni kellett. A célom mindenesetre az volt, hogy bizonyításokkal, bizonyítási technikákkal együtt összegyűjtsem a lényegesebb tudnivalókat a háromszögről, és ezeket feldolgozva közzétegyem. Itt, az olvasókat tekintve elsősorban a matematikai versenyekre felkészülő fiatalokra, felkészítő tanárokra gondoltam.

Kaptam ilyen kérdéseket: „Mit lehet a háromszögről mondani? Hiszen már Euklidesz mindent tudott róla!” Ez így távolról sem igaz. A XVIII. és XIX. században felvirágzott a háromszög geometriája, gondoljunk pl. a Napoleon-tétel témakörére (13. fejezet). A XX. század termékei a szimmedián ponttal kapcsolatos eredmények (16. fejezet), olyannyira, hogy pl. a T16.9. tétel, ami itt következményként adódik, keletkezése 1999.

G. H. Hardy cambridge-i matematikus írja:

> „A matematikus munkája legyen szép, mint a festőé vagy a költőé, az ötletek, akárcsak a színek vagy szavak, alkossanak harmonikus egységet. A szépség az első próba; a csúnya matematika nem maradandó a világban.”

Az anyag összeállítása során rengeteg szépséggel, meglepetéssel találkoztam. Fantasztikus, már-már misztikus összefüggésekre, tulajdonságokra derült fény. Kiemelném a beírt és hozzáírt körök többé-kevésbé ismert témakörét (5. fejezet), a Napóleon-témakört (13. fejezet), a szimmedián tulajdonságait (16. fejezet) és a „Dél keresztje” konfigurációt (17. fejezet). Ugyancsak érdeklődésre tarthat számot a nevezetes pontok egybeesési tétele is (18. fejezet). Mindez a geometriai érdekességeket kedvelők számára biztosan élvezetes olvasmányt jelent. Jól használható az összeállítás képletgyűjteményként, ugyanakkor megtalálhatók benne a háromszög középiskolában megismert tulajdonságai, formulái is. A szépség a bizonyítások vonatkozásában is vezérfonal. A bizonyítási technikákat tekintve az elemi geometria mellett a trigonometria, a vektorok és a baricentrikus koordináták képezik az arzenált, tehát a bizonyítások megértéséhez eléggé széleskörű matematikai ismeretekre van szükség.

A leírás nem tartalmaz ábrákat, mindig papírral és íróeszközzel felszerelve kell az összeállítást olvasni, és az ábrákat el kell készíteni hozzá. Ehhez minden segítséget megadunk. Mindig feltételezzük, hogy adott egy ABC háromszög, melynek A-nál lévő szöge α, A-val szemközti oldala a, B-nél lévő szöge β, B-vel szemközti oldala b, C-nél lévő szöge γ, C-vel szemközti oldala c. Nem okoz félreértést, ha az a oldal hosszát is a-val jelöljük. Állandó jelöléseket fogunk használni a háromszög nevezetes pontjaira és vonalaira is, ezeket első előfordulásukkor rögzítjük. A további jelöléseket fejezetenként részletesen elmondjuk.

Az állításokat (tételeket) T kezdőbetűvel és számozással jelöljük, és így hivatkozunk rájuk. Előfordul előre hivatkozás is, de ez a bizonyítások érvényességét sohasem veszélyezteti. A T-vel jelölt állítások sokszor több rokon állítást is tartalmaznak. Egyes esetekben, és ekkor felhívjuk a figyelmet erre, több ábrát is kell készíteni ugyanahhoz a gondolatsorhoz a háromszög típusának megfelelően.

Az anyag gyűjtése hosszas munka volt. Hálás köszönetet mondok dr. Bölcsföldi József tanár úrnak, aki végig kitartott mellettem és gondosan átnézte az összeállítást és tanácsokkal segített.

Minden kedves érdeklődőnek meglepetésekkel teli élvezetes olvasást (és firkálást) kívánok.

Bártfai Pál

Tartalomjegyzék

1. A háromszögről általában

1.1. *Alaptétel a szögekre*

Nem tekintjük háromszögnek az elfajult háromszögeket, melyeknél a három csúcspont egy egyenesre esik.

T1.1. Szögösszeg tétel. A háromszög belső szögeinek összege 180°.

B. Kössük össze a háromszög oldalfelező pontjait! Ezzel a háromszöget négy egybevágó, az eredetihez hasonló, háromszögre bontottuk fel. Az alap felezőpontjában három szög keletkezik, melyek a háromszög szögeivel egyenlők. Összességükben egyenesszöget alkotnak, tehát a három szög összege 180°. ♠

1.2. *A háromszögek osztályozása, elnevezések*

Speciális háromszögek az oldalak hossza szerint:

Egyenlőszárú a háromszög, ha két oldala egyenlő hosszúságú. A két egyenlő oldalt szárnak, a harmadik oldalt alapnak mondjuk.

Ha mindhárom oldala egyenlő, akkor egyenlő oldalú vagy szabályos háromszögnek nevezzük.

T1.2. Az egyenlőszárú háromszög tengelyesen szimmetrikus a szárak által bezárt szög szögfelezőjére, így az alapon lévő szögei is egyenlők. Az előbbi szögfelező merőleges az alapra.

B. A szögfelező két egybevágó háromszögre bontja az eredeti háromszöget, hiszen részháromszögek két-két oldalának hossza és az oldalak által bezárt szög megegyezik. Így a szögfelezőnek az alappal bezárt két szöge is egyenlő, vagyis derékszög. Az alap két szelete is egyenlő, tehát az alapon lévő egyik csúcs szögfelezőre vonatkozó tükörképe a másik csúcs. ♠

Háromszögek osztályozása szögeik szerint:

Hegyesszögű a háromszög, ha minden szöge hegyesszög.

Derékszögű a háromszög, ha van 90°-os szöge.

Tompaszögű a háromszög, ha van 90°-nál nagyobb szöge.

A derékszögű háromszög derékszöggel szemben fekvő oldalát átfogónak, a másik két oldalt befogónak nevezzük.

T1.3. Az átfogó hosszabb, mint a befogó.

B. Jelöljük a háromszög csúcsait *A*, *B* és *C*-vel, úgy hogy *C* a derékszögnél lévő csúcs legyen. Az *AC* távolságot mérjük rá az *A*-ból kiinduló *B*-n áthaladó félegyenesre, a kapott pont legyen *D*. Mivel az *ACD*Δ egyenlőszárú, a *C*-nél lévő szöge kisebb, mint 90° (lásd T1.2), ezért az *AD* szakasz az *ABC*Δ-ben halad, vagyis *D* pontja az *AB* szakasznak. $D \neq B$, mert az *ACD* szög nem lehet derékszögű, ezért $\overline{AB} > \overline{AD} = \overline{AC}$. ♠

1.3. *A háromszög egyenlőtlenség*

T1.4. Háromszög-egyenlőtlenség. A háromszögben két oldal hosszának az összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.

B. Vetítsük rá merőlegesen az *AB* és az *AC* odalakat a *BC* egyenesére. A vetületek lefedik az *BC* szakaszt, de T1.3. miatt a vetületek rövidebbek, mint a vetített oldal, ezért $\overline{BC}$ is rövidebb, mint $\overline{AB}+\overline{AC}$. ♠

Ezt elég a legnagyobb oldalra ellenőrizni: elég, ha a két kisebb oldal hosszának összege nagyobb, mint a legnagyobb oldal hossza, a háromszög ekkor már megszerkeszthető.

Az alábbi állítás a „két pont között a legrövidebb út az egyenes" aktuális megfogalmazása.

T1.5. Két pontot törött vonallal összekötve – és feltételezve, hogy a törött vonal nem egyezik meg a két pontot összekötő szakasszal – hosszabb utat kapunk, mint az egyenessel történő összekötés esetén. (Törött vonal: véges sok, de legalább kettő, egyenes szakasz folytatólagos egymáshoz illesztése.)

B. Az *A* és *B* pontokat összekötő törött vonal legyen $AP_1P_2\ldots P_nB$, és a feltétel szerint van olyan P_i, amelyik nem pontja az *AB* szakasznak. A bizonyítás *n* szerinti teljes indukcióval történik. $n = 1$ esetén az állítás megegyezik T1.4.-gyel. Tegyük fel, hogy $k < n$ esetén az állítás igaz, akkor az $AP_1P_2\ldots P_i$, törött vonal hossza nem lehet kisebb, mint $\overline{AP_i}$, és a $P_iP_{i+1}\ldots P_nB$ törött vonal hossza nem lehet kisebb, mint $\overline{P_iB}$, és $\overline{AP_i}+\overline{P_iB}>\overline{AB}$. ♠

1.4. *Szerkesztő vonalak: a szakaszfelező merőleges*

Az elnevezése megadja a jelentését: az *AB* szakasz felezőpontján áthaladó *AB*-re merőleges egyenes.

T1.6. Az *AB* szakasz *h* felező merőlegese azon *P* pontok mértani helye (halmaza), melyre

$$\overline{PA}=\overline{PB}.$$

h a síkot két félsíkra bontja, ha *P* abban a félsíkban van, amelyikben *A*, és *P* nincs rajta a *h* egyenesen, akkor $\overline{PA}<\overline{PB}$. ♠

B. Ha *P* a *h* egyenesre esik, akkor az ábra *h*-ra tengelyesen szimmetrikus, így $\overline{PA}=\overline{PB}$. Ha *P* nincs rajta *h*-n, és arra a félsíkra esik, amelyiken *A* van, akkor *PB* metszi *h*-t. A metszéspontot jelöljük *Q*-val. T1.4-et felhasználva

$$\overline{PB}=\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{PQ}+\overline{QA}>\overline{PA}.$$

T1.7. A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.

B. Ha $b > c$ a háromszögben, akkor az *A* pont a *BC* oldal felező merőlegesének arra az oldalára esik, amelyikben *B* van. Az *AC* oldal tehát metszi a felező merőlegest egy *Q* pontban. Ezért a *CBQ* szög, ami megegyezik az *BCA* szöggel kisebb, mint a *CBA* szög. ♠

1.5. *Szerkesztő vonalak: a szögfelező*

A szögfelező két, egy pontból kiinduló félegyenes által alkotott szög felező egyenese. Két egyenes azonban négy szöget képez, aminek két felező egyenese van. Azt a szögfelező egyenest, amelyiknek nincs közös pontja a szögtartomány belsejével, a szög külső szögfelezőjének nevezzük (megkülönböztetésül a másikat belső szögfelezőnek is nevezhetjük).

T1.8. A külső és a belső szögfelező merőleges egymásra.

B. Az a és b egyenesek két szöget képeznek, melyek összege 180°. A szögfelezők szöge ezen szögek felezéséből kapott szögekből tevődik össze, tehát összegük 90°. ♠

T1.9. Adott két egyenes, a és b. Azon pontok mértani helye, melyek egyenlő távol vannak a két egyenestől, a két szögfelező egyenes pontjainak egyesített halmaza. A szögfelezők a síkot négy részre osztják, ha valamelyik nyílt részben felveszünk egy P pontot, akkor P ahhoz az egyeneshez van közelebb, amelyik a nyílt síkrészen áthalad.

B. Az a, b egyenesek és az f és f_1 szögfelezők a síkot nyolc részre osztják. Tegyük fel, hogy P abban a sík-nyolcadban van, amelyet a és f határol. Bocsássunk merőlegeseket P-ből a-ra és b-re, és jelöljük a talppontokat A-val és B-vel. A PB szakasz ki kell lépjen a sík-nyolcadból, így vagy f-et, vagy a-t metszi (csak az egyiket), a metszéspont legyen Q.

Ha Q az f egyenesen van, akkor Q-ból bocsássunk merőlegest a-ra, melynek talppontja legyen R. Ezen jelölésekkel

$$\overline{PB} = \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{PQ} + \overline{QR} > \overline{PR} \geq \overline{PA}$$

a T1.4. ésT1.3. miatt.

Ha Q az a-n van, akkor még egyszerűbb a helyzet: $\overline{PB} > \overline{PQ} > \overline{PA}$. ♠

Pont és egyenes távolsága a pontot és az egyenest összekötő legrövidebb szakasz hosszát jelenti. T1.3. szerint ez a merőleges összekötő szakasz hossza.

Ahhoz, hogy a T1.9.-et használjuk a szögfelezők meghatározására, először a pont és az egyenes távolságát kell megoldani. Az egyenes normálvektora eredetileg tetszőleges olyan vektor, mely merőleges az egyenesre. Ha adott az egyenes egyenlete, akkor célszerű ezt a definíciót leszűkíteni, és a nullára redukált $ax + by + c = 0$ egyenlethez az $\boldsymbol{n} = (a, b)$ normálvektort hozzárendelni és ezt nevezni az egyenlet normálvektorának.

T1.10. Legyen az egyenes egyenlete $ax + by + c = 0$, a külső pont $A = (x_0, y_0)$. Az egyenes normálvektorát jelöljük $\boldsymbol{n}$-nel, tehát $\boldsymbol{n} = (a, b)$. Az A pont előjeles távolsága az egyenestől

$$d = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(ax_0 + by_0 + c),$$

ahol pozitív távolság esetén az A pont az egyenesnek arra az oldalára esik, amerre $\boldsymbol{n}$ mutat, negatív esetben a másikra.

Más szavakkal, ha az egyenes nullára redukált egyenletébe behelyettesítjük a külső pont koordinátáit, akkor a normál vektor hosszának d-szeresét kapjuk.

B. Fel fogjuk használni a vektorok skalárszorzatára vonatkozó $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ összefüggést, ahol φ a két vektor által bezárt szög. Vegyünk fel egy tetszőleges $P = (x, y)$ pontot az egyenesen, képezzük az $\boldsymbol{n}$ és a PA vektor skaláris szorzatát, és alkalmazzuk az előbbi azonosságot:

$$\boldsymbol{n}(x_0 - x, y_0 - y) = |\boldsymbol{n}|\cdot\left|(x_0 - x, y_0 - y)\right|\cos\varphi,$$

$$ax_0 - ax + by_0 - by = |\boldsymbol{n}| \cdot d,$$

de $ax + by = -c$, tehát

$$ax_0 + by_0 + c = |\boldsymbol{n}| \cdot d. \quad ♠$$

Tegyük fel, hogy a szögfelezők meghatározásához rendelkezésünkre áll a két egyenes egyenlete. Ezek számokkal beszorozhatók (eloszthatók), a lényegen nem változtatva. Így elérhető, hogy a két egyenlet normálvektora azonos hosszúságú (pl. egységnyi) legyen.

T1.11. Ha a két egyenes egyenlete $L_1(x, y) = 0$, és $L_2(x, y) = 0$, és normálvektoruk azonos hosszúságú, akkor a szögfelezők egyenletei

$$L_1(x, y) + L_2(x, y) = 0$$

és

$$L_1(x, y) - L_2(x, y) = 0.$$

B. Mivel a két egyenes egyenleteinek normálvektorai azonos hosszúságúak, a $P = (x, y)$ pont egyenlő távol van a két egyenestől, ha a helyettesítési értékeik abszolút értéke megegyezik, azaz, ha $L_1(x, y) = \pm L_2(x, y)$. Ezek tehát a szögfelezők egyenletei. ♠

2. Baricentrikus koordináták

2.1. *Pontrendszer súlypontja*

Fizikai analógiára hivatkozva definiáljuk az $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ helyvektorokkal, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tömegekkel rendelkező merev pontrendszer súlypontját (ill. tömegközéppontját). A súlypont $\boldsymbol{s}$ helyvektora

$$\boldsymbol{s} = \frac{p_1\boldsymbol{x}_1 + p_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + p_n\boldsymbol{x}_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Fizikában a tömegek természetesen pozitív számok, de ha erőhatásként (súlyerőként) fogjuk fel, akkor a gravitációval ellentétes erő is hathat a pontrendszerre, amit negatív p_i számként vehetünk figyelembe. A további alkalmazásokban a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ számok pozitivitását nem tételezzük fel, csupán azt kell kikötni, hogy $p_1 + p_2 + \ldots + p_n \neq 0$, mert a fenti képletben a nevező nem lehet nulla. A továbbiakban feltételezhető lenne, hogy $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, hiszen osztással ez létrehozható, mégis kényelmi okokból ezt nem tesszük meg.

A továbbiakban az $n = 2$ és az $n = 3$ esetet részletesebben tárgyalni fogjuk, mint fontos segédeszközt a továbbiakhoz.

2.2. *Osztópont, harmonikus pontnégyes*

Legyen adott két különböző bázispont, B és C, helyvektorukat jelölje $\boldsymbol{b}_0$ és $\boldsymbol{c}_0$.

T2.1. A BC egyenes minden $\boldsymbol{x}$ pontja előállítható súlypontként a pontokba helyezett, alkalmasan választott q és r (esetleg negatív, vagy nulla) súlyokkal. A q és r súlyok megválasztása konstans szorzótól eltekintve (vagyis az arányuk) egyértelmű.

B. A BC egyenes minden pontja, így $\boldsymbol{x}$ is előállítható $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_0 + t(\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{c}_0) = t\boldsymbol{b}_0 + (1 - t)\boldsymbol{c}_0$ alakban. Ezzel megkaptuk a kívánt súlyokat: $q = t$ és $r = 1 - t$ $(q + r = 1)$.

Ha lenne két különböző előállítás, $\boldsymbol{x} = q\boldsymbol{b}_0 + (1 - q)\boldsymbol{c}_0$ és $\boldsymbol{x} = q_1\boldsymbol{b}_0 + (1 - q_1)\boldsymbol{c}_0$, akkor

$$q\boldsymbol{b}_0 + (1-q)\boldsymbol{c}_0 = q_1\boldsymbol{b}_0 + (1-q_1)\boldsymbol{c}_0,$$
$$(q-q_1)\boldsymbol{b}_0 = (q-q_1)\boldsymbol{c}_0,$$
$$\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{c}_0$$

lenne, de ez lehetetlen, mert a B és a C pontok különbözők. ♠

Vezessük be a $\lambda = \dfrac{q}{r}$ arányszámot Ezt $r = 0$ esetén nem tehetjük meg, de ekkor a súlypont a B pontba esik, ezt az esetet most figyelmen kívül hagyhatjuk.

T2.2. A B és C pontba helyezett p és q tömegek P súlypontjára

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = |\lambda|.$$

B. T2.1. szerint P helyvektora, $\boldsymbol{x}$ előállítható $\boldsymbol{x} = q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0$ alakban, ahol még feltételezhetjük, hogy $q + r = 1$. Ebből

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0 = q\boldsymbol{b}_0 - (1-r)\boldsymbol{c}_0 = q(\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{c}_0)$$

és

$$\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{x} = (1-q)\boldsymbol{b}_0 - r\boldsymbol{c}_0 = r(\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{c}_0)\,.$$

Távolságokkal felírva: $\overline{PC} = |\,q\,| \cdot \overline{BC}$ és $\overline{PB} = |\,r\,| \cdot \overline{BC}$, ami az állítást igazolja. ♠

Ha q és r pozitív, akkor P a BC szakasz belső pontja, és $\lambda : 1-\lambda$ arányban osztja fel a szakaszt (de vigyázzunk: a nagyobb súlyú ponthoz a rövidebb szakasz csatlakozik!). Ha mindkettő negatív, akkor a helyzet változatlan, -1-gyel megszorozhatók a súlyok.

Ha q és r ellenkező előjelű, akkor P a BC egyenesnek a zárt BC szakaszon kívüli részére esik, úgy, hogy T2.2. állítása teljesüljön. Ezt külső osztópontnak fogjuk nevezni. Külső osztópont nem létezik, ha $\lambda = -1$, mert ez $p + q = 0$-t jelentene, és ekkor a súlypont nincs értelmezve.

A BC egyenesen adott λ mellett ($\lambda \neq 0$, és $|\,\lambda\,| \neq 1$) mindig pontosan két pont van, ami a $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = |\,\lambda\,|$ feltételnek eleget tesz, a belső és a külső osztópont. Jelöljük ezeket P-vel és Q-val. A $BCPQ$ pontnégyest *harmonikus pontnégyesnek* nevezzük.

T2.3. Ha a B, C bázispontokra vonatkozóan P és Q harmonikus pontnégyest ad λ arányszámmal, akkor a P és Q bázisra B és C is harmonikus pontnégyes $\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ arányszámmal.

B. Jelöljük a pontok helyvektorait rendre $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{p}_0$ és $\boldsymbol{q}_0$-lal, akkor a feltétel alapján P és Q előállítható súlypontként a következő alakban:

$$\lambda\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0 = (1+\lambda)\boldsymbol{p}_0\,,$$
$$-\lambda\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0 = (1-\lambda)\boldsymbol{q}_0\,.$$

Ebből összeadva

$$\boldsymbol{c}_0 = \frac{1+\lambda}{2}\boldsymbol{p}_0 + \frac{1-\lambda}{2}\boldsymbol{q}_0$$

és kivonva

$$\boldsymbol{b}_0 = \frac{1+\lambda}{2\lambda}\boldsymbol{p}_0 - \frac{1-\lambda}{2\lambda}\boldsymbol{q}_0\,,$$

amiből látható, hogy $\boldsymbol{b}_0$ és $\boldsymbol{c}_0$ is súlypont, és a súlyok aránya $\pm\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$. ♠

A T2.3. alapján a $BCPQ$ harmonikus négyes szövegében a pontok sorrendje lényegtelen, úgyis az egyenesen való elhelyezkedés osztja ki a szerepüket.

2.3. *Baricentrikus koordináták*

Három bázispontot vegyünk fel, A-t, B-t és C-t. Tegyük fel, hogy az $ABC\Delta$ nem elfajult, azaz a három pont nincs egy egyenesen. A bázispontok helyvektorai legyenek $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ és $\boldsymbol{c}_0$.

T2.4. Az A, B, C pontokba, melyek nem esnek egy egyenesre, elhelyezett p, q és r ($p + q + r \neq 0$) súlyokkal a sík minden P pontja súlypontként előállítható. Az előállítás konstans szorzótól eltekintve egyértelmű. Rögzített A,B,C pontokhoz, tartozóan p, q, r felhasználható az P pont jellemzésére, vagyis felhasználhatók ún. *baricentrikus koordinátákként*.

B. A p, q és r számokat eloszthatjuk $p + q + r$-rel, ez a súlyponton nem változtat. Tegyük fel tehát, hogy $p + q + r = 1$. Jelöljük P helyvektorát $\boldsymbol{x}$-szel és keressük azokat a p, q, r számokat, melyekre fennáll, hogy

$$p\boldsymbol{a}_0 + q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{x},$$

és

$$p + q + r = 1.$$

Ez három egyenletből álló lineáris egyenletrendszer a p, q, r számokra, melynek mindig egyetlen megoldás-hármasa van, mert determinánsa, az $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ $C = (c_1, c_2)$ jelölést bevezetve, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, ami nem lehet 0, hiszen abszolút értéke éppen a háromszög kétszeres területe (lásd T11.2.). ♠

Az $ABC\Delta$ síkjában vegyünk fel tetszőlegesen egy P pontot. A $PBC\Delta$ előjeles t_1 területe legyen a terület, ha P és az $ABC\Delta$ a a egyenes ugyanazon partján helyezkednek el, és ennek (-1)-szerese, ha ellenkező oldalon vannak. Hasonlóan definiáljuk a $PCA\Delta$ t_2-vel jelölt és a $PAB\Delta$ t_3-mal jelölt előjeles területét, természetesen a b ill. a c egyenesek vonatkozásában.

T2.5. A P baricentrikus koordinátái az A, B, C bázispontokra vonatkozóan t_1, t_2, t_3.

B. Legyen $P = (x_1, x_2)$ és oldjuk meg Cramer-szabállyal a T2.4. egyenletrendszerét. Az egyenletrendszer determinánsa, mint azt említettük, $2T$, a számlálóban szereplő determináns pedig, szintén T11.2. szerint, $2t_1$, tehát

$$p = \frac{1}{2T}\begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{t_1}{T}.$$

Feltehető, hogy az $ABC\Delta$ körüljárási iránya pozitív. Ha P az a egyenes háromszög felöli oldalán van, akkor a $PBC\Delta$ körüljárási iránya is pozitív, és a determináns pozitív t_1 területet ad, ha P az a egyenes másik oldalán van, akkor t_1 negatívnak adódik, mert a $PBC\Delta$ körüljárási iránya megváltozik.
Ugyanígy előállítható a többi baricentrikus koordináta is, és a kapott koordináták T-vel megszorozhatók. ♠

A baricentrikus koordináták vetítéssel szemben invariánsak. Ez részletesebben a következőt jelenti. Vegyünk fel az $ABC\Delta$ síkjában egy tetszőleges P pontot, P baricentrikus koordinátái legyenek p, q, r. Vetítsük az $ABC\Delta$ síkjától különböző síkra az A, B, C és a P pontokat (nem feltétlenül merőleges vetítéssel), a vetületek legyenek A', B', C' és P'. Ez esetben a P' baricenrikus koordinátái az A', B', C' pontokra nézve változatlanul p, q, r. Ez nem csak vetítésre igaz, hanem tetszőleges affin transzformációra is. Az állítás következik T2.6.-ból és abból, hogy a vetítés (vagy az affin transzformáció) nem változtatja meg az egy egyenesbe eső szakaszok hosszának arányát.

Az $ABC\Delta$-ben a q súllyal ellátott B és az r súllyal ellátott C súlypontjának és az A-nak összekötő egyenesét a háromszög A csúcsából kinduló súlyozott súlyvonalának nevezzük. A súlyozott súlyvonalnak csak akkor van értelme, ha $q + r \neq 0$.

T2.6. Az $ABC\Delta$ súlyozott súlypontja rajta van minden súlyozott súlyvonalon.

B. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $p + q + r = 1$. Ekkor $q + r \neq 0$ esetén a súlypont helyvektora

$$\boldsymbol{x} = p\boldsymbol{a}_0 + q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0 = p\boldsymbol{a}_0 + \frac{q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0}{q+r}(q+r),$$

ahol $\frac{q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0}{q+r}$ a B és a C súlyozott súlypontja, legyen ez P. A képlet alapján a háromszög súlyozott súlypontja A-nak és P-nek p ill. $q + r$ súlyokkal képezett súlypontja, ami rajta van a súlyozott súlyvonalon. ♠

A bizonyításból az is kiderül, hogy a súlypont hol helyezkedik el a súlyvonalon, hiszen p és $q + r$ súlyokkal képezett lineáris súlypontról van szó.

T2.7. Legyen P az $ABC\Delta$ belső pontja és jelölje d_1, d_2, d_3 rendre az a, a b és a c oldaltól mért távolságát. $d_1 + d_2 + d_3$ a legkisebb magasság és a legnagyobb magasság közé esik. Speciálisan egyenlő oldalú háromszögben $d_1 + d_2 + d_3$ állandó.

B. A háromszög felosztásával az alábbi terület-egyenlőséget írhatjuk fel

$$ad_1 + bd_2 + cd_3 = 2T.$$

Ha $a \leq b \leq c$, akkor $cd_1 + cd_2 + cd_3 \geq 2T$, vagyis $d_1 + d_2 + d_3 \geq m_c$, valamint $ad_1 + ad_2 + ad_3 \leq 2T$, vagyis $d_1 + d_2 + d_3 \leq m_a$. ♠

2.4. *Trilineáris koordináták*

A háromszög pontjainak megadására – a baricentrikus koordináták mellett – használják a trilineáris koordinátákat is. Ebben az összeállításban ezt csak megemlítjük, nem fogjuk használni, mert a baricentrikus koordinátákkal helyettesíthetők.

A síkon a pont helyzetét megadhatjuk a három oldalegyenestől mért előjeles távolságaival, a távolságot pozitívnak véve akkor, ha a pont az oldalegyenes ugyanazon oldalán van, mint a háromszög, ellenkező esetben a távolságot negatívnak vesszük. A három előjeles távolságnak csak az arányát tekintjük, tehát a három számadat tetszőleges nem nulla szorzóval megszorozható, az így kapott számokat tekintjük a pont *trilineáris koordinátáinak.* A trilineáris koordináták könnyen átszámíthatók baricenrikusokká.

T2.8. Ha P trilineáris koordinátái p, q, r, akkor baricentrikus koordinátái (az A, B, C csúcsokra vonatkozólag) ap, bq, cr.

B. A T2.5. alapján P baricentrikus koordinátái (az ottani jelöléssel élve) t_1, t_2, t_3. A t_1 (és hasonlóan, a t_2 és t_3) területű háromszög előjeles magassága legyen m_1 (ill. m_2, m_3). A magasságok tekinthetők trilineáris koordinátáknak, tehát $m_1 = kp$, $m_2 = kq$, $m_3 = kr$. Ezek alapján $t_1 = \frac{1}{2}akp$, $t_2 = \frac{1}{2}bkq$, $t_3 = \frac{1}{2}ckr$, és $\frac{k}{2}$-vel egyszerüsítve kapjuk az állítást. ♠

A T2.7. állítás egyben azt is bizonyítja, hogy a trilineáris koordináták egyértelműen meghatározzák a P pontot, a sík bármely P pontja esetén. A trilineáris koordináták megadása esetén is fel kell tételezni, hogy a belőlük származtatott baricentrikus koordináták összege nem nulla, azaz, hogy $ap + bq + cr \neq 0$.

2.5. *Ceva tétele*

Ceva tételét csak a háromszög belsejére redukált alakban tárgyaljuk, de hasonlóan érvényes külső pontokra is, csak némi diszkusszióval jár. Vegyünk fel a háromszög *a*, *b* és *c* oldalán egy-egy belső pontot, rendre P_1-et, P_2-t és P_3-at. A körüljárási irányt betartva jelölje a pontok által létrehozott szakaszok hosszát a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 és c_2, azaz részletesen $\overline{P_1B} = a_1, \overline{P_1C} = a_2$, $\overline{P_2C} = b_1$, $\overline{P_2A} = b_2$, $\overline{P_3A} = c_1$ és $\overline{P_3B} = c_2$.

T2.9. Ceva tétele. Az AP_1, BP_2 és a CP_3 egyenesek akkor és csak akkor metszik egy pontban egymást, ha $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$.

B. Helyezzünk el a_1b_1, a_2b_2 és a_1b_2 súlyokat rendre az *A*, *B* és *C* pontokba, akkor AP_1 és BP_2 súlyozott súlyvonal lesz. A metszéspontjukon áthaladó súlyvonal a *c* oldalt $a_2b_2 : a_1b_1$ arányban osztja fel, ez akkor és csak akkor egyezik meg CP_3-mal, ha

$$a_2b_2 : a_1b_1 = c_1 : c_2 ,$$

és ezt akartuk bizonyítani. ♠

Legyen *P* egy pont a háromszög síkjában, és tegyük fel, hogy a *PA* egyenes metszi az *a* oldalt P_1-ben, a *PB* egyenes a *b* oldalt P_2-ben, a *PC* egyenes a *c* oldalt P_3-ban, akkor a $P_1P_2P_3\Delta$-et a *P*-hez tartozó *Ceva-háromszögnek* nevezzük.

2.6. Az e*gyenes baricentrikus egyelete*

Jelöljük a háromszög csúcsainak Descartes koordinátáit (x_i, y_i)-vel ($i = 1, 2, 3$). Vegyünk fel továbbá a háromszög síkjában tetszőlegesen három pontot P_1-et, P_2-t és P_3-at, melyek Descartes koordinátái legyenek (u_i, v_i) ($i = 1, 2, 3$), és baricentrikus koordinátái legyenek p_i, q_i, r_i a $p_i + q_i + r_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) megszorítással.

T2.10. A $P_1P_2P_3\Delta$ előjeles területe

$$T_1 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \cdot T ,$$

ahol *T* az $ABC\Delta$ előjeles területe.

A két adott, (p_1, q_1, r_1) és (p_2, q_2, r_2) ponton átmenő egyenes egyenlete

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ahol *p, q, r* az egyenes egy tetszőleges pontjának a baricentrikus koordinátái. A $p_i + q_i + r_i = 1$ ($i = 1, 2$) megszorítás itt elejthető.

B. A súlypontszámítás alapján P_i Descartes koordinátái ($i = 1, 2, 3$) az alábbiak szerint számíthatók ki:

$$p_i x_1 + q_i x_2 + r_i x_3 = u_i ,$$
$$p_i y_1 + q_i y_2 + r_i y_3 = v_i .$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Innen determinánsokra áttérve

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix},$$

ami, felhasználva a háromszög T11.2.-ben megadott területképletét, adja a tétel első állítását.

Mivel a három pont akkor és csak akkor esik egy egyenesre, ha a terület nulla, megkapjuk a tétel második állítását is. ♠

T2.11. Ha a P pont baricentrikus koordinátái p, q, r ($p + q + r = 1$), és egyik koordináta sem 1, akkor a P-hez tartozó Ceva-háromszög létezik és előjeles területe

$$t = \frac{2pqr}{(1-p)(1-q)(1-r)} T ,$$

ahol T az alapul vett háromszög előjeles területe.

B. A P_1 baricentrikus koordinátái 0, q, r, de ha $p = 1$, akkor $q + r = 0$, és ilyen P_1 pont nem létezik. Ha $p \neq 1$, akkor P_1 baricentrikus koordinátái normált alakban 0, $\frac{q}{1-p}$, $\frac{r}{1-p}$. P_2-re $\frac{p}{1-q}$, 0, $\frac{r}{1-q}$ és P_3-ra $\frac{p}{1-r}$, $\frac{q}{1-r}$, 0. Alkalmazzuk a T2.10. tételt ezekre a pontokra, akkor kapjuk, hogy

$$t = \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)} \begin{vmatrix} 0 & q & r \\ p & 0 & r \\ p & q & 0 \end{vmatrix} T = \frac{2pqr}{(1-p)(1-q)(1-r)} T. \quad ♠$$

3. Derékszögű háromszög

3.1. *Thalesz-tétel*

Derékszögű háromszögnél, ha másként nem rendelkezünk, a C szöget tekintjük 90^o-osnak.

T3.1. Thalesz tétele. Az $ABC\Delta$ C szöge akkor és csak akkor derékszögű, ha rajta van azon a körön, az un. Thalesz-körön, melynek átmérője a c oldal. A C szög akkor és csak akkor tompaszög, ha C a kör belső pontja, akkor és csak akkor hegyesszög, ha C kívül esik a körön.

B. Tükrözzük az $ABC\Delta$-et a c oldal felezőpontjára. Ha a háromszög derékszögű, akkor téglalapot kapunk, melynek átlói egyenlők és felezik egymást, ezért a téglalap körülírt körének középpontja a c oldal felezőpontja. Ha C pont a Thalesz-körön van, akkor a tükrözéssel kapott parallelogramma átlói egyenlők, tehát téglalapról van szó, azaz a C szög 90^o-os.

Ha C a c oldal fölé rajzolt körön belül van, akkor az AC oldalt meghosszabbítva egy D pontban metszi a kört. Az ACB szög a CDB szög és a CBD szög összege, vagyis nagyobb a derékszögnél. Ha a C pont a körön kívül van, akkor feltehetjük, hogy $\alpha < 90^o$, ekkor a CA oldalszakasz metszi a kört egy D pontban. A DAB szög (ami 90^o) egyenlő a DCB és a DBC szögek összegével, vagyis a DCB szög kisebb, mint a derékszög. (A megfordított állítások ebből már adódnak.) ♠

3.2. *Mértani közép tételek*

T3.2. Fél-Pythagorasz-tétel. Derékszögű háromszögben a befogó mértani középarányos az átfogóra eső vetülete és a teljes átfogó között.

T3.3. Derékszögű háromszögben a magasság mértani középarányos az átfogó két szelete között.

A tételek speciális eseteit képezik egy általánosabb tételnek, ezért a bizonyításokat ez után adjuk meg.

T3.4. Az ABC derékszögű háromszögben, továbbra is T-vel jelölve az átfogóhoz tartozó magasság talppontját,

$$AT : TB = b^2 : a^2 .$$

A tétel általános háromszögekre vonatkozó állítását lásd T9.6.-nál.

B. T3.2.-t felhasználva $b^2 = c \cdot \overline{AT}$ és $a^2 = c \cdot \overline{TB}$. A két egyenlet hányadosa adja a kívánt állítást. ♠

3.3. *Hatányvonal, hatványpont*

Ha adott egy kör és egy pont tetszőlegesen a síkon (a körön kívül, rajta, vagy belül), az alábbi tétel segítségével definiálhatjuk a pont körre vonatkozó hatványát.

T3.5. Adott egy kör és a P pont tetszőlegesen. Húzzunk P-n keresztül szelőt a körhöz (azaz a kört metsző egyenest). A ponttól a körig terjedő szelőszakaszok szorzata állandó. Az állítás érvényben marad szelő helyett érintőre is, ha ekkor mindkét metszéspontot azonosnak tekintjük az érintési ponttal. A *P pont körre vonatkozó hatványának* nevezzük a szelőszakaszok szorzatát, ha a pont a körön kívül (vagy rajta) van, és ennek (-1)-szeresét, ha a pont belül van.

B. Két ábrán kell követni a bizonyítást, egyik esetben a P pont a körön kívül van, a másik esetben belül. Vegyünk fel tetszőlegesen (mindkét ábrán) két szelőt, az egyik szelő két metszéspontja legyen Q és R, a másiké Q_1 és R_1, azonban, ha P külső pont, akkor a P-hez közelebbi metszéspontokat jelölje Q és Q_1. A $PQ_1R\Delta$ hasonló a $PQR_1\Delta$-höz, mert a P-nél lévő szögük közös, ill. csúcsszögek, és az R-nél és R_1-nél lévő szögük azonos íven nyugvó kerületi szögek. A hasonlósági arányt felírva

$$\overline{PQ}:\overline{PR_1}=\overline{PQ_1}:\overline{PR},$$

és ezt akartuk bizonyítani. ♠

B. (T3.2. visszavezetése T3.4.-re.) Az ABC derékszögű háromszög magasságának a talppontja a c oldalon legyen T. Rajzoljuk meg a $BCD\Delta$ körülírt körét, ennek érintője az AC egyenes. T3.4. alapján a P pontnak A-t választva $\overline{AC}^2=\overline{AT}\cdot\overline{AB}$, és ezt akartuk bizonyítani. ♠

B. (T3.3. visszavezetése T3.4.-re.) Az ABC derékszögű háromszög magasságának a talppontja a c oldalon legyen T. Rajzoljuk meg a $ABC\Delta$ körülírt körét, a C csúcs C_1 tükörképe a c oldalra vonatkozóan a Thalesz-tétel miatt szintén a körre esik. T3.4. alapján a P pontnak T-t választva $\overline{CT}\cdot\overline{C_1T}=\overline{AT}\cdot\overline{TB}$, és ezt akartuk bizonyítani. ♠

Tegyük fel, hogy a kör egyenlete $K(x, y) = 0$, és a négyzetes tagok együtthatói (összevont alakban), az un. főegyütthatók eggyel egyenlők. Ez mindig elérhető a jelenlegi együtthatókkal történő osztással. Legyen megadva egy tetszőleges $P= (x_1, y_1)$ pont.

T3.6. A P pont hatványa a $K(x, y) = 0$ körre vonatkozóan – ha a főegyütthatók eggyel egyenlők – $K(x_1, y_1)$.

B. A kör egyenlete mindig megadható $K(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0$ alakban, ahol (x_0, y_0) a kör középpontja, r a sugara. Akkor

$$K(x_1,y_1)=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2-r^2=d^2-r^2,$$

ahol d a P távolsága a kör középpontjától. A külső és belső P pont estetét különválasztva, de mindkét esetben Pythagorasz tételét (T3.8.) és T3.4.-et felhasználva kapjuk a tétel állítását. ♠

T3.7. Adott két, nem koncentrikus kör, K_1 és K_2. Azon pontok mértani helye, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványuk egyenlő, egy egyenes, mely merőleges a két kör centrálisára. Az egyenest a két kör *hatványvonalának* nevezzük. Három kör esetén, ha a középpontok háromszöget alkotnak, a páronként elkészített hatványvonalak egy ponton mennek át, a pontot a három kör *hatványpontjának* nevezzük.

B. Legyen a két kör egyenlete $K_i(x, y) = 0$ $(i = 1, 2)$, és feltételezzük, hogy a főegyütthatók eggyel egyenlők. T3.6. alapján az (x, y) pontra, ha a két körre vonatkozó hatványa megegyezik, $K_1(x, y) = K_2(x, y)$. Ez egyben a keresett mértani hely egyenlete, ami lineáris, mert a négyzetes tagok kiesnek az egyenletből (a lineáris tagok nem esnek ki, csak ha a körök koncentrikusak). A mértani hely tehát egyenes. Ha a P pont hatványa a két körre megegyezik, akkor a centrálisra vonatkozó tükörképére is igaz ez, tehát az egyenes merőleges a centrálisra.

Három kör esetén, a körökre tett feltétel miatt, bármely két hatványvonal metszi egymást. Két hatványvonal metszéspontjának a hatványa mindhárom körre egyenlő, tehát ezen a ponton a harmadik hatványvonal is átmegy. ♠

3.4. *Pythagorasz-tétel*

T3.8. Jelölje c az $ABC\Delta$ leghosszabb oldalát. Az $ABC\Delta$ akkor és csak akkor derékszögű, ha

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Az $ABC\Delta$ akkor és csak akkor tompaszögű, ha $a^2 + b^2 < c^2$, és akkor és csak akkor hegyesszögű, ha $a^2 + b^2 > c^2$.

B. Ha az $ABC\Delta$ derékszögű, akkor az a és a b oldalra is írjuk fel a Fél-Pythagorasz tételt (mint ahogy ezt T3.5 bizonyításában tettük): $b^2 = c \cdot \overline{AT}$ és $a^2 = c \cdot \overline{TB}$. Adjuk össze a két formulát, akkor $a^2 + b^2 = c^2$ adódik.

Ha az $ABC\Delta$ nem derékszögű, akkor két ábrán kövessük a bizonyítást: az egyiken a C szög tompaszög, a másikon hegyesszög. Az A-ból húzott magasság talppontját jelöljük T-vel, és legyen $m = \overline{AT}$, valamint $x = \overline{CT}$. Írjunk fel két Pythagorasz-tételt:

$$b^2 = m^2 + x^2,$$

$$c^2 = m^2 + (a \pm x)^2,$$

ahol + érvényes, ha a C szög tompaszög, és –, ha hegyesszög. A két egyenletet vonjuk ki egymásból, akkor $a^2 + b^2 - c^2 = \mp 2ax$, ahol a felső előjel tompaszög, az alsó hegyesszög esetén érvényes. Mivel nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van (T1.7.), tompaszög vagy derékszög csak a γ szög lehet, így, ha γ hegyesszög, akkor a háromszög minden szöge hegyesszög. Ezzel az állításokat egyik irányban bebizonyítottuk. A fordított irány indirekt módon ebből már következik. ♠

A bizonyításból érthető, hogy miért szokták T3.2.-t fél Pythagorasz tételnek nevezni.

Végezetül álljon itt a Pythagorasz-tétel fő állításának Pythagorasztól származó legegyszerűbb bizonyítása.

Rajzoljunk egy $a + b$ oldalhosszúságú $A_1A_2A_3A_4$ négyzetet. A négyzet kerületén A_1-ből A_2 felé kiindulva és körbehaladva minden oldalon vegyünk fel egy pontot az oldal kiindulási pontjától a távolságra, e pontok legyenek rendre P_1, P_2, P_3, P_4. A $P_1A_2P_2\Delta$ (és hasonlóan a többi csúcsnál elhelyezkedő háromszögek is) a és b befogójú derékszögű háromszög, átfogója legyen c. A $P_1P_2P_3P_4$ négyszög tehát c oldalú négyzet, melynek területe megkapható, ha az $A_1A_2A_3A_4$ négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2 .$$

3.4. *Szögfelező*

A derékszögű háromszögben a szögfelezők hosszára egyszerűbb képletet lehet adni, mint általános esetben (ld. T4.10.).

T3.9. A derékszög f_c szögfelezőjére az

$$f_c = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2},$$

míg a β szög f_b szögfelezőjére az

$$f_b = a\sqrt{\frac{2c}{a+c}}$$

formula érvényes.

B. A derékszög szögfelező egyenese a c oldalt messe D-ben, míg a B-n keresztül fektetett az a oldallal párhuzamos egyenest E-ben. Nyilván $\overline{CE} = a\sqrt{2}$. A $DAC\Delta$ és a $DBE\Delta$ hasonló egymáshoz és a hasonlósági arány $b : a$, ezért a D pont ilyen arányban osztja a CE szakaszt. Az arányos osztás képletével kapjuk a tétel első állítását.

A β szög f_b szögfelezőjének talppontja legyen P, és a $BCP\Delta$-et tükrözzük a szögfelezőre. A C csúcs tükörképe, C' a c oldalra kerül. Vezessük be az $x = \overline{PC} = \overline{PC'}$ jelölést. Az $APC\Delta$ hasonló az eredeti háromszöghöz, ezért x: $(c - a) = a : b$, vagyis

$$x = \frac{a(c-a)}{b} = \frac{a(c-a)(c+a)}{b(c+a)} = \frac{ab}{a+c}.$$

Ennek segítségével a Pythagorasz-tétel adja a szögfelező hosszát:

$$f_b^2 = a^2 + x^2 = a^2\left(1+\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right) = a^2\,\frac{a^2+b^2+c^2+2ac}{(a+c)^2} = a^2\,\frac{2c^2+2ac}{(a+c)^2} = a^2\,\frac{2c}{a+c}. \quad \spadesuit$$

T3.10. Derékszögű háromszögben $\rho = s - c$, vagy másképpen fogalmazva $\rho = \frac{1}{2}(a+b-c)$.

B. Az érintőszakaszok egyenlőségéből következik, hogy $2s = 2c + 2\rho$. ♠

4. A körülírt kör

4.1. *A körülírt kör középpontja*

T4.1. A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a háromszög köré írható kör O középpontja. A COB szögek közül az, amelyik A-t nem tartalmazza, 2α nagyságú. Az O középpont hegyesszögű háromszögnél a háromszög belsejébe, derékszögű háromszögnél az átfogóra (Thalesz tétele), tompszögű háromszögnél a háromszögön kívülre, de a tompaszög belsejébe esik.

B. a) A T1.6-ot többször felhasználva bizonyítjuk. Az AB szakaszfelező merőlegesének minden pontja egyenlő távol van A-tól és B-től, a BC szakaszfelező merőlegesének minden pontja egyenlő távol van B-től és C-től, a metszéspontjuk tehát mindhárom ponttól egyenlő távol van, így ez a körülírt kör középpontja. A szakaszfelező merőlegesek biztosan metszik egymást, hiszen nem lehetnek párhuzamosak. Mivel az O metszéspont egyenlő távol van A-tól és C-től, biztosan rajta van az AC szakaszfelező merőlegesén.

b) Ugyanazon ívhez tartozó középponti szög kétszerese a kerületi szögnek, és a középponti szögtartomány nem tartalmazhatja a kerületi szög csúcsát.

c) $\alpha = 90^o$, akkor és csak akkor, ha a COB szög 180^o-os, vagyis, ha CB átmérő.

d) Ha $\alpha > 90^o$, akkor az a COB szög, mely A-t nem tartalmazza, 180^o-nál nagyobb. Vegyük azt a CB egyenes által leszelt körszeletet, mely A-t nem tartalmazza, ez nagyobb mint egy félkör, tehát O a belsejében van CB által elválasztva az $ABC\Delta$-től. Megfordítva, ha O nincs a háromszögben, akkor az $ABC\Delta$ oldalai által leszelt három körszelet valamelyikébe esik, ez a körszelet nagyobb, mint egy félkör, tehát középponti szöge nagyobb, mint 180^o. Így a kerületi szög, a háromszög szöge tompaszög.

c)-ből és d)-ből már következik, hogy O akkor és csak akkor esik a háromszög belsejébe, ha az hegyesszögű. ♠

T4.2. A körülírt kör sugara $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Az O előjeles távolsága az a oldaltól $d = \dfrac{a}{2}\text{ctg}\alpha$, ahol d negatívnak adódik, ha a O kívül esik a háromszögön.

B. Jelöljük F-fel az a oldal felezőpontját. Mivel a BOF szög α, mindkét állítás a BOF derékszögű háromszögből leolvasható. Az előjelre vonatkozó állítás T4.1. alapján ellenőrizhető. ♠

T4.3. O a nagyobb oldalhoz közelebb van.

B. Mivel $d^2 = R^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, az állítás nyilvánvaló. ♠

T4.4. A háromszög területe: $T = \dfrac{abc}{4R}$, mely képlet T ismeretében az R kiszámítására is alkalmas.

B. $T=\frac{1}{2}bm_b=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{abc}{4R}$, ahol m_b a b oldalhoz tartozó magasságot jelöli, és $\sin\alpha$-t kiküszöböljük a T4.2. első képletével. ♠

T4.5. Az oldalfelező merőlegesek a felező háromszög (azaz az oldalak felezőpontjai által alkotott háromszög) magasságvonalai, az O ennek a háromszögnek a magasságpontja.

B. Az állítás nyilvánvaló. ♠

T4.6. Az A csúcsból kiinduló magasságvonal tükörképe az A csúcsból kiinduló szögfelezőre átmegy O-n.

B. A magasságvonal és a b oldal szöge $90^\circ-\gamma$, egyszerű szögszámolással ugyanekkora az OAB szög is. ♠

T4.7. Az O baricentrikus koordinátái az A, B, C alappontokra vonatkozóan $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$, vagy más alakban $a\cos\alpha, b\cos\beta,\ c\cos\gamma$.

B. Használjuk a T2.5. tételt. Mivel az $OBC\Delta$ t_1 terőlete $\frac{R^2}{2}\sin 2\alpha$, az O baricentrikus koordinátái $\frac{R^2}{2}\sin 2\alpha$, $\frac{R^2}{2}\sin 2\beta$, $\frac{R^2}{2}\sin 2\gamma$, ami egyszerűsíthető a fenti alakra.

A kétszeres szögeket átalakítva a $\sin\alpha\cos\alpha, \sin\beta\cos\beta, \sin\gamma\cos\gamma$ koordinátákhoz jutunk el, majd ezeket beszorozva $t=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ -val, megkapjuk a második állítást. ♠

A felező háromszög körülírt körét *Feuerbach-körnek* nevezik. Erről a 10. és 15. fejezetben részletesen is szó lesz. T10.9.-ben adjuk meg az O baricentrikus koordinátáinak oldalakkal kifejezett alakját is.

4.2. *Izogonális konjugált*

T4.8. A körülírt kör baricentrikus egyenlete
$$a^2qr+b^2qp+c^2pq=0.$$
Más szavakkal, P akkor és csak akkor pontja a körülírt körnek, ha p, q, r baricentrikus koordinátáira az előbbi egyenlet fennáll.

B. A T14.2. közvetlen következménye. ♠

A T4.6. állítás sugallja a következő gondolatmenetet és definíciót.

T4.9. A háromszög síkjában vegyünk fel egy P pontot, mely nem esik a háromszög körülírt körére. Tükrözzük az A csúcsnál lévő szög belső szögfelezőjére az AP egyenest, majd a B csúcsnál lévő szög belső szögfelezőjére a PB egyenest és a C csúcsnál lévő belső szögfelezőre a PC egyenest. A tükrözött egyenesek egy ponton mennek át, legyen ez a P_1 pont. A P_1 pontot a P *izogonális konjugáltjának* nevezzük. Ha a P a háromszög körülírt körén van, akkor az izogonális konjugáltat nem definiáljuk.

Ha P baricentrikus koordinátái p, q, r, akkor P_1 baricentrikus koordinátái a^2qr, b^2rp, c^2pq.

B. Tegyük fel egyelőre, hogy a p, q, r számok egyike sem nulla. P-nek az oldalaktól mért előjeles távolságát jelöljük rendre d_1-gyel, d_2-vel és d_3-mal. T2.5. alapján p és q aránya megegyezik a $PBC\Delta$ és a $PCA\Delta$ előjeles területeinek arányával, vagyis $p:q = ad_1 : bd_2$, amiből

$$d_1 : d_2 = \frac{p}{a} : \frac{q}{b}.$$

Mivel $a^2qr + b^2qp + c^2pq \neq 0$, ugyanis P nincs a körülírt körön, a a^2qr, b^2rp, c^2pq baricentrikus koordináták meghatároznak egy Q pontot. Ugyanezzel a gondolatmenettel a Q pont BC és CA oldalegyenesektől mért előjeles távolságainak az aránya $aqr : brp = \frac{q}{b} : \frac{p}{a} = d_2 : d_1$. Ebből látható, hogy Q rajta van a CP egyenesnek a C pontból kiinduló szögfelezőre vonatkozó tükörképén. Hasonlóan Q a többi tükrözött egyenesen is rajta van, tehát $Q = P_1$.

Ha valamelyik koordináta, mondjuk a p nulla, akkor P a BC egyenes egy pontja, melynek izogonális konjugáltja az A csúcspont, tehát az állítás ekkor is igaz. ♠

Ha a P pont nem esik a háromszög oldalegyeneseire (és a körülírt körre), akkor az izogonális konjugáltság reflexív tulajdonság, vagyis P_1 izogonális konjugáltja P.

A T4.6. állítás azt mondja ki, hogy a magasságpont a körülírt kör középpontjának izogonális konjugáltja. Nyilvánvaló állítás, hogy a beírt kör középpontja önmaga izogonális konjugáltja. Ugyanez igaz a hozzáírt körök középpontjaira is. További, a háromszög nevezetes pontjaira vonatkozó, izogonális konjugáltsági tulajdonságokkal a megfelelő fejezetekben foglalkozunk.

A fejezet további részében az oldalak P és P_1 pontból képezett látószögével foglalkozunk. A legegyszerűbb eset az, amikor P a háromszög belsejébe esik, ekkor P_1 is ilyen, hiszen baricentrikus koordinátái pozitívak.

T4.10. Ha P a háromszög belsejébe esik, és izogonális konjugáltja P_1, továbbá, ha a c oldal látószögét a P-ből φ_c-vel, P_1-ből φ'_c-vel jelöljük, akkor

$$\varphi_c + \varphi'_c = 180^\circ + \gamma.$$

(Természetesen bármelyik oldalra hasonló szabály érvényes.)

B. A háromszögek szögösszegére vonatkozó tételből

$$\varphi_c = 180^\circ - PAB\,\text{szög} - PBA\,\text{szög}.$$

Írjuk fel ugyanezt a P_1 pontra is és használjuk fel a P_1 pont tükrözésekkel történő előállítását:

$$\varphi'_c = 180^\circ - P_1AB\,\text{szög} - P_1BA\,\text{szög} = 180^\circ - (\alpha - PAB\,\text{szög}) - (\beta - PBA\,\text{szög}).$$

Adjuk össze a két egyenletet, akkor

$$\varphi_c + \varphi'_c = 360^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ + \gamma. \quad ♠$$

Külső pontokra kissé bonyolultabb a helyzet. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy P a háromszög α szögterében, vagy annak csúcsszögterében van. Ha P az α csúcsszögének terében van, akkor P_1 az α szögterébe esik (ld a bizonyítást), a két konjugált pont felcserélésével feltehetjük tehát, hogy P az α szögterébe esik. Itt is két esetet kell megkülönböztetnünk: P a háromszögön kívül, de a körülírt körön belül, vagy a körülírt körön kívül van.

T4.11. Ha P az α szögterében a háromszögön kívül, de a körülírt körön belül van, akkor

$$\varphi_c - \varphi'_c = \gamma .$$

Ha P az α szögterében a körülírt körön kívül van, akkor

$$\varphi_c + \varphi'_c = \gamma .$$

A b oldal látószögére hasonló képlet igaz, míg az a oldal látószögére

$$\varphi_a \mp \varphi'_a = 180^\circ - \alpha$$

a két esetnek megfelelően.

B. Legyen P az α szögterében a háromszögön kívül. A BP félegyenes szögfelezőre vonatkozó tükörképe $\beta + PBC$ szög szöget zár be, a CP félegyenes tükörképe pedig $\gamma + PCB$ szög szöget zár be az a oldallal. A két szög összege pedig $\beta + PBC + \gamma + PCB = 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \varphi_a <$ $< 180^\circ$, ha $\varphi_a > 180^\circ - \alpha$, azaz, ha P a körülírt körön belül van, és $> 180^\circ$, ha P a körülírt körön kívül van. Az első esetben P_1 az α csúcsszögének szögterében van, a második esetben pedig az α szögterében.

Tegyük fel, hogy P az α szögterében a háromszögön kívül, de a körülírt körön belül van, akkor

$$\varphi_c = 180^o - \beta - PBC \text{ szög} - PAB \text{ szög},$$

és a tükrözés miatt

$$\varphi'_c = 180^\circ - P_1BA \text{ szög} - P_1AB \text{ szög} = 180^\circ - PBC \text{ szög} - (180^o - \alpha + PAB \text{ szög}) .$$

A két egyenlet különbségeként

$$\varphi_c - \varphi'_c = 180^\circ - \beta - \alpha = \gamma$$

kapjuk az első állítást.

Ha P a körülírt körön kívül van, akkor hasonló gondolatmenettel

$$\varphi_c = 180^o - \beta - PBC \text{ szög} - PAB \text{ szög},$$

és

$$\varphi'_c = 180^\circ - P_1BA \text{ szög} - P_1AB \text{ szög} = 180^o - (180^\circ - PBC \text{ szög}) - (\alpha - PAB \text{ szög}) .$$

A két egyenletet összeadva,

$$\varphi_c + \varphi'_c = 180^\circ - \beta - \alpha = \gamma ,$$

kapjuk a második állítást.

A P és P_1 helyzete miatt $\varphi_a = \varphi_b + \varphi_c$ és $\varphi'_a = \varphi'_b + \varphi'_c$, ezért a két esetnek megfelelően a bizonyított összefüggésekből $\varphi_a \mp \varphi'_a = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ adódik. ♠

5. A beírt kör

5.1. *Elhelyezkedése és mérete*

Vezessük be a következő állandó jelöléseket. O_0 és ρ legyen a beírt kör középpontja és sugara, O_a és ρ_a az a oldalhoz hozzáírt kör középpontja és sugara (mely az a oldalt kívülről, és a b és c oldalak meghosszabbításait érinti). Hasonló értelmet adjunk az O_b, O_c, ρ_b és ρ_c jelöléseknek is. A beírt kör érintési pontja legyen az a oldalon E_a, a b oldalon E_b, a c-n E_c. A háromszög kerületének a felét, a félkerületet, jelöljük s-sel.

T5.1. A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a beírt kör O_0 középpontja. Két külső szögfelező és a fennmaradó, A-val jelölt csúcs belső szögfelezője is egy pontban találkozik, ez az a oldalhoz tartozó hozzáírt kör O_a középpontja.

B. A belső szögfelező szakaszok metszik egymást, mert az α szögfelezője két részre vágja szét a háromszöget, egyik oldalán van a B csúcspont, a másikon a b oldal és a β szöghöz tartozó szögfelező szakasz e két objektumot köti össze. A metszéspont tehát a háromszög belsejében van. Az α szögfelezőjének minden pontja egyenlő távol van a b egyenesétől és a c egyenesétől, a β szögfelezőjének minden pontja egyenlő távol van az a egyenesétől és a c egyenesétől, a metszéspontjuk, O_0 egyenlő távol van mindhárom oldal egyenesétől, ezért ez a beírt kör középpontja. Mivel O_0 egyenlő távol van a és b egyeneseitől, T1.9. miatt a C csúcsnál lévő szög valamelyik felező egyenese átmegy O_0-n, de ez csak a belső szögfelező lehet, mert O_0 a háromszög belsejébe esik.

Az α és a β szög külső szögfelezői merőlegesek a belsőkre, ezért a c oldal egyenesével bezárt szögeik $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, ill. $90^\circ - \frac{\beta}{2}$, ezek összege $180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} < 180^\circ$, tehát nem párhuzamosak, így a γ szög szárai között, de a háromszögön kívül metszik egymást. A metszéspontról ugyanúgy elmondható, mint az előző esetben, hogy a három oldalegyenestől egyenlő távol van, tehát O_a-t kaptuk meg, és O_a rajta van a γ szög egyik szögfelezőjén, ami csak a belső szögfelező lehet. ♠

T5.2. $\overline{E_bA} = \overline{E_cA} = s - a$, és ez hasonlóan a többi csúcsra vonatkozóan is felírható. Ha az a oldalhoz hozzáírt kör érintési pontjait az egyes oldalegyeneseken P_a, P_b és P_c jelöli, akkor

$$\overline{P_bC} = \overline{P_aC} = s - b, \quad \overline{P_bA} = s$$

és

$$\overline{P_aE_a} = |b - c|.$$

Az a oldal F felezőpontjából bocsássunk merőlegest az A-nál lévő szög belső szögfelezőjére. A merőleges egyenes messe a b oldal egyenesét P-ben, a c oldal egyenesét Q-ban, akkor

$$\overline{PC} = \overline{QB} = \frac{|b-c|}{2} = \overline{FE_a} = \overline{FP_a},$$

továbbá

$$\overline{QE_c} = \frac{a}{2}.$$

B. A háromszög kerülete felírható az érintőszakaszok összegeként, de ezek párosával egyenlők:

$$2s = 2\overline{E_bA} + 2\overline{E_aB} + 2\overline{E_aC} = 2\overline{E_bA} + 2a,$$

vagyis

$$\overline{E_b A} = s - a.$$

Hasonlóan $2s = b + c + \overline{P_b C} + \overline{P_c B} = \overline{P_b A} + \overline{P_c A} = 2\overline{P_b A}$. Ebből közvetlenül látható, hogy $\overline{P_b C} = s - b$.

Tegyük fel, hogy $c > b$, akkor $\overline{P_a B} + \overline{E_a C} = (s - c) + (s - c) = a + b - c < a$, vagyis

$$\overline{P_a E_a} = a - (a + b - c) = c - b.$$

Ugyanígy $b > c$ esetén (felcserélve a két oldal betűzését) $\overline{P_a E_a} = b - c$, ami igazolja a másik állítást.

A harmadik állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $c \geq b$ és tükrözzük F-re a $PCF\Delta$-et. C tükörképe B, míg P tükörképét jelöljük P'-vel. Az $APQ\Delta$ egyenlőszárú, ezért a $BP'Q\Delta$ is egyenlőszárú, hiszen oldalaik párhuzamosak vagy egy egyenesre esnek. Legyen $\overline{BQ} = \overline{BP'} = \overline{CP} = x$, akkor $c - x = b + x$, tehát $x = \dfrac{c-b}{2}$, ezért $\overline{BQ} = \overline{FE_a} = \overline{FP_a}$. Az érintőszakaszok egyenlőségét felhasználva

$$\overline{QE_c} = \overline{BE_c} - \overline{BQ} = \overline{BE_a} - \overline{FE_a} = \overline{BF} = \frac{a}{2}. \spadesuit$$

T5.3. $$\rho : \rho_a = (s - a) : s.$$

B. A két kör hasonlósági középpontja A, a nagyításnál az E_c pontnak a P_c felel meg, ezért

$$\rho : \rho_a = \overline{E_c A} : \overline{P_c A} = (s - a) : s. \qquad \spadesuit$$

T5.4. $$T = \rho \cdot s = \rho_a (s - a).$$

B. A háromszöget bontsuk fel az O_0AB, az O_0BC az O_0CA háromszögekre és a területet számítsuk ki a részháromszögek területeinek összegeként:

$$T = \frac{c\rho}{2} + \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} = \rho s.$$

A másik képletet a T5.3. felhasználásával kaphatjuk meg (vagy ugyanilyen felbontásos eljárással is bizonyítható). ♠

T5.5. Heron-képlet. $$T^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Szükség lesz még a Heron-képlet összeszorzott (kevésbé ismert) változatára is:

$$(4T)^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

B. Jelöljük P_a-val az a oldalhoz hozzáírt kör érintési pontját az a oldalon. Az $O_0CE_a\Delta$ hasonló a $CO_aP_a\Delta$-höz, mert a külső szögfelező merőleges a belsőre. Ebből

$$\overline{CE_a} : \overline{O_0 E_a} = \overline{O_a P_a} : \overline{CP_a},$$

és T5.4 felhasználásával

$$(s - c) : \frac{T}{s} = \frac{T}{s - a} : (s - b),$$

ami ekvivalens a Heron-képlettel.

Az összeszorzás előtt szabaduljunk meg az *s* jelöléstől:

$$(4T)^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

majd többszörösen alkalmazzuk az összeg és különbség szorzatának formuláját. akkor

$$(4T)^2 = ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) = (-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) =$$
$$= 4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \quad ♠$$

T5.6. A beírt kör területének és a háromszög területének hányadosára felső korlát adható,

$$\frac{\rho^2 \pi}{T} \le \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

és egyenlőség csak az egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn.
Adott területű háromszögek közül az egyenlő oldalú háromszögnek minimális a kerülete, és adott kerületű háromszögek közül az egyenlő oldalú háromszögnek maximális a területe.

B. Az előző két tétel alapján alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{\rho^2}{T} = \frac{\rho}{s} = \frac{T}{s^2} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s^2}.$$

s-et állandónak tekintve a gyökjel alatti három tényezőre alkalmazzuk a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget, a három szám összege $(s-a) + (s-b) + (s-c) = s$, tehát

$$\frac{\rho^2}{T} = \frac{\sqrt{s}}{s^2}\left(\frac{s}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{3^3}},$$

amit bizonyítani akartunk. Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $s-a = s-b = s-c$, vagyis, ha $a = b = c$.

A bizonyított egyenlőtlenség a $T = \rho \cdot s$ képlet segítségével a

$$T \le \frac{1}{3\sqrt{3}} s^2$$

alakba írható át, ami – hozzávéve, hogy egyenlőség csak egyenlő oldalú esetben áll fenn – igazolja a második két állítást. ♠

T5.7. Az O_0 pontból az *a* oldal $90^{\circ} + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik. Ha *A*-t a körülírt körnek azon a részén mozgatjuk (az *a* oldalt rögzítve), amelynek pontjaiból az *A*-nál lévő szög α marad, akkor O_0 is köríven mozog. A BO_aC szög $90^{\circ} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$.

B. A $BO_0C\Delta$ két szöge $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$, a harmadik szög tehát $180^{\circ} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2}$. A BO_0CO_a négyszögben két derékszög van, így a másik két szög összege 180°, amiből a tétel másik állítása már következik. ♠

5.2. *A szögfelező szakasz*

Vezessük be ideiglenes jelölésként a következőket. Jelöljük az A csúcs belső szögfelezőjének és az a oldalnak a metszéspontját P-vel, a külső szögfelezőjének és az a oldal egyenesének metszéspontja – ha létezik – legyen Q. A b és a c oldalak arányát jelölje λ, tehát $\lambda = \frac{b}{c}$.

T5.8. Az α szög belső szögfelezője a szemközti a oldalt a szög szárait képező oldalak arányában osztja fel:

$$\overline{PC} : \overline{PB} = \lambda .$$

Hasonló igaz a külső szögfelezőre is. Tegyük fel, hogy $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, akkor Q létezik, és

$$\overline{QC} : \overline{QB} = \lambda .$$

B. Húzzunk a szögfelezővel párhuzamos egyenest a C-n keresztül, messe ez az egyenes a c oldal meghosszabbítását D-ben. Az $ACD\Delta$ egyenlőszárú, tehát $\overline{AD} = b$. A párhuzamos szelők tétele miatt $\overline{PC} : \overline{PB} = b : c = \lambda$.

Húzzunk a b oldallal párhuzamos egyenest a B-n keresztül, messe ez az egyenes a külső szögfelező egyenesét E-ben. A $BAE\Delta$ egyenlőszárú, tehát $\overline{BE} = c$. A $QBE\Delta$ és a $QCA\Delta$ hasonló, tehát $\overline{QC} : \overline{QB} = b : c = \lambda$. ♠

Az 5.8. állítás szerint a B, C, P, Q pontok harmonikus pontnégyest alkotnak (ld. 2. fejezet).

T5.9. $\overline{PB} = \frac{a}{1+\lambda}$ és $\overline{PC} = \frac{a\lambda}{1+\lambda}$. Továbbá $\lambda \neq 1$ esetén $\overline{QB} = \frac{a}{|1-\lambda|}$ és $\overline{QC} = \frac{a\lambda}{|1-\lambda|}$.

B. Legyen $\overline{PC} = x$, akkor (T5.7. alapján) $x : (a - x) = \lambda$, amiből $x = \frac{\lambda a}{1+\lambda}$.

A másik esetben legyen $\overline{QC} = y$. Ha $\lambda < 1$, akkor $y : (a + y) = \lambda$, vagyis $y = \frac{\lambda a}{1-\lambda}$. Ha $\lambda > 1$, akkor $y : (y - a) = \lambda$, vagyis $y = \frac{\lambda a}{\lambda - 1}$. ♠

Az $APQ\Delta$ körülírt körét az $ABC\Delta$ a oldalához tartozó *Apollóniusz-körének* nevezik. Részletesebben lásd a 6. és a 20.1. fejezetet.

T5.10. A beírt kör középpontjának az A, B, C bázispontokra vonatkozó baricentrikus koordinátái a, b és c, vagy szögekkel megadva $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$.
O_0 az AP szögfelezőt $\overline{AO_0} : \overline{O_0P} = (b+c) : a$ arányban osztja fel.
Az O_a baricentrikus koordinátái $-a$, b, c, ill. $-\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$.

B. 1. bizonyítás. O_0, ill. O_a trilineáris koordinátái $\pm\rho$, ρ, ρ (ahol ρ most a beírt, ill. hozzáírt kör sugara), vagy ami ezzel ekvivalens, ± 1, 1, 1. A T2.7. alapján a baricentrikus koordináták $\pm a$, b, c. ♠

2. bizonyítás. A P pont a B-ben elhelyezett b tömeg és a C-ben elhelyezett c tömeg súlypontja, tehát AP súlyozott súlyvonal és tartalmazza a súlyozott súlypontot. Ez hasonlóan a többi súlyvonalra is igaz, vagyis a súlyozott súlypont minden szögfelezőn rajta van, tehát O_0

megegyezik a súlyozott súlyponttal. Mivel O_0 az A pontban elhelyezett a tömeg és a P pontban elhelyezett $(b + c)$ tömeg súlypontja az osztási arány nyilvánvaló.

Húzzuk meg az α szög belső szögfelező egyenesét, AP-t, valamint a β szög belső és külső szögfelezőjét. Az AP egyenesen kapott O_0 és O_a az A és P pontokkal együtt harmónikus pontnégyest alkot. Mivel O_0 az A és P pontok a és $(b + c)$ súlyokkal képezett súlypontja, O_a ugyanezen pontok $-a$ és $(b + c)$ súlyokkal képezett súlypontja, vagyis O_a baricentrikus koordinátái $-a$, b és c.

A szögekre vonatkozó átíráshoz szorozzuk meg t-vel a baricentrikus koordinátákat, ahol a szinusz-tételt felhasználva $t = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$. ♠

Két formulát és egy egyenlőtlenséget is adunk a szögfelező hosszára.

T5.11. Az α szög belső szögfelezője hosszának a négyzete

$$f^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right).$$

A szögfelező hossza kisebb, mint a közrefogó oldalak mértani közepe.
Másrészt

$$f = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},$$

és

$$f \le \sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Az egyenlőtlenségben az egyenlőség csak $b = c$ esetén áll fenn.

B. Az APC és APB háromszögekre írjuk fel a koszinusz tételt és használjuk fel a T4.8-at.

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 = b^2 + f^2 - 2bf\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 = c^2 + f^2 - 2cf\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Szorozzuk az első egyenletet c-vel, a másodikat b-vel és vonjuk ki egymásból:

$$\frac{a^2bc}{(b+c)^2}(b-c) = bc(b-c) - f^2(b-c).$$

Egyszerűsítés után (ha $b \ne c$) megkapjuk a tétel első állítását. Ha $b = c$, azaz, ha egyenlőszárú háromszögről van szó, az eredmény közvetlenül igazolható.

A második állításhoz bontsuk fel a háromszöget a szögfelezővel két háromszögre, melyek területeinek az összege megadja a háromszög területét:

$$\frac{1}{2}bf\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}cf\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

amiből

$$f = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből $\sqrt{bc} \le \frac{b+c}{2}$, vagy másképpen $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \le 1$, illetve $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{bc}$, ami bizonyítja az egyenlőtlenséget. ♠

T5.12. Hosszabb oldalhoz rövidebb szögfelező tartozik.

B. Az α ill. β szöghöz tartozó belső szögfelező hosszát jelöljük f_a-val ill. f_b-vel és legyen $a > b$. Alakítsuk át T5.11. képletét:

$$f_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} 4s(s-a) = 4cs \frac{b}{b+c} \frac{s-a}{2s-a}$$

Számítsuk most ki két szögfelező négyzetének a hányadosát:

$$\frac{f_a^2}{f_b^2} = \frac{b}{a} \frac{a+c}{b+c} \frac{(2s-b)(s-a)}{(2s-a)(s-b)} = \frac{ab+bc}{ab+ac} \frac{2s^2 - as - bs + ab - as}{2s^2 - as - bs + ab - bs}.$$

Az utóbbi alakban mindkét tört számlálója kisebb, mint a nevezője, tehát a szorzatuk is 1-nél kisebb, vagyis $f_a < f_b$. ♠

A beírt kör középpontjának koordinátageometriai meghatározásához kínálkozó út a szögfelezők metszéspontjának a meghatározása. A szögfelezők egyenletét a T1.11.-ben tárgyaltuk. Mégis ez az eljárás többnyire nem javasolt, helyette a T5.10-et ajánljuk.

Jelöljük a háromszög csúcsainak helyvektorait $\boldsymbol{a}_0$-lal, $\boldsymbol{b}_0$-lal és $\boldsymbol{c}_0$-lal. Számítsuk ki az oldalak a, b és c hosszát, akkor a beírható kör középpontjának helyvektora

$$\frac{1}{2s}(a\boldsymbol{a}_0 + b\boldsymbol{b}_0 + c\boldsymbol{c}_0).$$

Hasonlóan az a oldalhoz hozzáírt kör középpontjának a helyvektora

$$\frac{1}{2(s-a)}(-a\boldsymbol{a}_0 + b\boldsymbol{b}_0 + c\boldsymbol{c}_0).$$

5.3. *Beírt félkör és a középpontok távolsága a csúcsoktól*

Az a oldalra illeszkedő beírt félkör olyan félkör, melynek átmérője az a oldalra esik és teljes körré kiegészítve érinti a b és a c oldalegyeneseket. A beírt félkör sugara hasonlóan, mint a beírt kör sugara, a háromszög T területével adható meg.

T5.13. Jelöljük az a oldalra illeszkedő beírt félkör sugarát ρ_1-gyel, akkor

$$T = \frac{b+c}{2}\rho_1.$$

A beírt kör sugarához viszonyítva: $\rho : \rho_1 = (b+c) : (a+b+c)$.

B. Az A csúcsból kiinduló belső szögfelező két háromszögre bontja az $ABC\Delta$-et, melyek területe $\frac{b}{2}\rho_1$ és $\frac{c}{2}\rho_1$. A két terület összege megadja T-t.

Mivel $T = \rho s$, a két egyenlet hányadosa adja a második összefüggést. ♠

Húzzunk párhuzamos egyenest az a oldallal O_0-n át. Messe ez az egyenes a b oldalt C_1-ben és a c oldalt B_1-ben. Az $AB_1C_1\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$-höz és a hasonlósági arány T5.18. értelmében $\mu = (b+c):(a+b+c)$, ugyanis a hasonlósági arány leolvasható a beírt félkörök sugarainak arányából.

T5.14. $$\overline{O_0A}^2 = bc\frac{s-a}{s}.$$

Az a oldalhoz hozzáírt kör kör középpontjára

$$\overline{O_aA}^2 = bc\frac{s}{s-a} \text{ és } \overline{O_aB}^2 = ac\frac{s-a}{s-c},$$

amiből $\overline{O_0A}\cdot\overline{O_aA} = bc$ is következik.

B. Jelöljük az $AB_1C_1\Delta$ oldalainak hosszát a_1-gyel, b_1-gyel és c_1-gyel. O_0A ennek a háromszögnek a szögfelezője, tehát hosszát megadja a T5.11. képlet:

$$\overline{O_0A}^2 = b_1c_1\left(1-\left(\frac{a_1}{b_1+c_1}\right)^2\right) = \mu^2 bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) = bc\frac{(b+c)^2-a^2}{(a+b+c)^2} = bc\frac{b+c-a}{a+b+c},$$

ami megegyezik az állítással.

T5.3 alapján a beírt körből az a oldalhoz hozzáírt kört az A pontból történő $\frac{s}{s-a}$ arányú nagyítással kaphatjuk meg. Ebből azonnal adódik az $\overline{O_aA}$-ra vonatkozó állítás.

Az $ABO_a\Delta$ és az $AO_0C\Delta$ hasonló, mert az A-nál lévő szögük $\frac{\alpha}{2}$, és az $ABO_a\Delta$ O_a-nál lévő szöge $180^\circ - (\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+90^\circ) = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$, de ugyanekkora az $AO_0C\Delta$ C-nél lévő szöge is. Ennek alapján $\overline{BO_a} : c = \overline{O_0C} : \overline{O_0A}$, vagyis

$$\overline{BO_a}^2 = c^2\frac{\overline{O_0C}^2}{\overline{O_0A}^2} = c^2\frac{ab\frac{s}{s-c}}{bc\frac{s}{s-a}} = ac\frac{s-a}{s-c}.$$

Az előbbi hasonlóság miatt $c : \overline{O_aA} = \overline{O_0A} : b$, ami a tétel utolsó állításával ekvivalens. ♠

Az O_0AE_b derékszögű háromszögből, melynek az oldalait ismerjük, az $\frac{\alpha}{2}$ szög minden szögfüggvénye kiszámítható.

T5.15.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

B. Az O_0AE_b derékszögű háromszögből a $T = \rho\cdot s$ területképlet és a Heron-képlet felhasználásával

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\rho}{s-a}=\frac{T}{s(s-a)}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\,.$$

Hasonlóan, de T5.14 alkalmazásával

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{s-a}{\sqrt{bc\frac{s-a}{s}}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\,.$$

A második állítás a $\sin\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ összefüggés alapján azonnal látható. ♠

5.4. *Gergonne-háromszög*

T5.16. Az AE_a, BE_b és CE_c egyenesek egy ponton mennek keresztül, a pont neve: Gergonne-pont. A Gergonne-pont baricentrikus koordinátái: $\frac{1}{s-a}$, $\frac{1}{s-b}$, $\frac{1}{s-c}$.

B. E_a a B és a C pontok $\frac{1}{s-b}$, $\frac{1}{s-c}$ súlyokkal képezett súlypontja, hiszen $\overline{BE_a}=s-b$ és $\overline{E_aC}=s-c$. Így AE_a súlyozott súlyvonal. Hasonlóan igaz ez a többi egyenesre is, tehát minden súlyozott súlyvonal átmegy a súlyozott súlyponton. ♠

T5.17. Az $E_aE_bE_c$ háromszög neve *Gergonne-háromszög*. A Gergonne-háromszög E_a-nál lévő szöge $\frac{\beta+\gamma}{2}$, amit az O_0E_a egyenes $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ szögekre vág szét. A Gergonne-háromszög mindig hegyesszögű.

B. Az $O_0E_aE_b$ szög és az E_aCO_0 szög szárai merőlegesek, tehát egyenlők, és egyenlők $\frac{\gamma}{2}$-vel. Hasonló igaz az $O_0E_aE_c$ szögre is.
Mivel $\beta+\gamma=180^\circ-\alpha<180^\circ$, a Gergonne-háromszög szögei kisebbek 90°-nál. ♠

A körülírt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját jelöljük R_a-val, és a többi ív felezőpontját értelemszerűen R_b-vel és R_c-vel.

T5.18. Az AO_0 egyenes átmegy R_a-n.

B. Ugyanazon körben egyenlő ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak, tehát AR_a szögfelező. ♠

T5.19. Az $E_aE_bE_c$ Gergonne-háromszög hasonló az $R_aR_bR_c\Delta$-höz és a megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság aránya:

$$\frac{\rho}{R}=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\,.$$

B. Az R_a-ból kiinduló átmérő másik végpontja legyen G. A G-t tartalmazó BC ívhez tartozó kerületi szög $180^\circ-\alpha$, a GC ívhez tartozó $90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, a GR_b ívhez tartozó $90^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=$

$= \dfrac{\gamma}{2}$. Vagyis a GR_aR_b szög és a $O_0E_aE_b$ szög T5.17. szerint egyenlő nagyságú, és egyállású, tehát R_aR_b párhuzamos E_aE_b-vel.

A két háromszög hasonlósági aránya nyilván $\rho : R$, amiből a kör sugarak T4.4. és T5.4. segítségével kiválthatók, majd a terület a Heron-képlettel (T5.5.) kiszámítható:

$$\frac{\rho}{R} = \frac{T}{s}\frac{4T}{abc} = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}. \qquad \spadesuit$$

T5.20. A Gergonne-háromszög oldalának hossza az $\overline{E_aE_b}^2 = 4\rho^2\dfrac{s(s-c)}{ab}$ képlettel számítható ki.

B. T5.14. felhasználásával

$$\overline{E_aE_b} = 2\overline{E_aC}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = 2(s-c)\frac{\rho}{\overline{O_0C}} = \frac{2\rho(s-c)}{\sqrt{ab\dfrac{s-c}{s}}} = 2\rho\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \quad \spadesuit$$

T5.21. A Gergonne-háromszög területe $T_G = \dfrac{2\rho^2 s}{abc}T = \dfrac{\rho T}{2R} \le \dfrac{T}{4}$.

A T5.19.-ben szereplő $R_aR_bR_c\Delta$ területe $T_R = \dfrac{RT}{2\rho} \ge T$. Egyenlőség mindkét helyen akkor és csak akkor áll fenn, ha az $ABC\Delta$ egyenlő oldalú. T_G és T_R mértani közepe $\dfrac{T}{2}$.

B. Alkalmazzuk a háromszögnek a körülírt kör sugarával felírható területképletét. A körülírt kör sugara itt ρ, a Gergonne-háromszög oldalait jelölje a_1, b_1, c_1.

$$T_G = \frac{a_1b_1c_1}{4\rho} = \frac{(2\rho)^3}{4\rho}\sqrt{\frac{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2c^2}} = 2\rho^2 s\frac{T}{abc}.$$

A képlet átalakítása a területképletek segítségével egyszerűen elvégezhető.

A T5.19. hasonlósági arány alapján az $R_aR_bR_c\Delta$ területe $T_R = \dfrac{\rho T}{2R}\cdot\dfrac{R^2}{T^2} = \dfrac{RT}{2\rho}$. Az egyenlőtlenségek az Euler-féle sugáregyenlőtlenség (T14.1.) folyományai. ♠

T5.22. A Gergonne-pont a Gergonne-háromszög szimmedián pontja (definíciót ld. a 16. fejezetben).

B. A Gergonne-pont baricentrikus koordinátái T5.16. szerint $\dfrac{1}{s-a}$, $\dfrac{1}{s-b}$, $\dfrac{1}{s-c}$, vagy ami ezzel ekvivalens (végigszorozva a nevezők kétszeres szorzatával) $2(s-b)(s-c)$, $2(s-a)(s-c)$, $2(s-a)(s-b)$. A B pontban lévő $(s-a)(s-c)$ tömeg és a C pontban lévő $(s-a)(s-b)$ tömeg egyesíthető ezek súlypontjában E_a-ban, itt

$$(s-a)(s-c) + (s-a)(s-b) = a(s-a)$$

tömeget kell elhelyezni. Ugyanígy az E_b-be $b(s - b)$, E_c-be $c(s - c)$ tömeg kerül, s ezek súlypontja G. Ha a Gergonne-háromszög szimmedián pontját akarjuk meghatározni, akkor T16.3. értelmében az oldalak négyzetei a baricentrikus koordináták, vagyis az E_a, E_b, E_c pontokba $\frac{4\rho^2 s}{abc}a(s-a)$, $\frac{4\rho^2 s}{abc}b(s-b)$, $\frac{4\rho^2 s}{abc}c(s-c)$ tömegeket kell elhelyezni, de ez ekvivalens az előzővel, tehát ugyancsak G-t kapjuk meg. ♠

A T5.22. tételre a 16. fejezetben elemi bizonyítást is adunk a szimmedián pont tulajdonságait felhasználva, de ezek itt még nem állnak a rendelkezésünkre.

5.5. *A hozzáírt körök középpontjainak háromszöge*

Közvetlenül látható, hogy az $O_aO_bO_c\Delta$ magasságpontja O_0, és az $ABC\Delta$ ennek a háromszögnek a talpponti háromszöge (lásd részletesebben a 9. fejezetet). A 9. fejezetben bevezetésre kerülő szóhasználattal O_a, O_b, O_c, O_0, ortocentrikus pontnégyes. O_0O_a messe a-t T-ben, akkor T9.11. értelmében O_0, O_a, A, T harmonikus pontnégyes.

T5.23. Az O_0O_a szakaszt a háromszög köréírt köre felezi. Így az $O_aO_bO_c\Delta$ köréírt köre az $ABC\Delta$ köréírt körének O_0-ból történő kétszeres nagyítása, vagyis az $O_aO_bO_c\Delta$ köréírt körének a sugara $2R$. Az $O_aO_bO_c\Delta$ hasonló a Gergonne-háromszöghöz és oldalaik párhuzamosak.
Az $O_aO_bO_c\Delta$ mindig hegyesszögű és az O_a csúcsánál lévő szöge $\frac{\beta+\gamma}{2}$. Az $O_aO_bO_c\Delta$ t-vel jelölt területe $t = 2Rs$, és az $O_0O_bO_c\Delta$ t_1-gyel jelölt területe $t_1 = 2R(s-a)$.

B. Jelöljük az O_0O_a szakasz és a körülírt kör metszéspontját R_a-val. Egyszerű szögszámítással az $R_aBO_0\Delta$ egyenlőszárú, hiszen a BO_0R_a szög, mint külső szög, $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, másrészt az O_0BR_a szög $\frac{\beta}{2}$-ből és az CBR_a szögből tevődik össze, de ez utóbbi a kerületi szögek tétele miatt $\frac{\alpha}{2}$.
Az $R_aBO_a\Delta$ is egyenlőszárú, mert a BO_a oldalon lévő szögei az előbbi egyenlőszárú háromszög alapon lévő szögeit 90°-ra egészítik ki. Így $\overline{O_0R_a} = \overline{BR_a} = \overline{O_aR_a}$, amivel az első állítást bizonyítottuk.

Jelöljük R_b-vel és R_c-vel a körülírt kör és az O_0O_b ill. az O_0O_c szakasz metszéspontját. T5.19.-ben láttuk, hogy az $R_aR_bR_c\Delta$ oldalai párhuzamosak a Gergonne-háromszög oldalaival, ez a tulajdonság öröklődik, ha az $R_aR_bR_c\Delta$-et O_0-ból kétszeresére kinagyítjuk. A nagyítás során a körülírt kör sugara is $2R$ lesz, tehát $O_aO_bO_c\Delta$ körülírt körének a sugara $2R$.

Az $O_aO_bO_c\Delta$ szögeire tett állítás következik a Gergonne-háromszöghöz való hasonlóságból és T5.17.-ből.

(Az, hogy az $O_aO_bO_c\Delta$ körülírt körének a sugara $2R$ abból is látható, hogy az $ABC\Delta$ az $O_aO_bO_c\Delta$ talpponti háromszöge, ezért az $ABC\Delta$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\Delta$ Feuerbach-köre, így a körülírt körök sugarainak aránya 1 : 2. Lásd T10.5. bizonyítása.)

A területszámítási képletek elemi bizonyítása megtalálható a T9.10.-ben, itt a T2.10. tételt használjuk fel a bizonyításokhoz,

Az a oldalhoz hozzáírt kör középpontjának baricentrikus koordinátái $–a, b, c$, vagy normálva♠

$$\frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c}.$$

Ezt és a többi csúcsra vonatkozó hasonló képletet helyettesítsük be a T2.10. képletébe, akkor kapjuk, hogy

$$t=\frac{T}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}=\frac{4abc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}T.$$

A számláló helyére is és a nevező helyére is hozzuk be a háromszög területét (ld. 11. fejezet), nevezetesen $abc = 4RT$, és a Heron-képlet alapján

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=8(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{8T^2}{s},$$

tehát

$$t=\frac{16RT}{\frac{8T^2}{s}}T=2Rs.$$

Ugyanígy eljárva, de az O_0 baricentrikus koordinátáival, azaz a

$$\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}$$

koordinátákkal számolva kapjuk, hogy

$$t_1=\frac{T}{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}=\frac{4abc}{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}T.$$

Itt a nevező

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=8s(s-b)(s-c)=\frac{8T^2}{s-a},$$

és ez ugyanúgy vezet a másik területképlethez, mint az előző esetben. ♠

5.6. *Külső Gergonne-háromszögek*

Valamelyik hozzáírt kör oldalakon fekvő érintési pontjai által meghatározott háromszöget *külső Gergonne-háromszögnek* nevezzük. A három külső Gergonne-háromszög közül itt csak az a oldalhoz hozzáírt körből származtatott háromszöggel foglalkozunk. Az a oldalnak tehát kitüntetett szerepe van, míg a b és a c oldal felcserélhető. Jelöljük az a, b és a c oldalakon lévő érintési pontokat P_a-val, P_b-vel és P_c-vel, a hozzáírt kör sugarát ρ_a-val.

A külső Gergonne-háromszögnek a belsőhöz erősen hasonlító tulajdonságai vannak. Itt egy tételben foglaljuk össze a tudnivalókat.

T5.24. a) $P_aP_bP_c$ szög $\frac{\beta}{2}$, $P_aP_cP_b$ szög $\frac{\gamma}{2}$, $P_bP_aP_c$ szög $90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.

b) A $P_aP_bP_c\Delta$ hasonló az $AR_cR_b\Delta$-höz (a csúcsok sorrendjét betartva!). A hasonlóság aránya: $\frac{\rho_a}{R}$.

c) Az AP_a, BP_b, CP_c egyenesek egy pontban metszik egymást, az a oldalhoz tartozó külső Gergonne-pontban, melynek baricentrikus koordinátái: $-\frac{1}{s}, \frac{1}{s-c}, \frac{1}{s-b}$.

d) A külső Gergonne-háromszög oldalai: $\overline{P_aP_b}^2 = 4\rho_a^2 \frac{(s-a)(s-b)}{ab}$,

$$\overline{P_bP_c}^2 = 4\rho_a^2 \frac{s(s-a)}{bc}.$$

e) A külső Gergonne-háromszög területe: $T_a = \frac{\rho_a T}{2R}$.

A ρ_a T5.3 alapján számolható ki.

B. a) Az AP_bP_c és a CP_bP_a egyenlőszárú háromszögekből $P_aP_bP_c$ szög $90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2}$.

Ugyanígy a $P_aP_cP_b$ szög $\frac{\gamma}{2}$. A harmdik szögre marad: $180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.
b) Könnyen ellenőrizhető, hogy az $AR_cR_b\Delta$ szögei az a) pontban felsoroltakkal megegyezők, tehát a háromszögek hasonlók. A hasonlósági arány a körülírt körök sugarainak az aránya.
c) Először megmutatjuk, hogy a súlyok összege nem lehet nulla (ekkor ugyanis súlypontról nem beszélhetünk):

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-c} + \frac{1}{s-b} = \frac{s^2 - bc}{s(s-b)(s-c)},$$

de itt $s > b$ és $s > c$, tehát a számláló pozitív. A $-\frac{1}{s}, \frac{1}{s-c}, 0$ baricentrikus koordinátákkal rendelkező pont a BC egyenes pontja, és ellenőrizhető módon megegyezik P_c-vel, tehát a $-\frac{1}{s}, \frac{1}{s-c}, \frac{1}{s-b}$ koordinátájú pont rajta van a CP_c egyenesen. Ugyanígy látható, hogy rajta van a BP_b egyenesen is. A $0, \frac{1}{s-c}, \frac{1}{s-b}$ koordinátájú pont az a oldal P_a pontja, tehát a megadott pont rajta van az AP_a egyenesen, vagyis mindhárom egyenesnek pontja.
d) Az $O_aP_aCP_b$ húrnégyszögben a $P_aO_aP_b$ szög γ nagyságú, tehát $\overline{P_aP_b} = 2\rho_a \sin\frac{\gamma}{2}$. Felhasználva T5.15. egyik eredményét megkapjuk a $\overline{P_aP_b}$ fenti kifejezését. Hasonlóan az $O_aP_cAP_b$ húrnégyszögben a $P_cO_aP_b$ szög 180° - α nagyságú, tehát $\overline{P_bP_c} = 2\rho_a \cos\frac{\alpha}{2}$, és T15.5. itt is megadja az állítást.
e) E_bE_c és P_bP_c párhuzamos egyenesek, hiszen merőlegesek az A szög belső szögfelezőjére. Egyúttal $\overline{E_bE_c} : \overline{P_bP_c} = \overline{E_cA} : \overline{P_cA} = (s-a) : s = \rho : \rho_a$. Vegyük észre ugyanakkor, hogy

$$P_cE_c = s - (s-a) = a,$$

tehát T5.2. alapján az a oldal F felezőpontja egyenlő távol van az E_bE_c és a P_bP_c egyenestől. Legyen a Gergonne-háromszög E_a csúcsából kiinduló magasság talppontja D, és tükrözzük az $FE_aD\Delta$-et F-re, akkor D tükörképe, D' a P_aP_b egyenesre kerül, E_a tükörképe P_a, tehát $\overline{E_aD} = \overline{P_aD'}$, vagyis a belső és magasságai megegyeznek. A területek aránya megegyezik a párhuzamos alapok arányával, vagyis $\rho : \rho_a$. A Gergonne-háromszög területét T5.21.-ben már kiszámítottuk, a külső Gergonne-háromszög területe ebből adódik. ♠

5.7. *Nagel-háromszög*

Jelöljük a hozzáírt körök *a, b* és *c* oldalakon lévő érintési pontjait P_a-val, P_b-vel és P_c-vel. E_a és P_a-az *a* oldal felezőpontjára szimmetrikusan helyezkednek el (T5.2.). Ezt felhasználva először általánosabban fogalmazzuk meg az állítást.

T5.25. A háromszög belsejében (kívül eső általánosítással most nem foglalkozunk) vegyünk fel egy *P* pontot és messék az *AP*, *BP*, *CP* egyenesek a szemközti oldalt rendre a P_1, P_2, P_3 pontokban. Tükrözzük a P_1, P_2, P_3 pontokat az illető oldal felezőpontjára, és a kapott pontokat jelöljük rendre Q_1-gyel, Q_2-vel és Q_3-mal. Az AQ_1, AQ_2, AQ_3 egyenesek is egy ponton mennek át, legyen ez a *Q* pont, és *Q*-t a *P izotonális konjugáltjának* nevezzük. Ha *P* baricentrikus koordinátái *p, q, r,* akkor *Q* baricentrikus koordinátái $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$.

Az AP_a, BP_b és CP_c egyenesek egy ponton mennek keresztül, a pont neve: *Nagel-pont*. A Gergonne-pont és a Nagel-pont izotonális konjugáltak. Az *N* Nagel-pont baricentrikus koordinátái: $s - a, s - b, s - c$. A $P_aP_bP_c$ háromszöget *Nagel-háromszögnek* nevezzük.

B. Csak a T5.25. első bekezdésének állításait kell igazolni, a második bekezdés ennek alkalmazása felhasználva T5.2.-t és T5.16.-ot.

Tegyük fel, hogy a *Q* pont baricentrikus koordinátái $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$. A P_1 pont baricentrikus koordinátái 0, *q*, *r*, a Q_1 baricentrikus koordinátái $0, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$, tehát *Q* rajta van az AQ_1 egyenesen. Ugyanígy megmutatható, hogy *Q* a BQ_2 és a CQ_3 egyeneseknek is pontja. ♠

T5.26. Az O_0, *S*, *N* pontok egy egyenesre esnek, és *S* harmadolja az O_0N szakaszt:

$$2\overline{O_0S} = \overline{SN}.$$

B. *N* baricentrikus koordinátái $s - a, s - b, s - c$, O_0 baricentrikus koordinátáit vegyük $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$-nek, akkor mindkét pontban a súlyok összege *s*. Tegyünk O_0-ba 2 egységnyi, *N*-be 1 egységnyi súlyt és képezzük a súlyozott súlypontot. Ennek baricentrikus koordinátái $2\frac{a}{2} + s - a = s$, $2\frac{b}{2} + s - b = s$, $2\frac{c}{2} + s - c = s$ lesznek, ami ekvivalens 1, 1, 1-gyel, vagyis a súlypontról van szó. ♠

T5.27. Az izotonális konjugáltakhoz tartozó háromszögek területe egyenlő. Speciálisan a Gergonne-háromszög és a Nagel-háromszög területe egyenlő, a T5.21. területképlet tehát a Nagel-háromszögre is érvényes.

B. Legyen $\overline{BP_1} = \lambda a, \overline{CP_2} = \mu b, \overline{AP_3} = \nu c$. Elég azt bizonyítani, hogy az $ABC\Delta$-ből „feleslegessé váló" három háromszög területösszege a két esetben egyenlő. Jelöljük T-vel az $ABC\Delta$ területét. $P_1P_2P_3\Delta$-nél a „feleslegessé váló" háromszögek területösszege

$$\frac{1}{2}[\lambda(1-\nu)ac\sin\beta + \mu(1-\lambda)ba\sin\gamma + \nu(1-\mu)bc\sin\alpha] = T[\lambda(1-\nu)+\mu(1-\lambda)+\nu(1-\mu)].$$

A $Q_1Q_2Q_3\Delta$-nél „feleslegessé váló" háromszögek területösszege hasonlóan

$$T[\lambda(1-\nu)+\mu(1-\lambda)+\nu(1-\mu)],$$

de a két kifejezés egyenlő. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. (Még azt sem használtuk ki, hogy az AP_1, BP_2, CP_3 egyenesek egy ponton mennek át.) ♠

T5.28. A Nagel-pont a oldaltól mért távolsága $2T\dfrac{s-a}{as} = 2\rho\dfrac{s-a}{a}$.

B. Az N baricentrikus koordinátáit figyelembe véve az N az AP_a szakaszt $a : (s-a)$ arányban osztja, ezért az a oldaltól mért távolsága az m_a magasság $\dfrac{s-a}{s}$-ed része, azaz $\dfrac{2T}{a}\dfrac{s-a}{s}$. ♠

További állítás található a Nagel-pontra vonatkozóan a T8.4.-ben.

5.8. *Kerületfelező egyenesek*

T5.29. Az AP_a egyenes felezi a háromszög kerületét.

B. T5.2.-t felhasználva $\overline{AB} + \overline{BP_a} = \overline{AB} + \overline{BP_c} = AP_c = s$. ♠

T5.30. Az a oldal F_a felezőpontján áthaladó, az A csúcsnál lévő szög belső szögfelezőjével párhuzamos e egyenes felezi a háromszög kerületét.

B. Tegyük fel, hogy $c \geq b$, akkor e a c oldalt metszi egy G pontban. Elég azt megmutatni, hogy $\overline{BG} = \dfrac{b+c}{2}$. Alkalmazzuk az T5.8.-ban használt konstrukciót: húzzunk a szögfelezővel párhuzamos egyenest a C-n keresztül, messe ez az egyenes a c oldal meghosszabbítását D-ben. Az $ACD\Delta$ egyenlőszárú, tehát $\overline{AD} = b$. P_aG a $BCD\Delta$ középvonala, tehát G felezi a $\overline{BD} = b + c$ távolságot. ♠

5.9. *Látványos formulák*

Az alábbiakban tetszetős, de ugyanakkor kevésbé fontos képletek sorát mutatjuk be.

T5.31.

a) $$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c},$$

b) $$T = \sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c},$$

c) $$\overline{O_0A}\cdot\overline{O_0B}\cdot\overline{O_0C} = 4R\rho^2,$$

d) $$\frac{\overline{O_0A}^2}{bc}+\frac{\overline{O_0B}^2}{ac}+\frac{\overline{O_0C}^2}{ab}=1,$$

e) $$\rho_a+\rho_b+\rho_c=\rho+4R.$$

f) $$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\rho}{4R}\le\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{T}{s^2}=\frac{\rho}{s}\le\frac{1}{3\sqrt{3}},$$

g) $$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{\rho}{R}$$

vagy másképpen, ha a körülírt kör középpontjának az oldalaktól mért előjeles távolságait d_1, d_2, d_3 jelöli, akkor

$$d_1+d_2+d_3=R+\rho.$$

Az a) képletből következik, hogy ρ a legkisebb magasság harmada és a legnagyobb magasság harmada közé esik, és csak az egyenlő oldalú háromszögnél áll fenn az egyenlőség.

B. a)

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}=\frac{a}{2T}+\frac{b}{2T}+\frac{c}{2T}=\frac{2s}{2T}=\frac{1}{\rho}.$$

b) T5.3. felhasználásával

$$\sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c}=\sqrt{\frac{\rho^4s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{\rho^2s^2}{T}=\frac{T^2}{T}=T.$$

c) T5.14. és a területképletek felhasználásával

$$\overline{O_0A}\cdot\overline{O_0B}\cdot\overline{O_0C}=\sqrt{a^2b^2c^2\,\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}=\frac{abcT}{s^2}=\frac{4RT^2}{s^2}=4R\rho^2.$$

d) T5.14. felhasználásával

$$\frac{\overline{O_0A}^2}{bc}+\frac{\overline{O_0B}^2}{ac}+\frac{\overline{O_0C}^2}{ab}=\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}=\frac{3s-2s}{s}=1.$$

e) T5.3.-ból fejezzük ki a hozzáírt körök sugarait, és írjuk be kifejezésünkbe. Használjuk fel továbbá a háromszög területképleteit!

$$\rho_a+\rho_b+\rho_c-\rho=\rho s\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}\right)=$$

$$=\frac{\rho s}{T^2}\big((s-b)(s-c)s+(s-a)(s-c)s+(s-a)(s-b)s-(s-a)(s-b)(s-c)\big)=$$

$$=\frac{1}{T}\big(s(s-c)(s-b+s-a)+(s-a)(s-b)(s-(s-c))\big)=$$

$$=\frac{c}{T}\left(s(s-c)+s(s-b)-a(s-b)\right)=\frac{ac}{T}\left(s-(s-b)\right)=\frac{abc}{T}=4R.$$

f) T5.15.-öt használjuk fel a félszögek szögfüggvényeire, majd a háromszög területképleteit alkalmazzuk::

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}=\frac{T^2}{sabc}=\frac{\rho s\cdot\frac{abc}{4R}}{sabc}=\frac{\rho}{4R},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{T^2}{s^2}=\frac{\rho}{s}.$$

Az egyenlőtlenségek bizonyításához az első esetben a T14.1. Euler-formula következményét, mely szerint $\rho\le\frac{R}{2}$, a második esetben a T5.6. egyenlőtlenséget, $\frac{\rho^2}{T}=\frac{\rho}{s}\le\frac{1}{3\sqrt{3}}$, használjuk fel. Mindkettőben az egyenlőség csak egyenlő oldalú háromszög esetén érvényes.

g) Koszinusz tételből

$$1+\cos\alpha=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc},$$

$$-1+\cos\beta=-1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{(c-a)^2-b^2}{2ac}=\frac{(b+c-a)(c-a-b)}{2ac}$$

és hasonlóan

$$-1+\cos\gamma=-1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}=\frac{(b+c-a)(-a+b-c)}{2ab}.$$

A formulákat összeadva

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=\frac{b+c-a}{2abc}[a(b+c+a)+b(c-a-b)+c(-a+b-c)]=$$

$$=\frac{b+c-a}{2abc}(a^2-(b-c)^2)=4\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

Használjuk fel a háromszög területképleteit, akkor

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=\frac{4T^2}{abcs}=\frac{T}{s}\frac{4T}{abc}=\frac{\rho}{R},$$

amit bizonyítani akartunk.

Az egyenlőséget R-rel megszorozva megkapjuk a második állítást. ♠

6. Apollóniusz-kör

6.1. *Definíció*

Korábban (T5.8 – 5.9.) speciális (de tipikus) összefüggésben definiáltuk az Apollóniusz-kör fogalmát. Az általános definíciót itt adjuk meg a T6.1. állítás kapcsán. Jelöléseinket tekintve a 5. fejezetnek megfelelően BC-vel jelöljük az alapszakaszt, és λ-val az arányt, természetesen itt $\lambda > 0$.

T6.1. Ha $\lambda \neq 1$, akkor azon A pontok mértani helye a síkon, melyekre $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \lambda$, egy kör, melyet *Apollóniusz-körnek* nevezünk. Ha $\lambda = 1$, akkor a mértani hely a szakaszfelező merőleges (ld. T1.6.). Ha $\lambda < 1$, akkor minden olyan A pontra, mely a kör belsejében van $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} < \lambda$, és minden kívül eső A pontra $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} > \lambda$. Ha $\lambda > 1$, akkor a kör belsejében lévő A pontokra $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} > \lambda$, a kívül eső A pontokra pedig $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} < \lambda$.

Adott BC szakaszhoz tartozó Apollóniusz-körök un. *elliptikus körsort* alkotnak, kiegészítve két 0 sugarú körrel és a szakaszfelező merőlegessel.

B. Tegyük fel egyelőre, hogy A nem esik az a oldal egyenesére. Az CAB szög szögfelezője messe az a oldalt P-ben, a külső szögfelezője messe az a oldal egyenesét Q-ban. Mivel $\lambda \neq 1$, $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, a szögfelező nem lehet merőleges a-ra, így a külső szögfelező sem lehet párhuzamos a-val, tehát Q létezik. T5.8 alapján a és λ meghatározza a P és Q pontokat A helyzetétől függetlenül. Mivel a $PAQ\Delta$ derékszögű, A rajta van a PQ szakaszra illesztett Thalesz körön.

Ha A az a oldal egyenesére esik, akkor T5.9. bizonyítja, hogy csak a P és ($\lambda \neq 1$ esetén) a Q pontok tesznek eleget a λ arányt előíró feltételnek, tehát A ekkor is a Thalesz-körön van. Ezzel a mértani helyre vonatkozó állítás még nincs bizonyítva, mert a körön elvileg lehetnek idegen pontok, de a második állításból kiderül ennek a lehetetlensége.

A második állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\lambda < 1$, akkor a T5.9. képletei szerint

$$\overline{PC} = a - \frac{a}{1+\lambda} \quad \text{valamint} \quad \overline{QC} = \frac{a}{1-\lambda} - a,$$

amiből látható, hogy mindkettő λ-nak monoton növekedő függvénye ($0 < \lambda < 1$). Rögzítsünk egy $\lambda = \lambda_0$ értéket, az ehhez tartozó P és Q alappontokat pedig jelöljük P_0-lal és Q_0-lal. A P_0Q_0 szakasz nyilván tartalmazza C-t, így $\lambda_0 < \lambda < 1$ esetén PQ szakasz tartalmazza a P_0Q_0 szakaszt. Ebből következik, hogy a λ-hoz tartozó kör tartalmazza a λ_0-hoz tartozót, vagyis minden olyan A pont, melyhez $\lambda_0 < \lambda < 1$ arány tartozik, a λ_0-hoz tartozó körön kívül van. A $\lambda \geq 1$ aránnyal bíró A pontok a BC felező merőlegesének a másik oldalára esnek, tehát az állítás ezekre is igaz.

Ugyanígy látható, hogy minden olyan A pont, melyhez $0 < \lambda < \lambda_0$ arány tartozik, a λ_0-hoz tartozó körön belül van.

A $\lambda_0 > 1$ esetre vonatkozó állítás a B és C jelölések felcserélésével adódik, ami a λ értékeket a reciprokukra változtatja meg, így a rájuk vonatkozó nagysági viszonyok is felcserélődnek. ♠

T6.2. A BC szakaszhoz tartozó Apollóniusz-körök merőlegesen metszik a BC szakasz Thalesz-körét. (A körök metszési szögén a metszéspontban húzott érintők szöge értendő.) Másképpen fogalmazva: a BC szakasz F felezőpontjából minden Apollóniusz-körhöz $\frac{a}{2}$ hosszúságú érintő húzható. Másrészt a BC szakasz Thalesz-körét merőlegesen metsző minden kör, melynek a középpontja a BC egyenesen van, Apollóniusz-kör.

B. Az előző megállapítás alapján feltehető, hogy $\lambda < 1$. Az érintő hossza, e, mértani középarányos az $\overline{FP}$ és $\overline{FQ}$ között (ld. T3.4.), tehát T5.9.-et felhasználva

$$e^2 = \left(\frac{a}{2} - \overline{PC}\right)\left(\frac{a}{2} + \overline{QC}\right) = \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)\left(1 + \frac{2\lambda}{1-\lambda}\right) = \frac{a^2}{4}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{a^2}{4},$$

és ezt akartuk bizonyítani.

A megfordításhoz vegyünk fel egy tetszőleges merőlegesen metsző kört, melynek a középpontja BC egyenesen van. Az egyik metszéspontjuk legyen A, és legyen $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. A BC szakasz λ-hoz tartozó Thalesz-köre szintén átmegy A-n és ugyancsak merőlegesen metszi a Thalesz-kört, tehát megegyezik a felvett körrel. ♠

A T6.2. állítás első megfogalmazása bizonyos dualitást rejt, ugyanis a merőlegesen metszés kölcsönös tulajdonság. (Lásd még T2.3.)

T6.3. A λ arányszámhoz ($\lambda \neq 1$) tartozzanak a P és Q alappontok (T5.8. szerint). A BC szakasz Thalesz-köre a PQ szakasz $\frac{|1-\lambda|}{1+\lambda}$ arányszámhoz tartozó Apollóniusz-köre.

B. A B és a C pontokra

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{a}{1+\lambda} : \frac{a}{|1-\lambda|} = \frac{|1-\lambda|}{1+\lambda}$$

és

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{a\lambda}{1+\lambda} : \frac{a\lambda}{|1-\lambda|} = \frac{|1-\lambda|}{1+\lambda},$$

vagyis B és C az $\frac{|1-\lambda|}{1+\lambda}$ arányszámhoz tartozó Apollóniusz-kör alappontjai a PQ szakaszra vonatkozóan. ♠

T6.4. Az Apollóniusz-kör sugara $r = \frac{a\lambda}{|1-\lambda^2|}$.

B. Ha $\lambda < 1$, akkor

$$2r = \overline{PC} + \overline{QC} = a\lambda\left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\right) = a\lambda\frac{2}{1-\lambda^2}.$$

$\lambda > 1$ esetén cseréljük fel a B és a C pontok jelölését, ekkor λ helyére a reciproka kerül, és az előbbi reláció alkalmazható:

$$r = a\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda^2}} = a\lambda\frac{1}{\lambda^2 - 1}.$$

A két formula együtt megadja a kívánt állítást. ♠

6.2. *Koordináta geometria*

A BC szakasz λ arányszámhoz tartozó Apollóniusz-körének az egyenletét a definíciója alapján könnyen felírhatjuk. Legyenek a B pont koordinátái (b_1, b_2) a C ponté (c_1, c_2), az A ponté (x, y), akkor

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2((x-b_1)^2 + (y-b_2)^2),$$

ami egyben az Apollóniusz-kör egyenlete.

T6.5. Ha $K(x, y) = 0$ a BC szakasz egyik Apollóniusz-körének az egyenlete, és a főegyütthatók 1-ek (azaz mind x^2, mind y^2 együtthatója 1), akkor az Apollóniusz-körhöz tartozó λ a következő formulával számolható ki:

$$\lambda^2 = 1 - \frac{a^2}{K(b_1, b_2)},$$

ahol $a = \overline{BC}$, és $B = (b_1, b_2)$.

B. Az előző megjegyzés alapján a λ-hoz tartozó Apollóniusz-kör egyenlete, a főegyütthatókat 1-gyé alakítva, a következő alakban írható fel:

$$K(x,y) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left((x-c_1)^2 + (y-c_2)^2\right) - \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\left((x-b_1)^2 + (y-b_2)^2\right) = 0.$$

Helyettesítsünk $x = b_1$-et és $y = b_2$-t, akkor $K(b_1, b_2) = \frac{a^2}{1-\lambda^2}$, amiből az állítás következik. ♠

T6.6. Ha $K_1(x, y) = 0$ és $K_2(x, y) = 0$ a BC szakaszhoz tartozó Apollóniusz-körök egyenletei, akkor *tetszőleges* p és q számokkal képezve $pK_1(x, y) + qK_2(x, y) = 0$ is a BC szakasz Apollóniusz-körének egyenlete, ha egyáltalán valaminek az egyenlete. Ha K_1 és K_2 főegyütthatói 1-ek, és $p + q = 1$, továbbá a körökhöz a λ_1 és λ_2 arányszámok tartoznak, továbbá képezzük a $\mu_i = 1 - \lambda_i^2$ ($i = 1, 2$) számokat, akkor

$$\frac{1}{\mu} = \frac{p}{\mu_1} + \frac{q}{\mu_2},$$

ahol $\mu = 1 - \lambda^2$, és λ az eredményül kapott kör arányszáma.

B. Feltehető, hogy K_1 és K_2 főegyütthatói 1-esek, mert a főegyüttható kiemelhető és beleolvasztható p-be ill. q-ba. Feltehető az is, hogy $p + q = 1$, mert $p + q \neq 0$ esetén eloszthatjuk vele az egyenletet. Ha $p + q = 0$, akkor a felező merőleges az eredmény, ami tágabb értelemben az Apollóniusz-körök közé sorolható. Ha ezek a feltételek fennállnak, akkor a merőleges metszés feltétele ellenőrizhető, hiszen

$$K\left(\frac{b_1+c_1}{2},\frac{b_2+c_2}{2}\right)=pK_1\left(\frac{b_1+c_1}{2},\frac{b_2+c_2}{2}\right)+qK_2\left(\frac{b_1+c_1}{2},\frac{b_2+c_2}{2}\right)=p\frac{a^2}{4}+q\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}.$$

Itt felhasználtuk T3.6.-ot, hiszen tudjuk, hogy a főegyütthatók 1-esek.

A λ-t a T6.5 segítségével kaphatjuk meg, hiszen

$$K(b_1,b_2)=\frac{a^2}{\mu}=pK_1(b_1,b_2)+qK_2(b_1,b_2)=p\frac{a^2}{\mu_1}+p\frac{a^2}{\mu_2}.$$ ♠

7. Súlypont

7.1. *A súlypont, mint hasonlósági pont*

A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz a súlyvonal. Jelöléssel: AF_a, BF_b és CF_c, ahol F_a, F_b és F_c a megfelelő oldalak felezőpontjait jelöli.

T7.1. A súlyvonalak egy pontban metszik egymást, a pont neve: súlypont, jelölése *S*. *S* minden súlyvonal harmadán helyezkedik el, vagyis $\overline{SB} = 2 \cdot \overline{SF_b}$ (és hasonlóan a többi súlyvonalra is).

B. *S* legyen egyelőre az s_b és s_c súlyvonalak metszéspontja. Az $SBC\Delta$ hasonló az $SF_bF_c\Delta$-höz és a hasonlósági arány 2:1, mert $\overline{F_bF_c} = \frac{a}{2}$. Következésképpen $\overline{SB} = 2 \cdot \overline{SF_b}$. Hasonló állítás igaz az s_b és s_a súlyvonalakra is, tehát s_a ugyanott metszi s_b-t, mint s_c. ♠

T7.2. *S* belső hasonlósági középpontja az $ABC\Delta$-nek és a felező háromszögének, a hasonlósági arány 2:1.

B. T7.1. alapján nyilvánvaló. ♠

7.2. *A súlyvonal hossza*

A háromszöget az oldalfelező pontra tükrözve parallelogrammát kapunk, és a súlyvonal kétszerese a parallelogramma átlója lesz. A súlyvonal hosszára képletet fogunk megadni, azonban a parallelogrammára vonatkozó hasonló állítás sokkal könnyebben megjegyezhető, és ebből a súlyvonalra vonatkozó képlet azonnal adódik.

T7.3. A parallelogramma oldalainak négyzetösszege megegyezik az átlók négyzetösszegével. A súlyvonalra vonatkozóan:

$$s_a^2 = \overline{AF_a}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

B. Az *ABCD* parallelogrammára legyen *AB* hossza *a*, *BC* hossza *b*, az *AC* átló hossza *e*, a *BD* átló hossza *f*, és tegyük fel, hogy $e \geq f$. *C* ill. *D* merőleges vetülete az *AB* egyenesére legyen C_1 és D_1. Vezessük be az $\overline{AD_1} = \overline{BC_1} = x$, $\overline{DD_1} = m$ jelöléseket, akkor

$$f^2 = (a - x)^2 + m^2,$$

és

$$e^2 = (a + x)^2 + m^2.$$

Összeadva a két azonosságot:

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2(x^2 + m^2) = 2a^2 + 2b^2.$$

Tükrözzük át az $ABC\Delta$-et F_a-ra, ezáltal a súlyvonalból átló keletkezik. Alkalmazzuk az előző képletet a kapott parallelogrammára:

$$(2s_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2),$$

ami a bizonyítandó állítást jelenti. ♠

T7.4. Nagyobb oldalhoz kisebb súlyvonal tartozik. Képlettel megadva:

$$s_b^2 - s_c^2 = \frac{3}{4}(c^2 - b^2).$$

B. Ha $c > b$, akkor A az a oldal felezőmerőlegesének arra az oldalára esik, amelyiken C van (lásd T2.1), így S is erre az oldalra kerül. Ez azt jelenti, hogy $\overline{SC} < \overline{SB}$, de akkor $s_c < s_b$.

A másik állítás igazolásához írjuk fel T7.3. képletét s_b-re és s_c-re,

$$\boldsymbol{s}_b^2 = \frac{1}{4}(2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2),$$

$$\boldsymbol{s}_c^2 = \frac{1}{4}(2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}^2),$$

és a különbségük adja a tétel állítását. ♠

Látványos képletet kapunk a T7.3. képleteinek összeadásával.

T7.5.

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

vagy kicsit másképpen

$$\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

B. A T7.3. felhasználásával

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{1}{4}[(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2a^2 + 2c^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2)] =$$

$$= \frac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2),$$

ami az első képlettel ekvivalens. A második képlet ennek $\left(\frac{2}{3}\right)^2$-szerese. ♠

7.3. *A súlyvonalakból készített háromszög*

T7.6. A három súlyvonalból, mint oldalakból, mindig szerkeszthető háromszög, azaz két súlyvonal összege mindig nagyobb, mint a harmadik.

B. Tükrözzük az a oldal felezőpontjára S-et, a tükörkép legyen S'. Az $SS'C\Delta$ oldalai a súlyvonalak $\frac{2}{3}$-ad részei, tehát megfelelő nagyítással megkapjuk a kívánt háromszöget. ♠

Jegyezzük meg, hogy ugyanez az állítás a magasságvonalakra, vagy a szögfelezőkre nem igaz.

T7.7. A súlyvonalakból készített háromszög s_a oldalához tartozó s_1 súlyvonala $s_1 = \frac{3}{4}a$. A súlyvonalak hosszából kiszámíthatjuk az oldalak hosszát: $a^2 = \frac{4}{9}(2s_b^2 + 2s_c^2 - s_a^2)$.

A tétel érdekes – nagyítással ötvözött – dualitást mutat a háromszög oldalai és súlyvonalai között. Ha kiindulunk egy tetszőleges háromszögből és a súlyvonalainak $\frac{2}{\sqrt{3}}$-szorosából háromszöget készítünk, majd az így kapott háromszögre megismételjük ezt az eljárást, akkor az eredeti háromszöggel egybevágó háromszöget kapunk.

B. Az első állítás a T7.6. bizonyításának *SS'C*Δ-éből adódik, ugyanis $\frac{2}{3}s_1 = \frac{a}{2}$. A második állításhoz a *BSCS'* parallelogrammára alkalmazzuk a T7.3. szabályt:

$$2\left(\frac{2s_b}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2s_c}{3}\right)^2 = \left(\frac{2s_a}{3}\right)^2 + a^2,$$

és ebből egyszerű átrendezéssel kapjuk az állítást. ♠

A T7.6. állításnál kissé több is igaz: a súlyvonalakból olyan háromszög is szerkeszthető, melynek az oldalai párhuzamosak a súlyvonalakkal. Ez a bizonyítás konstrukciójából látható. Vektorokkal felírva az állítást:

$$\overrightarrow{AF_a} + \overrightarrow{BF_b} + \overrightarrow{CF_c} = \mathbf{0}.$$

Az állítás megfordítása is igaz, de a megfordítás három különböző állítást tartalmaz.

T7.8. Vegyünk fel a háromszögben egy *P* pontot. A *PA* egyenes messe az *a* oldalt A_1-ben a *PB* a *b* oldalt B_1-ben, a *PC* a *c* oldalt C_1-ben.

a) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $P = S$.

b) $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $P = S$.

c) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $P = S$.

B. Az elégségességet már mindhárom esetben beláttuk. A szükségességet külön-külön kell bizonyítani.

a) Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$. A T7.6. konstrukcióhoz hasonlóan tükrözzük a *P* pontot F_a-ra, így kapjuk a *P'* pontot és a *BPCP'* parallelogrammát. A $\overrightarrow{PP'}$ vektor a parallelogramma-szabály alapján történő összegzéssel előállítható $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ alakban, továbbá a feltételt felhasználva: $\overrightarrow{PP'} = -\overrightarrow{PA}$, tehát *A*, *P*, F_a és *P'* egy egyenesre esik. *P* tehát a súlyvonalra esik és harmadolja azt, tehát $P = S$.

b) Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} = \mathbf{0}$. A *P* tükörképe a B_1C_1 szakasz felező pontjára nézve legyen *Q*, és készítsük el így a B_1PC_1Q parallelogrammát. Ismét a vektorok parallelogramma-szabály szerinti összegzését felhasználva $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC_1} + \overrightarrow{PB_1} = -\overrightarrow{PA_1}$, tehát *Q* az AA_1 egyenesre esik. Az oldalak párhuzamossága miatt a *BPA*Δ hasonló a C_1QAΔ-höz, valamint a *CPA*Δ is hasonló a $B_1QA\Delta$-höz, ezért $\overline{AC_1} : c = \overline{AQ} : \overline{AP} = \overline{AB_1} : b.$ Ha P baricentrikus koordinátái p, q, r, akkor C_1 $p : q$ arányban osztja a c oldalt és a B_1 $p : r$ arányban osztja a b oldalt, de a két arány egyenlő így $q = r$. Hasonlóan következik, hogy $p = q$, tehát P megegyezik a súlyponttal (ld. T7.9.).

c) Tegyük fel most, hogy $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{0}$. A B-ből C-be mutató vektort jelöljük $\boldsymbol{a}$-val, a C-ből A-ba mutatót $\boldsymbol{b}$-vel és az A-ból B-be mutatót $\boldsymbol{c}$-vel. Legyen $\overrightarrow{BA_1} = \boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{CB_1} = \boldsymbol{b}_1$, $\overrightarrow{AC_1} =$ $= \boldsymbol{c}_1$. A feltétel szerint (vektorok összegzése)

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}_1) + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_1) = \mathbf{0},$$

mivel $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, nyilván

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{c}_1 = \mathbf{0}.$$

Legyen $\boldsymbol{a}_1 = \lambda\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_1 = \mu\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_1 = \nu\boldsymbol{c}$, akkor $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c} = (\mu - \lambda)\boldsymbol{b} + (\nu - \lambda)\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $\mu = \lambda$ és $\nu = \lambda$. A Ceva-tétel miatt (ld. T2.9.)

$$\lambda a\lambda b\lambda c = (1 - \lambda)a(1 - \lambda)b(1 - \lambda)c,$$

vagyis $\lambda = 1 - \lambda$, azaz $\lambda = \dfrac{1}{2}$, tehát P súlypont. ♠

7.4. *Baricentrikus koordináták*

A súlypont egyúttal a háromszög fizikai értelemben vett súlypontja is. Pontosabban szólva a háromszög csúcspontjaiban elhelyezett egyenlő nagyságú tömegpontok súlypontja, vagy a homogén háromszöglemez súlypontja. Támasszuk alá a háromszöget egyik súlyvonala mentén, akkor egy tömegpont az alátámasztásra esik, míg a másik kettő forgatónyomatéka azonos, tehát egyensúlyban van. A lemezt ugyanígy alátámasztva a lemez feldarabolható egyik oldalával párhuzamosan rudakra, melyek mindegyike egyensúlyban van. A súlyvonal tehát mindkét esetben fizikai értelemben is súlyvonal, és a súlyvonalak metszéspontja fizikai értelemben is súlypont.

Más a helyzet a „drótkeretből formált háromszög” fizikai súlypontjával. Ennek a súlypontja általában nem egyezik meg a matematikai súlyponttal, erről a következő fejezetben részletesebben fogunk beszélni.

T7.9. A súlypont baricentrikus koordinátái az A, B, C bázispontokra vonatkozóan 1, 1, 1.

B. A B és a C tömegpontok súlypontja F_a, tehát s_a az 1, 1, 1 súlyokhoz tartozó súlyozott súlyvonal. A többi súlyvonalra is ugyanez igaz. T2.6. alapján ezt kellett megmutatni. ♠

A súlypont koordinátái, T7.9. alapján, a csúcspontok koordinátáinak számtani közepe. Ha a helyvektorokat $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{c}_0$ és $\boldsymbol{s}_0$ jelöli, akkor

$$\boldsymbol{s}_0 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0).$$

T7.10. A súlypont távolsága az a oldaltól: $d_a = \frac{2T}{3a}$.

B. T7.1. miatt $d_a = \frac{m_a}{3}$, és m_a kifejezhető a háromszög területével. ♠

Jelöljük a b egyenes által határolt félsíkok közül azt, amelyik az $ABC\Delta$-et tartalmazza, B^+-szal, ugyanezt a c egyenesre vonatkozóan C^+-szal.

T7.11. Az s_a súlyvonal azon pontok mértani helye a háromszög belső pontjaira vonatkozóan, melyeknek b-től és c-től mért távolságainak aránya $c : b$ (fordított arányosság!).

B. Ha F az a oldal felezőpontja, akkor az $ABF\Delta$ és az $ACF\Delta$ területe megegyezik, tehát F-re teljesül a $c : b$ arány. Ha F-re igaz ez az arány, akkor az A pontból történő középpontos kicsinyítéssel a súlyvonal minden pontjára igaz. A háromszög más pontjára nem lehet igaz, mert a BC szakaszon egyetlen ilyen pont van, más pontra más az arány, és A pontból nagyítva-kicsinyítve ez az eltérő arány öröklődik. ♠

7.5. *A súlypont extremális tulajdonsága*

T7.12. Steiner-tétel. A csúcsuktól mért távolságok négyzetösszege a súlypontra minimális. A minimum értéke $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

B. Vegyünk fel egy tetszőleges P pontot, helyvektora legyen $\boldsymbol{x}$. A csúcsoktól mért távolságainak négyzetösszege: $d = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_0|^2 + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_0|^2 + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0|^2$. Írjuk fel a távolság négyzeteket önmagával vett skalárszorzatként, és végezzük el a beszorzást, akkor

$$d = 3|\boldsymbol{x}|^2 - 2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0) + |\boldsymbol{a}_0|^2 + |\boldsymbol{b}_0|^2 + |\boldsymbol{c}_0|^2,$$

majd teljes négyzetté kiegészítve

$$d = 3\left|\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0}{3}\right|^2 - \frac{1}{3}|\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0|^2 + |\boldsymbol{a}_0|^2 + |\boldsymbol{b}_0|^2 + |\boldsymbol{c}_0|^2.$$

Ebből látható, hogy d akkor minimális, ha $\boldsymbol{x}$ éppen a súlypont helyvektora.

A minimum értéke a T7.5.-ből látható. ♠

8. Oldalak súlypontja

Mint említettük a súlypont tárgyalásánál, az oldalak fizikai súlypontja nem egyezik meg a háromszög matematikai súlypontjával, ezért – megkülönböztetésül – a háromszög alakú drótkeret fizikai súlypontját az oldalak súlypontja névvel illetjük (nevezik Spieker-pontnak is) és S_x-szel jelöljük.

T8.1. S_x a felező háromszög beírt körének a középpontja (ez egyszerű módot nyújt S_x megszerkesztésére).

B. Az a oldal helyettesíthető az F_a felezőpontjában elhelyezett a tömeggel, hasonlóan a b és a c oldal az F_b-be ill. F_c-be elhelyezett b ill. c tömeggel. Így S_x a felezőháromszög csúcsaiba helyezett a, b és c tömegek súlypontja, ami a felezőháromszög beírt körének középpontját adja. ♠

T8.2. Az oldalak súlypontjának baricentrikus koordinátái az A, B és C bázispontokra vonatkozóan $b + c$, $a + c$ és $a + b$.
Az AS_x egyenes a BC szakaszt $(a + b) : (a + c)$ arányban osztja, pontosabban az osztópontot P_a-val jelölve

$$BP_a : P_aC = (a+b) : (a+c)\,.$$

B. Az F_a-ban elhelyezett $2a$ tömeg helyettesíthető a B és a C csúcsokban elhelyezett a tömegekkel, az F_b-ben lévő $2b$ tömeg az A és a C csúcsokban elhelyezett b tömegekkel, továbbá az F_c-ben lévő $2c$ tömeg az A és a B csúcsokban elhelyezett c tömegekkel. Ez azt jelenti, hogy a csúcsokban lévő tömegek: $b + c$, $a + c$ és $a + b$. ♠

Jelölje a csúcspontok helyvektorait $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{c}_0$, valamint S_x helyvektorát $\boldsymbol{s}_x$, akkor

$$\boldsymbol{s}_x = \frac{(b+c)\boldsymbol{a}_0 + (a+c)\boldsymbol{b}_0 + (a+b)\boldsymbol{c}_0}{4s}.$$

T8.3. O_0 , vagyis a beirt kör középpontja, az S súlypont és az S_x egy egyenesre esik, és S harmadolja az S_xO_0 szakaszt, mégpedig

$$2\overline{S_xS} = SO_0.$$

(vesd össze: Euler-egyenes).

B. A T7.2. állítás szerint S az $ABC\Delta$ és a felezőháromszög hasonlósági középpontja, és a hasonlóság arányszáma 1:2. O_0 és S_x egymásnak megfelelő pontok, ezért összekötő egyenesük S-et tartalmazza és a beírt körök középpontjainak S-től való távolságára is fennáll az 1:2 arány. ♠

T8.4. Legyen N a háromszög Nagel-pontja (ld. 5.6. fejezet). S_x felezi az O_0N szakaszt.

B. T5.26. és T8.3. egyenes következménye. ♠

T8.5. S_x távolsága az a oldaltól: $\frac{1}{2}(m_a - \rho)$, ahol m_a az a oldalhoz tartozó magasság hossza, ρ pedig a beírt kör sugara.

B. S_x és BC távolsága a felezőháromszög magasságának, $\frac{m_a}{2}$-nek és a felezőháromszögbe írt kör sugarának, $\frac{\rho}{2}$-nek a különbsége. ♠

T8.6. A háromszög hozzáírt köreinek hatványpontja (ld. T3.7.) az oldalak S_x súlypontja.

B. Bebizonyítjuk, hogy a felező háromszög szögfelezői hatványvonalak. Legyen az a oldal felezőpontja F_a, A b oldalt kívülről érintő kör érintési pontja az a oldalegyenesen P, a c oldalt kívülről érintőé Q. T5.2. alapján a , ezért $\overline{F_aP} = \overline{F_aQ} = s - \frac{a}{2}$, vagyis F_a-ból a b és a c oldalakhoz hozzáírt körökhöz egyenlő hosszúságú érintők húzhatók, tehát a két kör hatványvonala átmegy F_a-n. Másrészt a felező háromszög F_a csúcsbeli belső szögfelezője párhuzamos az A csúcsból kiinduló belső szögfelezővel, ami merőleges a külső szögfelezőre, és ez éppen a hozzáírt két kör centrálisa. Igy T3.7. értelmében bebizonyítottuk, hogy felező háromszög F_a csúcsbeli belső szögfelezője a két kör hatványvonala. Ugyanez igaz a többi szögfelezőre is, tehát S_x hartványpont. ♠

9. Magasságpont

9.1. *A magasságpont helyzete*

Valamely csúcsból a szemközti oldalra húzott merőleges szakasz a háromszög egyik *magasságvonala*. Ahol ez a szakasz a szemközti oldallal találkozik, azt a pontot a *magasság talppontjának* nevezzük. Az A csúcsból kiinduló magasságvonal jelölése m_a, a talppontja T_a, és hasonlóan értelmezzük az m_b, m_c, T_b és T_c jelöléseket is.

T9.1. A magasságvonalak egy pontban metszik egymást, a metszéspont neve: *magasságpont*, jelölése M. A magasságpont hegyesszögű háromszögnél a háromszög belsejébe, derékszögű háromszögnél a derékszög csúcsába, tompaszögűnél a háromszögön kívülre esik.

B. Minden csúcson fektessünk át egy párhuzamos egyenest a szemközti oldallal, akkor létrehozunk egy nagyobb háromszöget, melynek az eredeti háromszög a felező háromszöge. A magasságvonalak az új háromszög oldalfelező merőlegesei, tehát egy pontban metszik egymást.

Hegyesszögű háromszögnél minden magasságtalppont a hozzátartozó oldal belsejébe esik, így a magasságvonalak a háromszög belsejében haladnak. Az m_a magasságvonal két részre bontja a háromszöget, a B csúcs és a b oldal az m_a különböző oldalán vannak, tehát m_b a háromszög belsejében metszi m_a-t. A magasságpont tehát belül van.

A derékszögű háromszögre vonatkozó állítás nyilvánvaló. Tompaszög esetén a nagy háromszög is tompaszögű, tehát a körülírható kör középpontja ezen kívül van. A körülírható kör középpontja az eredeti háromszög magasságpontja, tehát ez is kívül van a nagy háromszögön, de akkor a kisebb, eredeti háromszögön is kívül van. ♠

T9.2. A $BCM\Delta$ magasságpontja A.

B. A $BCM\Delta$ MT_a és CT_b magasságvonalainak metszéspontja A. ♠

Ortocenrikus pontnégyesnek nevezzük azt a pontnégyest, melyben tetszőlegesen kiválasztott három pont háromszöget alkot és a negyedik pont mindig ennek a magasságpontja. Az A, B, C, M pontnégyes tehát T9.2. szerint ortocentrikus. Az ortocentrikus pontnégyes minden háromszögére a talpponti háromszög (ld. 9.3. fejezet) és a Feuerbach-kör azonos (ld. T10.6.).

T9.3. Ha $\beta < 90^o$ és $\gamma < 90^o$, akkor a BMC szög $180^o - \alpha$. Ha $\beta > 90^o$ vagy $\gamma > 90^o$, akkor a BMC szög nagysága α.

Egyszerűbb alakban gyakran úgy használjuk az állítást, hogy a hegyesszögű háromszög magasságpontjának az oldalakra, vagy az oldalfelező pontokra vonatkozó tükörképe, a körülírt körre esik. Az állítás tompaszögű háromszögre is igaz.

B. A két esetnek megfelelően két ábrát készítsünk. Mindkét ábrában a $T_bMC\Delta$ hasonló a $T_cAC\Delta$-höz, mert a derékszögön kívül még egy szögük megegyezik. Így a T_bMC szög nagysága α. A T_bMC szög az első esetben kiegészítő szöge a BMC szögnek, a második esetben pedig azzal megegyező. ♠

T9.4. $$\overline{MA} = a \cdot |\operatorname{ctg}\alpha|.$$

B. T7.2.-ben megállapítottuk, hogy a háromszög és felező háromszögének a hasonlósági középpontja S és a hasonlóság arányszáma 1:2. T4.5.-ben láttuk, hogy a körülírható kör középpontja a felező háromszög magasságpontja. Ezek szerint az OF_a szakasznak az MA szakasz felel meg a hasonlóságnál, tehát $\overline{MA}$ a kétszerese a T4.2.-ben szereplő d abszolút értékének. ♠

9.2. *A magasságvonal*

A magasságvonal hossza elég bonyolult kifejezés. A területből visszaszámolva $m_a = \dfrac{2T}{a}$, ahol a területet pl. a Heron-képlettel számoljuk ki.

T9.5. Nagyobb oldalhoz kisebb magasság tartozik. Képlettel: $\dfrac{m_a}{m_b} = \dfrac{b}{a}$.

B. Az $am_a = bm_b = 2T$ képletből mindkét állítás közvetlenül leolvasható. ♠

T9.6. Legyen $a_1 = \overline{T_aB}$ és $a_2 = \overline{T_aC}$. Vegyük a_1-et és a_2-t előjeles távolságnak: a_1 legyen negatív, ha T_a az a oldal meghosszabbítására esik, de B-hez közelebb van, mint C-hez, a_2 negatív, ha T_a kívül van, de C-hez közelebb. Ha $\beta \neq 90^\circ$ és $\gamma \neq 90^\circ$, akkor

$$a_1 : a_2 = (a^2 - b^2 + c^2) : (a^2 + b^2 - c^2).$$

B. Legyen $a_1 = \lambda a$ és $a_2 = (1 - \lambda)a$, ahol $\lambda \neq 1$ (de $\lambda < 0$ és $\lambda > 1$ lehetséges). Pythagorasz-tétellel

$$c^2 - \lambda^2 a^2 = b^2 - (1-\lambda)^2 a^2,$$

amiből

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2},$$

és

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2},$$

amit bizonyítani akartunk. ♠

T9.7. Az A csúcsból kiinduló magasság talppontjának távolsága az a oldal F_a felezőpontjától:

$$\overline{T_aF_a} = \frac{|c^2 - b^2|}{2a}.$$

B. Tegyük fel, hogy $b < c$. A T9.6.-ban meghatároztuk a T_aB távolságot:

$$\overline{T_aB} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2a},$$

ami a bizonyítandó állítást megadja. ♠

A következő állítás lehetővé teszi a magasságpont baricentrikus koordinátáinak közvetlen kiszámítását.

T9.8. Vezessük be a következő jelöléseket: legyen $w_1 = -a^2 + b^2 + c^2$, $w_2 = a^2 - b^2 + c^2$, $w_3 = a^2 + b^2 - c^2$. A magasságpont baricentrikus koordinátái az *A, B, C* bázispontokra vonatkozóan: w_2w_3, w_1w_3, w_1w_2. A súlyok összege ebben az előállításban $(4T)^2$.

Ha a háromszög nem derékszögű, akkor a baricentrikus koordináták több más alakban is megadhatók:

$$\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \frac{1}{w_3},$$

vagy

$$\frac{a}{\cos\alpha}, \frac{b}{\cos\beta}, \frac{c}{\cos\gamma},$$

vagy

$$\mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{tg}\beta,\ \mathrm{tg}\gamma.$$

B. T9.6. alapján T_a a *B* és a *C* tömegpontok súlypontja és AT_a súlyozott súlyvonal. Hasonló igaz a többi magasságvonalra is, így *M* ezekkel a súlyokkal képezett súlyozott súlypont.

Mivel

$$w_1(w_2 + w_3) = 2a^2 w_1$$
$$w_2(w_3 + w_1) = 2b^2 w_2$$
$$w_3(w_1 + w_2) = 2c^2 w_2,$$

összeadva kapjuk, hogy

$$w_2w_3 + w_3w_1 + w_1w_2 = a^2w_1 + b^2w_2 + c^2w_3 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Ez azonban a Heron-képlet összeszorzott alakja (T5.5), vagyis $(4T)^2$.

Mindhárom koordinátát elosztva $w_1w_2w_3$-mal, megkapjuk a második állítást.

A baricentrikus koordináták koszinusz-tétellel átalakíthatók az alábbi minta szerint:

$$\frac{1}{w_1} = \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a}{2abc\cos\alpha}.$$

Minden koordinátát átalakítva, majd mindegyiket végigszorozva $2abc$-vel megkapjuk a harmadik állítást.

A negyedik állításhoz a szinusz-tételt használjuk. Legyen $t = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$, és szorozzuk meg a harmadik előállításban kapott súlyokat t-vel, akkor a negyedik állításban szereplő súlyokat kapjuk meg. ♠

9.3. *A talpponti háromszög*

A magasság-talppontokat összekötő háromszöget, vagyis a $T_aT_bT_c\Delta$-et, *talpponti háromszögnek* nevezzük. Ha az $ABC\Delta$ derékszögű, akkor $T_a = T_b = C$, vagyis a talpponti háromszöge nem létezik, ezt az esetet ebben a részben vizsgálatainkból kizárjuk.

A hegyesszögű és tompaszögű eset erősen különbözik, vagy külön kell megfogalmazni az egymásnak megfelelő állításokat, vagy ha ezek azonosak, akkor külön kell bizonyítani a két esetet.

T9.9. A T_bT_aC szög egyenlő a T_cT_aB szöggel, és nagysága α. Az állítás független a háromszög típusától. A magasságok a talpponti háromszög szögfelezői, a magasságpont a talpponti háromszögbe beírható kör középpontja.

B. Készítsünk három ábrát a bizonyítás a), b) és c)-vel jelölt három különböző esetéhez. A bizonyításokban a Thalesz-körök miatt több húrnégyzet szerepel, itt felhasználjuk, hogy a húrnégyszögben a szemközti szögek összege 180°, vagy másképpen a kiválasztott szög egyenlő a szemközti szög kiegészítő szögével.

a) Az $ABC\Delta$ hegyesszögű. Az ACT_aT_c négyszög húrnégyszög, ezért a T_cT_aB szög α. Az ABT_aT_b négyszög húrnégyszög, ezért a T_bT_aC szög α. A talpponti háromszög T_a-nál lévő szögét a magasság felezi, mert mindkét rész $90^\circ - \alpha$.

b) $\alpha > 90^\circ$. Az AT_bMT_c négyszög húrnégyszög, ezért a BMC szög $180^\circ - \alpha$. A CMT_bT_a négyszög húrnégyszög, ezért a T_bT_aC szög α. A BMT_cT_a négyszög húrnégyszög, ezért a T_cT_aB szög α. A talpponti háromszög T_a-nál lévő szögét a magasság felezi, mert mindkét rész $\alpha - 90^\circ$.

c) $\gamma > 90^\circ$. A BT_bT_aA négyszög húrnégyszög, ezért a BT_b íven nyugvó két szög egyenlő, vagyis a T_bT_aB szög α. A CT_aAT_c négyszög húrnégyszög, ezért a CT_c íven nyugvó két szög egyenlő, vagyis a T_cT_aC szög α. A talpponti háromszög T_a-nál lévő szögét a magasság felezi, mert mindkét része α nagyságú. A magasság tehát a tompaszög mindkét esetében szögfelező. ♠

Az alábbi tételben a talpponti háromszög kerületére adunk két különböző kiszámítási formulát, ezek közül inkább a $T = \rho s$ területképletre hasonlító második formula ajánlható.

T9.10. A talpponti háromszög oldala, $\overline{T_bT_c} = a \cdot |\cos\alpha|$.
A hegyesszögű $ABC\Delta$ területe

$$T = Rs_0,$$

míg $\alpha > 90^\circ$ esetén

$$T = R(s_0 - a_0),$$

ahol s_0 a talpponti háromszög kerületének a fele és $a_0 = \overline{T_bT_c}$. Hegyesszögű háromszög esetén az s_0 kiszámítása: $s_0 : s = \rho : R \leq \frac{1}{2}$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az $ABC\Delta$ egyenlő oldalú.
Hegyesszögű háromszögnél $\overline{AM} : \overline{AT_a} = a_0 : s_0$.

B. Itt is, mint az előző bizonyításban, három ábrán kell az állításokat belátni. Az állítások azonosak, de az indokolásuk különböző lehet. Az $AT_bT_c\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$-höz, mert a T_cT_bA szöge β és a T_cT_bA szöge γ (vö. T9.8. különböző eseteivel). A hasonlósági arány

$$\frac{\overline{AT_b}}{\overline{AB}} = |\cos\alpha|,$$

ezért $\overline{T_bT_c} = a \cdot |\cos\alpha|$.

(A második állítást tulajdonképpen T5.23.-ban már bebizonyítottuk. Ha a talpponti háromszöget vesszük alapháromszögnek, akkor hegyesszögű $ABC\Delta$ esetén A, B és C az alapháromszöghöz hozzáírt körök középpontjai, ezért az $ABC\Delta$ területe az alapháromszög köréírt kör sugarának és félkerületének kétszeres szorzata. Az alapháromszög köré írt kör az $ABC\Delta$ Feuerbach-köre (ld. 10. fejezet), és a Feuerbach-kör sugarának kétszerese megegyezik az $ABC\Delta$ köréírt kör sugarának hosszával. Ha $\alpha > 90^o$, akkor T5.23. utolsó állítását kell alkalmazni.)

A második állításra itt elemi bizonyítást adunk. Legyen az $ABC\Delta$ hegyesszögű és O jelölje a körülírt kör középpontját. A háromszög területét az AT_cOT_b, a BT_aOT_c és a CT_bOT_a négyszögek területének összegeként számítjuk ki. A négyszögek átlói merőlegesek egymásra, ugyanis az AT_cOT_b négyszög esetén tükrözzük az átlókat az A csúcs belső szögfelezőjére. Az OA egyenes tükörképe T4.6. értelmében az AT_a egyenes lesz, míg a T_bT_c egyenes a b oldallal β szöget zár be (T9.9.), ezért a tükörképe a c oldallal zár be β szöget, így a tükörkép egyenes párhuzamos az a oldallal. Az átlók tükörképei merőlegesek, tehát az átlók is. A talpponti háromszög oldalait rendre a_0-lal, b_0-lal és c_0-lal jelölve az $ABC\Delta$ területe

$$T = \frac{1}{2}(a_0R + b_0R + c_0R) = Rs_0.$$

Kissé nehezebb a tompaszögű háromszögre ($\alpha > 90^o$-ra) vonatkozó állítás. A itt a talpponti háromszög beírt körének a középpontja. Tegyük fel az általánosság korlátozása nélkül, hogy $b < c$. Bocsássunk merőlegest A-ból a T_aT_c oldalra, a talppont legyen P, és a T_aT_b oldalra, a talppont legyen Q. Mivel P és Q a talpponti háromszögbe írt kör érintési pontjai

$$T_aP = T_aQ = s_0 - a_0.$$

A CT_aOQ négyszög területe, mivel az előzőek szerint az átlói merőlegesek, $\frac{1}{2}R(s_0 - a_0)$, és ugyanennyi a CT_aOA négyszög területe is.

Az $OBT_a\Delta$ és az $OBP\Delta$ területeinek a különbsége, mivel OB merőleges T_aT_c-re, $\frac{1}{2}R(s_0 - a_0)$, és ugyanennyi az $OBT_a\Delta$ és az $OBA\Delta$ területeinek a különbsége is. A területeket előjelhelyesen összeadva kapjuk, hogy $T = R(s_0 - a_0)$.

Az aránypár a $T = Rs_0$ és a $T = \rho s$ képlet összevetésével kapható meg, míg az egyenlőtlenség az Euler-féle sugáregyenlőtlenség (T14.1.).

Tegyük fel, hogy az $ABC\Delta$ hegyesszögű. Az $MBC\Delta$ és az $ABC\Delta$ talpponti háromszöge megegyezik (ortocentrikus pontnégyes), Feuerbach-körük azonos, ezért a körülírt körök sugara is megegyezik, tehát a területeik aránya $(s_0 - a_0) : s_0$. A két háromszög alapja közös, tehát a magasságuk aránya is ez: $\frac{\overline{MT_a}}{\overline{AT_a}} = \frac{\overline{AT_a} - \overline{AM}}{\overline{AT_a}} = 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AT_a}} = \frac{s_0 - a_0}{s_0} = 1 - \frac{a_0}{s_0}$. Ezzel az utolsó állítást is beláttuk. ♠

Pontosítsuk a háromszögbe írt háromszög fogalmát: a beírt háromszög mindhárom csúcsa a befogadó háromszög három, különböző oldalán helyezkedik el.

T9.11. A hegyesszögű háromszögbe írt legkisebb kerületű háromszög a talpponti háromszög. Ha a háromszög nem hegyesszögű, akkor ilyen háromszög nem létezik, és minden beírt háromszög kerülete nagyobb, mint a legkisebb magasság kétszerese, és ez az érték tetszőleges pontossággal megközelíthető a háromszög alkalmas megválasztásával.

ST. Segédtétel a bizonyításhoz. Egyenlőszárú trapézban az átló hosszabb, mint a *k* középvonal.

ST bizonyítása. Az *ABCD* egyenlőszárú trapéz párhuzamos oldalai legyenek *AB* és *CD*. Két háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával $\overline{AB} + \overline{CD} < \overline{AC} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{AC}$, azaz

$$k = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} < AC\,,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

B. A hegyesszögű háromszögben vegyünk fel egy beírt $DEF\Delta$-et tetszőlegesen, a *D* csúcs az *a*, az *E* csúcs a *b* és az *F* csúcs a *c* oldalra essen. Ugyancsak rajzoljuk be a $T_aT_bT_c$ talpponti háromszöget is. Tükrözzük a *b* oldalra az $ABC\Delta$-et, ez legyen az $AB'C\Delta$, a tükrözést végezzük el a *DE* és a T_aT_b oldallal is, a tükörkép legyen *D'E* és $T_a'T_b$. Tükrözzük a *c* oldalra is az $ABC\Delta$-et, ez legyen az $ABC''\Delta$, a tükrözést végezzük el a *DF* és a T_aT_c oldallal is, a tükörkép legyen *D"F* és $T_a''T_c$. T9.8. miatt a $T_a'T_a''$ egyenes tartalmazza a T_b és T_c pontokat, így a talpponti háromszög kerülete $\overline{T_a'\,T_a''}$. A beírt $DEF\Delta$ kerülete a $D'EF\,D''$ töröttvonal, ami hosszabb, mint $\overline{D'D''}$.

A *C"B* és a *B'C* egyenesek metszik egymást, hiszen $180^o - 2\alpha$ szöget zárnak be. A metszéspont legyen *P*. A $PT_a'T_a''\Delta$ egyenlőszárú, mert a $PT_a'T_a''$ szög is és a $PT_a''T_a'$ szög is α nagyságú. $\overline{D'T_a'} = \overline{DT_a} = \overline{D''T_a''}$, ezért $\overline{T_a'\,T_a''}$ egy szimmetrikus trapéznak a középvonala, míg $\overline{D'D''}$ az átlója, ami a segédtétel szerint hosszabb.

Legyen most az $ABC\Delta$ *C* szöge derékszög. Most is vegyük fel a *DEF* beírt háromszöget és a talpponti háromszög helyett az m_c magasságvonalat. Végezzük el az előbbiekben leírt tükrözéseket. A $BCC''\Delta$ egyenlőszárú. A *D'EFD"* törött vonal hosszabb, mint a *D'D"* szakasz, és itt is létezik egy egyenlőszárú trapéz, melynek átlója, *D'D"* hosszabb, mint a középvonala $\overline{CC''} = 2m_c$. Ezzel beláttuk, hogy minden beírt háromszög kerülete nagyobb, mint $2m_c$.

Legyen $\gamma > 90^o$, és vegyünk fel tetszőlegesen egy beírt $DEF\Delta$-et. Húzzunk merőlegest az *a* oldalra *C*-ben, akkor ez a *c* oldalt egy *Q* belső pontban metszi. *DQ* metszi az *EF*-et is egy *R* belső pontban. A $DRF\Delta$-ről láttuk az előbb, hogy kerülete nagyobb, mint $2m_c$, A $DEF\Delta$ kerülete azonban még nagyobb a háromszög egyenlőtlenség miatt, és ezt akartuk belátni.

Az, hogy a $2m_c$ érték megközelíthető, könnyen látható, ha felveszünk egy m_c-hez közeli keskeny háromszöget. ♠

T9.12. Ha $b \neq c$, akkor a T_bT_c egyenes egy *T* pontban metszi az *a* oldal egyenesét. A BCT_aT pontnégyes harmonikus pontnégyest alkot (a definíciót lásd T2.3.-nál).

B. A T9.9. miatt a b oldal a $T_aT_bT\Delta$ szögfelezője, és a merőlegesség miatt BT_b külső szögfelező.
♠

Természetesen hasonló tétel érvényes az A, B, C, M ortocentrikus pontrendszer többi háromszögére is.

Vegyük észre, hogy hegyesszögű háromszögnél a talpponti háromszög $T_aT_bT_c$ körüljárási iránya megegyezik az ABC háromszög körüljárási irányával, míg tompaszögűnél azzal ellentétes irányú. Így a talpponti háromszög esetén is beszélhetünk előjeles területről, hasonló értelemben, mint a háromszög előjeles területénél (ld. T11.1.). A háromszög területe pozitív előjelű, ha körüljárási iránya pozitív, ellenkező esetben a terület előjele negatív.

T9.13. Legyen T az $ABC\Delta$ előjeles területe, akkor a talpponti háromszög T_0 előjeles területe

$$T_0 = T[1-(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)].$$

B. Hegyesszögű háromszögnél T_0-t megkaphatjuk, ha a háromszög területéből elhagyjuk az $AT_bT_c\Delta$, a $BT_cT_a\Delta$ és a $CT_aT_b\Delta$ területét. A felsorolt háromszögek hasonlóak az $ABC\Delta$-höz, ugyanis ezt T9.10. bizonyításában beláttuk. Ugyancsak láttuk, hogy a hasonlósági arány $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ill, $\cos\gamma$, ezért a területeik $T\cos^2\alpha$, $T\cos^2\beta$ és $T\cos^2\gamma$, amiből

$$T_0 = T - T(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

ami a bizonyítandó állítást jelenti.

Tompaszögű háromszög esetén készítsünk új ábrát. Itt az AT_bT_c, a BT_cT_a és a CT_aT_b háromszögek lefedik az $ABC\Delta$-et és a talpponti háromszöget, úgy hogy a közös részüket kétszer fedik le. Ezért a T_0-t úgy kaphatjuk meg, ha a háromszögek terület-összegéből levonjuk az $ABC\Delta$ területét. A felsorolt háromszögekre a hasonlóság és a hasonlósági arány továbbra is érvényes, így a területük is a fentiekben megadott. Mindezek figyelembe vételével

$$|T_0| = T(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - T,$$

ami az előjelek szempontjából is helyesen adja a bizonyítandó állítást. ♠

T9.14. $T_0 \le \dfrac{T}{4}$**.**

B. Tegyük fel, hogy $a \le b \le c$, és az ábránkat ennek megfelelően készítsük el. Jelöljük az oldalfelező pontokat rendre F_a-val, F_b-vel és F_c-vel. Fel fogjuk használni az alábbi két nyilvánvaló tulajdonságot:
1) A T_bT_c egyenes az a oldal C-n túli meghosszabbítását metszi (ha egyáltalán metszi).
2) $\overline{T_aB} \ge \overline{T_aC}$.
A $T_aT_bT_c\Delta$ területe nem nagyobb, mint az $F_aT_bT_c\Delta$ területe, mert a közös oldalhoz tartozó magassága sem nagyobb.
Az $F_aT_bT_c\Delta$ területe nem nagyobb, mint az $F_aF_bT_c\Delta$ területe, mert a közös oldalhoz tartozó magassága sem nagyobb.
Az $F_aF_bT_c\Delta$ területe egyenlő az $F_aF_bF_c\Delta$ területével, mert a közös oldalhoz tartozó magasságaik egyenlő hosszúak. Mivel az $F_aF_bF_c\Delta$ területe $\dfrac{T}{4}$, az állítást bebizonyítottuk. ♠

Melléktermékként adódik a következő állítás.

T9.15. Az $ABC\Delta$ akkor és csak akkor hegyesszögű, ha $\frac{3}{4} \le \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1$, akkor és csak akkor derékszögű, ha $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, továbbá akkor és csak akkor tompaszögű, ha $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1$.

B. T9.13.-ből és T9.14.-ből következik. ♠

9.4. *Osztópont háromszög*

Rögzítsünk egy $0 < p < 1$ számot. Az $ABC\Delta$ BC oldalán vegyünk fel egy P, a CA oldalán egy Q és az AB oldalán egy R pontot úgy, hogy

$$\frac{\overline{BP}}{a} = \frac{\overline{CQ}}{b} = \frac{\overline{AR}}{c} = p$$

legyen. A $PQR\Delta$-et az p számhoz tartozó *osztópont háromszögnek* fogjuk nevezni.

T9.16. Legyen az $ABC\Delta$ területe T. Az p számhoz tartozó osztópont háromszögnek a T' területe

$$T' = T(1-3p(1-p)).$$

Rögzített T mellett T' akkor a legkisebb, ha a felező háromszögről van szó.

B. Az $AQR\Delta$ területe

$$\frac{1}{2}(1-p)bpc\sin\alpha = p(1-p)T,$$

és ugyanekkora a $CQP\Delta$ és a $BPR\Delta$ területe is. Ebből a fenti területképlet már közvetlenül adódik.
T' minimális, ha $p(1-p)$ maximális, de a számtani mértani közép egyenlőtlenségből $p(1-p) \le \frac{1}{4}$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $p = 1-p = \frac{1}{2}$. ♠

10. Feuerbach-kör

10.1. *Euler-egyenes*

A súlypont kapcsán már említettük (ld. T7.2.), hogy a háromszög és felező háromszöge hasonlók, a hasonlósági arány 2 : 1, és a hasonlóság középpontja az S súlypont. Mivel a felező háromszög magasságpontja az eredeti háromszög körülírt körének O középpontja, a hasonlósági transzformáció során az eredeti háromszög M magasságpontjának O felel meg, ezért O, S és M egy egyenesre esnek.

T10.1. O, S és M egy egyenesre esnek, az egyenes neve: *Euler-egyenes*. Az Euler-egyenest nem definiáljuk, ha a háromszög egyenlő oldalú, mert akkor O, S és M egyetlen pontot jelentenek. S harmadolja az OM szakaszt, mégpedig $\overline{SM} = 2 \cdot \overline{OM}$.

B. A bizonyítást elöljáróban elmondtuk. ♠

A következő tétel segítségével az Euler-egyenesen „közlekedhetünk", vagyis az itt elhelyezkedő pontok egymástól mért távolságait könnyen kiszámíthatjuk.

T10.2.
$$\overline{OS}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

A képletből következik, hogy $R \geq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, továbbá az egyenlőség csak az egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn.

B. A formula a T14.2. általános tételből azonnal látható, de itt megismételjük az eljárást. Válasszuk a koordinátarendszer kezdőpontját O-nak, és jelölje $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ és $\boldsymbol{c}_0$ a csúcsok helyvektorait. Az origó megválasztása folytán $|\boldsymbol{a}_0| = |\boldsymbol{b}_0| = |\boldsymbol{c}_0| = R$, másrészt

$$a^2 = |\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{c}_0|^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{c}_0.,$$

amiből $2\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{c}_0 = 2R^2 - a^2$. Hasonlóan $2\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{c}_0 = 2R^2 - b^2$ és $2\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0 =. 2R^2 - c^2$. Az S helyvektora $\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0)$, tehát

$$\overline{OS}^2 = \frac{1}{9}|\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0|^2 = \frac{1}{9}\left[3R^2 + 6R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right],$$

ami az első állítást igazolja. A második állítás a képletből adódik, ill. a T18.1. bizonyítja, hogy az egyenlőség csak egyenlő oldalú esetben érvényes. ♠

Jelöljük az oldalfelező pontokat F_a, F_b, F_c-vel.

T10.3. Az AM szakasz P felezőpontja az $AF_bF_c\Delta$ magasságpontja.

B. A bevezető gondolatmenet alapján $\overline{AM} = 2 \cdot \overline{OF_a}$, azaz $\overline{AP} = \overline{OF_a}$. Ha a felező háromszöget az F_bF_c felezőpontjára tükrözzük, akkor a felező háromszög az $AF_bF_c\Delta$-be, O, a felező háromszög magasságpontja P-be megy át, vagyis P az $AF_bF_c\Delta$ háromszög magasságpontja. ♠

T10.4. Az Euler-egyenes akkor és csak akkor párhuzamos az a oldallal, ha a magasságpont harmadolja az m_a magasságot oly módon, hogy $\overline{AM} = \frac{2}{3} m_a$ (az egyenlő oldalú háromszöget az állításból kizárjuk, mert ekkor az Euler-egyenes nem létezik). T9.10. segítségével az állítás átfogalmazható: Az Euler-egyenes akkor és csak akkor párhuzamos az a oldallal, ha a talpponti háromszög a_0 oldala (mely a b és a c oldalakat köti össze) harmada a talponti háromszög kerületének.

B. Legyen az a oldal felezüpontja F_a, az m_a magasság talppontja T_a és a háromszög súlypontja S. Az OM szakasz akkor és csak akkor párhuzamos az a oldallal, ha az $ASM\Delta$ és az $AF_aT_a\Delta$ hasonlók, e két háromszög pedig akkor és csak akkor hasonló, ha

$$\overline{AM} : \overline{AT_a} = \overline{AS} : \overline{AF_a} = 2:3. \ \spadesuit$$

10.2. *Feuerbach-kör*

A felező háromszög körülírt körét *Feuerbach-körnek* nevezzük. A Feuerbach-körnek számos érdekes tulajdonsága van, ezeket a következő állítások tartalmazzák.

T10.5. A Feuerbach-kör középpontja az Euler-egyenesre esik, mégpedig az OM szakasz felezőpontjába.

B. Az $ABC\Delta$ a körülírt körével együtt és a felező háromszög a Feuerbach-körrel együtt hasonló alakzatot képez, a hasonlósági középpont S, és a hasonlósági arány 1 : 2. Ebből következik, hogy a Feuerbach-kör O_F középpontja rajta van az OS egyenesen, vagyis az Euler egyenesen. A hasonlósági arányból következik, hogy $\overline{OS} = 2 \cdot \overline{SO_F}$, tehát

$$\overline{OO_F} = \frac{3}{2} \cdot \overline{OS} = \frac{3}{2}\frac{1}{3} \cdot \overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OM}. \qquad \spadesuit$$

T10.6. A Feuerbach-kör egyben a talpponti háromszög körülírt köre is.

B. Jelöljük az a oldalhoz tartozó magasság talppontját T_a-val. T10.5. szerint O_F rajta van az OF_aT_aM trapéz középvonalán, vagy másképpen az F_aT_a szakasz felező merőlegese átmegy O_F-en. Ez azt jelenti, hogy O_F egyenlő távol van az F_a és a T_a pontoktól, tehát a Feuerbach-kör átmegy T_a-n. A többi talppontra is nyilván ugyanez igaz. $\spadesuit$

T10.7. A Feuerbach-kör felezi a magasságpont és a csúcsok közötti szakaszokat. Más megfogalmazásban: a Feuerbach-kör átmegy a felező háromszöget kiegészítő mindhárom háromszög magasságpontján.

B. A T9.3. szerint O (ami a felezőháromszög magasságpontja) oldalfelező pontra vonatkozó tükörképe a Feuerbach-körre (ami a felezőháromszög köré írt kör) esik. Ez a tükörkép egyben a kiegészítő háromszög magasságpontja is és felezi az M és a csúcspont közti távolságot (ld. T10.3.). $\spadesuit$

Ennél kicsit több is igaz. Ha a háromszög körülírt körén tetszőlegesen felveszünk egy D pontot, akkor a DM szakaszt is felezi a Feuerbach-kör. Ez a következő állításból látható.

T10.8. A körülírt kört M-ből, mint külső hasonlósági középpontból 1 : 2 arányban le-kicsinyítve a Feuerbach-kört kapjuk meg.

B. A kicsinyített kör átmegy az *AM*, *BM* és *CM* szakaszok felezőpontjain, tehát T10.7. szerint azonos a Feuerbach-körrel. ♠

A Feuerbach-kör érintési tulajdonságait a 15. fejezetben tárgyaljuk.

10.3. *Baricentrikus koordináták*

A körülírt kör középpontjának baricentrikus koordinátáit T4.7.-ben megadtuk a háromszög szögeivel kifejezve : $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$. A koordinátákat kifejezhetjük az oldalakkal is. Vezessük be a 9. fejezetben már használt súlyokat, legyen $w_1 = -a^2 + b^2 + c^2$, $w_2 = a^2 - b^2 + c^2$, $w_3 = a^2 + b^2 - c^2$.

T10.9. A körülírt kör *O* középpontjának baricentrikus koordinátái az *A, B, C* bázispontokra vonatkozóan $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$, vagy oldalakkal kifejezve a^2w_1, b^2w_2, c^2w_3. Az utóbbi felírásban a súlyok összege $(4T)^2$.

B. T4.7. szerint a baricentrikus koordináták $\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin\beta\cos\beta$, $\sin\gamma\cos\gamma$. Szorozzuk meg a koordinátákat $t = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$-val, akkor megkapjuk az első állítást. Mivel

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{w_1}{2bc},$$

a koordináták átalakíthatók $\frac{aw_1}{2bc}$, $\frac{bw_2}{2ac}$, $\frac{cw_3}{2ab}$ alakba, majd ezeket $2abc$-vel megszorozva megkapjuk a tétel második állítását. A súlyok összegére vonatkozó állítás a T.5.5. összeszorzott Heron-képlet következménye. ♠

T10.10. A Feuerbach-kör középpontjának baricentrikus koordinátái az *A, B, C* bázispontokra vonatkozóan trigonometrikus alakban $\sin 2\beta + \sin 2\gamma$, $\sin 2\gamma + \sin 2\alpha$, $\sin 2\alpha + \sin 2\beta$. Az oldalakkal kifejezve $b^2w_2 + c^2w_3$, $c^2w_3 + a^2w_1$, $a^2w_1 + b^2w_2$. Ez utóbbi esetben a súlyok összege $2(4T)^2$.

B. Mivel a Fuerbach-kör a felező háromszög körülírt köre, T4.7. szerint az oldalfelező pontokban elhelyezett $2\sin 2\alpha$, $2\sin 2\beta$, $2\sin 2\gamma$ súlyok súlypontja a Feuerbach-kör középpontja. Az *A*, *B* és *C* pontokban elhelyezett tömegeket hat tömegpontra bontva, két-két egyenlő tömeget az oldalfelező pontokba helyezett $2\sin 2\alpha$, $2\sin 2\beta$, $2\sin 2\gamma$ tömeggel helyettesítve látható, hogy a súlypontjuk a Feuerbach-kör középpontjába esik.

A trigonometrikus súlyokban a kétszeres szögeket alakítsuk egyszeresekké és szorozzuk meg a súlyokat rendre az $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ kifejezéssel, akkor a súlyok

$$2b\cos\beta + 2c\cos\gamma,\ 2c\cos\gamma + 2a\cos\alpha,\ 2a\cos\alpha + 2b\cos\beta$$

alakot öltenek. A koszinuszos tényezőktől a koszinusz-tétel segítségével szabadulhatunk meg:

$$2b\frac{w_2}{2ac} + 2c\frac{w_3}{2ba},\ 2c\frac{w_3}{2ab} + 2a\frac{w_1}{2bc},\ 2a\frac{w_1}{2bc} + 2b\frac{w_2}{2ca}.$$

Ha egyszerűsítünk, és végigszorozzuk a súlyokat abc-vel, akkor megkapjuk az állítást. A súlyok összegére vonatkozó állítás a Heron-képlet összeszorzott T5.5. alakjából adódik. ♠

11. Területképletek

11.1. *Alapképletek*

A felsorolt képletek korábban már szerepeltek és bizonyításuk megtörtént. Itt összefoglaló jelleggel, hivatkozásokkal felsoroljuk ezeket. A területet T-vel jelöljük, a többi alkatrész jelölése a korábbival egyező.

Alapképlet: $T = \dfrac{am_a}{2} = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} = \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

A körülírt kör sugarával: $T = \dfrac{abc}{4R}$. (T4.4.)

A beírt (vagy hozzáírt) kör sugarával: $T = \rho \cdot s = \rho_a (s-a)$. (T5.4.)

Heron-képlet: $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ (T5.5.)

Heron-képlet összeszorzott változat:

$$(4T)^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \qquad \text{(T5.5.)}$$

Szögekkel: $T = s^2 \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ (T5.27.f)

Kevésbé ismert, ritkábban használt képlet a következő.

T11.1.

$$T = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

B. Jelöljük m_c talppontját T-vel és az $x = \overline{TA}$ kiszámítása érdekében írjuk fel a Pythagorasz-tételt az m_c-vel kettévágott részháromszögekre:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2.$$

Ebből

$$2cx = b^2 + c^2 - a^2.$$

Mivel $m_c = x\operatorname{tg}\alpha$, a háromszög területe

$$T = \frac{1}{2}cm_c = \frac{1}{2}cx\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{tg}\alpha. \ \spadesuit$$

11.2. *Koordináta geometria*

Adott a háromszög csúcspontjainak koordinátáival: $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$. Az előjeles területet adja meg a következő formula.

T11.2. Az előjeles terület azt jelenti, hogy pozitív (óramutató járásával ellentétes) körüljárási irány esetén pozitív, ellenkező esetben negatív a terület. Az előjeles területet is T-vel jelölve

$$T = \frac{1}{2}\left[a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2)\right].$$

Mivel a képletet elég nehéz megjegyezni, ajánlatosabb determináns formájában felírni:

$$T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

B. Toljuk el a háromszöget, úgy hogy minden csúcsának pozitív legyen a második koordinátája: $A = (a_1, a_2 + t)$, $B = (b_1, b_2 + t)$, $C = (c_1, c_2 + t)$. Vetítsük merőlegesen a háromszöget az x-tengelyre, a csúcsok vetületei legyenek A_1, B_1 és C_1. A háromszög területét az ABB_1A_1, a BCC_1B_1 és a CAA_1C_1 trapézok területeinek alkalmas előjellel vett összegeként állítjuk elő. Az $a_1 - b_1$, $b_1 - c_1$, $c_1 - a_1$ koordináta-különbségek előjelei pozitív körüljárás esetén éppen a helyes előjelet, negatív körüljárás esetén ennek ellenkezőjét adják. Így a trapézok előjeles területei, melyben ezek a szorzók szerepelnek, összegként az előjeles területet adják, azaz

$$T = \frac{1}{2}[(a_1 - b_1)(a_2 + t + b_2 + t) + (b_1 - c_1)(b_2 + t + c_2 + t) + (c_1 - a_1)(c_2 + t + a_2 + t)].$$

Ennek alapján (a t paraméter a formulából természetesen kiesik)

$$T = \frac{1}{2}[(a_1(a_2 + b_2 - c_2 - a_2) + b_1(-a_2 - b_2 + b_2 + c_2) + c_1(-b_2 - c_2 + c_2 + a_2]),$$

és ez megegyezik a tételben megadott képlettel.

A determinánssal megadott alak helyessége az első oszlopra alkalmazott kifejtési tétellel bizonyítható. ♠

Jegyezzük meg, hogy T11.2.-ből megkaphatjuk, a két ponton átmenő egyenes egyenletének kevésbé ismert, de legegyszerűbb alakját is. A három pont akkor és csak akkor esik egy egyenesre, ha a területképlet zérust ad, vagyis a $P_1 = (x_1, y_1)$ és a $P_2 = (x_2, y_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Megoldó képletek

A háromszög három adatából a többi alapadat kiszámítására vonatkozó tételeket soroljuk fel.

T12.1. Szinusz-tétel. $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$**.**

B. Az m_c magasság kétféleképpen felírható: $m_c = a\sin\beta = b\sin\alpha$, amiből átrendezéssel kapjuk az állítást. ♠

Megjegyzés. Ha szöget akarunk számolni a $\sin\beta=\frac{b}{a}\sin\alpha$ képlettel, akkor mindig gondolni kell arra, hogy az egyenletnek két megoldása lehet. Ha $a > b$, akkor mindig van megoldás, és, mivel a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van (T1.7.), β nem lehet tompaszög, tehát a megoldás egyértelmű. Ha $a < b$, akkor $\frac{b}{a}\sin\alpha>1$ esetén ilyen háromszög nem létezik, viszont, ha $\frac{b}{a}\sin\alpha<1$, akkor két megoldás van, az egyik tompaszögű.

T12.2. Koszinusz-tétel. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

B. Fejezzük ki az m_b magasság berajzolásával kapott mindkét derékszögű háromszögre alkalmazott Pythagorasz-tétel segítségével a magasság négyzetét:

$$m_b^2=c^2-(b-a\cos\gamma)^2=a^2-(a\cos\gamma)^2.$$

Az átalakítások elvégzése után megkapjuk a koszinusz-tételt. ♠

T12.3. Tangens-tétel. $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

A tangens tétel akkor használható eredményesen, ha két oldalból (a és b) és a közbezárt szögből ($\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$) kell a további szögeket kiszámítani. Ez a korábbi két tétel segítségével csak két lépésben hajtható végre, – először a c oldalt kell koszinusz-tétellel kiszámítani –, míg a tangens tétel lényegében egy lépésben nyújt megoldást.

B. Alakítsuk át a tangens-tétel baloldalát a szinusz-tétellel, majd alkalmazzuk az ismert trigonometrikus összefüggéseket:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-1}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$ ♠

13. Napóleon tétele és a panoráma pont

13.1. *Napóleon tétele*

Illesszünk egyenlő oldalú háromszögeket a háromszög oldalaira kifelé. Minden egyenlő oldalú háromszög oldalhossza egyezzen meg a megfelelő oldal hosszával, és ne legyen közös belső pontja az eredeti háromszöggel. Nevezzük ezeket röviden külső háromszögeknek.

Ugyanezt megtehetjük a másik irányba is. Minden egyenlő oldalú háromszögnek legyen közös belső pontja az eredeti háromszöggel. Ezeket röviden belső háromszögeknek mondjuk.

T13.1. A külső háromszögek körülírt köreinek van közös kerületi pontjuk. Ugyanez igaz a belső háromszögekre is: a belső háromszögek körülírt körei is egy pontban metszik egymást. A körök közös kerületi pontját (*külső ill. belső*) *Fermat-pontnak* szokták nevezni.

B. Ha a háromszög valamelyik szöge, mondjuk a C csúcsnál lévő szöge, 60^o-os, akkor belső háromszögek esetén, ha a C csúcsnál lévő szög 120^o-os, akkor külső háromszögek esetén a C pont a három kör metszéspontja. Ezeket az eseteket a bizonyítás további részeiből zárjuk ki.

A könnyebb szóhasználat kedvéért nevezzük az a oldal egyenese által meghatározott félsíkok közül azt, amelyik a háromszöget tartalmazza belső félsíknak (jelölésben A^+), a másikat külsőnek (A^-). Hasonlóan értelmezzük a B^+, B^-, C^+ és C^- félsíkokat.

Az a, a b és a c oldalhoz tartozó (vagy mind külső, vagy mind belső) kör legyen rendre K_1, K_2, ill. K_3. K_1 és K_2 egyik közös pontja C, és az előbbi kizárás miatt nem érintik egymást, tehát van még egy metszéspontjuk: A P pont nem eshet a c oldalra, mert $P \in A^+ \cap B^+$ miatt a két oldal látószöge azonos lenne, vagy 60^o, vagy 120^o, ami lehetetlen, mert nem adhat 180^o-os látószöget a c oldalra. Nem eshet a c egyenesén az AB-n kívülre sem, mert pl. $P \in A^+ \cap B^-$ esetén a két látószög különböző lenne, ami szintén lehetetlen, mert nem adhat 0^o-os látószöget.

Vegyük sorra az a és a b oldalak látószögeire vonatkozó három lehetséges esetet.

a) Tegyük fel, hogy a P pontból az a oldal is és a b oldal is 120^o-os szög alatt látszik. Belső háromszögek esetén a 120^o-os ívek nem metszik egymást, tehát csak külső háromszögekről lehet szó. A c oldal látószöge P-ből csak 120^o lehet, mert 0^o lehetetlen, mint az már kiderült. A P csak a háromszög belsejében lehet, és minden oldal látószöge 120^o, következésképpen a K_3 külső kör átmegy P-n.

b) Ha mindkét oldal 60^o-os szög alatt látszik, és külső körökről van szó, akkor $P \in A^- \cap B^- \subset C^+$. A c oldal látószöge 120^o, tehát a K_3 külső kör P-n áthalad. Ha belső körökről van szó, akkor $P \in A^+ \cap B^+ \cap C^- \subset C^-$, ugyanis P nem lehet a háromszög belső pontja a körpanoráma hiánya miatt. A c oldal látószöge 120^o, tehát a K_3 belső kör P-n áthalad.

c) Ha egyik oldal, mondjuk az a oldal 120^o-os szög alatt, míg a másik oldal, a b, 60^o-os szög alatt látszik P-ből, akkor külső körök esetén $P \in A^+ \cap B^-$. A $BPC\Delta$-nek PA a szögfelezője, tehát A ennek a háromszögnek belső pontja. Ekkor P és C a c egyenes ellentétes oldalára esik, tehát $P \in C^-$. Mivel a c oldal látószöge 60^o, K_3 átmegy P-n. Belső körök esetén $P \in A^- \cap B^+$, és a $BACP$ négyszög konvex négyszög, mert P és A

az a egyenes ellenkező oldalán vannak és PA a BPC szög szögfelezője. Ezért $P \in C^+$. A c oldal látószöge 60^o, tehát a belső K_3 kör átmegy P-n. ♠

Az a) pont alatt megvalósuló eset külön figyelmet érdemel.

T13.2. Ha a háromszög legnagyobb szöge 120^o-nál kisebb, akkor létezik a háromszög belsejében olyan pont, melyből mind a három oldal 120^o-os szög alatt látszik. Ezt a pontot *panoráma pontnak* nevezzük (szokták *izogonális pontnak* is hívni). Ha háromszögre kirótt feltétel nem teljesül, akkor ilyen pont nem létezik.

B. Az a oldalra kifelé elhelyezett szabályos háromszög B-től és C-től különböző, harmadik csúcsa legyen D. Az $ABDC$ négyszög konvex négyszög, ugyanis a B-nél lévő szöge $\beta + 60^o < < 180^o$, és a C-nél lévő szöge $\gamma + 60^o < 180^o$. A négyszög átlóinak metszéspontja legyen E. Mivel $\alpha < 120^o$, az A csúcs a $BCD\Delta$ körülírt körén kívül van, tehát az AD szakasz metszi a K_1 kört. A P-vel jelölt metszéspont a DE szakaszon nem lehet, tehát csak az AE szakaszra eshet, vagyis az $ABC\Delta$ belsejében van. Könnyen látható, hogy P-ből mindhárom oldal 120^o-os szögben látszik, ugyanis P rajta van az a oldal 120^o-os látószögű körívén, másrészt a kerületi szögek tétele miatt a DPC szög is és a DPB szög is 60^o-os.

Ha valamelyik, pl. a C csúcsnál lévő szög 120^o-nál nagyobb, akkor a panoráma pont nem létezik. A c oldal és a fölé rajzolt 120^o-os látószögű körív által határolt körszelet ugyanis tartalmazza C-t és a háromszög minden pontját, így a c oldal látószöge a háromszög minden pontjából 120^o-nál nagyobb. Külső pont pedig a körpanoráma hiánya miatt nem jöhet szóba. ♠

A K_1, K_2 és K_3 körök középpontjait (vagyis a szabályos háromszögek középpontjait) jelöljük O_1, O_2 és O_3-mal összevontan kezelve mindkét esetet. Az $O_1O_2O_3\Delta$-et az $ABC\Delta$ (külső vagy belső) *Napóleon-háromszögének* nevezzük.

T13.3. Napóleon tétele. Mind a külső, mind a belső Napóleon-háromszög szabályos háromszög.

B. P legyen K_1, K_2, K_3 körök előző tétel szerinti közös pontja. A PA, PB és PC egyenesek szöge a látószögek miatt 60^o vagy 120^o, de ha az egyenesek szögét a bezárt szögek közül a kisebbikkel adjuk meg, akkor azt mondhatjuk, hogy páronként 60^o-os szöget zárnak be egymással. (Ha P valamelyik csúccsal, mondjuk C-vel megegyezik, akkor a PC egyenest helyettesíthetjük a K_1 és K_2 körök közös érintőjével.)

Mivel PC a C-n átmenő két kör, a K_1 és K_2 közös húrja, az O_1O_2 centrálisuk a PC felező merőlegese. Ebből adódóan az O_1O_2, O_2O_3 és O_3O_1 egyenesek is páronként 60^o-os szöget zárnak be egymással, vagyis szabályos háromszöget határolnak. ♠

T13.4. A külső és a belső Napóleon-háromszög középpontja azonos és megegyezik az $ABC\Delta$ súlypontjával.

B. Vektorokkal fogjuk bizonyítani. Az $ABC\Delta$ körüljárási iránya legyen pozitív. A csúcsok helyvektorai legyenek $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{b_0}$, $\boldsymbol{c_0}$, a B-ből C-be mutató oldalvektor legyen $\boldsymbol{a}$, a C-ből A-ba mutató $\boldsymbol{b}$, a A-ból B-be mutató $\boldsymbol{c}$. Az utóbbi vektorok belső esetben 90^o-kal, külső esetben -90^o-kal történő elforgatásait jelölje $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{b'}$, $\boldsymbol{c'}$. A Napóleon-háromszög csúcspontjainak helyvektorai $\boldsymbol{b}_0 + \frac{\boldsymbol{a}}{2} + \frac{\boldsymbol{a}'}{2\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{c}_0 + \frac{\boldsymbol{b}}{2} + \frac{\boldsymbol{b}'}{2\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{a}_0 + \frac{\boldsymbol{c}}{2} + \frac{\boldsymbol{c}'}{2\sqrt{3}}$. A Napóleon-háromszög középpontjának helyvektora ezek számtani közepe, de $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$, és ezért $\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{c}' = 0$, tehát a számtani közép $\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{a}_0)$, ami az $ABC\Delta$ súlypontjának a helyvektora. ♠

A T13.4. könnyedén általánosítható. Ha a háromszög oldalaira hasonló háromszögeket helyezünk, úgy, hogy a háromszöggel érintkező oldalak a hasonlóságnál egymásnak megfelelnek, és az illesztett háromszögek körüljárási iránya egymással megegyezik, akkor a harmadik csúcsok által alkotott háromszög súlypontja azonos az $ABC\Delta$ súlypontjával.

T13.5. Jelöljük a (külső, vagy belső) Napóleon-háromszög oldalának hosszát d-vel, akkor

$$d^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) \pm \frac{2}{\sqrt{3}}T,$$

ahol a + előjel a külső, a – előjel a belső Napóleon-háromszögre vonatkozik. A Napóleon-háromszögek területeinek különbsége egyenlő az $ABC\Delta$ területével.

Napóleon állítólag ez utóbbi állítást is ismerte.

B. A két esetet egyszerre bizonyítjuk, a felső előjel mindig a külső esetre vonatkozik. Tekintsük a $CO_1O_2\Delta$-et. A C-nél lévő szöge kétszer 30°-kal nagyobb (kisebb) γ-nál, külső esetben $\gamma + 60°$, belső esetben $|\gamma - 60°|$. Alkalmazzuk a koszinusz-tételt a háromszögre:

$$d^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(60^\circ \pm \gamma),$$

$$\begin{aligned} 3d^2 &= a^2 + b^2 - ab\cos\gamma \pm \sqrt{3}ab\sin\gamma = \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{b}{\sqrt{2}}\cos\gamma \pm 2\sqrt{3}T = \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \pm 2\sqrt{3}T. \end{aligned}$$

Mivel a Napóleon-háromszög területe $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$, a második állítás a képletből következik. ♠

13.2. *A panoráma-pont extremális tulajdonsága*

Ebben a részben tegyük fel a P panoráma pont létezését, vagyis, hogy a háromszög legnagyobb szöge is kisebb, mint 120°.

Ha a külső Napóleon-háromszöget, $O_1O_2O_3\Delta$-et P-ből kétszeresére kinagyítjuk (P-t külső hasonlósági középpontnak véve), akkor a kapott $Q_1Q_2Q_3\Delta$ az $ABC\Delta$ köré írt egyenlő oldalú háromszög lesz, ez a T13.2. bizonyításából adódik. A köré írt kifejezés azt jelenti, hogy az A, B és C csúcsok a $Q_1Q_2Q_3\Delta$ különböző oldalaira esnek.

T13.6. A $Q_1Q_2Q_3\Delta$ az $ABC\Delta$ köré írt legnagyobb egyenlő oldalú háromszög.

ST. Segédtétel a bizonyításhoz. K_1 és K_2 legyen két egymást metsző kör O_1 és O_2 középponttal. Jelöljük a két metszéspontot F_1-gyel és F_2-vel. Húzzunk egy tetszőleges egyenest F_1-en keresztül, mely a K_1-et G_1-ben, K_2-t G_2-ben is metszi, akkor

$$\overline{G_1G_2} \le 2 \cdot \overline{O_1O_2} .$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G_1G_2 párhuzamos O_1O_2-vel.

ST bizonyítása. Bocsássunk merőlegeseket O_1-ből és O_2-ből a G_1G_2 szakaszra, a merőlegesek talppontjait jelölje H_1 és H_2. Az $O_1H_1H_2O_2$ derékszögű trapéz magassága nagyobb, mint a szára (derékszögű háromszögben az átfogó hosszabb, mint a befogó), tehát

$$\overline{O_1O_2} \ge \overline{H_1H_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{G_1G_2} .$$

Egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha az $O_1H_1H_2O_2$ négyszög téglalap, azaz, ha G_1G_2 párhuzamos O_1O_2-vel.

B. A segédtételbeli K_1 és K_2 körök szerepét a O_1 és O_2 középpontú látószög körök veszik át, az F_1 metszéspont szerepét a C csúcs játssza. Az $ABC\Delta$ köré írt tetszőleges egyenlő oldalú háromszög egyik oldala átmegy C-n (azaz F_1-en), végpontjai pedig a K_1, ill. K_2 körökön vannak, így az oldal hossza akkor a legnagyobb, ha párhuzamos O_1O_2-vel, és ezt akartuk bizonyítani. ♠

T13.7. Jelöljük P távolságát a csúcsoktól u-val, v-vel és w-vel, pontosabban legyen $u = \overline{PA}$, $v = \overline{PB}$ és $w = \overline{PC}$, akkor

$$u + v + w = m_0 ,$$

ahol m_0 a $Q_1Q_2Q_3\Delta$ magassága és

$$m_0^2 = 3d^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}T .$$

B. u, v és w a P pont oldalaktól mért távolsága a $Q_1Q_2Q_3$ egyenlő oldalú háromszögben, így T2.7. alapján összegük m_0. Az m_0-ra felírt képlet T13.5-ből következik.

T13.8. Az $ABC\Delta$ belsejében, vagy határán felvett pont csúcsoktól mért távolságainak összege a panoráma-pontra minimális, ha az létezik. Ha nem létezik a panoráma-pont, akkor a tompaszög csúcsára adódik a minimum.

Az állítás a Fermat-problémakörhöz tartozik, annak három adott pontra vonatkozó speciális esete. A második állítást Cavallieri bizonyította be.

B. Tegyük fel először, hogy a panoráma-pont létezik, és rajzoljuk meg a háromszöghöz tartozó $Q_1Q_2Q_3\Delta$-et. Vegyünk fel egy H pontot az $ABC\Delta$-ben, H-nak a $Q_1Q_2Q_3\Delta$ oldalaitól mért távolságai legyenek rendre x, y és z. Ekkor T2.7-et felhasználva

$$m_0 = x + y + z \le \overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} ,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a HA, HB és HC szakaszok merőlegesek a $Q_1Q_2Q_3\Delta$ megfelelő oldalaira, vagyis H a panoráma pont.

Ha a panoráma pont nem létezik, akkor az előzőtől eltérő konstrukciót alkalmazunk. Legyen C a háromszög tompaszögének a csúcsa. Az A csúcson keresztül húzzunk merőleges e egyenest a b oldalra, a B csúcson keresztül húzzunk merőleges f egyenest az a oldalra. A C csúcson keresztül haladó g egyenest pedig úgy vegyük fel, hogy az egyenesek olyan egyenlőszárú háromszöget határoljanak, melynek a szárai az e és az f egyenesre esnek. A szárak szöge kisebb vagy egyenlő 60^o, tehát a legkisebb magasságának a hossza a B és az e távolsága. Ez a távolság megegyezik $a + b$-vel, mint az a g egyenesre történő tükrözéssel látható. A befejezés hasonló az első rész lezárásához: T2.7. alapján

$$a+b \le x+y+z \le \overline{HA}+\overline{HB}+\overline{HC},$$

és egyenlőség csak akkor érhető el, ha HA merőleges e-re és HB merőleges f-re, de ekkor $H = C$. ♠

13.3. *A panoráma-pont helyzete*

T13.9. $$\overline{PA}=\frac{1}{3m_0}(b^2+c^2-2a^2+m_0^2).$$

B. Használjuk most is a $\overline{PA}=u$, $\overline{PB}=v$ és $\overline{PC}=w$ jelöléseket. A PBC, PCA és a PAB háromszögekre írjuk fel a koszinusz tételt, és használjuk fel, hogy a P-nél lévő szögeik 120^o-osak:

$$v^2+w^2+vw=a^2,$$
$$w^2+u^2+wu=b^2,$$
$$u^2+v^2+uv=c^2.$$

A továbbiakban csak ezt az egyenletrendszert kell megoldani. Vonjuk ki az egyenleteket párosával egymásból és használjuk a T13.7. képletet:

$$a^2-c^2=w^2-u^2+v(w-u)=(w-u)m_0,$$
$$b^2-a^2=u^2-v^2+w(u-v)=(u-v)m_0.$$

Ezekből az egyenletekből fejezzük ki v-t, ill. w-t és helyettesítsük be a $u + v + w = m_0$ egyenletbe.

$$v=u-\frac{b^2-a^2}{m_0} \text{ és } w=u+\frac{a^2-c^2}{m_0},$$

Behelyettesítve

$$u+u-\frac{b^2-a^2}{m_0}+u+\frac{a^2-c^2}{m_0}=m_0,$$

vagyis

$$3u=\frac{1}{m_0}(b^2+c^2-2a^2+m_0^2),$$

amit bizonyítani akartunk. ♠

T13.10. A $\overline{PA}=u$, $\overline{PB}=v$ és $\overline{PC}=w$ jelölések mellett $v-w=\dfrac{c^2-b^2}{m_0}$. Ha $a < b < c$, akkor $u > v > w$.

B. A T13.9. képletét v-re és w-re felírva kivonással kapjuk az első állítást. A nagyság szerinti sorrend az első állításból látható. ♠

13.4. *A panoráma-pont baricentrikus koordinátái*

T13.11. Tegyük fel, hogy a panoráma pont létezik, azaz a háromszög szögei 120^{o}-nál kisebbek. A panoráma pont baricentrikus koordinátái az *A, B, C* pontokra, mint bázispontokra vonatkozóan $\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}$, ahol *u, v, w* a panoráma-pont távolsága az egyes csúcsoktól (ld. T13.9.).

B. Vegyük észre, hogy a *PA* egyenes a *BPC* szög belső szögfelezője, ezért az *a* oldalt *v* : *w* arányban osztja. Ha a *PA* egyenes és az *a* oldal metszéspontját *D*-vel jelöljük, akkor

$$\overline{BD} : \overline{CD} = v : w.$$

Ha a *B* és *C* pontba $\frac{1}{v}, \frac{1}{w}$ súlyokat helyezünk, akkor súlypontjuk *D* lesz, így *AD* súlyozott súlyvonal. Ugyanez igaz a *PB* és a *PC* egyenesre is, tehát *P* az adott súlyokkal képezett súlyozott súlypont. ♠

14. Euler tétele, sugáregyenlőtlenségek

14.1. *A tétel bizonyítása*

A tétel a körülírt kör O középpontja és a beírt kör O_0 középpontja közti d távolságra ad egyszerű formulát, mely a háromszöget meghatározó három paraméter közül csak kettőt tartalmaz. Hasonló tétel érvényes a körülírt és az a oldalhoz hozzáírt kör középpontjainak a távolságára is. A két tételt egyszerre bizonyítjuk, O_0 itt az a oldalhoz hozzáírt kör középpontját jelöli, d a középpontok távolságát.

T14.1. Euler tétele. Jelölje a körülírt kör sugarát R, a beírt, ill. az a oldalhoz tartozó hozzáírt kör sugarát ρ, akkor

$$d^2 = \overline{OO_0}^2 = R^2 \mp 2R\rho,$$

ahol a felső előjel a beírt, az alsó a hozzáírt körre vonatkozik.

Beírt kör esetén $\rho \le \frac{R}{2}$, és egyenlőség csak az egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn. Ezt az egyenlőtlenséget *sugáregyenlőtlenségnek* nevezik.

B. Vektorok használatával csökkenthető a számolások mennyisége. Válasszuk a koordinátarendszer kezdőpontját O-nak, és jelölje $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ és $\boldsymbol{c}_0$ a csúcsok helyvektorait. Az origó megválasztása folytán $|\boldsymbol{a}_0| = |\boldsymbol{b}_0| = |\boldsymbol{c}_0| = R$. Jelöljük $\boldsymbol{d}_0$-lal O_0 helyvektorát, akkor T5.10.-et felhasználva

$$d = |\boldsymbol{d}_0| = \frac{|\pm a\boldsymbol{a}_0 + b\boldsymbol{b}_0 + c\boldsymbol{c}_0|}{\pm a + b + c}.$$

d^2 kiszámításához szükség van az $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{c}_0$ vektorok páronkénti skalárszorzataira. Mivel

$$c^2 = |\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0|^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0,$$

$$\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0 = R^2 - \frac{c^2}{2},$$

és hasonlóan

$$\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{c}_0 = R^2 - \frac{b^2}{2},\ \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{c}_0 = R^2 - \frac{a^2}{2}.$$

Ezt, és a végén a háromszög terület-képleteit felhasználva

$$d^2 = |\boldsymbol{d}_0|^2 = \frac{a^2R^2 + b^2R^2 + c^2R^2 \pm 2ab\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0 \pm 2ac\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{c}_0 + 2bc\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{c}_0}{(\pm a + b + c)^2} =$$

$$= \frac{R^2(\pm a + b + c)^2}{(\pm a + b + c)^2} - \frac{\pm abc^2 \pm acb^2 + bca^2}{(\pm a + b + c)^2} =$$

$$= R^2 \mp \frac{abc}{\pm a + b + c} = R^2 \mp \frac{4RT}{\pm a + b + c} = R^2 \mp 2R\rho.$$

A tétel másik állítása a $d^2 = \overline{OO_0}^2 = R^2 - 2R\rho \ge 0$ egyenlőtlenség átrendezéből adódik. ♠

Az Euler-tétel bizonyításának alapgondolata messzemenően általánosítható. Legyen P a p, q, r ($p + q + r = 1$) baricentrikus koordinátákkal jellemezett pont az $ABC\Delta$ síkjában.

T14.2. $$\overline{OP}^2 = R^2 - (qra^2 + prb^2 + pqc^2)\,.$$

B. A T14.1. bizonyításának jelöléseit és gondolatát felhasználva

$$\overline{OP}^2 = |\,p\boldsymbol{a}_0 + q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0|^2 =$$
$$= R^2(p^2+q^2+r^2) + pq(2R^2-c^2) + pr(2R^2-b^2) + qr(2R^2-a^2) =$$
$$= R^2(p+q+r)^2 - (qra^2 + prb^2 + pqc^2) = R^2 - (qra^2 + prb^2 + pqc^2)\,. \spadesuit$$

14.2. *Az Euler-tétel megfordítása*

Foglalkozzunk először a beírt kör esetével. Vegyünk fel két kört az Euler-képletnek megfelelően. Ekkor biztos, hogy az R sugarú kör tartalmazza a másikat, mert igaz a $d + \rho < R$ egyenlőtlenség, ugyanis a $d < R - \rho$ egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív és négyzetükre

$$d^2 < R^2 - 2R\rho + \rho^2 = d^2 + \rho^2$$

mindig teljesül. Jelöljük ki a nagyobbik körön az A csúcsot *tetszőlegesen*. Húzzunk érintőt a kisebb körhöz, az érintő egyenes messe a nagy kört B-ben. B-ből ismételjük meg az eljárást, kapjuk a C pontot. C-ből ismételjük meg újra az eljárást, kapjuk a D pontot. Záródik-e az $ABCD$ poligon, azaz $D = A$ teljesül-e? Poncelet záródási tétele ezt állítja. (Poncelet tétele sokkal általánosabban megfogalmazott tétel, és több további módosítása is van. Ezekre itt nem térünk ki.)

T14.3. Poncelet tétele. Adott két kör, melyre az Euler-képlet teljesül. Jelöljük ki a nagyobbik körön a A csúcsot *tetszőlegesen*, húzzunk két érintőt a kisebb körhöz, az érintő egyenesek messék a nagyobbik kört a B és a C pontokban, akkor az $ABC\Delta$ beírt köre a kisebb kör lesz.

B. A felvett körök középpontjai legyenek O és O_{01}, sugarai R és ρ_1. Tegyük fel, hogy a BC oldal nem érinti a kisebb kört, akkor az $ABC\Delta$ beírt körének középpontja legyen $O_{02} \neq O_{01}$ és sugara legyen ρ_2. Az Euler-képlet mindkét esetben teljesül:

$$d_1^2 = R^2 - 2R\rho_1 \text{ és } d_2^2 = R^2 - 2R\rho_2,$$

ahol $d_1 = \overline{OO_{01}}$ és $d_2 = \overline{OO_{02}}$. Jelöljük t-vel az $\overline{AO_{01}}$ távolságot, vetítsük rá O-t merőlegesen az AO_{01} egyenesre, a vetület legyen D, és legyen $x_1 = \overline{DO_{01}}$ és $x_2 = \overline{DO_{02}}$, mindkét távolságot előjelesen véve, úgy, hogy $\overline{AD} = t + x_1$ és $\overline{AD} + x_2 = AO_{02}$ teljesüljön. Ahol két előjelet írtunk, ebben a bizonyításban végig a felső előjelet kell figyelembe venni! A két összefüggést kivonva egymásból

$$d_2^2 - d_1^2 = x_2^2 - x_1^2 = \pm 2R(\rho_1 - \rho_2)\,.$$

A két érintő kör hasonlósági centruma A, tehát $t : (t + x_1 + x_2) = \rho_1 : \rho_2$. Az aránypárt felhasználva

$$x_2^2 - x_1^2 = \pm 2R\frac{\rho_1 t - \rho_1(t + x_1 + x_2)}{t} = \mp\frac{2R\rho_1(x_1 + x_2)}{t},$$

és mivel $x_1 + x_2 \neq 0$, kapjuk, hogy

$$x_2 - x_1 = \mp\frac{2R\rho_1}{t} = -\frac{1}{t}(R^2 - d_1^2) = -\frac{1}{t}[(t + x_1)^2 - x_1^2] = -t - 2x_1,$$

azaz

$$x_2 = -(t + x_1).$$

Ez azt jelenti, hogy $O_{02} = A$, ami lehetetlen, vagyis $O_{02} \neq O_{01}$ nem létezhet. ♠

A hozzáírt kör esete külön elemzést igényel. Jelöljük a körülírt kört K_1-gyel, a hozzáírt kört K_2-vel, sugarát ρ-val. A $d^2 = R^2 + 2R\rho$ összefüggésből rögtön következik, hogy

$$R < d < R + \rho,$$

melynek alapján O_0 K_1-en kívülre esik és a két körnek van közös pontja. Ez két módon lehetséges, vagy metszik egymást, vagy K_2 tartalmazza K_1-et. Ez utóbbi nem lehetséges, mert a K_1-be írt háromszög oldal egyenesei nem érinthetik K_2-t, de ezt az Euler-képlet nem zárja ki.

T14.4. Sugáregyenlőtlenség hozzáírt körökre. A hozzáírt kör sugara $\rho < 4R$.

B. K_1-nek kell, hogy legyen K_2-n kívüli pontja, ez csak akkor valósul meg, ha $d > \rho - R$. Az állítás szempontjából elég a $\rho > R$ esetet vizsgálni, tehát ekkor $d^2 > (\rho - R)^2$. Az Euler-képletből

$$d^2 = (\rho - R)^2 + \rho(4R - \rho),$$

amiből

$$4R - \rho = \frac{1}{\rho}[d^2 - (\rho - R)^2] > 0. \quad ♠$$

A bizonyításból az is kiderül, hogy a hozzáírt körökre vonatkozó Euler-képletnek megfelelő K_2 kör akkor és csak akkor tartalmazza K_1-et, ha $\rho \geq 4R$.

A $\frac{\rho}{R} < 4$ felső korlát pontos. Ha $0 < p < 4$, akkor létezik olyan háromszög, melyre $\frac{\rho}{R} = p$. Ez az állítás T14.5.-ből következik.

T14.5. Vegyük fel a K_1 és K_2 köröket úgy, hogy a hozzáírt körökre vonatkozó Euler-képletet teljesítsék, és tételezzük fel, hogy $\rho < 4R$. Vegyük fel a K_1 körön egy tetszőleges A pontot, mely a K_2 körön kívül esik és A-ból a K_2-höz húzott érintők érintési pontjai közül egyik sem a két kör metszéspontjával azonos. Ez esetben A-ból kiindulva megszerkeszthetjük azt az $ABC\Delta$-et, melynek körülírt köre K_1 és hozzáírt köre K_2.

B. Az A pontból a K_2 körhöz húzzuk meg a két érintő egyenest, melyeknek a másik metszéspontja K_1-gyel legyen B ill. C. $d < R + \rho$ miatt a két érintési pont közül legfeljebb egy eshet a K_1 kör belsejébe. Ha egyik érintési pont sem esik K_1-be, akkor a hozzáírt kör az a oldalhoz, ha mondjuk az AB oldal érintési pontja van K_1-en belül, akkor a vélt hozzáírt kör a c oldalhoz tartozik. Az $ABC\Delta$ a ill. c oldalhoz tartozó tényleges hozzáírt körének a középpontja legyen O_{02}, és tegyük fel, hogy $O_{01} \neq O_{02}$. Innen a T14.3. bizonyítása szó szerint végigvezethető a képletekben az alsó előjelet használva. A kapott ellentmondásból következik, hogy $O_{01} = O_{02}$. ♠

T14.6. Erdős-féle sugáregyenlőtlenség. Legyen a a háromszög legnagyobb oldala, akkor

$$\rho_a \geq \frac{3}{2}R \geq 3\rho.$$

Egyenlőség csak egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn.

B. Jelöljük az $ABC\Delta$ Feuerbach-körének középpontját F-fel, akkor $\overline{FO_a} = \frac{R}{2} + \rho_a$, hiszen T15.1. értelmében a Feuerbach-kör érinti a hozzáírt köröket. Hasonlóan $\overline{FO_b} = \frac{R}{2} + \rho_b$ és $\overline{FO_c} = \frac{R}{2} + \rho_c$.

Rajzoljuk meg az $O_aO_bO_c\Delta$ körülírt körét és középpontját jelöljük K-val. T5.23. szerint e kör sugara $2R$ és az $O_aO_bO_c\Delta$ hegyesszögű, tehát K az $O_aO_bO_c\Delta$ belsejébe esik. A sík bármely pontjához, így F-hez is található olyan csúcsa az $O_aO_bO_c\Delta$-nek, hogy a két pont távolsága legalább $2R$. Állítsunk ugyanis merőlegest a FK szakaszra K-ban, a kapott egyenes metszi az $O_aO_bO_c\Delta$-et, tehát van olyan csúcs, ami az egyenes K-val ellentétes oldalára esik. Ennek a csúcsnak a távolsága F-től $2R$-nél nagyobb, kivéve, ha $F = K$. Legyen ez a csúcs mondjuk O_c. Ekkor

$$\overline{FO_c} = \frac{R}{2} + \rho_c \geq 2R, \text{ azaz } \rho_c \geq \frac{3}{2}R.$$

T5.4. alapján nagyobb oldalhoz nagyobb hozzáírt kör tartozik, így ρ_a-ra még inkább érvényes az egyenlőtlenség.

Egyenlőség csak $F = K$ esetén állhat fenn, de ekkor $\overline{FO_a} = \overline{FO_b} = \overline{FO_c} = 2R$, vagyis $\rho_a = \rho_b = \rho_c$. A $T = \rho_a(s-a)$ területképlet alapján azonban ebből következik az a, b és c oldalak egyenlősége.

A $\rho_a \geq 3\rho$ állítás az Erdős és Euler féle sugáregyenlőtleség összedolgozásából adódik (de közvetlenül is könnyen bizonyítható). ♠

15. A Feuerbach-kör érintési tulajdonságai

A Feuerbach-kör érinti a beírt kört és a hozzáírt köröket. A tétel, ami Feuerbachtól származik, eléggé számolás-igényes. A bizonyításhoz lényegében az Euler-tétel (T14.1.) bizonyításának gondolat-menetét használjuk.

Szokás a Feuerbach-kört kilenc pont körének is nevezni a 13. fejezetben felsorolt tulajdonságok miatt. Ha az érintési pontokat is hozzávesszük, akkor inkább 13 pont körének illene nevezni.

T15.1. Feuerbach tétele. A Feuerbach-kör érinti a beírt kört és a hozzáírt köröket.

B. A két állítást egyszerre bizonyítjuk, a felső előjel mindig a beírt kör, az alsó a hozzáírt kör estére vonatkozik. O a beírt ill. az a oldalhoz hozzáírt kör középpontját, ρ ennek a sugarát jelöli. Kifejezetten erre a bizonyításra használjuk a $2s = \pm a + b + c$ jelölést. Javasoljuk, hogy a két bizonyítást külön-külön olvassuk.

Válasszuk origónak a körülírt kör középpontját, és legyenek az A, B és C csúcsok helyvektorai $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ és $\boldsymbol{c}_0$. Tudjuk, hogy a súlypont helyvektora

$$\frac{\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0}{3},$$

és a Feuerbach-kör O_F középpontjának a helyvektora ennek $\frac{3}{2}$-szerese (ld. T10.5.), azaz

$$\frac{\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0}{2}.$$

Számítsuk ki az OO_F távolságot! Az O helyvektorát T5.10.-ből ismerjük, tehát

$$\overline{OO_F}^2 = \left| \frac{\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{c}_0}{2} - \frac{\pm a\boldsymbol{a}_0 + b\boldsymbol{b}_0 + c\boldsymbol{c}_0}{\pm a + b + c} \right|^2 = \frac{1}{4s^2} \left| (s \mp a)\boldsymbol{a}_0 + (s-b)\boldsymbol{b}_0 + (s-c)\boldsymbol{c}_0 \right|^2.$$

A T14.1. bizonyítása szerint $|\boldsymbol{a}_0| = |\boldsymbol{b}_0| = |\boldsymbol{c}_0| = R$. és $\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0 = R^2 - \frac{c^2}{2}$, $\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{c}_0 = R^2 - \frac{b^2}{2}$, $\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{c}_0 = R^2 - \frac{a^2}{2}$. Végezzük el a négyzetre emelést és használjuk fel ezeket a formulákat:

$$\begin{aligned} 4s^2 \cdot \overline{OO_F}^2 &= R^2\left((s \mp a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2\right) + \\ &+ R^2\left(2(s \mp a)(s-b) + 2(s \mp a)(s-c) + 2(s-b)(s-c)\right) + \\ &- \left(c^2(s \mp a)(s-b) + b^2(s \mp a)(s-c) + a^2(s-b)(s-c)\right) = A_1 + A_2 - A_3. \end{aligned}$$

A_1, A_2, A_3 itt az egyes sorokban álló kifejezéseket jelölik. A_1 és A_2 összevonható teljes négyzetté, és az alábbi alakot ölti:

$$A_1 + A_2 = R^2\left((s \mp a) + (s-b) + (s-c)\right)^2 = R^2 s^2.$$

Marad az A_3 kifejezés egyszerűsítése.

$$\begin{aligned} A_3 &= -(s^2 - c^2)(s \mp a)(s-b) - (s^2 - b^2)(s \mp a)(s-c) - (s^2 - a^2)(s-b)(s-c) + \\ &+ s^2\left((s \mp a)(s-b) + (s \mp a)(s-c) + (s-b)(s-c)\right) = \\ &= (s \mp a)(s-b)(s-c)(-s-c-s-b-s \mp a) + \\ &+ s\left(s(s \mp a)(s-b) + s(s \mp a)(s-c) + s(s-b)(s-c)\right) = \\ &= -4s(s \mp a)(s-b)(s-c) + \end{aligned}$$

$$+ s\big(-(s \mp a)(s-b)(s-c) + s(s \mp a)(s-b) + s(s \mp a)(s-c) + s(s-b)(s-c)\big) =$$
$$= B_1 + B_2.$$

Még a B_2-vel kell foglalkozni.

$$B_2 = s\big((s \mp a)(s-b)(-s+c+s) + s(s-c)(s \mp a + s - b)\big) =$$
$$= sc\big((s \mp a)(s-b) + s(s-c)\big) =$$
$$= \frac{1}{4} sc\big((\mp a + b + c)(\pm a - b + c) + (\pm a + b + c)(\pm a + b - c)\big) =$$
$$= \frac{1}{4} sc\Big((c^2 - (a \mp b)^2 + (a \pm b)^2 - c^2\Big) = \pm sabc.$$

Ha összefoglaljuk a számolások részeredményeit, és felhasználjuk a háromszög terület-képleteit, akkor

$$4s^2\overline{OO_F}^2 = R^2 s^2 + 4T^2 \mp sabc,$$

$$\overline{OO_F}^2 = \frac{R^2}{4} \mp \frac{abc}{4s} + \frac{T^2}{s^2} = \frac{R^2}{4} \mp \frac{RT}{s} + \left(\frac{T}{s}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \mp R\rho + \rho^2 = \left(\frac{R}{2} \mp \rho\right)^2.$$

Mivel a Feuerbach-kör sugara $\frac{R}{2}$, a középpontok távolsága éppen a sugarak különbsége (ill. összege), tehát a két kör érinti egymást. ♠

A további érintési tulajdonságok Feuerbach tételéből már gyorsan következnek.

T15.2. Legyen M a háromszög magasságpontja. A Feuerbach-kör érinti az $ABM\Delta$ beírt körét és az $ABM\Delta$ hozzáírt köreit.

B. Alkalmazzuk T15.1.-et az $ABM\Delta$-re, akkor a beírt köre és minden hozzáírt köre érinti az $ABM\Delta$ Feuerbach-körét. Mivel a Feuerbach-kör egyben a talpponti háromszög körülírt köre, és az $ABC\Delta$ és az $ABM\Delta$ talpponti háromszöge megegyezik, a Feuerbach-körök is megegyeznek. Ez az indokolás hibás, ha az $ABC\Delta$ derékszögű, akkor ugyanis a talpponti háromszöge elfajult, és a körülírt köre nem egyértelmű. Ekkor azonban $ABC\Delta = ABM\Delta$, és az állítás ekkor is igaz. ♠

A „kilenc pont köre” elnevezést ismét módosítani kellene: újabb 12 érintési pont keletkezik, vagyis „25 pont körének” kellene nevezni a Feuerbach-kört.

16. A szimmedián

16.1. *A szimmedián, mint nevezetes vonal*

Látszólag erőltetett a szimmedián, mint nevezetes vonal bevezetése, de ez, mint majd kiderül, nem így van, sőt a huszadik század síkgeometriájának egyik vívmányaként tekintenek rá.

Szimmediánnak nevezik a súlyvonal tükörképét az azonos csúcsból kiinduló szögfelezőre képezve (pontosabban ennek az egyenesnek a háromszögbe eső szakaszát). A szakaszt és a hosszát jelöljük h-val, talppontját H-val. Ha fel akarjuk tüntetni, hogy az A csúcsból kiinduló nevezetes vonalról van szó, akkor mindkét jelölés a alsó indexet kap.

Elmondjuk ugyanezt kicsit más köntösben. a-val *antiparallelnek* nevezzük azt az egyenest, amelyik a b egyenessel β és a c egyenessel γ szöget zár be. a-val *antiparallel szakasznak* nevezzük az antiparallel egyenes azon részét, mely a b és a c egyenesek közé esik. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az a-val antiparallel szakaszok felezőpontjainak mértani helye a szimmedián, ugyanis a szögfelezőre tükrözve az antiparallel szakasz tükörképe az oldallal párhuzamos szakasz lesz, amit a súlyvonal felez.

Az alábbi, a szimmediánra vonatkozó alaptétel a T3.5. általánosításának tekinthető, vegyük ugyanis észre, hogy derékszögű háromszög esetén az átfogóhoz tartozó szimmedián épp a háromszög magassága.

T16.1. $$\overline{H_aC} : \overline{H_aB} = b^2 : c^2 .$$

B. Jelöljük a b egyenes által határolt félsíkok közül azt, amelyik az $ABC\Delta$-et tartalmazza, B^+-szal, ugyanezt a c egyenesre vonatkozóan C^+-szal. Az a oldalhoz tartozó súlyvonal (lásd T7.11.) azon pontok mértani helye a $B^+ \cap C^+$ tartományban, melyeknek b-től és c-től mért távolságainak aránya $c : b$ (fordítottan arányos!). Ha F az a oldal felezőpontja, akkor az $ABF\Delta$ és az $ACF\Delta$ területe megegyezik, tehát F-re teljesül a $c : b$ arány. Ha F-re igaz ez az arány, akkor az A pontból történő középpontos nagyítással-kicsinyítéssel a súlyvonal minden pontjára igaz. Más pontra $B^+ \cap C^+$ tartományban nem lehet igaz, mert a BC szakaszon egyetlen ilyen pont van, más pontra más az arány, és A pontból nagyítva-kicsinyítve ez az eltérő arány öröklődik.

A súlyvonalat tükrözve a szögfelezőre kapjuk, hogy a szimmedián azon pontok mértani helye a $B^+ \cap C^+$ tartományban, melyeknek b-től és c-től mért távolságainak aránya $b : c$ (egyenes arányosság!). Ebből következik, hogy az $ACH_a\Delta$ és az $ABH_a\Delta$ területeinek az aránya $b^2 : c^2$, de a területek aránya megegyezik $\overline{H_aC} : \overline{H_aB}$ aránnyal, és ezt akartuk bizonyítani. ♠

A szimmedián hossza az s súlyvonal hosszának ismeretében (ld. T7.3.) könnyen megadható.

T16.2. $$h = \frac{2bc}{b^2 + c^2} s .$$

B. Vezessük be az előző jelölések megtartásával a következő jelöléseket. Legyen P az α szög szögfelezőjének és az a oldalnak a metszéspontja, $\overline{FP} = x$, $\overline{PH_a} = y$ és $\overline{H_aC} = z$. A szögfelező-tétel miatt (T5.8.) $h=\frac{y}{x}s$. Tegyük fel, hogy $b < c$ és számítsuk ki az egyes szakaszokat (a P és a H_a távolsága a csúcsoktól arányos osztással megkapható):

$$x=\overline{PB}-\overline{BF}=\frac{ac}{b+c}-\frac{a}{2}=a\frac{c-b}{2(b+c)},$$

$$y=\overline{PC}-\overline{H_aC}=\frac{ab}{b+c}-\frac{ab^2}{b^2+c^2}=\frac{abc(c-b)}{(b+c)(b^2+c^2)}.$$

Visszahelyettesítve

$$h=\frac{y}{x}s=\frac{2bc}{b^2+c^2}s. \ ♠$$

16.2. *A szimmedián pont*

T16.3. A szimmedián vonalak egy pontban metszik egymást, a pont neve: *szimmedián pont* (*Lemoine–Grebe pontnak* is nevezik). Az L szimmedián pont baricentrikus koordinátái az A, B, C bázispontokra vonatkozóan a^2, b^2, c^2.
A definícó alapján a szimmedián pont a súlypont izogonális konjugáltja (ld. T4.9.).

B. T4.9.-ből mindkét állítás következik. ♠

T16.4. Az L szimmedián pont a h_a szakaszt

$$\overline{LH_a}:\overline{LA}=a^2:(b^2+c^2)$$

arányban osztja.

B. Mivel L a H_a pontban elhelyezett (b^2+c^2) és az A pontban elhelyezett a^2 tömeg súlypontja, az állítás nyilvánvaló. ♠

Jegyezzük meg, hogy L $\alpha > 90^o$ esetén az A csúcshoz, $\alpha < 90^o$ esetén az a oldalhoz van közelebb (koszinusz tétel). Ha $\alpha = 90^o$, akkor L az átfogóhoz tartozó magasság felezőpontja.

T16.5. Az L szimmedián pont a oldaltól mért távolsága: $d_a=\frac{2T}{a^2+b^2+c^2}a=\mu a$, ahol T a háromszög területe és $\mu=\frac{2T}{a^2+b^2+c^2}$.
A tétel állítása alapján a szimmedián pont újabb definícióját adhatjuk meg: olyan pont a háromszög belsejében, melynek az oldalaktól mért távolsága arányos az oldal hosszával (más szóval, trilineáris koordinátái a, b, c).

B. Jelöljük d_a-val, d_b-vel és d_c-vel az oldalaktól mért távolságot. Az L baricentrikus koordinátái T2.5. szerint a részháromszögek területei, T16.3. szerint a^2, b^2, c^2. A baricentrikus koordináták konstans szorzótól eltekintve egyértelműek, tehát

$$ad_a=\mu a^2, bd_b=\mu b^2, cd_c=\mu c^2,$$

amiből $d_a=\mu a$. A területek összege T, tehát $\mu(a^2+b^2+c^2)=2T$, amiből

$$\mu=\frac{2T}{a^2+b^2+c^2},$$

és megkapjuk a fenti képletet. ♠

Ha a háromszög oldaira kifelé négyzeteket szerkesztünk, és a négyzeteknek a háromszög oldalaival párhuzamos oldalait meghosszabbítva újabb háromszöget alkotunk, a két háromszög hasonlósági középpontja a háromszögek közös szimmedián pontja. Vegyük fel az $ABC\Delta$ szimmedián pontját, L-et. L távolsága az a oldaltól μa, a nagyobb háromszög a-val párhuzamos oldalától $\mu a + a = (1 + \mu)a$, vagyis L-ből $\frac{1+\mu}{\mu}$-szörös nagyítást hajtunk végre, mivel hasonló állítás igaz a többi oldalra is. Az állítás alapján is megszerkeszthetjük a szimmedián pontot.

Megismételjük a T5.22 állítást, és itt elemi bizonyítást is adunk rá. A tétel adja a szimmedián pont legegyszerűbb szerkesztési módját. Az $ABC\Delta$ körülírt körét megszerkesztjük, és a csúcsokban érintőket húzunk a körhöz. A kapott háromszög Gergonne-pontját egyszerű összekötésekkel meghatározzuk, ez egyben az $ABC\Delta$ szimmedián pontja.

T5.22. A Gergonne-pont a Gergonne-háromszög szimmedián pontja.

B. Az $ABC\Delta$ Gergonne-háromszöge legyen az $E_aE_bE_c\Delta$, ahol E_a, E_b, E_c a beírt kör érintési pontjai rendre az a, b és a c oldalakon. Elég azt megmutatni, hogy AE_a a Gergonne-háromszög szimmediánja, mert ugyanez igaz BE_b-re is, és akkor a metszéspontjuk a szimmedián-pont. A Gergonne-háromszöget tekintve fektessünk E_bE_c-hez képest antiparallel egyenest A-n keresztül, mely az E_aE_b oldalegyenest P-ben, és az E_aE_c egyenest Q-ban metszi. Az antiparallel tulajdonság definíciója miatt és a kerületi szögek tételét felhasználva az alábbi szögek egyenlők:

$$E_aE_bE_c\angle = AQE_c\angle = AE_cQ\angle,$$
$$E_aE_cE_b\angle = APE_b\angle = AE_bP\angle.$$

Az egyenlő szárú háromszögek miatt

$$\overline{AQ} = \overline{AE_c} = \overline{AE_b} = \overline{AP},$$

vagyis a PQ antiparallel szakaszt A felezi, A tehát pontja a szimmediánnak (ld. a 16.1. fejezet bevezetését). ♠

16.3. *Általánosított talpponti háromszög*

Vegyünk fel egy P pontot a háromszögben (vagy annak síkjában) és vetítsük le a három oldalegyenesre, a merőleges vetületek legyenek T_1, T_2 és T_3. A $T_1T_2T_3\Delta$-et a *P-hez tartozó (általánosított) talpponti* háromszögnek nevezzük.

T16.6. A P pont baricentrikus koordinátái legyenek p, q, r az A, B, C bázispontokra vonatkozóan ($p + q + r = 1$, $p \geq 0$, $q \geq 0$ és $r \geq 0$). A P (általánosított) talpponti háromszögének az a oldalon lévő P_1 csúcsa a

$$0, q + pt, r + pu,$$

baricentrikus koordinátákkal adható meg, ahol s, t, u a magasságpont baricentrikus koordinátái $t + u = 1$ feltétel mellett (t és u a T9.8.-ból számítható ki).

B. Messe a PA egyenes az a oldalt Q-ban, és legyen az a oldalhoz tartozó magasság talppontja T, jelöljük továbbá a B és a C pont helyvektorait $\boldsymbol{b}_0$-lal ill. $\boldsymbol{c}_0$-lal. A P pont az AQ szakaszt $p : (q + r)$ arányban osztja, és ugyanilyen arányban osztja fel a P_1 a QT szakaszt is. A Q pont helyvektora $\frac{1}{q+r}(q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0)$, a T pont helyvektora $t\boldsymbol{b}_0 + u\boldsymbol{c}_0$, így az osztópont helyvektora

$$q\boldsymbol{b}_0 + r\boldsymbol{c}_0 + p(t\boldsymbol{b}_0 + u\boldsymbol{c}_0),$$

amiből a tétel állítása leolvasható. ♠

T16.7. A *P*-hez tartozó talpponti háromszögnek *P* akkor és csak akkor a súlypontja, ha *P* az $ABC\Delta$ szimmedián pontja.

ST. Segédtétel a bizonyításhoz. Ha egy *ABCD* derékszögű trapéz egyik átlója, mondjuk *AC*, merőleges a trapéz *BC* szárára, akkor $\overline{AC}$ mértani középarányosa a két párhuzamos oldalnak:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

ST bizonyítása. Az $ABC\Delta$ és a $CAD\Delta$ hasonlóak, tehát $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CD}$, ami a bizonyítandó állítást jelenti.

B. Legyenek a *P* baricentrikus koordinátái az *A*, *B*, *C* bázispontokra nézve *p*, *q*, *r*. Húzzunk párhuzamos egyenest *P*-n keresztül az *a* oldallal, és messe ez a párhuzamos egyenes a *b* oldalt B_1-ben, a *c* oldalt C_1-ben. Az *AP* egyenes az *a* oldalt *r* : *q* arányban osztja fel, tehát

$$\overline{PC_1} : \overline{PB_1} = r : q.$$

Húzzunk párhuzamost az *a* oldallal T_2-n keresztül és készítsük el a $PB_1T_2Q_2$ derékszögű trapézt, hasonlóan ugyancsak az *a* oldallal T_3-on húzott párhuzamossal készítsük el a $PC_1T_3Q_3$ derékszögű trapézt (úgy, hogy a derékszög a *P* pontban keletkezik). Mindkettőre érvényes a segédtétel állítása:

$$\overline{T_2Q_2} = \frac{\overline{PT_2}^2}{\overline{PB_1}} \text{ és } \overline{T_3Q_3} = \frac{\overline{PT_3}^2}{\overline{PC_1}}.$$

Képezzük a két kifejezés hányadosát és használjuk fel a bizonyítás előző megállapítását, akkor

$$\frac{\overline{T_2Q_2}}{\overline{T_3Q_3}} = \frac{\overline{PT_2}^2}{\overline{PT_3}^2} \cdot \frac{r}{q} = \frac{\overline{PT_2}^2 \cdot b^2}{\overline{PT_3}^2 \cdot c^2} \cdot \frac{rc^2}{qb^2}.$$

A $\overline{PT_2} \cdot b$ kifejezés az $APC\Delta$, a $\overline{PT_3} \cdot c$ kifejezés pedig az $APB\Delta$ kétszeres területe, melyek aránya, a T2.5. szerint, *q* : *r*. Ezt felhasználva az előbbi arány az alábbiak szerint módosul:

$$\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{P_3Q_3}} = \frac{q^2}{r^2} \cdot \frac{rc^2}{qb^2} = \frac{c^2q}{b^2r}.$$

Ezzel meghatároztuk, hogy a PT_1 egyenes milyen arányban osztja a T_2T_3 szakaszt.

Ha *P* = *L*, akkor a hozzátartozó baricentrikus koordináták (T16.3. alapján) a^2, b^2, c^2, így az előző képlet szerint a PT_1 egyenes felezi a T_2T_3 szakaszt, tehát a PT_1 egyenes a $T_1T_2T_3\Delta$ súlyvonala. Hasonlóan PT_2 is és PT_3 is súlyvonal, *P* tehát súlypont.

Ha *P* súlypont, akkor a PT_1 súlyvonal felezi a T_2T_3 szakaszt, azaz $\frac{c^2q}{b^2r} = 1$. Így $q : r = b^2 : c^2$. Hasonlóan a PT_2 súlyvonalra felírva kapjuk, hogy $p : r = a^2 : c^2$, ami azt jelenti, hogy *P* baricentrikus koordinátái a^2, b^2, c^2, vagyis *P* = *L*. ♠

T16.8. *L* talpponti háromszöge hasonló az $ABC\Delta$ súlyvonalaiból készített háromszöghöz, a hasonlósági arány 2μ, ahol μ a T16.5. bizonyításában szereplő arányossági tényező. Az *L* pont

$T_1T_2T_3$ talpponti háromszögének oldalai merőlegesek az $ABC\Delta$ súlyvonalaira, nevezetesen a T_2T_3 oldal merőleges s_a-ra.

B. Jelöljük d_a-val, d_b-vel és d_c-vel az L távolságait az egyes oldalaktól. Mivel L a talpponti háromszögének a súlypontja, T7.7. miatt a talpponti háromszögének a_1 oldala

$$a_1^2 = 2d_b^2 + 2d_c^2 - d_a^2.$$

Használjuk fel T16.5.-öt, akkor

$$a_1^2 = \mu^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) = 4\mu^2 s_a^2,$$

vagyis $a_1 = 2\mu s_a$, amit bizonyítani akartunk.

A merőlegesség bizonyításához alkalmazzuk a T7.6. bizonyításában fellépő konstrukciót. Tükrözzük az S súlypontot az a oldal F felezőpontjára, a kapott pont legyen S'. A már bizonyított rész szerint a $T_1T_2T_3\Delta$ hasonló a $CSS'\Delta$-höz, valamint a (leírtak szerinti) körüljárási irányuk is megegyezik. Az LT_1 súlyvonal merőleges a másik háromszögben a neki megfelelelő CF súlyvonalra, tehát a $CSS'\Delta$ 90^o-os elforgatásával a $T_1T_2T_3\Delta$-gel egyállású háromszöget kapunk. Mivel a $CSS'\Delta$ oldalai párhuzamosak az $ABC\Delta$ súlyvonalaival, ezért a súlyvonalak merőlegesek a $T_1T_2T_3\Delta$ oldalaira. ♠

A T7.8. a) része felhasználásával T16.7. átírható az alábbi alakra.

T16.9. $\overrightarrow{PT_1} + \overrightarrow{PT_2} + \overrightarrow{PT_3} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha P a szimmedián pont.

T16.10. a) A P-hez tartozó talpponti háromszögnek P akkor és csak akkor a magasságpontja, ha P az $ABC\Delta$ körülírt körének középpontja.

b) A P-hez tartozó talpponti háromszögben P akkor és csak akkor a beírt körének a középpontja , ha P az $ABC\Delta$ magasságpontja.

B. a) A feltétel elégségessége nyilvánvaló. Ha $P = O$, akkor P talpponti háromszöge a felező háromszög, és P ennek a magasságpontja.
Ha P a talpponti háromszögének a magasságpontja, akkor a talpponti háromszög és az $ABC\Delta$ oldalai párhuzamosak. Az $F_1F_2F_3$ felező háromszög is olyan talpponti háromszög, melynek oldalai párhuzamosak az $ABC\Delta$ oldalaival. Tegyük fel, hogy a két talpponti háromszög különböző, akkor A a hasonlósági középpontjuk, mivel a T_2F_2 és a T_3F_3 egyenesek A-ban metszik egymást. De ez lehetetlen, mert a T_1F_1 egyenes nem mehet át A-n.

b) A feltétel elégségességét a T9.9. bizonyítja.
A szükségesség bizonyításához induljunk ki a $T_1T_2T_3$ talpponti háromszögből. A T_2 és a T_3 csúcspont külső szögfelezői a T_2T_3 oldalhoz hozzáírt kör középpontjában metszik egymást, ez az A pont. Ugyanitt megy át a T_1 csúcs belső szögfelezője is, ami azt jelenti, hogy AT_1 az $ABC\Delta$ magasságvonala. Ugyanígy BT_2 és CT_3 is magasságvonal, és így P magasságpont. ♠

16.4. *Simson-egyenes*

Vegyük fel a P pontot a háromszög síkjában tetszőlegesen, és határozzuk meg hozzátartozó $T_1T_2T_3$ általánosított talpponti háromszög T_P előjeles területét. Az előjel, ugyanúgy, mint a magasságponthoz tartozó talpponti háromszög előjeles területe esetén, pozitív, ha a $T_1T_2T_3\Delta$ és az $ABC\Delta$ körüljárási iránya megegyezik, és negatív, ha különbözik. A háromszög adatait rögzítve a T_P előjeles terület csak az $\overline{OP}$ távolságtól függ, ahol O a körülírt kör középpontja.

T16.11. Jelöljük d_P-vel P távolságát a körülírt kör középpontjától, azaz legyen $d_P = \overline{OP}$. A $T_1T_2T_3$ általánosított talpponti háromszög előjeles területe

$$T_P = T\frac{R^2 - d_P^2}{4R^2}.$$

A talpponti háromszög T_P területe akkor maximális, ha $d_P = 0$, vagyis a felező háromszög esetén.
Ha $d_P = R$, vagyis, ha a P a körülírt körön van, akkor $T_P = 0$, vagyis a T_1, T_2, T_3 pontok egy egyenesre esnek. Az egyenes neve: *Simson-* (ritkábban *Wallace-*) *egyenes*.

B. Először tételezzük fel, hogy P a háromszögben van. Az általános eset számolása ugyanúgy történik, de némi diszkussziót igényel. Legyenek P baricentrikus koordinátái p, q, r ($p + q + r = 1$), P távolsága az oldalaktól d_1, d_2, d_3. T2.5. állítását és jelölését felhasználva

$$p = \frac{t_1}{T} = \frac{ad_1}{2T},$$

amiből $d_1 = p\frac{2T}{a}$, és hasonlóan $d_2 = q\frac{2T}{b}$, $d_3 = r\frac{2T}{c}$. A $T_1T_2T_3\Delta$ területe három háromszög területéből tevődik össze, ezek közül a $PT_1T_2\Delta$ területe (közben felhasználjuk a háromszög különböző területképleteit, és hogy a PT_1CT_2 négyszög húrnégyszög):

$$\frac{d_1d_2}{2}\sin\gamma = \frac{2T^2}{ab}pq\sin\gamma = 4T^3\frac{pq}{a^2b^2} = 4T\frac{a^2b^2c^2}{16R^2}\frac{pq}{a^2b^2} = \frac{T}{4R^2}c^2pq.$$

Hasonlóan a többi részháromszög területe

$$\frac{T}{4R^2}a^2qr, \text{ és } \frac{T}{4R^2}b^2rp.$$

A területeket összeadva alkalmazhatjuk a T14.2. formulát

$$T_P = \frac{T}{4R^2}(a^2qr + b^2rp + c^2pq) = \frac{T}{4R^2}(R^2 - d_P^2),$$

ami az állítással megegyezik.

Külső P pont esetén megkülönböztetünk egy vagy két oldalon kívüli P-t (a p, q, r koordináták közül egy, vagy kettő negatív). A könnyebb szóhasználat kedvéért nevezzük az a oldal egyenese által meghatározott félsíkok közül azt, amelyik a háromszöget tartalmazza belső félsíknak (jelölésben A^+), a másikat külsőnek (A^-). Hasonlóan értelmezzük a B^+, B^-, C^+ és C^- félsíkokat.

a) Tegyük fel, hogy $P \in A^- \cap B^+ \cap C^+$. A T_1PT_3 szög β nagyságú, mert merőleges szárú szögekről van szó, és P kívül van a β szögtartományán. Ugyanígy a T_1PT_2 szög is γ. A T_2PT_3 szög természetesen $180^o - \alpha = \beta + \gamma$, mivel a T_2PT_3A négyszög is húrnégyszög.

Az első részben szereplő d_1, d_2, d_3 távolságok itt előjelet kapnak: $d_1 < 0$, $d_2 \geq 0$, $d_3 \geq 0$, ezért a $T_1PT_3\Delta$ és a $T_1PT_2\Delta$ területe negatív, míg a $T_2PT_3\Delta$ területe pozitív lesz (0-t is megengedve). A területek algebrai összegének abszolút értéke mindenképpen megadja a $T_1T_2T_3\Delta$ területét; az algebrai összeg pozitív lesz, ha a $PT_3T_1T_2$ négyszög konkáv, és negatív, ha konvex. Konkáv esetben viszont a $T_1T_2T_3\Delta$ körüljárási iránya megegyezik, míg konvex esetben ellentétes az $ABC\Delta$ körüljárási irányával. Ezért az a) esetben előjelhelyesen kapjuk a tétel állítását.

b) Tegyük fel, hogy $P \in A^+ \cap B^- \cap C^-$. A T_1PT_3 szög β nagyságú, mert merőleges szárú szögekről van szó, és P kívül van a β szögtartományán. Ugyanígy a T_1PT_2 szög γ-val egyenlő. A T_2PT_3 szög természetesen $180^o - \alpha = \beta + \gamma$, mivel a T_2PT_3A négyszög húrnégyszög.

A d_1, d_2, d_3 távolságok előjelei: $d_1 \geq 0$, $d_2 < 0$, $d_3 < 0$, ezért a $T_1PT_3\Delta$ és a $T_1PT_2\Delta$ területe negatív, míg a $T_2PT_3\Delta$ területe pozitív lesz (0-t is megengedve). A területek algebrai összegének abszolút értéke mindenképpen megadja a $T_1T_2T_3\Delta$ területét, az algebrai összeg minden esetben negatív lesz, mert a $PT_3T_1T_2$ négyszög mindig konvex.

A konvexitás bizonyítása a következőképpen végezhető el. Húzzunk párhuzamos egyenest A-n keresztül az a oldallal, és ez messe a PT_1 egyenest Q-ban. A $P \in A^+ \cap B^- \cap C^-$ feltétel miatt Q a PT_1 szakasz belső pontja. Ugyanakkor a PT_2QT_3 négyszög húrnégyszög, hiszen minden csúcspontja rajta van a PA átmérő fölé rajzolt Thalesz-körön, így ez konvex négyszög, az átlói metszik egymást. Következésképpen a $PT_2T_1T_3$ négyszög átlói is metszik egymást, tehát konvex. Ezzel a területképletet igazoltuk.

A tétel további állításai a kapott képletből nyilvánvalóak. ♠

A háromszög körülírt köre legyen K. Ha a P pont a K-n ω szögsebességgel köröz, akkor a Simson-egyenes $\frac{\omega}{2}$ szögsebességgel forog – ellenkező irányban. Ez következik a T16.12. állításból.

Csak a következő tétel megfogalmazása és bizonyítása érdekében definiáljuk két egyenes, a és b előjeles szögét. a és b *előjeles szögének* az abszolút értéke az általuk bezárt két szög közül a kisebbik mérete, és ezt pozitív előjellel vesszük, ha a legfeljebb 90^o-os pozitív irányú forgatással átvihető b-be, ellenkező esetben negatív előjelet adjunk neki (merőleges egyenesek szögét mindig pozitívnak vesszük). Ezzel a kerületi szögek, ill. húrnégyszögek tétele a következőképpen fogalmazható át:

Segédtétel. Egy körön a D, E, F, G pontok tetszőleges elhelyezkedése esetén az FD és FE egyenesek előjeles szöge egyenlő a GD és a GE egyenesek előjeles szögével (két pont egybeesése esetén az összekötő egyenes a ponton áthaladó érintő). Az állítás megfordítható: ha az FD és FE egyenesek előjeles szöge egyenlő a GD és a GE egyenesek előjeles szögével, akkor a pontok egy körön helyezkednek el.

T16.12. A P pont helyzetét a körülírt körön a δ előjeles szöggel írjuk le: 2δ abszolút értéke legyen a rövidebb PA ívhez tartozó középponti szög, előjele pedig pozitív, ha A-ból 180^o-nál kisebb O körüli pozitív irányú forgatással eljuthatunk P-be, különben δ előjele legyen negatív Az A csúcsból kiinduló magasságvonal és a P-hez tartozó Simson-egyenes előjeles szöge $-\delta$.

P-ből az a oldalra bocsátott merőleges másik metszéspontja a körrel legyen P_1. A P_1A egyenes párhuzamos a P-hez tartozó Simson-egyenessel.

B. Vegyük fel a körülírt körön a P pontot tetszőlegesen. Állítsunk merőlegeseket az a és a c oldal egyenesére, a merőlegesek talppontjait jelöljük T_1-gyel, ill. T_3-mal. A segédtétel szerint a

BP és a BA egyenesek előjeles szöge $-\delta$. Mivel a P, B, T_1, T_3 pontok a PB átmérő fölé rajzolt Thalesz-körön vannak, és a BA egyenes azonos a BT_3 egyenessel, következik, hogy T_1P és a T_1T_3 egyenesek előjeles szöge is $-\delta$. A T_1P egyenes párhuzamos a magassággal, T_1T_3 pedig a Simson egyenes, így ezek előjeles szöge is $-\delta$, mint azt a tétel állítja.

A P, A, B, P_1 pontok a körülírt körön vannak, ezért a BP és a BA egyenesek előjeles szöge megegyezik a P_1P és a P_1A egyenesek előjeles szögével, mindkettő $-\delta$. A P_1P egyeneshez viszonyítva a Simson-egyenesnek is és a P_1A-nak is $-\delta$ az előjeles hajlásszöge, tehát párhuzamosak. ♠

T16.13. A P ponthoz tartozó Simson-egyenes átmegy a PM szakasz Q felezőpontján, ahol M a magasságpontot jelöli. Q pontja a Feuerbach-körnek.
Ha P és P' a körülírt kör átellenes pontjai, akkor a hozzájuk tartozó Simson-egyenesek merőlegesen metszik egymást és a metszéspont is a Feuerbach-körön van.

B. Tegyük fel, hogy a körülírt körön szabadon választott P pont a BC ívre esik. Legyen az M tükörképe a BC oldalra D, ami szintén a körülírt kör pontja (ld. T9.3.), továbbá jelölje A' a körülírt kör A-val átellenes pontját. Tegyük fel még az általánosság korlátozása nélkül, hogy P a DB ívre esik. A PAA' szöget jelöljük δ-val.

Első lépésként határozzuk meg a PDA szöget. Két esetet különböztetünk meg: P az $A'B$ ívre esik, vagy az $A'D$ ívre; a két eset csak előjelben különbözik, a felső előjel az első, az alsó a második esetre fog vonatkozni. A kerületi és középponti szögek összefüggéséből

$$A'AB\,\text{szög} = 90^\circ - \gamma\,,$$

továbbá

$$PDA\,\text{szög} = PDB\,\text{szög} + BDA\,\text{szög} = PAB\,\text{szög} + \gamma = 90^\circ - \gamma \mp \delta + \gamma = 90^\circ \mp \delta\,.$$

A BC egyenessel párhuzamos, P-n áthaladó egyenes messe az a oldalhoz tartozó magasságvonal egyenesét E-ben, valamint a P Simson-egyenese messe a magasságvonal egyenesét F-ben. Legyen az a oldalon lévő magasság-talppont T és P merőleges vetülete BC-re P_a. T16.12. értelmében az FP_aT szög δ nagyságú, tehát az $FP_aT\Delta$ egybevágó az $EPD\Delta$-gel. Ezért

$$\overline{MF} = \overline{MT} \mp \overline{FT} = \overline{DT} \mp \overline{DE} = \overline{PP'}\,.$$

A PP_aMF négyszög tehát parallelogramma, vagyis az átlói felezik egymást, és ezt akartuk bizonyítani. A Feuerbach-körre vonatkozó állítás T10.8.-ból már következik.

Legyen Q a PM, Q' pedig a $P'M$ szakasz felezőpontja. T10.8. alapján Q és Q' a Feuerbach-kör átellenes pontjai. T16.12. szerint a P-hez és a P'-höz tartozó Simson-egyenesek merőlegesek, átmennek a Feuerbach-kör átellenes pontjain, tehát metszéspontjuk a Thalesz-tétel miatt a Feuerbach körre esik. ♠

16.5. *Erdős-Mordell egyenlőtlenség*

A háromszög egy tetszőleges P belső pontjának a távolsága a csúcsoktól legyen rendre u, v, w, és az oldalaktól mért távolságait jelöljük x-szel, y-nal és z-vel. Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség ezen mennyiségekre ad egy meglehetősen éles és sok esetben jól alkalmazható egyenlőtlenséget.

T16.14. Erdős-Mordell egyenlőtlenség. Tetszőleges P belső pontra

$$u+v+w\le 2(x+y+z),$$
és az egyenlőség akkor csak akkor teljesül, ha a háromszög egyenlő oldalú és P annak a középpontja.

B. Mint a 16.4. bevezetésében említettük, legyen $\overline{PA}=u$, $\overline{PB}=v$ és $\overline{PC}=w$, továbbá jelölje az $ABP\Delta$, a $BCP\Delta$ és a $CAP\Delta$ P-nél lévő szögeinek nagyságát rendre $2\varphi_1$, $2\varphi_2$ és $2\varphi_3$, a háromszögek P-ből kiinduló szögfelezőinek a hosszát pedig x', y' és z'. A T5.11. egyenlőtlenségét felhasználva
$$x\le x'\le \sqrt{vw}\cos\varphi_1,$$
$$y\le y'\le \sqrt{wu}\cos\varphi_2,$$
$$z\le z'\le \sqrt{uv}\cos\varphi_3.$$
Elég tehát azt bizonyítani, hogy
$$2\sqrt{vw}\cos\varphi_1+2\sqrt{wu}\cos\varphi_2+2\sqrt{uv}\cos\varphi_3\le u+v+w.$$
Mivel $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=180^\circ$, $\cos\varphi_3 = -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = -\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$, így a bizonyítandó állítás az
$$u+v+w-2\sqrt{vw}\cos\varphi_1-2\sqrt{wu}\cos\varphi_2+2\sqrt{uv}\cos\varphi_1\cos\varphi_2-2\sqrt{uv}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ge 0$$
alakot ölti. Az egyenlőtlenség bal oldala azonban
$$(\sqrt{u}\sin\varphi_1-\sqrt{v}\sin\varphi_2)^2+(\sqrt{w}-\sqrt{u}\cos\varphi_1-\sqrt{v}\cos\varphi_2)^2$$
alakot ölti, ami nyilvánvalóan nem negatív.

Az Erdős-Mordell egyenlőtlenségben egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha mindenhol egyenlőség érvényes, tehát $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. $x = x'$ esetén a $BCP\Delta$ magassága és szögfelezője megegyezik, vagyis a háromszög egyenlőszárú. Ugyanígy a másik két részháromszög is egyenlőszárú, ami azt jelenti, hogy $x = y = z$, azaz P a körülírt kör középpontja. Egyenlőszárú háromszögek esetén a T5.11. egyenlőtlenségben is egyenlőség áll fenn.
A második egyenlőtlenségben az egyenlőség csak akkor teljesül, ha mindkét négyzetes tag nulla. Tehát egyrészt $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$, azaz $\varphi_1 = \varphi_2$, másrészt $1 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = 1 - 2\cos\varphi_1 = 0$, azaz $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ$. Ez azt jelenti, hogy P a háromszög panoráma pontja. Két nevezetes pont azonban T18.1. miatt csak egyenlő oldalú háromszögnél egyezhet meg. ♠

Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség két alkalmazását mutatjuk be.

T16.15.
$$9\rho\le m_a+m_b+m_c\le 3(R+\rho),$$
továbbá, ha bármelyik egyenlőtlenség helyett az egyenlőség teljesül, akkor (és csak akkor) a háromszög egyenlő oldalú.

B. Jelölje a körülírt kör középpontjának az oldal egyenesektől mért távolságait d_a, d_b és d_c, és alkalmazzuk az Erdős-Mordell egyenlőtlenséget P-nek a magasságpontot választva. Ekkor a 10.1 fejezet bevezető gondolata alapján $u = 2d_a$, $v = 2d_b$, $w = 2d_c$, valamint $x = m_a - 2d_a$, $y = m_b - 2d_b$, $z = m_c - 2d_c$. A egyenlőtlenség szerint
$$2d_a+2d_b+2d_c\ge 2(m_a-2d_a+m_b-2d_b+m_c-2d_c),$$
tehát, felhasználva még T5.30.g)-t
$$m_a+m_b+m_c\le 3(d_a+d_b+d_c)=3(R+\rho).$$

Egyenlőség esetén az Erdős-Mordell egyenlőtlenségben is egyenlőség áll, ekkor viszont a háromszög egyenlő oldalú.

Fejezzük ki a magasságvonalak hosszát a területképletekből, akkor

$$m_a + m_b + m_c = 2T\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \rho(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) =$$

$$= \rho\left[3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\right] \geq 9\rho,$$

hiszen egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2. Egyenlőség esetén $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$, amiből $a = b$, és ugyanígy $b = c$. ♠

T16.16. Tetszőleges belső P pontra

$$u+v+w \geq 6\rho.$$

Egyenlőség esetén a háromszög egyenlő oldalú, és P a háromszög középpontja.

B. Induljunk ki a T16.15.-ből, itt $m_a \leq u + x$, $m_b \leq v + y$ és $m_c \leq w + z$, majd alkalmazzuk az Erdős-Mordell egyenlőtlenséget:

$$9\rho \leq m_a + m_b + m_c \leq u+x+v+y+w+z \leq \frac{3}{2}(u+v+w),$$

és ez az állítással ekvivalens. Egyenlőség csak úgy valósulhat meg, ha mindenhol egyenlőség van, ekkor viszont a háromszög egyenlő oldalú. Az $m_a = u + x$ csak akkor valósul meg, ha P rajta van az a oldalhoz tartozó magasságon. Hasonló érveléssel P a többi magasságvonalon is rajta van, így P a magasságpontja az egyenlő oldalú háromszögnek. ♠

16.6. *A szimmedián pont extremális tulajdonságai*

T16.17. A sík tetszőleges P pontjának a háromszög oldalegyeneseitől mért távolságainak négyzetösszege akkor minimális, ha P a szimmedián pont. A minimum értéke

$$\frac{4T^2}{a^2+b^2+c^2} = 2\mu T,$$

ahol

$$\mu = \frac{2T}{a^2+b^2+c^2}.$$

B. Jelölje x_1, x_2, x_3 a P pontnak az egyes oldalegyenesektől mért előjeles távolságait (pozitív a távolság, ha a P és a háromszög az oldalegyenes azonos oldalán vannak). Felírható az

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2T$$

összefüggés, ahol T a háromszög területe. μ legyen a T16.5. bizonyításában szereplő számérték és alakítsuk át a minimalizálandó kifejezést az alábbi módon:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1-\mu a)^2 + (x_2-\mu b)^2 + (x_3-\mu c)^2 + 4\mu T - \mu^2(a^2+b^2+c^2).$$

A kifejezés a minimumát akkor veszi fel, ha $x_1 = \mu a$, $x_2 = \mu b$, $x_3 = \mu c$, ami azt jelenti, hogy a minimumot adó P pont azonos L-lel.

A minimum értéke $4\mu T - \mu^2(a^2+b^2+c^2) = 2\mu T$. ♠

T16.18. Adott háromszögbe írt háromszögek közül az oldalak négyzetösszege arra a beírt háromszögre minimális, amelyik a szimmedián pont általánosított talpponti háromszöge. A minimum értéke $\dfrac{12T^2}{a^2+b^2+c^2}=6\mu T$.

B. Legyen a beírt háromszög az $A_1B_1C_1\Delta$, ahol A_1 az a oldalon, B_1 a b oldalon és C_1 a c oldalon van, továbbá a súlypontját jelöljük S_1-gyel. S_1-nek az a, b és c oldalaktól mért távolságát jelöljük rendre d_1-gyel, d_2-vel és d_3-mal, akkor T7.5. értelmében

$$K_2=\overline{A_1B_1}^2+\overline{B_1C_1}^2+\overline{C_1A_1}^2=3(\overline{S_1A_1}^2+\overline{S_1B_1}^2+\overline{S_1C_1}^2)\geq$$
$$\geq 3(d_1^2+d_2^2+d_3^2).$$

Másrészt T16.16. miatt

$$3(d_1^2+d_2^2+d_3^2)\geq 3\frac{4T^2}{a^2+b^2+c^2}=6\mu T,$$

tehát a T16.18.-ben megadott egyenlőtlenséget bebizonyítottuk. Az első egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha az $A_1B_1C_1\Delta$ az S_1 talpponti háromszöge, ekkor T16.7. értelmében S_1 az $ABC\Delta$ szimmedián pontja, és ekkor a második esetben is egyenlőség van. ♠

16.7. *Első típusú Lemoine-kör*

Készítsük el a következő ábrát. Húzzunk párhuzamost az L szimmedián ponton keresztül az oldalakkal: legyenek ezek rendre a', b', c'. Jelöljük a' meszéspontját az oldalakkal P_b-vel és P_c-vel, ahol az index a metszett oldalt tünteti fel, a b' metszéspontjait Q_a és Q_c, a c' metszéspontjait R_a és R_b jelölje.

T16.19. R_a és Q_a az a oldalt $c^2 : a^2 : b^2$ arányban osztja fel, pontosabban

$$\overline{BR_a}:\overline{R_aQ_a}=c^2:a^2 \text{ és } \overline{R_aQ_a}:\overline{Q_aC}=a^2:b^2.$$

B. A CL szimmedián messe a c oldalt D-ben, akkor T16.4 miatt $LD:LC=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$, és ez az arány öröklődik az a egyenesre is. Ugyanez a gondolatmenet érvényes Q_aC-re is. ♠

T16.20. Az a', b', c' egyenesek, kiegészítve a P_bQ_a, Q_cR_b, R_aP_c szakaszokkal, az $ABC\Delta$-et kilenc, $ABC\Delta$-höz hasonló háromszögre bontják fel.

B. A kilenc háromszögből háromnak az oldalai párhuzamosak az $ABC\Delta$ oldalaival, ezekre az állítás nyilvánvaló. A maradék hatból 2-2 egybevágó, hiszen az átlójával felezett parallelogrammából származtathatók. Igy elég mondjuk a $BR_aP_c\Delta$-re bizonyítani a hasonlóságot.

T16.17. értelmében, felhasználva a $\lambda=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$ jelölést, $\overline{BR_a}=\lambda ac^2$, és $\overline{BP_c}=\lambda ca^2$.

A két oldal aránya tehát c : a, megegyezik az $ABC\Delta$-ben a két oldal arányával, továbbá a közbezárt szög mindkét esetben β. Így a hasonlóság bizonyítva van. ♠

Megjegyezzük, hogy Q_cR_b antiparallel szakasz az a oldalhoz viszonyítva.

T16.21. A P_b, P_c, Q_a, Q_c, R_a, R_b pontok egy körön helyezkednek el. A kör neve: *első (típusú) Lemoine-kör.* A kör középpontja az OL szakasz felezőpontja, sugara

$$R_{L1} = \frac{abc}{8T}\sqrt{1+4\mu^2},$$

ahol $\mu = \dfrac{2T}{a^2+b^2+c^2}$.

B. Az $R_aR_bP_bQ_a$ négyszög húrnégyszög, mert az $R_aR_bP_b$ szög egyállású az α szöggel, míg a T16.18.-ban megállapított hasonlóság miatt az $R_aQ_aP_b$ szög $180^\circ - \alpha$.
Az $P_cP_bQ_aR_a$ négyszög húrnégyszög, mert a hasonlóságok miatt a $P_cP_bQ_a$ szög α nagyságú, míg a $Q_aR_aP_c$ szög $180^\circ - \alpha$.
Ezzel öt pontról beláttuk, hogy egy körön vannak. Az előzőhöz hasonlóan bizonyítható, hogy az $R_aR_bQ_cP_c$ négyszög is húrnégyszög, tehát Q_c is ugyanerre a körre esik.

Bizonyítsuk most a középpont elhelyezkedésére vonatkozó állítást. Először az a oldalra vetítve mutatjuk meg a felezést. O vetülete az a oldal F felezőpontja, L vetülete az $LR_aQ_a\Delta$ L-ből kiinduló magasságának a talppontja T_a, míg a Lemoine-kör középpontjának, O_{L1}-nek a vetülete az R_aQ_a szakasz felezőpontja, F_a. Tegyük fel, hogy $b < c$. Az $\overline{F_aT_a}$ a T9.7. képlettel könnyen kiszámítható figyelembe véve a λa^2 kicsinyítési faktort ($\lambda = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$):

$$\overline{F_aT_a} = \frac{\lambda a}{2}(c^2 - b^2).$$

Az előjeles kifejezés pozitív előjele azt jelenti, hogy T_a az F_aC szakaszra esik. A R_aQ_a szakasz F_a felezőpontja, ha R_a-t eltoljuk B-be $\frac{1}{2}\overline{BR_a}$-val tolódik B irányába, majd, ha Q_a-t eltoljuk C-be $\frac{1}{2}\overline{CQ_a}$-val tolódik el C irányába, tehát

$$\overline{FF_a} = \frac{1}{2}(\overline{BR_a} - \overline{CQ_a}) = \frac{1}{2}(\lambda ac^2 - \lambda ab^2) = \overline{F_aT_a}.$$

A pozitív előjel itt is azt jelenti, hogy F_a az FC szakaszra esik. A két képlet egyenlősége azt jelenti, hogy F_a felezi az FT_a szakaszt. Ugyanez elmondható a b oldal vonatkozásában is. Az a és a b oldalra eső vetületek egyértelműen meghatározzák az O_{L1} pontot, de az OL szakasz felezőpontja is teljesíti a vetületekre vonatkozó követelményt, tehát O_{L1} az OL szakasz felezőpontja.

A kör sugarát a $P_cR_aQ_aP_b$ egyenlőszárú trapézból fogjuk kiszámítani. A trapéz középvonala L-ből történő kicsinyítés folytán $\frac{a}{2}$. Jelöljük a trapéz középvonalának felezőpontját G-vel és a Q_aP_b szár középpontját H-val. A $GO_{L1}H$ szög és a trapéz P_b-nél lévő szöge merőleges szárú szögek, tehát egyenlők; ez utóbbi azonban a hasonló háromszögek miatt α nagyságú. Ezért

$$\overline{O_{L1}H} = \frac{a}{4\sin\alpha} = \frac{R}{2},$$

ahol R az $ABC\Delta$ körülírt körének a sugara. A Lemoine-kör sugarát Pythagorasz-tétellel kaphatjuk meg, felhasználva, hogy a Q_aP_b oldal hossza a hasonlóság miatt λabc:

$$R_{L1}^2=\frac{1}{4}(R^2+(\lambda abc)^2)=\frac{1}{4}\left(\frac{(abc)^2}{16T^2}+(\lambda abc)^2\right)=\left(\frac{abc}{8T}\right)^2(1+4\mu^2)\,.$$

Ezzel megkaptuk az utolsó állítást is. ♠

Itt és a következő fejezetben is fontos szerepe van az OL szakasznak.

T16.22.

$$\overline{OL}^2=R^2-3\lambda^2a^2b^2c^2,$$

ahol $\lambda=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$.

B. A T14.2. általános tételt alkalmazva

$$\overline{OL}^2=R^2-(qra^2+prb^2+pqc^2)=R^2-3\lambda^2a^2b^2c^2$$ ♠

16.8. *A második típusú Lemoine-kör és az oldalak fölé írt téglalapok*

Az *a oldal fölé írt téglalapnak* nevezzük azokat a téglalapokat, amelyek egyik oldala az *a* oldalegyenesen van, másik két csúcsa a háromszög másik két oldalegyenesén. Szándékosan kerüljük a beírt téglalap szóhasználatot, mert a fölé írt téglalap akár teljes egészében a háromszögön kívül is lehet.

A további állításokból a derékszögű $ABC\Delta$-eket kizárjuk, mert ott csak elfajult esetként igazak az állítások.

T16.23. Ha két különböző oldal fölé írt téglalap középpontja megegyezik, akkor ez középpontja egy harmadik oldal fölé írt, alkalmasan választott téglalapnak is. Ha a három, különböző oldal fölé írt téglalap középpontja megegyezik, akkor ez a szimmedián pont.

B. Tegyük fel, hogy az a és a b oldal fölé írt A_1A_2XY és B_1B_2UV téglalapokról van szó, ahol A_1, A_2 és V az a oldalon, B_1, B_2 és X a b oldalon, Y és U a c oldalon van. A közös középpontot jelöljük P-vel. Mivel B_2 a V P-re vonatkozó tükörképe, B_2 rajta van az XY egyenesen, tehát $B_2 = X$. Ugyanígy $A_1 = V$. Az egyöntetűség kedvéért legyen $Y = C_1$ és $U = C_2$.
A $C_1C_2A_2B_1$ négyszögben az átlók felezik egymást és egyenlő hosszúak, tehát a négyszög téglalap.

Az $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ hatszög köré P középpontú kör írható. A kerületi szögek tétele miatt az AB_1C_2 szög egyenlő a $B_2A_2C_2$ szöggel, ami egyenlő a β szöggel, mert merőleges szárú szögek. Ugyanígy bizonyítható, hogy az AC_2B_1 szög γ-val egyenlő. Ez azt jelenti, hogy B_1C_2 antiparallel szakasz a-hoz viszonyítva és P ennek a felezőpontja. Mivel az A csúcsból kiinduló szimmedián az a-hoz képest antiparallel szakaszok felezőpontjainak a mértani helye, ez a szimmedián átmegy P-n. Ugyanígy látható, hogy a többi szimmediánra is igaz ez, tehát P a szimmedián pont. ♠

A T16.23. állítás megfordítható.

T16.24. Ha a háromszög nem derékszögű, akkor mindig létezik három, különböző oldal fölé írt téglalap, melyeknek a középpontja a szimmedián pont. A szimmedián ponton átmenő antiparallel szakaszok hossza egyenlő. A kört, mely e téglalapok köré írható, *második típusú Lemoine-körnek* nevezik.

B. Vegyük fel a L szimmedián ponton átmenő három antiparallel szakaszt: A_1B_2-t, B_1C_2-t és C_1A_2-t (melyek rendre c-hez, a-hoz ill. b-hez képest antiparallelek). Tudjuk, hogy L felezi mindhárom szakaszt. A $LA_1A_2\Delta$ egyenlőszárú, mert az antiparallelitás miatt a LA_1A_2 szög is és a LA_2A_1 szög is α nagyságú. Az $A_1A_2B_2C_1$ négyszög tehát téglalap, mivel átlói egyenlők és felezik egymást. Ugyanez elmondható a többi téglalapra is. ♠

T16.25. A második típusú Lemoine-kör sugara

$$R_{L2} = \frac{abc}{a^2+b^2+c^2} = \lambda abc\,.$$

B. A T16.22. bizonyítás jelölései szerint B_1C_2 az a-val antiparallel szakasz. Ez azt jelenti, hogy az $AB_1C_2\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$-höz. Olvassuk le a hasonlóság arányát a súlyvonalakból! Az $AB_1C_2\Delta$ súlyvonala a szimmedián AL szakasza, ami a teljes szimmedián $\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = \lambda(b^2+c^2)$ része. A szimmedián hosszát a T16.2. adja meg, így

$$\overline{AL} = \lambda(b^2+c^2)\frac{2bc}{b^2+c^2}s = 2\lambda bc\cdot s\,.$$

A kicsinyítés aránya tehát $\overline{AL} : s = 2\lambda bc$, és $\overline{B_1C_2} = 2\lambda bc\cdot a$. A második Lemoine-kör sugara ennek a fele. ♠

Adott a T területű háromszög. Ha az a oldal fölé írt téglalap fogalmát leszűkítjük, akkor értelmessé válik az a kérdés, hogy milyen nagy területű téglalap írható az oldal fölé.

T16.26. Az *a oldalhoz tartozó téglalapnak* nevezzük azt az a oldal fölé írt téglalapot, melynek van közös pontja a háromszög belsejével és nem tartalmazza az A csúcsot. Az a oldalhoz tartozó téglalap területe legfeljebb $\frac{T}{2}$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha B_1 a b oldal felezőpontja.

B. A feltétel szerint az $A_1A_2B_1C_1$ téglalap A_1 és A_2 csúcsa az a oldalegyenesen van, B_1 a b oldalon, C_1 a c oldalon. Ha B_1 a b oldalt u : $(1 - u)$ arányban osztja, pontosabban $\overline{AB_1} : \overline{B_1C} = u:(1-u)$ és $0 < u < 1$, akkor $\overline{B_1C_1} = ua$, és $\overline{B_1A_2} = (1-u)m_a$. A téglalap területe tehát $u(1-u)am_a = u(1-u)2T$. A számtani-mértani közép egyenlőtlenségből $u(1-u) \le \frac{1}{4}$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $u = \frac{1}{2}$. Ezzel a állítást megmutattuk. ♠

T16.27. A T területű háromszögből kivágható téglalapok területe legfeljebb $\frac{T}{2}$ és $\frac{T}{2}$ területű téglalap minden háromszögből kivágható.

A „kivágható téglalap” azt jelenti, hogy a megadott háromszög tartalmaz adott tulajdonságú, de tetszőleges elhelyezkedésű téglalapot.

B. Az első állítás bizonyításához vegyünk fel a háromszögben egy tetszőleges téglalapot. Az A csúcsból nagyítsuk fel a téglalapot úgy, hogy az a oldalegyeneshez legközelebbi csúcsa az a oldalra kerüljön. A kapott téglalapot nagyítsuk fel a B csúcsból úgy, hogy a b oldalegyeneshez legközelebbi csúcsa az b oldalra kerüljön. Az így kapott téglalapra végezzük el ezt a C csúcsból is, ekkor a téglalap egy csúcsa a c oldalra kerül. A kapott téglalap a háromszögben marad, és három csúcsával a háromszög három oldalára támaszkodik, a területe pedig nagyobb az eredeti téglalap területénél (esetleg azzal egyenlő).

Alakítsuk át jelölésrendszerünket a következőképpen: Betűzzük meg az eljárás-sorozattal kapott téglalapot, legyen ez $A_1B_1C_1D_1$, ahol A_1, B_1, C_1, a háromszög oldalaihoz illeszkedő csúcsok, D_1 pedig „szabad” csúcs, ami a háromszög valamely pontja. Második lépésben betűzzük meg a háromszöget úgy, hogy A_1-en az a oldal, B_1-en a b oldal és C_1-en a c oldal haladjon át. Harmadik lépésben evvel összhangban jelöljük a háromszög csúcsait A-val, B-vel és C-vel.

Megmutatjuk, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap területe legfeljebb $\frac{T}{2}$. Húzzunk a-val párhuzamos egyenest B_1-en keresztül, ez messe a C_1D_1 oldalegyenest P-ben. B_1 és P merőleges vetülete a-ra legyen R ill. Q (R lehet, hogy a háromszögön kívül van). Az $A_1B_1C_1\Delta$ területe megegyezik az $A_1B_1P\Delta$ területével, mert a két háromszög alapja és magassága egyenlő. Ugyanezen okból az $A_1B_1P\Delta$ területe egyenlő az $RB_1P\Delta$ területével. Ezzel beláttuk, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap területe egyenlő a B_1PQR téglalap területével. Mivel a B_1PQR téglalap része egy a oldalhoz tartozó téglalapnak, aminek a területe legfeljebb $\frac{T}{2}$ (lásd T16.26.), így a kiindulási téglalap területe sem lehet ennél nagyobb.

Egyenlőség csak úgy lehet, ha nagyítás nem történik, és a B_1PQR téglalap egy maximális területű a oldalhoz tartozó téglalap. Az első követelmény azt rögzíti, hogy a téglalap három csúcsa három különböző oldalnak a pontja, a második szerint pedig P a c oldalon van. P a c oldalon csak úgy lehet, ha vagy D_1 a c oldalra esik, vagy $P = C_1$. Az első esetben az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap a c oldalhoz, a második esetben az a oldalhoz tartozó téglalap. Ennek a téglalapnak maximális területűnek kell lennie, tehát B_1 mindenképpen felezi a b oldalt.

A maximális, $\frac{T}{2}$ területet adó téglalap tehát csak az $u = \frac{1}{2}$ paraméter értékű, valamely oldalhoz tartozó téglalap lehet. Ezek megoldások is, ha ezek a téglalapok benne vannak az $ABC\Delta$-ben. Hegyesszögű háromszögnél tehát három megoldás van a három oldalhoz tartozóan. Derékszögű háromszögnél csak kettő, mert a két befogóhoz tartozó téglalap azonos. Tompaszögű háromszögnél csak egy, a leghosszabb oldalhoz tartozó téglalap, mert a másik kettő túlnyúlik a háromszög oldalain. ♠

A T16.26. állítás érvényes parallelogrammára is. Itt is $\frac{T}{2}$ a kivágható maximális területű parallelogramma. Ha a háromszögbe belerajzolunk egy tetszőleges parallelogrammát, akkor merőleges vetítéssel a parallelogramma téglalappá alakítható, ugyanakkor a területek torzulása a háromszögre és a téglalapra vonatkozóan egyenlő, tehát a 2 : 1 területarány megmarad.

16.9. *Háromszögbe írt négyzet*

Az oldal fölé írt téglalap mintájára beszélhetünk az a oldal fölé írt négyzetről is. Az $A_1A_2B_1C_1$ négyzet a oldal fölé írt négyzet, ha a két szomszédos csúcs, A_1 és A_2 az a oldalon, B_1 a b oldalon C_1 a c oldalon van. Az a oldalon nyugvó háromszögbe írt négyzet ettől csak abban különbözik, hogy a négyzet teljes egészében a háromszögbe esik. Itt ez utóbbi esettel fogunk foglalkozni. Ha $\beta > 90^o$, vagy $\gamma > 90^o$, akkor ilyen négyzet nem létezik.

A beírt négyzet megszerkesztésére a legegyszerűbb eljárás az, hogy az a oldalra kifelé egy a oldalú négyzetet rajzolunk és ezt hasonlósági transzformációval az A csúcsból alkalmas méretűre kicsinyítjük.

T16.28. Az a oldalon nyugvó beírt négyzet oldalának d hossza – feltételezve, hogy $\beta \le 90^o$ és $\gamma \le 90^o$ –

$$d = \frac{am}{a+m} = \frac{2T}{a^2+2T}a\,,$$

ahol m az a oldalhoz tartozó magasság hossza, T pedig a háromszög területe.
A B_1 pont a b oldalt $m : a$ arányban osztja, pontosabban $\overline{AB_1} : \overline{B_1C} = m : a$.

B. A bevezetésben említett kicsinyítés arányszáma $m : (a + m) = 2T : (a^2 + 2T)$, amiből az első állítás már következik.

Mivel $m - d = m - \dfrac{am}{a+m} = \dfrac{m^2}{a+m}$, ezért $\overline{AB_1} : \overline{B_1C} = (m-d) : d = m : a$. ♠

T16.29. A T területű $ABC\Delta$-ből kivágható legnagyobb négyzet területe legfeljebb $\dfrac{T}{2}$ lehet. Egyenlőség akkor és csak akkor érhető el, ha a háromszögben egyik oldal, pl. az a oldal, hossza egyenlő a hozzá tartozó magasság hosszával, azaz $a = m_a = \sqrt{2T}$, és az oldal végpontjainál lévő szögek egyike sem tompaszög.

B. Az első állítás T16.27.-ből következik. Az a oldalhoz tartozó téglalap csak akkor ad egyenlőséget adó megoldást, ha B_1 felezi a b oldalt, továbbá ha a β és a γ egyike sem tompaszög. E mellett akkor kapunk négyzetet, ha B_1 a b oldalt $a : m_a$ arányban osztja. Mivel B_1 felezi a b oldalt, az $a = m_a$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Másrészt $2T = am_a = a^2$, tehát $a = \sqrt{2T}$. ♠

Használjuk ismét a 16.9. bevezetésében említett hasonlósági transzformációt, és a négyzettel együtt az A középpontból kicsinyítsük le az $ABC\Delta$-et és annak köréírt körét is. Az eredmény az $AB_1C_1\Delta$ és körülírt köre lesz. A kapott kört az A csúcshoz tartozó *Lucas-körnek* nevezik. Hasonlóan elkészíthető a többi csúcshoz tartozó Lucas-kör is. Az A csúcshoz tartozó Lucas-kör sugara $r_1 = \dfrac{2T}{a^2+2T}R$, ahol R a körülírt kör sugara.

T16.30. A háromszög Lucas-körei páronként érintik egymást.

B. Jelöljük a B és a C csúcshoz tartozó Lucas-körök középpontjait O_2-vel, ill. O_3-mal, sugaraikat r_2-vel, ill. r_3-mal. A hasonlósági transzformáció miatt az O, O_2, B ill. az O, O_3, C pontok egy egyenesre esnek. Legyen $y = \overline{OO_2}$, $z = \overline{OO_3}$ és $t = \overline{O_2O_3}$, és számítsuk ki t-t y és z ismeretében. Írjunk fel egy-egy koszinusz-tételt az $OB_1C_1\Delta$-re és az $OBC\Delta$-re:

$$t^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 2\alpha ,$$

$$a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha .$$

Ebből

$$t^2 = y^2 + z^2 - yz\frac{2R^2 - a^2}{R^2} = (y-z)^2 + \frac{a^2}{R^2}yz = (r_2 - r_3)^2 + \frac{a^2}{R^2}yz .$$

Mivel $y = R - r_2 = R - \frac{2T}{b^2 + 2T}R = \frac{b^2}{b^2 + 2T}R$, és hasonlóan $z = \frac{c^2}{c^2 + 2T}R$,

$$\frac{a^2}{R^2}yz = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2 + 2T)(c^2 + 2T)} = \left(\frac{abc}{4R}\right)^2 \frac{4r_2r_3}{T^2} = 4r_2r_3$$

felhasználva a háromszög területképletét. Visszahelyettesítve t^2 kifejezésébe, kapjuk, hogy

$$t^2 = (r_2 - r_3)^2 + 4r_2r_3 = (r_2 + r_3)^2 ,$$

azaz $\boldsymbol{t} = r_2 + r_3$, vagyis a körök érintik egymást. ♠

17. Brocard-pontok

17.1. *A Brocard-szög. Baricentrikus koordináták*

Jelöljük K_1-gyel a B és a C pontokon átmenő és a b oldalt érintő kört, K_2-vel a C és az A pontokon átmenő és a c oldalt érintő kört, valamint K_3-mal az A-n és a B-n átmenő, a-t érintő kört. Ugyanígy a K_1' kör menjen át a B és a C pontokon és érintse c-t, a K_2' kör menjen át a C és az A pontokon és érintse a-t, és a K_3' kör haladjon át az A és a B pontokon és érintse b-t.

T17.1. A K_1, K_2 és K_3 körök egy ponton mennek át, ezt a háromszög egyik *Brocard-pontjának* nevezzük és a jelen fejezetben B_1-gyel jelöljük. Ugyanígy a K_1', K_2' és a K_3' körök közös pontját is Brocard-pontnak nevezzük és B_2-vel jelöljük. A Brocard-pontok mindig a háromszög belsejébe esnek.

A Brocard-pontokat a körüljárási irány különbözteti meg egymástól. Az első Brocard-pontnál a körüljárási irány megegyezik az $ABC\Delta$ körüljárási irányával, nevezetesen az a oldal köre érinti a b oldalt, a b oldal köre érinti a c oldalt, és a c oldal köre érinti az a oldalt, míg a második Brocard-pontnál mindez fordítva történik.

B. A könnyebb szóhasználat kedvéért nevezzük az a egyenes által meghatározott félsíkok közül azt, amelyik a háromszöget tartalmazza belső félsíknak (jelölésben A^+), a másikat külsőnek (A^-). Hasonlóan értelmezzük a B^+, B^-, C^+ és C^- félsíkokat.

A K_1 és K_2 kör nem érintheti egymást, ugyanis jelöljük a körök középpontját O_1 és O_2-vel, akkor egyszerű szögszámolással az O_1CO_2 szög $180^o - \alpha < 180^o$.

Tegyük fel, hogy a háromszög legnagyobb szöge a γ. A K_1 kör B^+-ban, a K_2 kör C^+-ban van, tehát a metszéspontjuk a $B^+ \cap C^+$-ban van. Mivel $\gamma \geq \alpha$, a K_2 kör C pontbeli érintője a háromszög belsején halad keresztül, így a K_2 körnek nincs belső közös pontja $A^- \cap B^+$-szal, tehát K_1 és K_2 kör metszéspontja csak a háromszög belsejébe eshet.

A K_1 kör háromszögbe eső kerületi pontjaiból az a oldal 180^o - γ, a K_2 kör háromszögbe eső kerületi pontjaiból a b oldal 180^o - α, szög alatt látszik, tehát B_1 metszéspontból a c oldal

$$360^o - (180^o - \gamma) - (180^o - \alpha) = \alpha + \gamma = 180^o - \beta$$

szög alatt látszik. Ez azt jelenti, hogy K_3 átmegy B_1-en. ♠

T17.2. A B_1 Brocard-pontból az a odal $180^o - \gamma$, a b oldal $180^o - \alpha$ és a c oldal $180^o - \beta$ szög alatt látszik. A B_1AB szög, a B_1BC szög valamint a B_1CA szög egyenlő. A B_1AB szöget *Brocard-szögnek* nevezzük és a továbbiakban φ-vel fogjuk jelölni.

T17.4.-ben képletet adunk a Brocard-szög kiszámítására. A képletből látható, hogy a B_2-re vonatkozó Brocard-szög is ugyanakkora, tehát nem kell megkülönböztetni, hogy melyik Brocard-pontra vonatkozó Brocard-szögről van szó. (Az első és második Brocard-pontra vonatkozó Brocard-szögek egyenlősége az izogonális konjugáltság direkt következménye, ld. T17.5.)

B. Az első mondat állítása az előző bizonyításban bizonyítást nyert. A második állításban a B_1AB szög a K_3 kör BB_1 ívéhez tartozó kerületi szöge, míg a B_1BC szög ugyanezen ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög, tehát egyenlők. ♠

T17.3. A K_1, K_2 és K_3 körök O_1, O_2 és O_3 középpontjai az $ABC\Delta$-höz hasonló $90^\circ - \varphi$ szöggel elforgatott háromszöget alkotnak. Az $O_1O_2O_3\Delta$ első Brocard-pontja szintén B_1.

B. O_1O_2 merőleges B_1C-re, ezért a b oldal és O_1O_2 szöge 90°-ra egészíti ki a B_1CA Brocard-szöget, amit φ-vel jelöltünk. Ha az $ABC\Delta$ körüljárási iránya pozitív, akkor b elforgatási iránya negatív lesz. Ugyanez igaz az $O_1O_2O_3\Delta$ többi oldalára is, ezzel a hasonlóságot igazoltuk.
A K_1 körben a B_1O_1C szög a B_1C ívhez tartozó középponti szög, melynek fele, tehát a $B_1O_1O_2$ szög, nagyságra megegyezik a φ nagyságú B_1BC szöggel. Hasonlóan a $B_1O_2O_3$ szög is φ nagyságú. Hasonló háromszögekben a Brocard-szögek egyenlők, tehát B_1 az $O_1O_2O_3\Delta$ első Brocard-pontja. ♠

A Brocard-szögre kétféle kiszámítási formulát is adunk.

T17.4. A B_1 Brocard-pont távolságai az oldalaktól: $d_1 = 2T\nu ac^2$, $d_2 = 2T\nu ba^2$, $d_3 = 2T\nu cb^2$, ahol $\nu = \dfrac{1}{a^2c^2 + b^2a^2 + c^2b^2}$.

A B_2 Brocard-pont távolságai az oldalaktól: $2T\nu ab^2$, $2T\nu bc^2$, $2T\nu ca^2$.
A Brocard-szög kiszámítási formulái:

a) $$\sin\varphi = 2T\sqrt{\nu},$$

b) $$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

B. Legyen $x = \overline{B_1A}$, $y = \overline{B_1B}$, $z = \overline{B_1C}$, és jelölje d_1, d_2, d_3 a B_1 pont távolságát rendre az a, b, ill. c oldalaktól. A szinusz-tétel alkalmazásával

$$d_1 = y\sin\varphi = \frac{c\sin^2\varphi}{\sin\beta} = \frac{\sin^2\varphi}{ac\sin\beta}ac^2 = \frac{\sin^2\varphi}{2T}ac^2,$$

$$d_2 = z\sin\varphi = \frac{a\sin^2\varphi}{\sin\gamma} = \frac{\sin^2\varphi}{ab\sin\gamma}ba^2 = \frac{\sin^2\varphi}{2T}ba^2,$$

$$d_3 = x\sin\varphi = b\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\varphi}{bc\sin\alpha}cb^2 = \frac{\sin^2\varphi}{2T}cb^2.$$

Ha bevezetjük a $k = \dfrac{\sin^2\varphi}{2T}$ jelölést, akkor a k értékét másképp is ki tudjuk számolni, ugyanis a részháromszögek területösszege T, tehát

$$2T = ad_1 + bd_2 + cd_3 = k(a^2c^2 + b^2a^2 + c^2b^2) = \frac{k}{\nu}.$$

Ebből $k = 2T\nu$, ami a B_1-re vonatkozó első állítást megadja.

A B_2-re vonatkozó $d_1 = 2T\nu ab^2$ állítás a B éc a C pontok felcseréléséből adódik. Hasonlóan kaphatjuk meg d_2 és d_3 értékét is.

A Brocard-szögre vonatkozó a) állítás a két k érték egyenlőségéből adódik:

$$k = \frac{\sin^2\varphi}{2T} = 2T\nu,$$

azaz $\sin\varphi = 2T\sqrt{\nu}$.

A b)-nél megadott formulához a B_1BC és a B_1CA háromszögekre vonatkozó szinusz-tételt írjuk fel, ugyanis tudjuk T17.2. alapján, hogy a B_1-nél lévő szögek $180^\circ - \gamma$, ill. $180^\circ - \alpha$:

$$\frac{a}{\overline{B_1C}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}, \text{ és } \frac{b}{\overline{B_1C}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi)}.$$

A két egyenlet hányadosaként kapjuk, hogy

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi\sin\alpha}\sin\gamma = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Mivel $\sin\alpha = \sin(180^{\mathrm{o}} - \alpha) = \sin(\beta+\gamma)$, a trigonometrikus összegképleteket használva

$$\frac{\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi}{\sin\alpha\sin\varphi} = \frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\mathrm{ctg}\varphi - \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}\gamma + \mathrm{ctg}\beta,$$

ami ekvivalens a b) formulával. ♠

T17.5. A B_1 Brocard-pont baricentrikus koordinátái az *A, B, C* bázispontokra vonatkozóan a^2c^2, b^2a^2, c^2b^2, vagy ami ezzel ekvivalens, $\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}$. A B_2 baricentrikus koordinátái: a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2, vagy $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$.

A Brocard-pontok egymás izogonális konjugáltjai (ld. T4.7.).

B. A baricentrikus koordináták a részháromszögek területével arányosak, azaz vehetők koordinátáknak ad_1, bd_2, cd_3. Az előző tétel alapján ez megegyezik a ka^2c^2, kb^2a^2, kc^2b^2 koordinátákkal, ami k-val egyszerűsíthető. $a^2b^2c^2$-tel elosztva a koordinátákat, megkapjuk a másik alakot. A B_2-re vonatkozó állítás ugyanígy megkapható.

Az izogonális konjugátság kimutatására használjuk a T4.7. képletét. Ha a P pont baricentrikus koordinátái $\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}$, akkor az izogonális konjugált koordinátái

$$a^2\frac{1}{c^2}\frac{2}{a^2} = \frac{1}{c^2}, b^2\frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2}, c^2\frac{1}{b^2}\frac{1}{c^2} = \frac{1}{b^2},$$

vagyis B_2 baricentrikus koordinátáit kapjuk meg. ♠

T17.6. A két Brocard-pont akkor és csak akkor egyezik meg, ha a háromszög egyenlő oldalú, ekkor mindkét pont a háromszög középpontja.

B. Ha $a = b = c$, akkor az *A*, *B* és *C* pontokba helyezett súlyok egyenlők, tehát B_1 és B_2 egyaránt megegyezik a háromszög súlypontjával.

Ha B_1 és B_2 megegyezik, akkor a baricentrikus koordinátáik megegyeznek, ha a súlyok összege egyenlő. Nevezetesen $a^2c^2 = a^2b^2$ és $b^2a^2 = b^2c^2$. Ez azt jelent, hogy $c = b$ és $a = c$, vagyis a háromszög egyenlő oldalú. ♠

17.2. *Dél Keresztje*

T17.7. A Brocard-pontok a körülírt kör középpontjától egyenlő távolságra vannak, nevezetesen

$$\overline{OB_1}^2 = \overline{OB_2}^2 = R^2 - \nu a^2 b^2 c^2,$$

ahol $\nu = \dfrac{1}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

A képletből következik, hogy

$$\frac{1}{R} \le \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}},$$

és egyenlőség csak az egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn (lásd T18.1.).

B. Alkalmazzuk a T14.2. képletét B_1-re. B_1 baricentrikus koordinátái $p = \nu a^2c^2$, $q = \nu b^2a^2$, $r = \nu c^2b^2$, ebből

$$\overline{OB_1}^2 = R^2 - (qra^2 + prb^2 + pqc^2) = R^2 - \nu^2 a^2b^2c^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2),$$

vagyis

$$\overline{OB_1}^2 = R^2 - \nu a^2b^2c^2.$$

A képletből látható, hogy invariáns a b és c oldalak cseréjére, tehát B_2-re is ugyanez a képlet vonatkozik. ♠

T17.8. A Brocard-szög maximális nagysága 30°, azaz $\varphi \le 30°$. Egyenlőség csak egyenlő oldalú háromszögnél áll fenn.

B. T17.7.-ből következik, hogy $R \ge abc\sqrt{\nu}$, vagy másképp $T\sqrt{\nu} \le \frac{1}{4}$. T17.4.-gyel összevetve $\sin\varphi \le \frac{1}{2}$, azaz $\varphi \le 30°$. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha $\overline{OB_1} = 0$, de ez csak egyenlő oldalú háromszögnél áll fenn (lásd T18.1.). ♠

Folytassuk a „Dél Keresztje", azaz az O, L, B_1, B_2 pontok helyzetének a felderítését.

T17.9. Az O, L, B_1, B_2 pontok egy körön vannak, melynek középpontja O_{L1}, az első Lemoine-kör középpontja (vagyis az OL szakasz felezőpontja). Az OL merőlegesen felezi a B_1B_2 szakaszt.

B. Az Euler-tételnél használt eljárást követjük. Legyenek a csúcspontok helyvektorai az O középpontú koordinátarendszerben $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{c}_0$, ekkor $|\boldsymbol{a}_0|^2 = |\boldsymbol{b}_0|^2 = |\boldsymbol{c}_0|^2 = R^2$, és $2\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_0 = 2R^2 - c^2$, $2\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{c}_0 = 2R^2 - a^2$, $2\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{a}_0 = 2R^2 - b^2$. Jelöljük a B_1O_{L1} vektort $\boldsymbol{w}$-vel, akkor $\boldsymbol{w} = a^2(\frac{\lambda}{2} - \nu c^2)\boldsymbol{a}_0 + b^2(\frac{\lambda}{2} - \nu a^2)\boldsymbol{b}_0 + c^2(\frac{\lambda}{2} - \nu b^2)\boldsymbol{c}_0$, ahol $\lambda = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$ és ν azonos a T17.7. jelölésével.

Nem marad más hátra, mint a $\boldsymbol{w}$ vektor hosszát kiszámítani. Végezzük el a fáradságos négyzetre emelést, és használjuk fel közben a már idézett egyenlőségeket:

$$|\boldsymbol{w}|^2 = R^2\left[a^4(\frac{\lambda}{2} - \nu c^2)^2 + b^4(\frac{\lambda}{2} - \nu a^2)^2 + c^4(\frac{\lambda}{2} - \nu b^2)^2\right] +$$

$$+a^2b^2(\frac{\lambda}{2}-\nu c^2)(\frac{\lambda}{2}-\nu a^2)(2R^2-c^2)+a^2c^2(\frac{\lambda}{2}-\nu c^2)(\frac{\lambda}{2}-\nu b^2)(2R^2-b^2)+$$
$$+b^2c^2(\frac{\lambda}{2}-\nu a^2)(\frac{\lambda}{2}-\nu b^2)(2R^2-a^2).$$
Gyűjtsük össze az R^2-et tartamazó tagokat, ezek teljes négyzetet képeznek, a további tagokból pedig $a^2b^2c^2$ kiemelhető:

$$|\boldsymbol{w}|^2=R^2\left[a^2(\frac{\lambda}{2}-\nu c^2)+b^2(\frac{\lambda}{2}-\nu a^2)+c^2(\frac{\lambda}{2}-\nu b^2)\right]^2-$$
$$-a^2b^2c^2\left[(\frac{\lambda}{2}-\nu c^2)(\frac{\lambda}{2}-\nu a^2)+(\frac{\lambda}{2}-\nu c^2)(\frac{\lambda}{2}-\nu b^2)+(\frac{\lambda}{2}-\nu a^2)(\frac{\lambda}{2}-\nu b^2)\right]=$$
$$=R^2\left[\frac{\lambda}{2}(a^2+b^2+c^2)-\nu(a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2)\right]^2-$$
$$-a^2b^2c^2\left[\frac{3\lambda^2}{4}-\frac{\lambda\nu}{2}(2a^2+2b^2+2c^2)+\nu^2(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)\right]=$$
$$=R^2\left(\frac{1}{2}-1\right)^2-a^2b^2c^2\left(\frac{3\lambda^2}{4}-\nu+\nu\right)=\frac{1}{4}(R^2-3\lambda^2a^2b^2c^2).$$

A kapott eredmény T16.16.-tal összevetve mutatja, hogy $\overline{O_{L1}B_1}=\frac{\overline{OL}}{2}=\overline{O_{L1}O}=\overline{O_{L1}L}$. Mivel B_2-re ugyanez fennáll, látható, hogy mind a négy pont rajta van az O_{L1} középpontú körön.

A bizonyított állításból és T17.7.-ből következik, hogy OL merőlegesen felezi a B_1B_2 szakaszt. ♠

Az O, L, B_1, B_2 pontokon átmenő kört *Brocard-körnek* nevezik. A Brocard-kör és az első Lemoine-kör koncentrikus.

17.3. *A Brocard-pontok talpponti háromszöge*

A talpponti háromszög általánosított definícióját illetően lásd a 16.3. fejezetet.

T17.10. A Brocard-pontok talpponti háromszögei egybevágók és hasonlóak az $ABC\Delta$-höz. A hasonlósági arány:
$$\sin\varphi=2T\sqrt{\nu},$$
ahol φ a Brocard-szög és $\nu=\dfrac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

B. Jelöljük a B_1-hez tartozó talpponti háromszög a, b és c oldalon lévő csúcsait rendre T_a-val, T_b-vel és T_c-vel. Megmutatjuk, hogy a $B_1BC\Delta$ hasonló a $B_1T_aT_b\Delta$-höz. Mindkét háromszög B_1-nél lévő szöge $180^o-\gamma$, mint ezt egyrészt T17.2. állítja, másrészt a $B_1T_aCT_b$ négyszög húrnégyszög voltából következik. A B_1-nél lévő szögeket közrefogó oldalak aránya $\sin\varphi$, ugyanis T17.2. miatt
$$\frac{\overline{B_1T_a}}{\overline{B_1B}}=\frac{\overline{B_1T_b}}{\overline{B_1C}}=\sin\varphi.$$

Ezzel a $B_1BC\Delta$ és a $B_1T_aT_b\Delta$ hasonlóságát megmutattuk, de akkor $\frac{\overline{T_aT_b}}{\overline{BC}} = \sin\varphi$. Hasonló állítás érvényes a talpponti háromszög többi oldalára is, tehát a talpponti háromszög és az $ABC\Delta$ hasonlóak, és a hasonlósági arány $\sin\varphi$.

Mivel a hasonlósági arány a B_2 talpponti háromszögére is $\sin\varphi$, a talpponti háromszögek egybevágóak. ♠

17.4. *Miguel-tétel*

Miguel tétele speciális esetben (pl. hegyesszögű háromszög és az oldalakon felvett belső pontok esete) egyszerűen bizonyítható húrnégyszögekkel. Általános esetben azonban a bizonyítás alig-alig áttekinthető diszkussziót követelne. Ezért ismét az egyenesek előjeles szögéről a T16.12. előtt elmondott definíciót és a segédtételt alkalmazzuk a bizonyításban.

T17.11. Miguel tétele. Vegyünk fel a BC, a CA és az AB egyeneseken tetszőlegesen egy-egy pontot, legyenek ezek rendre A_1, B_1, C_1. Legyen az $AB_1C_1\Delta$ köréírt köre K_1, a $BC_1A_1\Delta$ köréírt köre K_2 és a $CA_1B_1\Delta$ köréírt köre K_3. (Ha két pont egybeesik, pl. $A_1 = C$, akkor K_3 a B_1 ponton átmenő, és a BC egyenest C-ben érintő kört jelenti.) A K_1, K_2 és K_3 körök egy ponton mennek át.

B. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $ABC\Delta$ körüljárási iránya pozitív, és $\beta < 90^\circ$, $\gamma < 90^\circ$. A K_2 és a K_3 köröknek A_1 közös pontjuk, így vagy metszik még egy pontban egymást, ekkor a második metszéspontot jelöljük P-vel, vagy érintik egymást, ekkor legyen $P = A_1$. Alkalmazzuk a T16.12. előtti segédtételt a C, A_1, P, B_1 pontnégyesre, ennek alapján a PB_1 és a PA_1 egyenesek előjeles szöge γ. Ugyanígy a B, A_1, P, C_1 pontnégyesre vonatkoztatva a PA_1 és a PC_1 egyenesek előjeles szöge β. A PB_1 egyenes tehát $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ nagyságú pozitív irányú forgatással vihető át a PC_1 egyenesbe.

Ha $\alpha < 90^\circ$, akkor a PB_1 és a PC_1 egyenesek előjeles szöge $-\alpha$, ugyanakkor az AB_1 és az AC_1 egyenesek előjeles szöge szintén $-\alpha$, tehát a segédtétel értelmében az A, B_1, P, C_1 pontok egy körön vannak, és ezt kellett bizonyítani.

Ha $\alpha \geq 90^\circ$, akkor a PB_1 és a PC_1 egyenesek előjeles szöge $180^\circ - \alpha$, és egyúttal az AB_1 és az AC_1 egyenesek előjeles szöge szintén $180^\circ - \alpha$, tehát a segédtétel értelmében az A, B_1, P, C_1 pontok ekkor is egy körön vannak. ♠

Megjegyezzük még, hogy $A_1 = B, B_1 = C, C_1 = A$ esetben a körök metszéspontja az első, míg $A_1 = C, B_1 = A, C_1 = B$ esetben a második Brocard-pont.

18. A nevezetes pontok egybeesése

Általános háromszögben összeeshet-e két nevezetes pont? Ezt a kérdést tisztázzuk ebben a fejezetben. A nevezetes pontokon itt a következő tíz pontról lesz szó (az előfordulás sorrendjében). O: körülírt kör középpontja, O_0: beírt kör középpontja, G: Gergonne-pont, N: Nagel-pont, S: súlypont, S_x: oldalak súlypontja, M: magasságpont, P: panoráma pont, L: simmedián pont, B: (első) Brocard-pont. Nem beszélünk itt a hozzáírt körök középpontjairól, mert azok mindig a háromszögön kívül helyezkednek el. A két Brocard-pont a többiekhez viszonyítva azonos szerepet tölt be, felesleges különválasztani tárgyalásukat; a két Brocard-pont egybeesését pedig T17.6.-ben már megbeszéltük.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a felsorolt tíz (tizenegy) nevezetes pont mind különböző pontjai a háromszögnek, hacsak a háromszög nem egyenlő oldalú. Ekkor viszont valamennyi pont a háromszög középpontjába esik.

T18.1. Két nevezetes pont (a felsoroltak közül) akkor és csak akkor esik egybe, ha a háromszög egyenlő oldalú.

B. A feltétel elégségessége könnyen bizonyítható a baricentrikus koordináták segítségével. E célból és a bizonyítás második része érdekében is gyűjtsük egybe a nevezetes pontok baricentrikus koordinátáit. Itt felhasználjuk a $w_1 = -a^2 + b^2 + c^2$, $w_2 = a^2 - b^2 + c^2$, $w_3 = a^2 + b^2 - c^2$ jelöléseket.

1. O: $a\cos\alpha, b\cos\beta, c\cos\gamma$, vagy a^2w_1, b^2w_2, c^2w_3
2. O_0: a, b, c
3. G: $\dfrac{1}{s-a}, \dfrac{1}{s-b}, \dfrac{1}{s-c}$
4. N: $s-a, s-b, s-c$
5. S: 1, 1, 1
6. S_x: $b+c, c+a, a+b$
7. M: $w_2w_3,\ w_3w_1,\ w_1w_2$, vagy $\dfrac{1}{w_1}, \dfrac{1}{w_2}, \dfrac{1}{w_3}$
8. P: $\dfrac{1}{u}, \dfrac{1}{v}, \dfrac{1}{w}$ ahol u, v, w a P-nek a csúcsoktól mért távolságai
9. L: $a^2,\ b^2,\ c^2$
10. B_1: $a^2c^2,\ b^2a^2,\ c^2b^2$, vagy $\dfrac{1}{b^2}, \dfrac{1}{c^2}, \dfrac{1}{a^2}$

Az elégségesség bizonyításához elég azt belátni, hogy $a = b = c$ esetén a baricentrikus koordináták egyenlők, ami a panoráma pont kivételével nyilvánvaló. Viszont egyenlő oldalú háromszögben a panoráma pont a középpont, mert minden oldal 120°-os szögben látszik innen.

A szükségesség bizonyítása hosszadalmas, mert 45 esetet kell külön-külön megvizsgálni. Alkalmanként itt is a baricentrikus koordinátákat használjuk, azonban időnként az elemi bizonyítás egyszerűbb.

1 – 2 bizonyítása: Ha O és O_0 egybeesik, akkor a baricenrtikus koordináták konstans szorzótól eltekintve egyenlők, legyen ez a szorzó itt (és a továbbiakban) λ, akkor

$$a\cos\alpha = \lambda a, \quad b\cos\beta = \lambda b, \quad c\cos\gamma = \lambda c,$$

vagyis $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \lambda$. Ebből adódik, hogy a háromszög szögei egyenlők.

1 – 3: Megmutatjuk, hogy *O* és *G* az s_a súlyvonal ellenkező oldalán vannak. Tegyük fel, hogy $b \neq c$, akkor az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $b < c$. Ez esetben *O* vagy kívül van a háromszögön, vagy az $AF_aB\Delta$-be esik, ahol F_a az *a* oldal felezőpontja. Jelöljük E_a-val a beírt kör érintési pontját az *a* oldalon, akkor $\overline{BE_a} = s - b > s - c = \overline{E_aC}$ miatt az AE_a szakasz az $AF_aC\Delta$-ben halad, tehát *G* is ebbe a háromszögbe esik. Egybeesés csak akkor lehetséges, ha az *a* oldal oldalfelező merőlegese és s_a egybeesik, ekkor viszont $b = c$. Ugyanígy belátható, hogy $a = b$.

1 – 4: Feltehető, hogy $a \leq b \leq c$. A baricentrikus koordinátákra felírva az egybeesést:

$$a^2 w_1 = \lambda(s-a),\ \ b^2 w_2 = \lambda(s-b),\ \ c^2 w_3 = \lambda(s-c).$$

Az első két egyenlet különbsége

$$b^4 - a^4 - c^2(b^2 - a^2) = \lambda(b-a).$$

Tegyük fel, hogy $a \neq b$, akkor

$$(b^2 + a^2)(b+a) - c^2(b+a) = \lambda,$$

$$(b+a)w_3 = \lambda,$$

$$(b+a)\frac{\lambda(s-c)}{c^2} = \lambda,$$

$$(b+a)(a+b-c) = 2c^2.$$

Az *a* helyére a nagyobb *c*-t írva, a *b* helyére a nagyobb vagy egyenlő *c*-t írva $2c^2 > 2c^2$ ellentmondás adódik, ami azt jelenti, hogy $a = b$.
A második két egyenlet különbségéből, feltételezve, hogy $b \neq c$, egyszerűsítés után hasonló egyenletet kapunk:

$$(c+b)(-a+b+c) = 2a^2.$$

Az *c* helyére a kisebb *a*-t írva, a *b* helyére a vele egyenlő *a*-t írva $2a^2 < 2a^2$ ellentmondás adódik, ami azt jelenti, hogy $b = c$.

1 – 5. Ha $O = S$, és *F* az *a* oldal felezőpontja, akkor *OF* merőleges *a*-ra és az *OF* egyenes átmegy *A*-n, hiszen súlyvonal. *AF* tehát felező merőleges, ezért $b = c$. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy $a = b$ is teljesül.

1 – 6. *O* a felező háromszög magasságpontja, S_x a felező háromszög beírható körének középpontja, tehát 2 – 7. bizonyítja az állítást.

1 – 7. Ha *O* és *M* egybeesik, akkor az Euler-egyenes közbülső *S* pontja is egybeesik velük. Így a már bizonyított 1 – 5 állításból következik.

1 – 8. Ha $O = P$, akkor *P* egyenlő távol van a csúcsoktól, azaz $u = v = w$. Mivel a *P* baricentrikus koordinátái egyenlők, $O = P$ egyben a súlypont is, ezért 1 – 5.-ből következik az állítás.

1 – 9. Mivel $a^2 w_1 = \lambda a^2$, $b^2 w_2 = \lambda b^2$, $c^2 w_3 = \lambda c^2$, következik, hogy $w_1 = w_2 = w_3$. Az első egyenlőségből $a = b$, a másodikból $b = c$ adódik.

1 – 10. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$a^2 w_1 = \lambda a^2 c^2,\ b^2 w_2 = \lambda b^2 a^2,\ c^2 w_3 = \lambda c^2 b^2,$$

vagy egyszerűsítve $w_1 = \lambda c^2,\ w_2 = \lambda a^2,\ w_3 = \lambda b^2$. Ha összeadjuk a három egyenletet, akkor $\lambda = 1$ adódik, és az első egyenletből $a = b$, a másodikból $b = c$ következik.

2 – 3. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$a(s-a) = b(s-b) = c(s-c) = \lambda.$$

Az első egyenletből $s(a-b) = a^2 - b^2$, amit egyszerűsítve az $s = a + b$ lehetetlenség adódik, tehát egyszerűsíteni nem szabad, mert $a = b$. Ugyanígy kapjuk a $b = c$ egyenlőséget is.

2 – 4. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$s-a = \lambda a, \quad s-b = \lambda b, \quad s-c = \lambda c.$$

Kifejezve az oldalakat $a = b = c = \dfrac{s}{1+\lambda}$.

2 – 5. A baricentrikus koordinátákból közvetlenül $a = b = c$ adódik.

2 – 6. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$b+c = \lambda a, \quad a+c = \lambda b, \quad a+b = \lambda c.$$

Az egyenleteket összeadva $\lambda = 2$-t kapunk. Az első egyenlet mindkét oldalához a-t hozzáadva $2s = 3a$, azaz $a = \dfrac{2s}{3}$. Ugyanígy $b = c = \dfrac{2s}{3}$.

2 – 7. Bármely magasság egyben szögfelező is, tehát ez a háromszög szimmetria tengelye is, vagyis bármely két oldal egyenlő.

2 – 8. Tudjuk, hogy a BO_0C szög $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$, de a panoráma pontra ez 120°, ebből $\alpha = 60^\circ$.

2 – 9. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer $a = \lambda a^2$, $b = \lambda b^2$, $c = \lambda c^2$. Ebből $a = b = c = \dfrac{1}{\lambda}$.

2 – 10. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$a^2c^2 = \lambda a, \quad b^2a^2 = \lambda b, \quad c^2b^2 = \lambda c.$$

Az egyenleteket összeszorozva $a^4b^4c^4 = abc\lambda^3$, vagyis $\lambda = abc$. Ezt visszaírva $a^2c^2 = a^2bc$, azaz $c = b$; $b^2a^2 = ab^2c$, azaz $a = c$.

3 – 4. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$s-a = \frac{\lambda}{s-a}, \quad s-b = \frac{\lambda}{s-b}, \quad s-c = \frac{\lambda}{s-c}.$$

Fejezzük ki a-t az első, b-t a második és c-t a harmadik egyenletből, akkor

$$a = b = c = s - \sqrt{\lambda}.$$

3 – 5. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszerből $s - a = s - b = s - c$, vagyis $a = b = c$.

3 – 6. A baricentrikus koordinátákból kapott rendszer első egyenlete $\dfrac{\lambda}{s-a}=2s-a$. Fejezzük ki ebből a-t:

$$a^2-3sa+2s^2-\lambda=0,$$
$$a=\frac{1}{2}(3s\pm\sqrt{s^2+4\lambda}).$$

Mivel $\lambda>0$, a + előjel nem jöhet számításba, hiszen akkor $a>2s$ lenne, tehát egyetlen megoldás van. Ugyanez a megoldás jön ki b-re és c-re is, tehát a három oldal egyenlő.

3 – 7. Jelöljük a beírt kör a oldalon lévő érintési pontját E_a-val. Ha $G=M$, akkor AE_a magasságvonal, és

$$m_a^2=c^2-(s-b)^2=b^2-(s-c)^2,$$
$$2(c^2-b^2)=2s(c-b).$$

Ha $c\neq b$, akkor egyszerűsítve a $c+b=s$ ellentmondásra jutunk, tehát $c=b$. Ugyanígy kapjuk, hogy $a=b$.

3 – 8. Tegyük fel, hogy $G=P$. A baricentrikus koordináták alapján $u=\lambda(s-a)$, $v=\lambda(s-b)$, $w=\lambda(s-c)$. A beírt kör érintési pontjait jelölje E_a, E_b és E_c. A csúcsokat P-vel összekötő egyenesek a háromszöget hat háromszögre bontják fel, H_1: $PBE_a\Delta$, H_2: $PE_aC\Delta$, H_3: $PCE_b\Delta$, H_4: $PE_bA\Delta$, H_5: $PAE_c\Delta$, H_6: $PE_cB\Delta$. Valamennyi háromszög P-nél lévő szöge 60^o-os, mert P panoráma pont. A H_1 E_a-nál lévő szöge legyen ψ, akkor a szinusz tétel alapján $\sin\psi=\dfrac{v}{s-b}\sin 60^o=\lambda\sin 60^o$. Ugyanez igaz mind a hat háromszögnek az érintési pontnál lévő szögére, tehát a szögek szinuszai egyenlők. A könnyebb szóhasználat kedvéért nevezzük a H_i háromszöget ($i=1, 2, \ldots, 6$) középen hegyesszögűnek, ha az érintési pontnál lévő szöge hegyesszög. Hasonlóan értelmezzük a középen tompaszögű, ill. középen derékszögű kifejezéseket is. A bizonyított állítás szerint a középen hegyesszögű háromszögek hasonlók, ugyancsak hasonlók a középen tompaszögű háromszögek is.

Tegyük fel, hogy az érintési pontnál lévő szögek egyike sem derékszög, akkor három esetben hegyesszög, három esetben tompaszög. Ha egy csúcsnál, mondjuk az A-nál, lévő mindkét H_i háromszög középen hegyesszögű, akkor a hasonlóság miatt PA szögfelező, PE_a átmegy O_0-on, tehát merőleges a-ra, ami kizárt eset. A-nál tehát csak egy középen hegyesszögű és egy középen tompaszögű háromszög találkozhat. Az α szög két részre bomlik: a E_cAP szögre és a PAC szögre, de a hasonlóság miatt az E_cAP szög egyenlő a PCA szöggel, és az α szöget alkotó két szög összege, az $APC\Delta$ 120^o-os volta miatt, 60^o. Hasonlóan $\beta=\gamma=60^o$.

A derékszögű esetet külön bizonyítjuk. Ha a háromszögek közül egy középen derékszögű, akkor mindegyik az a hasonlóság miatt. Ekkor a $G=M$, mely esetet 3 – 7-ben már megoldottuk.

3 – 9. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$a^2(s-a)=\lambda,\; b^2(s-b)=\lambda,\; c^2(s-c)=\lambda.$$

Az $x^3-sx^2+\lambda=0$ egyenletnek $\lambda>0$-ra legfeljebb két pozitív megoldása van, hiszen a három valós gyök (ha egyáltalán létezik) szorzata $-\lambda<0$. Három különböző pozitív megoldása az egyenletnek, a, b és c nem lehet, tehát kettő biztosan egyenlő. Tegyük fel, hogy $b = c$. A második egyenlet átalakítható: $\frac{1}{2}b^2(a + 2b - 2b) = \frac{1}{2}ab^2 = \lambda$, tehát

$$\frac{1}{2}ab^2 = a^2(s - a),$$

vagy tovább alakítva

$$ab^2 = a^2(2b - a),$$

$$(a - b)^2 = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $a = b$.

3 – 10. A baricentrikus koordinátákból kapott egyenletrendszer

$$b^2 = \lambda(s - a),$$
$$c^2 = \lambda(s - b),$$
$$a^2 = \lambda(s - c).$$

Az egyenletek páronkénti kivonásával a

$$b^2 - a^2 = \lambda(c - a),$$

$$c^2 - b^2 = \lambda(a - b),$$

$$a^2 - c^2 = \lambda(b - c)$$

egyenletrendszert kapjuk. Vezessük be az $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$ jelöléseket, akkor $x + y + z = 0$, és

$$(b + a)x = -\lambda z,$$

$$(c + b)y = -\lambda x,$$

$$(a + c)z = -\lambda y.$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $c \geq a$ és $c \geq b$. Fejezzük ki x-et az első, y-t a harmadik egyenletből és helyettesítsük be az $x + y + z = 0$ egyenletbe:

$$-\frac{\lambda}{b + a}z - \frac{a + c}{\lambda}z + z = 0.$$

Tegyük fel, hogy $z \neq 0$, akkor z-vel egyszerűsíthetünk és

$$\frac{\lambda}{b + a} + \frac{a + c}{\lambda} = 1$$

adódik, ami

$$\frac{\lambda}{b + a} + \frac{a + c}{\lambda} \geq \frac{\lambda}{b + a} + \frac{a + b}{\lambda} \geq 2$$

miatt lehetetlen. Ezért csak $z = 0$, lehetséges, ami az egyenletrendszer harmadik alakja szerint maga után vonja, hogy $x = y = 0$, vagyis $a = b = c$.

4 – 5. Ha $N = S$, akkor $s - a = s - b = s - c = \lambda$, tehát $a = b = c$.

4 – 6. Ha $N = S_x$, akkor

$$b + c = \lambda(s - a),$$

$$c + a = \lambda(s - b),$$

$$a + b = \lambda(s - c).$$

A három egyenlet összegéből $\lambda = 4$-et kapunk. Az első két egyenlet különbségéből

$$b - a = 4(b - a)$$

adódik, ami csak akkor teljesülhet, ha $a = b$. Hasonlóan $b = c$.

4 – 7. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $b \le c$. Feltehető továbbá, hogy a háromszög hegyesszögű, mert a tompaszögű esetben M a háromszögön kívülre esik. Jelöljük az a oldal felezőpontját F-fel, az a oldalhoz tartozó magasság talppontját T-vel, és a Nagel-háromszög a oldalon lévő csúcspontját P-vel. Ha feltételezzük, hogy $b < c$, akkor T az F-ből kiinduló C-n áthaladó nyílt félegyenesre esik (ld. T9.7.), P pedig a nyílt FB szakaszra ($\overline{PB} = s - c = \frac{a+b-c}{2} < \frac{a}{2}$). Az s_a súlyvonal tehát elválasztja az M és N pontokat, annak különböző oldalára esnek, $N = M$ csak úgy lehetséges, ha $c = b$. Hasonlóan megmutatható hogy $a = b$.

4 – 8. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $b \le c$. Jelöljük az AP egyenes metszéspontját az a oldallal D-vel. Ha $b < c$, akkor T13.10. miatt $v > w$. A PD a BPC szög szögfelezője, tehát $\overline{BD} > \overline{DC}$. Jelölje K az a oldal és az AN egyenes metszéspontját. $\overline{BK} = s - c < s - b = \overline{KC}$. A súlyvonal tehát elválasztja az P és az N pontokat. Egybeesés csak akkor következhet be, ha $b = c$. Ugyanígy belátható, hogy $a = b$.

4 – 9. A bizonyítás lényegében azonos az előzővel. Most jelölje D az AL egyenes és az a oldal metszéspontját, akkor T16.1. miatt $\overline{DC} : \overline{BD} = b^2 : c^2$, tehát $b < c$ esetén $\overline{BD} > \overline{DC}$. A bizonyítás folytatása megegyezik az előzővel.

4 – 10. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \le c$ és $b \le c$. Jelöljük az a oldal felezőpontját F-fel, az AB_1 egyenes és az a oldal metszéspontját D-vel, az a oldalhoz írt kör érintési pontját ezen az oldalon E-vel. Mivel $\overline{BE} = s - c \le s - b = \overline{EC}$, E a BF szakasz pontja. Másrészt a baricentrikus koordináták miatt $\overline{BD} : \overline{DC} = c^2 : a^2 \ge 1$, tehát D az FC szakaszra esik. Az $N = B_1$ összeesés csak úgy lehetséges, ha $D = E$, de ekkor $D = E = F$. Ekkor a második egyenlőtlenségből $c = a$, az elsőből $b = c$.

5 – 6. A baricentrikus koordinátákból $b + c = c + a = a + b$, ami azt jelenti, hogy $a = b = c$.

5 – 7. Ha $S = M$, akkor az Euler-egyenes tulajdonsága miatt $O = S$ is teljesül, de 1 – 5.-nél már láttuk, hogy ekkor $a = b = c$.

5 – 8. $P = S$ esetén a baricentrikus koordinátákból kapjuk, hogy $u = v = w$. A PAB, PBC, PCA háromszögek tehát olyan egyenlőszárú háromszögek, melyek hegyesszögei 30°-osak. Ebből adódóan az $ABC\Delta$ minden szöge 60°-os.

5 – 9. A baricentrikus koordinátákból $a^2 = b^2 = c^2$, ami azt jelenti, hogy $a = b = c$.

5 – 10. A baricentrikus koordinátákból $a^2 = b^2 = c^2$, ami azt jelenti, hogy $a = b = c$.

6 – 7. S_x az $F_aF_bF_c$ felező háromszög beírt körének a középpontja. Jelölje E ennek a körnek az érintési pontját az F_bF_c oldalon. Mivel $\overline{EF_c} = \frac{s-c}{2}$, E egyben az AF_cF_b háromszög F_bF_c oldalához hozzáírt kör érintési pontja is. Jelöljük az $AF_bF_c\Delta$-ben az A csúcsból induló magasság talppontját T-vel. Ha $S_x = M$, akkor AS_x merőleges F_bF_c-re, tehát átmegy E-n, ezért $E = T$. 4 –

7.-ben azonban láttuk, hogy ebben az esetben $b = c$. Ugyanígy következik másik két oldal egyenlősége is.

6 – 8. A baricentrikus koordinátákból $b+c=\frac{\lambda}{u}$, $a+c=\frac{\lambda}{v}$, $a+b=\frac{\lambda}{w}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \le b \le c$, ekkor T13.10. alapján $u \ge v \ge w$. Az előbbi egyenlőségek szerint ez azt jelenti, hogy $b + c \le a + c \le a + b$. Az első egyenlőtlenségből $b \le a$, tehát $a = b$, a másodikból $c \le b$, vagyis $b = c$ adódik.

6 – 9. A baricentrikus koordináták egyenletrendszere: $b+c=\lambda a^2$, $c+a=\lambda b^2$, $a+b=\lambda c^2$. Vonjuk ki az első két egyenletet egymásból, akkor $b-a=\lambda(a^2-b^2)$. Ha $a \ne b$, akkor

$$-1=\lambda(a+b)$$

ellentmondás adódik, hiszen $\lambda > 0$, tehát $a = b$. Ugyanígy kapjuk, hogy $b = c$.

6 – 10. A baricentrikus koordináták egyenletrendszere:

$$b^2(b+c)=c^2(c+a)=a^2(a+b).$$

Az első és a harmadik kifejezés egyenlősége átalakítható a következőképpen:

$$a^3-b^3=b(bc-a^2),$$

$$(a^3-b^3)+b(a^2-b^2)=b^2(c-b).$$

A körüljárási irány megtartásával megválasztható a háromszög betűzése úgy, hogy vagy $a \le b \le c$, vagy $a \ge b \ge c$ legyen (a körüljárási irányt nem szabad megváltoztatni, mert, akkor B_1 átmegy B_2-be). Az első esetben a baloldal negatív, vagy nulla, a jobboldal pozitív vagy nulla; egyenlőség csak úgy lehetséges, ha $0 = 0$, azaz $a = b$ és $c = b$. A második esetben a baloldal pozitív vagy nulla, és a jobboldal negatív vagy nulla, egyenlőség itt is csak $0 = 0$ esetén állhat fenn, vagyis ha $a = b$ és $c = b$.

7 – 8. Tudjuk, hogy a BMC szög $180^\circ - \alpha$, és a BPC szög 120°. Ha $M = P$, akkor $180^\circ - \alpha = 120^\circ$, vagyis $\alpha = 60^\circ$. Hasonló érveléssel a háromszög többi szöge is 60°.

7 – 9. A baricentrikus koordináták egyenletrendszere: $a^2w_1=b^2w_2=c^2w_3$. Írjuk fel az első egyenletet részletesebben:

$$a^2(-a^2+b^2+c^2)=b^2(a^2-b^2+c^2),$$

$$b^4-a^4=c^2(b^2-a^2).$$

Ebből vagy $b^2 = a^2$, vagy $b^2 + a^2 = c^2$. A második esetben az $ABC\Delta$ derékszögű, így $M = C$, de $L = C$ lehetetlen, mert a pozitív súlyok miatt L a háromszög belső pontja. Egyedül $b^2 = a^2$ lehetséges, vagyis $b = a$. Ugyanígy bizonyítható, hogy $b = c$.

7 – 10. Tudjuk, hogy a BMC szög $180^\circ - \alpha$ és a BB_1C szög $180^\circ - \gamma$, ami $M = B_1$ esetén azt jelenti, hogy $\alpha = \gamma$. Hasonló érveléssel $\alpha = \beta$ is bizonyítható.

8 – 9. A baricentrikus koordináták egyenletrendszere: $a^2u=b^2v=c^2w$. Első lépésben meg fogjuk mutatni, hogy u, v és w közül kettő egyenlő. Tegyük fel, hogy $u \ne v$ és $u \ne w$. Az első egyenlőségből

$$(u-v)a^2=v(b^2-a^2).$$

T13.10. alapján $b^2 - a^2 = m_0(u-v)$ (itt m_0 jelentése egyelőre érdektelen), ezt felhasználva

$$(u-v)a^2 = vm_0(u-v),$$

$$a^2 = vm_0.$$

Ugyanezt végezzük el az első és a harmadik kifejezés egyenlőségére:

$$(u-w)a^2 = w(c^2 - a^2).$$

Itt T13.10. szerint $c^2 - a^2 = m_0(u-w)$, tehát

$$(u-w)a^2 = wm_0(u-w)$$

$$a^2 = wm_0.$$

A kapott egyenletek alapján tehát $v = w$. Ismét T13.10. felhasználásával, ha u, v és w közül kettő egyenlő, akkor a, b és c közül is kettő egyenlő, vagyis a háromszög egyenlőszárú.

Tegyük fel, hogy $b = c$ (és ekkor $v = w$). Mivel $L = P$, a $BLC\Delta$ olyan egyenlőszárú háromszög, melynek L-nél lévő szöge 120°. Ebből adódóan $v = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Tegyük fel, hogy $u \neq v$, akkor az $a^2 = vm_0$ összefüggésből $m_0 = \frac{a^2}{v} = a\sqrt{3}$. T13.7 miatt $m_0 = u + 2v$, tehát $u = a\sqrt{3} - 2v = a\sqrt{3} - \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = v$ .Az u = v egyenlőségből T13.10. újbóli alkalmazásával $a = b$ következik..

8 – 10. T17.2. szerint B_1-ből az a oldal $180° - \gamma$ szög alatt látszik, de, ha $B_1 = P$, akkor ez a szög 120°-os, tehát $\gamma = 60°$. Ugyanígy bizonyítható ez a többi szögre is.

9 – 10. A baricentrikus koordináták egyenletrendszere: $a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2$. Az egyenletrendszer ekvivalens alakban $a^2 = c^2 = b^2$, azaz $a = b = c$. ♠

19. Az áttükrözött háromszög

19.1. *Általános eset*

Ha az A, B, C pontokat a háromszög szemközti oldalára tükrözzük, és a kapott A', B', C' pontok nem esnek egy egyenesre, akkor az $A'B'C'\Delta$-et *áttükrözött háromszögnek* nevezzük.

Áttükrözött háromszög nem létezésére példa a 120°-os egyenlőszárú háromszög, amikor az alap végpontjainak a tükörképei megegyeznek. Természetesen létezik más példa is. A további állításoknál a létezést mindig feltételezzük. Amennyire egyszerű az áttükrözött háromszög definíciója és szerkesztése, annyira bonyolultak a vele kapcsolatos számítások.

Jelöljük az áttükrözött háromszög A'-vel szemközti oldalát a'-vel, hasonlóan a B'-vel szemköztit b'-vel és a C'-vel szemköztit c'-vel.

T19.1. $$a'^2 = a^2 + 8T\sin 2\alpha .$$
Hegyesszögű háromszögben $a' > a$, derékszögű háromszögben, ha $\alpha = 90°$, akkor $a' = a$, tompaszögű háromszögben, ha $\alpha > 90°$, akkor $a' < a$.

B. Az $AB'C'\Delta$-ben $\overline{AB'} = \overline{AB} = c$, és $\overline{AC'} = \overline{AC} = b$, továbbá a $B'AC'$ szög 3α, ha $\alpha \le 60°$, $360° - 3\alpha$, ha $60° \le \alpha \le 120°$ és $3\alpha - 360°$, ha $\alpha \ge 120°$. Koszinusz tétellel a három eset egyidejűleg kezelhető:
$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 3\alpha .$$
Az eredeti háromszögre
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
és a két egyenlet kivonásával
$$a'^2 - a^2 = 2bc(\cos\alpha - \cos 3\alpha).$$
Használjuk fel a $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ azonosságot, akkor
$$a'^2 - a^2 = 4bc\sin 2\alpha\sin\alpha = 8bc\sin^2\alpha\cos\alpha = 8T\sin 2\alpha .$$
Ezzel a tétel első állítását bebizonyítottuk, a többi állítás ebből leolvasható. ♠

Ugyanerre egy más jellegű formulát is adunk. A bizonyításában az a' oldalvektorára érdekes előállítást kapunk vektorokkal.

T19.2. $$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 5 + 4(\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma) .$$
B. Vezessünk be vektorokat. Legyen $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \boldsymbol{a}'$, $\overrightarrow{BT_b} = \boldsymbol{m}_b$, $\overrightarrow{CT_c} = \boldsymbol{m}_c$ és $\overrightarrow{T_cT_b} = \boldsymbol{t}$. Ezekre a vektorokra felírható az alábbi két összefüggés:
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{m}_c + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{m}_b = \boldsymbol{0},$$
$$-\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{m}_c + \boldsymbol{t} + \boldsymbol{m}_b = \boldsymbol{0}.$$
A két egyenlet összeadásával
$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{t} .$$
Ebből $a' = |\boldsymbol{a}'|$ meghatározható koszinusz tétellel, hiszen $|\boldsymbol{t}| = a\cos\alpha$ (lásd. T9.10.), valamint $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{t}$ szöge $|\beta - \gamma|$ (lásd T9.9.):

$$a'^2 = a^2 + 4|\mathbf{x}|^2 + 2a|x|\cos(\beta-\gamma) = a^2(1 + 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)).$$

Felhasználva a cos*x*+cos*y* = $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ és a cos2*x* = $2\cos^2 x - 1$ formulákat, innen trigonometrikus átalakításokkal jutunk el az állításhoz:

$$a'^2 = a^2(1 + 2(1+\cos 2\alpha) + 2(\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) =$$
$$= a^2(3 + 2(\cos 2\alpha - \cos 2\gamma - \cos 2\beta)).$$

Alakítsuk vissza a kétszeres szögeket, akkor

$$a'^2 = a^2(3 + 2(2\cos^2\alpha - 1 - 2\cos^2\beta + 1 - 2\cos\gamma + 1)) =$$
$$= a^2(5 + 4(\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma),$$

és ezt akartuk bizonyítani. ♠

T19.3. Ha az *ABC*Δ legnagyobb szöge nem nagyobb 120°-nál, akkor az áttükrözött háromszög *T'* területére

$$\frac{T'}{T} = 7 - 4(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

vagy

$$T' = 3T + 4T_0,$$

ahol T_0 az *ABC*Δ talpponti háromszögének az előjeles területe (azaz pozitív, ha a körüljárási iránya megegyezik az *ABC*Δ körüljárási irányával, különben – tompaszögű háromszög esetén – negatív).

Ha az *ABC*Δ legnagyobb szöge nem nagyobb 120°-nál, akkor *T'* ≤ 4*T*. Hegyesszögű háromszögre 3*T* < *T'* ≤ 4*T*.

B. A 120°-os feltétel miatt az *ABC*Δ egyes oldalakra vonatkozó tükörképei nem nyúlnak egymásba. A kapott 4*T* területű *AB'CA'BC'* hatszöget módosítsuk háromszögek hozzá vételével ill, elhagyásával.

Ha $\alpha \le 60°$, akkor az *AB'C'*Δ *A*-nál lévő szöge, $3\alpha \le 180°$. A háromszöget a hatszögből el kell hagyni, területileg levonásra kerül. Ha $60° \le \alpha \le 120°$, akkor az *AB'C'*Δ *A*-nál lévő szöge $360° - 3\alpha$, és a háromszöget a hatszöghöz hozzá kell venni. Mivel $\sin(360° - 3\alpha) = -\sin 3\alpha$, ha 4*T*-ből levonunk $\frac{1}{2}bc\sin 3\alpha$-t, mindkét esetben helyesen járunk el.

Ugyanígy járunk el a *BC'A'*Δ és a *CA'B'*Δ esetén is, tehát

$$T' = 4T - \frac{1}{2}(bc\sin 3\alpha + ac\sin 3\beta + ab\sin 3\gamma).$$

Használjuk a $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$ képletet, és a háromszög megfelelő terület képletét, akkor

$$T' = 4T - T(4\cos^2\alpha - 1 + 4\cos^2\beta - 1 + 4\cos^2\gamma - 1) =$$
$$= 7T - 4T(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

T9.15. szerint $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \ge \frac{3}{4}$, tehát *T'* ≤ 4*T*.

Használjuk T9.13. formuláját, akkor

$$T' = 3T + 4T(1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)) = 3T + 4T_0.$$ ♠

T19.4. Az áttükrözött háromszög T' területére midig teljesül, hogy $T' < 5T$. Az 5-ös szorzó tetszőleges pontossággal megközelíthető.

B. A bizonyításhoz feltehető, hogy $a > c \geq b$, és, hogy $\alpha > 120°$, hiszen kisebb α esetén $T' \leq$ $\leq 4T$ állítható (T19.3.). Az $A'B'C'$ áttükrözött háromszög területét az $A'CC'B'B$ ötszög területét számolva érjük el. Az ötszög területét az $ABC\Delta$, az $A'BC\Delta$, az $ABC'\Delta$, az $ACC'\Delta$ és a $BB'C'\Delta$ területeinek összege képezi, melyekből az első három T-vel egyenlő, a negyediket T_1-gyel, az ötödiket T_2-vel fogjuk jelölni. Ahhoz, hogy az $A'B'C'\Delta$ területét megkapjuk, ebből le kell vonni a $CC'A\Delta$ T_3-mal jelölt, valamint a $BB'A\Delta$ T_4 területét.

Rögtön látható, hogy $T_1 < T_3$, hiszen a CC' alapjuk közös, és, mivel a CC' egyenes az AA' egyenest a BC egyenes A felöli oldalán metszi, az A-ból induló magasság kisebb, mint az A'-ből induló.

A BB' szakasz hossza

$$\overline{BB'} = 2a\sin\gamma = \frac{4T}{b}.$$

Jelöljük δ_2-vel a $B'BC'$ szöget, és δ_4-gyel a $B'BA'$ szöget, akkor

$$\delta_2 = 90^{\mathrm{o}} - \gamma - 2\beta > 0^{\mathrm{o}},$$

$$\delta_4 = 90^{\mathrm{o}} - \gamma + \beta \leq 90^{\mathrm{o}},$$

továbbá $\delta_2 < \delta_4$. A területek különbségére pedig

$$T_2 - T_4 = \frac{2T}{b}(a\sin\delta_2 - c\sin\delta_4) < \frac{2T}{b}(a-c)\sin\delta_4 < \frac{2T}{b}b\sin\delta_4 < 2T$$

adódik. Ezért

$$T' = 3T + (T_2 - T_4) + (T_1 - T_3) < 3T + 2T = 5T\ .$$

Az 5-ös szorzó pontos volta T19.6.-ban kerül bizonyításra. ♠

Az áttükrözés a háromszög egy bizonyos transzformációja. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e az inverz transzformáció. A válasz nemleges, ugyanis T19.8.-ban megmutatjuk, hogy van olyan háromszög, nevezetesen az egyenlő oldalú háromszög, amely három különböző háromszög áttükrözöttjeként is előállítható.

Attól, hogy az inverz transzformáció nem létezik (nem egyértelmű), még feltehető a kérdés, hogy minden háromszög előáll-e áttükrözött háromszögként. Csak egy speciális esetben adunk erre a kérdésre választ T19.9.-ben: minden egyenlőszárú háromszög előáll valamely egyenlőszárú háromszög áttükrözöttjeként.

19.2. *Speciális esetek*

Az egyenlőszárú vagy a derékszögű háromszög esete lényegesen könnyebben számítható, ezért ezekkel külön foglalkozunk.

Ha egyenlőszárú háromszögből indulunk ki, akkor az áttükrözött háromszög is egyenlőszárú, hiszen a szimmetria tengely mindvégig megmarad.

T19.5. Legyen az egyenlőszárú háromszög alapja a, a hozzá tartozó magasság m és a szárak szöge α, továbbá vezessük be a $d=\frac{a^2}{b^2}$ jelölést. Az áttükrözött háromszög alapja legyen a' és az a'-höz tartozó magassága m', akkor

$$a'=a|3-d| \quad \text{és} \quad m'=m(1+d).$$

B. Készítsünk három ábrát az $\alpha \le 60^o$, a $60^o < \alpha < 120^o$ és az $\alpha > 120^o$ eseteknek megfelelően. Legyen az áttükrözött háromszög az $A'B'C'\Delta$, továbbá jelöljük a $B'C'$ egyenes és az AC egyenes metszéspontját P-vel, a $B'C'$ és az AB egyenesek metszéspontját Q-val.
Mindhárom esetben a $C'QB$ szög és a háromszög β szöge váltószögek, tehát a $C'QB$ szög β nagyságú. A tükrözés miatt a $C'BQ$ szög nagysága is β, tehát a $C'BQ\Delta$ egyenlőszárú, $\overline{C'Q}=a$, és ugyanígy $\overline{B'P}=a$.
A $C'BQ\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$-höz a szögek egyenlősége miatt, tehát, $\overline{BQ}=x$ jelöléssel, felírható az

$$x:a=a:b$$

aránypár, amiből

$$x=\frac{a^2}{b}.$$

A három esetet megvizsgálva

$$\overline{AQ}=|x-b|=\frac{|a^2-b^2|}{b}.$$

Újabb aránypárt felírva az APQ és az ABC hasonló háromszögekre:

$$\overline{PQ}:\overline{AQ}=a:b,$$

vagyis

$$\overline{PQ}=a|d-1|.$$

A három esetet most külön-külön megvizsgálva, $\alpha \le 60^o$ esetén $d \le 1$, és

$$a'=2a+\overline{PQ}=2a+a(1-d)=a(3-d).$$

$60^o < \alpha < 120^o$ esetén $1 < d < 3$, és

$$a'=2a-\overline{PQ}=2a-a(d-1)=a(3-d).$$

Végül $\alpha > 120^o$ esetén $d > 3$, tehát

$$a'=\overline{PQ}-2a=a(d-1)-2a=a(d-3),$$

amivel az első állítást igazoltuk.

m_0 jelölje az $APQ\Delta$-ben a PQ oldalhoz tartozó magasság hosszát. Számítsuk ki m_0-t az APQ és az ABC háromszögek hasonlóságát felhasználva:

$$m_0:m=\overline{AQ}:b,$$

$$m_0=m|d-1|.$$

Ha $\alpha \le 60^o$, akkor

$$m'=2m-m_0=2m-m(1-d)=m(1+d).$$

Ha $\alpha > 60^o$, akkor

$$m'=2m+m_0=2m+m(d-1)=m(1+d).$$

Ezzel mindkét állítás bizonyítást nyert. ♠

A T19.5. állítás egyszerű következménye az alábbi állítás.

T19.6. Legyen az egyenlőszárú háromszög alapja a, a hozzá tartozó magasság m és a szárak szöge α. Az áttükrözött háromszög alapja legyen a' és az a'-höz tartozó magassága m'. $\alpha \le 120^\circ$ esetén

$$\frac{a'}{a} + \frac{m'}{m} = 4.$$

Derékszögű háromszög esetén, ha az átfogót jelöljük a-val, és a hozzá tartozó magasságot m-mel, a formula változatlanul érvényben marad.
Egyenlőszárú háromszögre $\alpha > 120^\circ$ esetén

$$\frac{m'}{m} - \frac{a'}{a} = 4.$$

B. T19.5. formuláiból d-t kiküszöbölve kapjuk az egyenlőszárú háromszögre vonatkozó állításokat. A derékszögű háromszögre vonatkozó állítás elemi geometriai meggondolások alapján nyilvánvaló, hiszen $a' = a$, és $m' = 3m$. ♠

A T19.4. tétel állítása egyenlőszárú háromszögekre – a levezetett összefüggések felhasználásával – könnyen bizonyítható. A levezetés előnye, hogy itt az egyenlőtlenség pontos volta is azonnal látható.

T19.7. Egyenlőszárú háromszögeknél az áttükrözött háromszög területe $T' < 5T$, a $\frac{T'}{T}$ -vel az 5 tetszőleges pontosságra megközelíthető.

B. Ha $\alpha \le 120^\circ$, akkor T19.3.-ban láttuk, hogy $T' \le 4T$, tehát csak az $\alpha > 120^\circ$-os esetet kell vizsgálni. A T19.5. bizonyításának formuláit felhasználva

$$T' = \frac{a'm'}{2} = \frac{am}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} - 3\right)\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right).$$

A háromszög-egyenlőtlenségből $a < 2b$, ezt beírva $T' < 5T$ adódik. Mivel α elég nagyra választásával az a a $2b$-t tetszőleges pontosságra megközelíti, ezért a $\frac{T'}{T}$ is megközelíti az 5-öt. ♠

Az áttükrözés az egyenlőszárú háromszögeket egyenlőszárú háromszögekké transzformálja. A transzformációnak ebben a leszűkített esetében sem létezik az inverze, ugyanis megmutatjuk, hogy például az egyenlő oldalú háromszög három különböző egyenlőszárú háromszög áttükrözöttjeként is előállítható.

T19.8. Ha az egyenlőszárú háromszögben $a = \sqrt{3} \mp 1$ és $b = c = \sqrt{2}$, akkor az áttükrözött háromszög $a' = 2$ oldalú egyenlő oldalú háromszög (a két előjel két különböző háromszöget jelent). Ugyanez az eredmény érhető el az $a = 1$ oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög áttükrözésével is. Az $a' = 2$ oldalú egyenlő oldalú háromszöget tehát három esetben is megkaphatjuk áttükrözéssel.

B. A megadott háromszögek léteznek, mert $2\sqrt{2} > \sqrt{3} \mp 1$.
T19.5. formuláival számítsuk ki a'-t ás m'-t! Először határozzuk meg a d értékét (az egyik esetre mindig a felső, a másikra az alsó előjelek érvényesek):

$$d=\frac{a^2}{b^2}=\frac{(\sqrt{3}\mp 1)^2}{2}=2\mp\sqrt{3}.$$

Pythagorasz-tétellel ellenőrizhető, hogy $m=\dfrac{\pm 1+\sqrt{3}}{2}$. Ezek alapján

$$a'=a|3-d|=(\sqrt{3}\mp 1)(\sqrt{3}\pm 1)=2$$

és

$$m'=m(1+d)=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2}(3\mp\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\pm 1)(\sqrt{3}\mp 1)=\sqrt{3}.$$

Az áttükrözött háromszög mindkét esetben 2 alapú és $\sqrt{3}$ magasságú egyenlőszárú háromszög, vagyis egyenlő oldalú háromszög, ami a tétel állítását igazolja. ♠

Továbbra is az egyenlőszárú háromszögek körében maradva felmerül a kérdés, hogy az áttükrözött háromszögek között az összes egyenlőszárú háromszög előfordul-e. A válasz: igen. Vegyük azonban észre, hogy az áttükrözött egyenlőszárú háromszög körüljárási iránya $\alpha < 120^o$ esetén megegyezik az eredeti körüljárási irányával, míg $\alpha > 120^o$ esetén fordított. Ha azt kérdezzük, hogy a körüljárási irányt megtartva előfordul-e minden egyenlőszárú háromszög, akkor a válasz: nem, míg a körüljárási irányt megváltoztatva minden egyenlőszárú háromszög előáll áttükrözött egyenlőszárú háromszögként.

T19.9. Minden egyenlőszárú háromszög előállítható olyan egyenlőszárú háromszög áttükrözöttjeként, melynél a szárak szöge 120^o-nál nagyobb (így a körüljárási irány ellentétes lesz). Egyenlő körüljárási irányt megkövetelve nem minden egyenlőszárú háromszög állítható elő áttükrözöttként, pl. az egyenlőszárú derékszögű háromszög nem állítható elő így.

B. Az áttükrözött háromszöget $4tg^2\dfrac{\alpha}{2}=\left(\dfrac{a'}{m'}\right)^2$ számmal fogjuk jellemezni, ez a hasonlóság erejéig meghatározza az egyenlőszárú háromszöget. A T19.5. képleteit felhasználva

$$\left(\frac{a'}{m'}\right)^2=\frac{a^2}{m^2}\frac{(3-d)^2}{(1+d)^2}=\frac{a^2}{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\frac{(3-d)^2}{(1+d)^2}=\frac{4d(3-d)^2}{(4-d)(1+d)^2}=f(d).$$

Ebben a függvényben a d értéke a $0 < \alpha < 120^o$ tartományban a (0, 3), míg a $120^o < \alpha < 180^o$ tartományban a (3, 4) intervallumban változik. Az első állítás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $f(3) = 0$, és f a [3, 4) intervallumban szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, melynek nincs felső korlátja. Ebből csak a monoton növekedés szorul bizonyításra: a $\dfrac{d}{4-d}$ tényező nyilván szigorúan monoton növekedő, és a $\dfrac{d-3}{d+1}=1-\dfrac{4}{d+1}$ tényező is. Mivel a $d\in(3,4)$ intervallumban mindkét tényező pozitív, a szorzatuk is monoton növekedő.

A második állításhoz az $f(d) = 4$, $0 < d < 3$ lehetetlenségét kell megmutatni. Megmutatjuk, hogy $f(d) < 4$ a $0 < d < 3$ intervallumban. Mivel $\dfrac{3-d}{4-d}<1$, elég megmutatni, hogy

$$d(3-d)<1+2d<(d+1)^2.$$

A baloldalon álló egyenlőtlenség átrendezett alakban azonban nyilvánvaló, ugyanis

$$(d-1)^2>-d.$$ ♠

20. Izodinamikus pont

20.1. *A háromszög Apollóniusz-körei*

A háromszög a oldalához tartozó Apollóniusz-kör definícióját T5.9.-nél adtuk meg. Később a 6. fejezetben általánosabban is foglalkoztunk vele, de itt az előbbi, szűkebb értelmezésben fogjuk használni. Egyenlőszárú háromszögnél az alaphoz tartozó Apollóniusz-kör oldalfelező merőlegessé fajul el, de ezt is Apollóniusz-körnek fogjuk tekinteni.

T20.1. A háromszög Apollóniusz-köre merőlegesen metszi a körülírt kört (a metszéspontban húzott érintők merőlegesek).

B. Az a oldalhoz tartozó K_1 körre bizonyítjuk az állítást, így feltehető az általánosság korlátozása nélkül, hogy $b \le c$. Jelöljük K_1 középpontját O_1-gyel és az α szög szögfelezőjének és a BC oldalnak a metszéspontját D-vel. Az $ABD\Delta$-ből ADO_1 szög $= \beta + \dfrac{\alpha}{2}$, továbbá, ha a CAO_1 szöget δ-val jelöljük, akkor a DAO_1 szög $= \delta + \dfrac{\alpha}{2}$. Mivel az $ADO_1\Delta$ egyenlőszárú háromszög, $\beta = \delta$, és a kerületi szögek tétele miatt AO_1 a körülírt kör érintője, ami a merőleges metszést igazolja. ♠

Segédtétel. Az $ABCD$ (esetleg önmagát átmetsző) négyszögnek B-nél és D-nél lévő szöge derékszög. Legyen az A-nál lévő szöge α, akkor az átlóira

$$\overline{BD} = \overline{AC}\sin\alpha\,.$$

B. Jelöljük δ-val az ABD szöget és alkalmazzuk a szinusz-tételt az $ABD\Delta$-re:

$$\overline{BD} = \overline{AD}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}\,.$$

Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, az ACD szög vagy szintén δ, vagy $180^\circ - \delta$, tehát

$$\overline{AD} = \overline{AC}\sin\delta\,,$$

és a két egyenlőségből adódik a segédtétel állítása. ♠

T20.2. Vegyünk fel a háromszög síkjában egy P pontot. Az a, b és c oldalegyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek rendre T_1, T_2, T_3.

$$\overline{T_1T_2} = \overline{T_1T_3}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha P az a oldalhoz tartozó Apollóniusz-körön van.

B. Alkalmazzuk a segédtételt a PT_1BT_3 húrnégyszögre, majd a PT_1CT_2 húrnégyszögre, akkor

$$\overline{T_1T_3} = PB\sin\beta \quad \text{és} \quad \overline{T_1T_2} = PC\sin\gamma\,.$$

$\overline{T_1T_2} = \overline{T_1T_3}$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}\,,$$

vagyis, ha P az a oldalhoz tartozó Apollóniusz-körön van. ♠

A továbbiakhoz szükségünk lesz a sík egy transzformációjára, az inverzióra. Ehhez adott egy O_1 középpontú kör, az O_1 középpontot az inverzióval kapcsolatban pólusnak nevezzük. Egy

$P \neq O_1$ ponthoz az O_1P félegyenes azon P' pontját rendeljük hozzá, amelyre $OP \cdot OP' = r^2$, ahol r a megadott kör sugara.

Az inverzió kör-egyenes tartó és szögtartó, tehát kör vagy egyenes képe is kör vagy egyenes, és az alakzatok metszési szöge a transzformáció során nem változik. Az elmondottak bizonyítását mellőzzük, ezek megtalálhatók pl. Hajós György: Bevezetés a Geometriába c. könyvében.

T20.3. Ha a háromszög nem egyenlő oldalú, akkor mindig található két pont, P_1 és P_2, amelyeken a háromszöghöz tartozó mindhárom Apollóniusz-kör áthalad. P_1 és P_2 egymás inverzei a háromszög köréírt körére vonatkozóan.

B. Jelöljük az a, b és c oldalakhoz tartozó Apollóniusz-köröket rendre K_1-gyel, K_2-vel és K_3-mal, továbbá tételezzük fel, hogy $a \geq b \geq c$, és $a > c$. Megmutatjuk, hogy a K_1 és a K_3 kör biztosan metszi egymást. Legyen az α szög szögfelezőjének és a BC oldalnak a metszéspontja D, akkor A és D biztosan pontja K_1-nek; ugyanakkor $a > c$ miatt A a K_3 belsejében van, és D kívül van a K_3 körön. A K_1 kör AD íve tehát biztosan metszi a K_3 kört, és a két kör metszése nyilván két pontban történik (akkor is, ha K_1 vagy K_3 közül az egyik esetleg egyenes). Legyen P a metszéspontok egyike, akkor, mivel P rajta van K_1-en és K_3-on,

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{c}{b} \text{ és } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{b}{a}.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{c}{a},$$

vagyis P rajta van K_2-n is.

A K_1 kör merőlegesen metszi a körülírt kört, tehát az inverze is (T20.1.), ráadásul ugyanazon pontokban, hiszen a körülírt kör pontjainak az inverze önmaga. Ebből következik, hogy K_1 inverze önmaga. Ugyanez igaz a K_3-ra is. K_1 és K_3 metszéspontjainak az inverze az inverzek metszéspontja, tehát vagy mindkét metszéspont inverze önmaga, vagy a metszéspontok egymás inverzei. Az első esetben mindkét metszéspont a körülírt körre esne, vagyis K_1 és K_3 ugyanott és merőlegesen metszené a körülírt kört, amiből a K_1 és K_3 azonossága következne, ami lehetetlen. Így a metszéspontok egymás inverzei a körülírt körre vonatkozóan. ♠

T20.4. Ha $b \neq c$, akkor az a oldalhoz tartozó Apollóniusz-kör O_1 középpontjának baricentrikus koordinátái 0, b^2, $-c^2$, sugara $r_1 = \dfrac{abc}{|b^2 - c^2|}$. A három Apollóniusz-kör középpont (ha létezik) egy egyenesbe esik, mely egyenes elkerüli az $ABC\Delta$-et.

B. Tegyük fel, hogy $b > c$. Az α szög szögfelezője messe az a oldalt P-ben, a külső szögfelezője az a oldal egyenesét Q-ban. Arányos osztás következtében (T5.8.) $\overline{BP} = \dfrac{ac}{b+c}$ és $\overline{CP} = \dfrac{ab}{b+c}$.
A Q, B, P, C pontok harmonikus pontnégyest alkotnak, tehát

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{QB} + a}{\overline{QB}},$$

amiből

$$\overline{QB}=\frac{ac}{b-c}.$$

Így az Apollóniusz-kör sugarára

$$r_1=\frac{1}{2}\overline{QP}=\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b-c}+\frac{ac}{b+c}\right)=\frac{abc}{b^2-c^2}$$

adódik. Ezt felhasználva

$$\frac{\overline{O_1C}}{\overline{O_1B}}=\frac{r_1+\overline{PC}}{r_1-\overline{PB}}=\frac{r_1(b+c)+ab}{r_1(b+c)-ac}=\frac{b^2}{c^2},$$

ami azt jelenti, hogy B-be b^2, C-be $-c^2$, súlyt helyezve a súlypont O_1 lesz.

Tegyük fel, hogy O_1 és O_2 Apollóniusz-kör középpontok léteznek, akkor baricentrikus koordinátáik 0, b^2, $-c^2$, ill. a^2, 0, $-c^2$. A 21.1. fejezet segédtétele következtében az összekötő egyenes pontjainak baricentrikus koordinátái $\lambda(0,\, b^2,\, -c^2)+\mu(a^2,\, 0,\, -c^2)$ alakban írhatók fel. Itt azonban, ha λ és μ azonos előjelű, akkor az első két koordináta azonos előjelű lesz, míg a harmadik koordináta ellenkező előjelű, ha λ és μ különböző előjelű, akkor az első két koordináta lesz különböző előjelű. Így nem lehetséges, hogy a három baricentrikus koordináta azonos előjelű legyen, vagyis nincs olyan pontja az egyenesnek, mely a háromszögbe esik. ♠

20.2. *Izodinamikus pontok*

Ebben a fejezetben a jelöléseket tekintve végig feltételezzük, hogy $a \ge b \ge c$, továbbá kizárjuk a vizsgálatból az egyenlő oldalú háromszöget is, mert vagy triviálisan igaz rá az állítás, vagy triviálisan nem igaz (pl. nincs második izodinamikus pont).

T20.5. Tegyük fel, hogy a háromszög nem egyenlő oldalú. A háromszög síkjában pontosan két olyan P pont van, melyre

$$a\cdot\overline{PA}=b\cdot\overline{PB}=c\cdot\overline{PC},$$

ezeket *izodinamikus pontoknak* nevezzük. A háromszög Apollóniusz-körei átmennek az izodinamikus pontokon. Az izodinamikus pontok egymás inverzei a körülírt körre vonatkozóan. *Első izodinamikus pontnak* nevezzük azt az I_1 izodinamikus pontot, mely a körülírt kör belsejében található, a körülírt körön kívüli másikat *második izodinamikus pontnak* nevezzük és I_2-vel jelöljük.

B. Az P izodinamikus pontnak teljesítenie kell a $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{c}{b}$ összefüggést, ami K_1 pontjait jellemzi, tehát P rajta van K_1-en. Hasonlóan P rajta van K_2-n és K_3-on is, tehát az izodinamikus pontokat az Apollóniusz körök metszéspontja adja meg. T20.3. alapján mindig van két ilyen pont, és ezek egymás inverzei a körülírt körre vonatkozóan. Az egyik a körön belül van, a másik kívül, hiszen a körre nem eshet, mert akkor az inverze önmaga lenne és nem lenne két különböző metszéspont. ♠

T20.6. Az izodinamikus pontok talpponti háromszögei egyenlő oldalú háromszögek. Ezzel a tulajdonsággal a sík pontjai közül csak az izodinamikus pontok rendelkeznek.

B. T20.2. alapján nyilvánvaló. ♠

T20.7. I_1 akkor és csak akkor esik a háromszög belsejébe, ha a háromszög legnagyobb szöge 120°-nál kisebb.

B. Legyenek az I_1-hez tartozó talpponti háromszög a, b és c oldalegyenesen lévő csúcsai T_1, T_2 és T_3. Tegyük fel, hogy I_1 a háromszög belsejében van. Jelöljük az I_1BA szöget δ-val és az I_1CA szöget ε-nal, akkor az $I_1T_1BT_3$ és az IT_1BT_2 húrnégyszögek tulajdonságait felhasználva

$$\delta + \varepsilon = I_1T_1T_3 \,\text{szög} + I_1T_1T_2 \,\text{szög} = 60^o .$$

Ellenben $\beta + \gamma > \delta + \varepsilon = 60^o$, tehát $\alpha < 120^o$. Ugyanígy $\beta < 120^o$ és $\gamma < 120^o$

Tegyük fel most, hogy I_1 a háromszögön kívül, de természetesen a körülírt körön belül van. Tegyük fel azt is, hogy I_1 az a oldal háromszöggel ellentétes oldalára esik. Ebben az esetben

$$\delta + \varepsilon = 180^o - I_1T_1T_3\text{szög} + 180^o - I_1T_1T_2\text{szög} = 360^o - (I_1T_1T_3\text{szög} + I_1T_1T_2\text{szög}) = 60^o .$$

Ebből $\beta + \gamma < \delta + \varepsilon = 60^o$, tehát $\alpha > 120^o$. ♠

A következő két tétel összetartozik. Az első a második érvényességi feltételét jelenti.

T20.8. Tegyük fel, hogy $a \geq b \geq c$. I_1 talpponti háromszöge akkor és csak akkor helyezkedik el a háromszögön belül, ha $\alpha \leq 150^o$, vagy $\alpha > 150^o$ esetén, $\frac{c}{b} \geq 2\sin\delta$, ahol $\delta = \alpha - 150^o$.

B. T_1 és T_3 mindig a háromszög megfelelő oldalán helyezkedik el. Rajzoljuk meg a háromszög K_1, K_2 és K_3 Apollóniusz-köreit és az O középpontú körülírt kört. Ha a háromszög egyenlőszárú, akkor K_1 vagy K_3 egyenes lesz, az alábbiak akkor is érvényesek megfelelő szövegmódosítással, ezekre külön nem térünk ki.

Először T_3-ra bizonyítjuk, hogy a c oldalra esik. A merőleges metszés miatt (T20.1.) OA egyenes érintője a K_1 körnek, ezért K_1 teljes egészében az OA egyenes B felöli oldalán van. Ugyanígy OB érintője K_2-nek, így K_2 teljes egészében az OB egyenes A felöli oldalán van. T20.7. bizonyításából következik, hogy I_1 vagy a háromszögbe, vagy az a oldal másik oldalára, de a körülírt kör belsejébe esik. I_1 tehát nem eshet a c oldal háromszöggel ellentétes oldalára. Mindezekből következik, hogy I_1 az AOB egyenlőszárú háromszögbe esik, de így minden pontjának, tehát I_1-nek is a merőleges vetülete az AB egyenesre az AB szakaszra esik.

A T_1 vonatkozásában, ha I_1 a háromszögbe esik, nincs mit bizonyítani, mert β és γ hegyesszögek. Tegyük fel tehát, hogy I_1 az a odalegyenesnek háromszöggel ellentétes oldalára esik. A bizonyítás hasonló az előzőhöz: a merőleges metszés miatt OB érinti a K_2 kört és OC érinti a K_3 kört, ezért a körök teljes egészükben a BOC szögtérben vannak, így a metszéspontjuk is. I_1 tehát a BOC egyenlőszárú háromszög pontja, és a merőleges vetülete BC alapra esik.

T_2 esetében a helyzet bonyolultabb. T_2 nem eshet a c oldal B-n túli meghosszabbítására. Az OC egyenes érinti a K_3 kört, így a teljes K_3 kör, és ekkor I_1 is az OC egyenes A felöli oldalán van. Mivel az $COA\Delta$ egyenlőszárú, az OCA szög hegyesszög, I_1 vetülete a C-ből kiinduló CA félegyenesre esik.

Ha I_1 a háromszögbe esik, akkor, az A csúcsnál lévő szög belső szögfelezőjének az a oldallal vett metszéspontját E-vel jelölve, I_1 az $AEC\Delta$-be esik, mert a K_1 kör teljes $ABC\Delta$-be eső íve az $AEC\Delta$-ben halad. Mivel az EAC szög nagysága $\frac{\alpha}{2} < 90^o$, és $\gamma < 90^o$, az $AEC\Delta$ pontjainak az AC egyenesre vett merőleges vetülete az a oldalra esik.

Megmutatjuk most, hogy T_2 $\alpha \le 150^o$ esetén is az AC oldal pontja. Legyen A tükörképe a BC egyenesre vonatkozólag A'. Nyilván – A-val együtt – A' is pontja a K_1 körnek, hiszen K_1 középpontja a BC egyenesen van. A nyilván a K_2 Apollóniusz-körön belül van, és egyúttal megmutatjuk, hogy A' pedig kívül. A háromszög területét T-vel, az a odalhoz tartozó magasságát m-mel jelölve

$$2T = am = bc\sin\alpha\,,$$

ezt átrendezve

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{c\sin\alpha} \le \frac{2m}{c}\,,$$

ami azt jelenti, hogy A' a K_2 körön kívül van (ld. T6.1.). Az elmondottak alapján I_1, a K_1 és K_2 körök metszéspontja a K_1 kör AA' ívén található. I_1 tehát az $AA'C$ hegyesszögű háromszögben van, ezért vetülete az AC oldalra esik.

Marad még az $\alpha > 150^o$ esetének vizsgálata. (A T_2 háromszögön kívülre esésének esetét meglehetősen nehéz felrajzolni a háromszög erősen torz volta miatt.) Az I_1AC szöget fogjuk megvizsgálni. Vezessük be a következő jelöléseket: az I_1BT_1 szöget jelöljük φ_1-gyel, az I_1CT_1 szöget φ_2-vel, $\delta = \alpha - 150^o$ (az állítás szerint), vagyis $\beta + \gamma = 30^o - \delta$. Az $I_1T_3AT_2$, vagy az $I_1T_3T_2A$ húrnégyszög tulajdonságai miatt az I_1AC szög nagyságra megegyezik az $I_1T_3T_2$ szöggel, ami 60^o-kal nagyobb, mint az $I_1T_3T_1$ szög. Az $I_1BT_3T_1$ húrnégyszög tulajdonságai miatt viszont az $I_1T_3T_1$ szög nagysága φ_1, tehát az I_1AC szög nagysága $60^o + \varphi_1$. Így T_2 az AC szakaszon kívül van, ha $\varphi_1 > 30^o$, és belül, $\varphi_1 \le 30^o$.

Az előző tétel bizonyításából látható, hogy

$$60^o = \varphi_1 + \varphi_2 + \beta + \gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + 30^o - \delta\,,$$

vagyis

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 30^o + \delta\,.$$

Alkalmazzuk a szinusz-tételt az $I_1BC\Delta$-re, és használjuk fel, hogy I_1 rajta van a K_1 Apollóniusz-körön:

$$\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} = \frac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = \frac{c}{b}\,.$$

Ha $\varphi_1 > 30^o$, akkor

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} < \frac{\sin\delta}{\sin 30^o} = 2\sin\delta\,,$$

ha viszont $\varphi_1 \le 30^o$, akkor

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \ge \frac{\sin\delta}{\sin 30^o} = 2\sin\delta\,.$$

E két utolsó állítás bizonyítja a belülre esés szükséges és elégséges feltételét. ♠

Vegyünk fel a háromszögben egy egyenlő oldalú háromszöget, melynek csúcsai az egyes oldalegyeneseken vannak, legyen ez a $T_1'T_2'T_3'\Delta$ (T_1' az a oldalra, T_2' a b oldalra és T_3' a c oldalra illeszkedik). Rajzoljuk meg a $BT_3'T_1'\Delta$ C_1-gyel jelölt körülírt körét és a $AT_2'T_3'\Delta$ körülírt körét C_3-at. A két körnek van közös pontja, és nem érintheti egymást, mert akkor $\gamma = 120^o$ lenne, ami lehetetlen, tehát két metszéspontjuk van; jelöljük a T_3' -től különböző közös pontot I-vel. I-nek a talpponti háromszöge legyen a $T_1T_2T_3\Delta$.

T20.9. I_1 talpponti háromszöge a legkisebb beírt szabályos háromszög, ha az előző feltétel teljesül. Ha a talponti háromszög kinyúlik az $ABC\Delta$-ből, akkor az a beírt szabályos háromszög lesz a lesz a legkisebb, amelyiknek a b oldalra eső csúcsa A-val egyezik meg.

B. Tegyük fel, hogy $a \geq b \geq c$. Vegyünk fel a háromszögben egy egyenlő oldalú háromszöget, melynek csúcsai az egyes oldalakon vannak, legyen ez a $R_1R_2R_3\Delta$ (R_1 az a oldalra, R_2 a b oldalra és R_3 a c oldalra illeszkedik). Rajzoljuk meg a $BR_3R_1\Delta$ C_2-vel jelölt körülírt körét és a $AR_2R_1\Delta$ körülírt körét C_3-at. A két körnek van közös pontja, R_1, tehát vagy van még egy metszéspontjuk, vagy érintik egymást. A másik metszéspontot, vagy az érintési pontot jelöljük I-vel. A BR_1IR_3 húrnégyszög tulajdonságai miatt az IR_1 és az IR_3 egyenesek hegyesszöge β, akkor is, ha $I = R_1$ és az IR_1 egyenes a két kör közös érintője. Ugyanígy az IR_1 és az IR_2 egyenesek hegyesszöge γ. Ebből következik, hogy az AR_2IR_3 négyszög húrnégyszög, hiszen két szemközti szögének az összege $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. Legyen C_1 az $AR_2R_3\Delta$ köréírt köre, akkor a C_1, C_2 és C_3 körök közös pontja az I. (I-ről ki fog majd derülni, hogy megegyezik az első izodinamikus ponttal, azaz $I = I_1$.)

I-ből bocsássunk merőlegeseket az a, b és c oldalakra, a talppontok legyenek rendre T_1, T_2, T_3. Tegyük fel, hogy I a háromszög belsejébe esik. A BT_1IT_3 négyszög is húrnégyszög, tehát a T_1IT_3 szög egyenlő a R_1IR_3 szöggel, hiszen mindkettő $180^o - \beta$. Az IT_3T_1 szög egyenlő az IR_3R_1 szöggel, mert mindkettő egyenlő az IBC szöggel. Ebből következik, hogy a $T_1IT_3\Delta$ hasonló a $R_1IR_3\Delta$-höz. Ugyanez igaz a $T_3IT_2\Delta$ és a $R_3IR_2\Delta$, továbbá a $T_2IT_1\Delta$ és a $R_2IR_1\Delta$ háromszögekre is, ráadásul a hasonlóság aránya mindhárom esetben egyenlő, így a $T_1T_2T_3\Delta$ is egyenlő oldalú. Mivel $IT_1 < IR_1$, a $T_1T_2T_3\Delta$ a kisebb. Az I talpponti háromszöge egyenlő oldalú háromszög, tehát I izodinamikus pont, továbbá I a háromszögbe esik, tehát első izodinamikus pont.

Ha I a háromszögön kívülre esik, mondjuk az a oldalon kívülre, akkor a C_2 és C_3 körök δ szög alatt metszik egymást a R_1 pontban (a R_1 pontbeli érintők szöge δ). Az $R_1R_2R_3$ egyenlő oldalú háromszög R_1-nél lévő szögét az érintőkkel három részre feloszthatjuk, és a BIR_1R_3 és a CIR_1R_2 húrnégyszögek tulajdonságai miatt a részszögek nagysága β, δ és γ. Ezért

$$\beta + \gamma + \delta = 60^o$$

vagyis $\beta + \gamma \leq 60^o$, és így $\alpha \geq 120^o$. Ez azt jelenti, hogy a háromszög tompaszögű, és I csak a tompaszög szögterébe eshet a háromszögön kívül. Ebben az esetben is megmutatjuk, hogy a $T_1IT_3\Delta$ hasonló a $R_1IR_3\Delta$-höz. A BIT_1T_3 négyszög is húrnégyszög, tehát a T_1IT_3 szög egyenlő a R_1IR_3 szöggel, hiszen mindkettő β. Az IT_3T_1 szög egyenlő az IR_3R_1 szöggel, mert mindkettő egyenlő az IBC szöggel, ami már bizonyítja a hasonlóságot. Ugyanez igaz a $T_3IT_2\Delta$ és a $R_3IR_2\Delta$, továbbá a $T_2IT_1\Delta$ és a $R_2IR_1\Delta$ háromszögekre is, ráadásul a hasonlóság aránya mindhárom esetben egyenlő, így a $T_1T_2T_3\Delta$ is egyenlő oldalú. Mivel $IT_1 < IR_1$, a $T_1T_2T_3\Delta$ a kisebb. Az I talpponti háromszöge egyenlő oldalú háromszög, tehát I izodinamikus pont. Húzzunk párhuzamos egyenest IR_2-vel C-n keresztül, és IR_3-mal B-n keresztül, a metszéspontjuk legyen D. Az $ABDC$ négyszög is húrnégyszög, hiszen hasonló az $AR_3R_1R_2$ négyszöghöz, tehát D a körülírt kör pontja. az I a $BCD\Delta$-ben van, tehát a körülírt kör tartalmazza az I pontot, ezért $I = I_1$ az első izodinamikus pont.

Ha T_2 a háromszögön kívül esik (csak T_2 eshet kívülre), akkor, mivel a beírt egyenlő oldalú háromszögek nagyságát az IR_2 szakasz hossza jellemzi, és ez legkisebb, ha $R_2 = A$, a legkisebb beírt egyenlő oldalú háromszöget akkor kapjuk, ha $R_2 = A$. ♠

T20.10. Tegyük fel továbbra is, hogy $a \geq b \geq c$. Az első izodinamikus pontból, I_1-ből, a b oldal $\beta + 60^o$-os szög alatt, a c oldal $\gamma + 60^o$-os szög alatt látszik. Ha I_1 a háromszögben van, akkor az a oldal is $\alpha + 60^o$-os szögben látszik, de, ha I_1 a háromszögön kívül van, akkor $360^o - (\alpha + 60^o) = 300^o - \alpha$ a látószög nagysága.
I_1 baricentrikus koordinátái: $a\sin(\alpha+60^o)$, $b\sin(\beta+60^o)$, $c\sin(\gamma+60^o)$.

B. Először tegyük fel, hogy I_1 a háromszögbe esik. T20.7. bizonyításában bevezettük az I_1BA szögre a δ, az I_1CA szögre az ε jelölést, és láttuk, hogy $\delta + \varepsilon = 60^o$. Ebből, az ABI_1C konkáv négyszög szögösszegét felhasználva, az a oldal látószöge $\alpha + \delta + \varepsilon = \alpha + 60^o$. A többi oldalra ugyanígy kapjuk meg az állított eredményt.
Ha I_1 a háromszögön kívül van, akkor az a oldal látószöge az ABI_1C konvex négyszög szögösszege alapján $360^o - \alpha - \delta - \varepsilon = 300^o - \alpha$.
Legyen I_1 továbbra is a háromszögön kívül. Jelöljük most az I_1BC szöget δ_1-gyel, az I_1AC szöget ε_1-gyel. Az IT_2AT_3 húrnégyszögben (T_1, T_2, T_3 a talpponti háromszög csúcsai) az $I_1T_3T_2$ szög ε_1, az IAT_3T_1 húrnégyszögben az $I_1T_3T_1$ szög δ_1 nagyságú, tehát $\varepsilon_1 - \delta_1 = 60^o$ (ugyanis a $T_1T_2T_3\Delta$ egyenlő oldalú). Az $I_1AB\Delta$ szögösszege alapján a b oldal látószöge

$$180^o - (\beta+\delta_1) - (\alpha-\varepsilon_1) = \gamma + 60^o.$$

T2.5. alapján I_1 baricentrikus koordinátáit a részháromszögek területeivel is meg lehet adni. Először nézzük azt az esetet, mikor I_1 belső pontja a háromszögnek. Legyen $u = \overline{PA}$, $v = \overline{PB}$, $w = \overline{PC}$, akkor a baricentrikus koordináták $vw\sin(\alpha + 60^o)$, $uw\sin(\beta + 60^o)$, $uv\sin(\gamma + 60^o)$. Az I_1 definíciója szerint $au = bv = cw = \vartheta$, tehát a koordináták átalakíthatók a

$$\frac{\vartheta^2}{bc}\sin(\alpha+60^o), \frac{\vartheta^2}{ac}\sin(\beta+60^o), \frac{\vartheta^2}{ab}\sin(\gamma+60^o)$$

alakba, amit $\frac{abc}{\vartheta^2}$-tel megszorozva kapjuk a fenti állítást. Ha I_1 külső pont, akkor előjeles területtel kell dolgozni, ami azt jelenti, hogy $-vw\sin(300^o - \alpha) = vw\sin(\alpha + 60^o)$-kal kell számolni, ami ugyanazt az eredményt adja. ♠

Az izodinamikus pontokról elmondottak, különösen a T20.6-10. tételek, kísértetiesen hasonlítanak a Napoleon-témakörben (13. fejezetben) elmondottakhoz. Ez nem véletlen, mint az a következő tételből kiderül.

T20.11. Az első izodinamikus pont izogonális konjugáltja (T4.9.) a külső Fermat-pont. Speciálisan, a háromszögbe eső izodinamikus pont izogonális konjugáltja a panoráma pont.

B. Először a második állítást bizonyítjuk. Egy tetszőlegesen választott oldal, mondjuk a c oldal látószöge I_1-ből $\gamma + 60^o$ (ld. T20.10.), míg izogonális konjugáltjából ugyanez a látószög T4.10. alapján$180^o + \gamma - (\gamma + 60^o) = 120^o$, tehát a panoráma pontról van szó.

Ha I_1 a háromszögön kívül van és $a \geq b \geq c$, akkor a c oldal látószöge $\gamma + 60^o$, és izogonális konjugáltjának a látószöge T4.11. szerint $(\gamma + 60^o) - \gamma = 60^o$. Ugyanez igaz a b oldalra is. Az a oldal látószöge I_1-ből $300^o - \alpha$, és izogonális konjugáltjának a látószöge T4.11. szerint

$(300^\circ - \alpha) - (180^\circ - \alpha) = 120^\circ$. A kapott látószögek a külső Fermat-pontot határozzák meg, tehát ez az I_1 izogonális konjugáltja. ♠

Hasonló állítások fogalmazhatók meg a második izodinamikus pontra is, hasonló formulával megadhatók a baricentrikus koordinátái, és izogonális konjugáltja a belső Fermat-pont. Ezeket az állításokat nem részletezzük.

21. Egyéb nevezetes pontok

21.1. *Középső pont*

Jelöljük az a, b és c oldalakhoz hozzáírt körök középpontjait rendre O_a-val, O_b-vel és O_c-vel, az oldalak felezőpontjait F_a-val, F_b-vel és F_c-vel.

T21.1. Az O_aF_a, O_bF_b és O_cF_c egyenesek egy pontban metszik egymást, a pont elnevezése: *középső pont* (németesen: Mittenpunkt). Az M_x középső pont baricentrikus koordinátái:

$$a(s-a),\ b(s-b),\ c(s-c).$$

M_x az $O_aO_bO_c\Delta$ szimmedián pontja.

B. Az $O_aO_bO_c\Delta$-et tekintve az $ABC\Delta$ ennek talpponti háromszöge, tehát BC antiparallel szakasz az O_bO_c oldalhoz viszonyítva. Következésképpen a 16.1. fejezet bevezetőjében elmondottak szerint F_a az $O_aO_bO_c\Delta$ O_a csúcsból kiinduló szimmediánjának egy pontja, tehát O_aF_a az $O_aO_bO_c\Delta$ szimmediánja. Ugyanez igaz az O_bF_b és O_cF_c egyenesekre is, tehát az egyenesek az $O_aO_bO_c\Delta$ szimmedián pontjában metszik egymást.

A segédtételt felhasználva megmutatjuk, hogy az $F_a = (0, 1, 1)$ és az $O_a = (-a, b, c)$ baricentrikus koordinátájú pontokat összekötő egyenes tartalmazza az

$$a(s-a),\ b(s-b),\ c(s-c)$$

baricentrikus koordinátákkal rendelkező pontot. Legyen $\lambda = bc$ és $\mu = -(s-a)$, akkor

$$\lambda\cdot 0+\mu(-a)=a(s-a),$$

és

$$\lambda\cdot 1+\mu b=bc-(s-a)b=b(a+c-s)=b(a+b+c-s-b)=b(s-b).$$

A $\lambda\cdot 1+\mu c=c(s-c)$ összefüggés ugyanígy bizonyítható. ♠

T21.2. A háromszög középső pontja megegyezik a felező háromszög Gergonne-pontjával.

Az M_x középső pont, az S súlypont és az $ABC\Delta$ G Gergonne pontja egy egyenesre esik, és

$$\overline{SG}=2\cdot\overline{SM_X}\ .$$

B. Mivel a felező háromszög oldalainak hossza $\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}$, a Gergonne-pontját előállíthatjuk az F_a, F_b, F_c csúcsaiba tett $\left(\frac{s}{2}-\frac{b}{2}\right)\left(\frac{s}{2}-\frac{c}{2}\right)$, $\left(\frac{s}{2}-\frac{c}{2}\right)\left(\frac{s}{2}-\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{s}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{s}{2}-\frac{b}{2}\right)$ súlyok súlypontjaként. A súlyokat 8-cal megszorozhatjuk, $2(s-b)(s-c)$, $2(s-c)(s-a)$, $2(s-a)(s-b)$, az eredmény ugyanaz. Az F_a-ban elhelyezett $2(s-b)(s-c)$ súlyt osszuk szét a B és a C csúcsok között, mindkét csúcsba $(s-b)(s-c)$ súlyt helyezve, és cselekedjünk hasonlóan az F_b-ben és F_c-ben lévő súlyokkal is. Ekkor az A csúcsba

$$(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)=(s-a)(s-c+s-b)=a(s-a)$$

súly kerül, hasonlóan a B-be $b(s-b)$, és a C-be $c(s-c)$, mely súlyok a középső pontot határozzák meg.

Ha a felező háromszöget S-ből, mint külső hasonlósági középpontból kétszeresére felnagyítjuk, akkor M_x képe G lesz, és a nagyításból a második állítás leolvasható. ♠

T21.3. A szimmedián pont és a beírható kör középpontját összekötő egyenes átmegy a középső ponton.

B. Mivel a körülírható kör középpontjának baricentrikus koordinátái a, b, c és a szimmedián pont baricentrikus koordinátái a^2, b^2, c^2, a segédtétel szerint a következő egyenletrendszer megoldhatóságát kell bizonyítani:

$$\lambda a + \mu a^2 = a(s-a),$$
$$\lambda b + \mu b^2 = b(s-b),$$
$$\lambda c + \mu c^2 = c(s-c).$$

Az egyenletrendszer megoldása azonban, mint könnyen látható, $\lambda = s$, $\mu = -1$. ♠

21.2. *Általánosított Napóleon-pontok*

Készítsünk egy egyenlőszárú háromszöget, melynek az alapja a háromszögünk a oldala, az alapon lévő szögei δ nagyságúak, és nincs közös pontja az $ABC\Delta$ belsejével. Az egyenlőszárú háromszög csúcsát jelöljük A_1-gyel. Változatlan δ szöggel ugyanezt a konstrukciót végezzük el a b és a c oldal vonatkozásában is, a kapott csúcspontokat jelöljük B_1-gyel, ill. C_1-gyel.

Hasonló konstrukciót képezhetünk, ha mindegyik egyenlőszárú háromszöget úgy vesszük fel, hogy legyen közös belső pontja az $ABC\Delta$-gel. Ezt az esetet negatív δ szöggel fogjuk jellemezni (vö. Napoleon-háromszögek konstrukciója, 13. fejezet). Nyilván $-90^\circ < \delta < 90^\circ$.

T21.4. Az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást, ezt a pontot általánosított Napoleon-pontnak nevezzük. Baricentrikus koordinátái: $\dfrac{a}{\sin(\alpha+\delta)}, \dfrac{b}{\sin(\beta+\delta)}, \dfrac{c}{\sin(\gamma+\delta)}$.
Speciálisan, ha $\delta = 30^\circ$, akkor külső Napoleon pontnak, ha $\delta = -30^\circ$, akkor belső Napoleon pontnak, ha $\delta = \pm 45^\circ$, akkor (külső ill. belső) Vecten-pontnak nevezik.

B. A bizonyítás érdekessége, hogy öt szinusz-tételt használunk fel.

Jelöljük az AA_1 egyenes és a BC egyenes metszéspontját D-vel, valamint legyen $x = \overline{BD}$, $y = \overline{CD}$, $d = \overline{CA_1}$. Jelöljük továbbá a BAD szöget α_1-gyel, a CAD szöget α_2-vel. Az $ABD\Delta$-re és az $ABA_1\Delta$-re felírt szinusz-tételek szerint

$$\frac{x}{\overline{AD}} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta} \quad \text{és} \quad \frac{d}{\overline{AA_1}} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\beta+\delta)},$$

majd képezzük a két egyenlet hányadosát:

$$\frac{x}{d} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AA_1}} \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta}.$$

Ugyanezt tegyük meg az $ACD\Delta$-re és az $ACA_1\Delta$-re is, kapjuk, hogy

$$\frac{y}{d} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AA_1}} \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma}.$$

Képezzük a két utóbbi egyenlet hányadosát, akkor

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{c}{b} \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}.$$

Ez alapján megállapíthatjuk, hogy a B pontba helyezett $\frac{b}{\sin(\beta+\delta)}$ és a C pontba helyezett $\frac{c}{\sin(\gamma+\delta)}$ súlyok súlypontja D-ben van. Ha még az A csúcsba is helyezünk el súlyt, akkor a három súly súlypontja az AD egyenesen lesz.

Beláttuk tehát azt, hogy a megadott baricentrikus koordinátákkal rendelkező pont az AA_1 egyenesre esik, ugyanígy bizonyítható, hogy a BB_1-re és a CC_1-re esik, tehát a három egyenes közös metszéspontját képezi. ♠

21.3. *Egyenlő metszetek középpontja*

A háromszögben vegyünk fel egy P pontot, és húzzunk P-n keresztül párhuzamos egyeneseket az oldalakkal. Ha az egyenesek háromszögbe eső szakaszai egyenlő hosszúságúak, akkor P-t az *egyenlő metszetek középpontjának* nevezzük.

T21.5. Legyen P az egyenlő metszetek középpontja. Az oldalakkal párhuzamos metszetek hossza

$$d=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

vagyis az oldalak harmonikus közepének $\frac{2}{3}$-a. P baricentrikus koordinátái:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$$

Az egyenlő metszetek középpontja nem biztos, hogy létezik, a létezés feltétele – ha a-val jelöljük a legrövidebb oldalt – az, hogy $\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ legyen, vagyis egyetlen baricentrikus koordináta se legyen negatív.

B. Legyenek P baricentrikus koordinátái p, q, r és tegyük fel egyelőre, hogy $p+q+r=1$. Az AP egyenes messe az a oldalt D-ben és a P-n átmenő a oldallal párhuzamos metszet hosszát jelöljük d-vel. Hasonló háromszögek miatt $a:d=\overline{AD}:\overline{AP}=1+\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}}$, és az utóbbi arány a súlypont miatt kifejezhető a baricentrikus koordinátákkal az $a:d=1+\frac{p}{q+r}=\frac{1}{1-p}$ alakban, azaz $\frac{d}{a}=1-p$. Hasonlóan $\frac{d}{b}=1-q$ és $\frac{d}{c}=1-r$. A három egyenlet összege

$$d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2,$$

ami bizonyítja az első állítást.

Legyen $W=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, akkor $p=1-\frac{d}{a}=1-\frac{2}{aW}=\frac{1}{W}(W-\frac{2}{a})=\frac{1}{W}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. q-ra és r-re hasonló formulát kapunk, melyeket W-vel végigszorozva megkapjuk a második állítást.

A P pontnak a háromszöghöz kell tartoznia, ezért a baricentrikus koordináták nem lehetnek negatívak. ♠

Könnyű példát mutatni arra az esetre, amikor az egyenlő metszetek középpontja nem létezik. Ha készítünk egy olyan egyenlőszárú háromszöget, melynek szára kétszer olyan hosszú, mint az alapja, azaz $b = 2a$, akkor P az alap felezőpontjára esik. Ha $b > 2a$, akkor viszont ilyen pont nincs. Ugyanis a szárakkal párhuzamos metszetek nem lehetnek rövidebbek, mint $\frac{b}{2}$, mert ekkor az egyeneseik a háromszögön kívül metszenék egymást, viszont az alappal párhuzamos metszet nem lehet a-nál nagyobb. Ezért a metszetek egyenlősége $\frac{b}{2} > a$ miatt kizárt.

Általános háromszög esetén hogyan lehet az ilyen P pontot megtalálni, megszerkeszteni?

T21.6. A háromszög beírt körének középpontjából készítsük el annak izotonális konjugáltját (ld. T5.25.), O^*-ot. Az S súlypont a PO^* szakaszra esik, mégpedig

$$\overline{PS} = 2 \cdot \overline{O^* S}.$$

B. A beírt kör középpontjának baricentrikus koordinátái a, b, c, ezért (ld. T5.25.) O^* baricentrikus koordinátái $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. A P koordinátái $-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ az előző tétel szerint. Vegyük észre, hogy a súlyok összege mindkét esetben az előző tétel bizonyításában szereplő W kifejezés, ezért a PO^* szakasz 2 : 1 arányú osztópontjának baricentrikus koordinátái

$$2\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)+\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=(W, W, W).$$

A W, W, W baricentrikus koordináták ugyanazt a pontot adják meg, mint az 1, 1, 1 koordináták, tehát a súlypontot. ♠

Felmerül a kérdés, hogy miért ragaszkodunk ahhoz, hogy P a háromszög pontja legyen. Általánosítsuk a definíciót, P legyen a sík tetszőleges pontja, és a P-n áthaladó oldalakkal párhuzamos egyenesek két-két oldalegyenes közti szakaszainak hossza egyezzen meg. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy P az *egyenlő párhuzamos szelők középpontja*. Ilyen pont T21.5. értelmében mindig van, a baj csak az, hogy általában négy is! Erre egyszerű példát mutatunk.

Legyen az $ABC\Delta$ egyenlő oldalú háromszög, ekkor a középpont természetesen egyben az egyenlő metszetek középpontja is. Nagyítsuk ki az $ABC\Delta$ felezőháromszögét a középpontból, mint belső hasonlósági pontból (vagyis a pont és a tükörképe közti szakasz tartalmazza a hasonlósági centrumot) 8-szorosára. A kapott háromszög minden csúcsa és a középpontja is megfelel az előírásnak, mellyel az egyenlő párhuzamos szelők középpontját definiáltuk. T21.5.-ban azért kaptunk csak egy megoldást, mert a $\frac{d}{a}=1-p$ kritérium előjeles esetben $\frac{d}{a}=|1-p|$ formában írandó fel.

T21.7. Az egyenlő párhuzamos szelők P, P_1, P_2, és P_3 középpontjainak baricentrikus koordinátái és a hozzátartozó szelők hossza:

$$P_1:\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ -\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ -\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c};\qquad d_1=2\left|-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|^{-1}$$

$$P_2:\quad -\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c};\qquad d_2=2\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|^{-1}$$

$$P_3:\quad -\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\qquad d_3=2\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|^{-1}$$

és P koordinátái a T21.5.-ben megadottak szerint. Ha P az a oldalra esik, akkor P_1 nem létezik, ha a b oldalra, akkor P_2, ha a c oldalra, akkor P_3 nem létezik. Legfeljebb négy ilyen pont van, de három biztosan létezik.

B. Ugyanúgy, mint T21.5.-ben, de most a $\frac{d}{a}=|1-p|$, $\frac{d}{b}=|1-q|$, $\frac{d}{c}=|1-r|$ egyenletrendszert kell megoldani. Ennek egyik megoldását megkaptuk T21.5.-ben, ez most is érvényes. További megoldást kaphatunk a $-\frac{d}{a}=1-p$, $\frac{d}{b}=1-q$, $\frac{d}{c}=1-r$ egyenletrendszerből. Ugyanolyan technikával mint ott, megkapjuk a P_1-re vonatkozó állításokat. A $\frac{d}{a}=1-p$, $-\frac{d}{b}=1-q$, $\frac{d}{c}=1-r$ egyenletrendszerből a P_2-re, a $\frac{d}{a}=1-p$, $\frac{d}{b}=1-q$, $-\frac{d}{c}=1-r$ egyenletrendszerből a P_3-ra vonatkozó adatok jönnek ki. A további előjel variációk ugyanezeket az egyenletrendszereket adják $-d$-re, tehát más megoldás nincs.

Ha $-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, akkor P_1 nem létezik, mert a koordináták összege nulla. Ez ekvivalens azzal az esettel, amikor P az a oldalra esik, mert az A csúcsba helyezett súly 0. Hasonló a helyzet a többi oldal vonatkozásában is. ♠

T21.8. A háromszög a oldalához hozzáírt körének középpontjából készítsük el annak izotonális konjugáltját (ld. T5.25.), O_1^*-ot. Az S súlypont a $P_1O_1^*$ szakaszra esik, mégpedig

$$\overline{P_1S}=2\cdot\overline{O_1^*S}\,.$$

Hasonló állítások fogalmazhatók meg P_2-re a b oldal, és P_3-ra a c oldal vonatkozásában.

B. Az a oldalhoz hozzáírt kör középpontjának baricentrikus koordinátái $-a$, b, c, ezért (ld. T5.25.) O_1^* baricentrikus koordinátái $-\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$. A P_1 koordinátái $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ -\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c},-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ az előző tétel szerint. Vegyük észre, hogy a súlyok összege mindkét esetben a $W_1=-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ kifejezés, ezért a PO^* szakasz 2 : 1 arányú osztópontjának baricentrikus koordinátái

$$2\left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ -\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ -\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=(W_1,W_1,W_1).$$

A W_1, W_1, W_1 baricentrikus koordináták ugyanazt a pontot adják meg, mint az 1, 1, 1 koordináták, tehát a súlypontot. ♠

22. Vetítések

22.1. *Térbeli vetítés*

A célunk megvizsgálni, hogy milyen alakzatok lehetnek egy általános háromszög merőleges vetületei. A T22.1-ben kapott eredmény újabb bizonyítási technikát ad a kezünkbe, mint ezt egy példával meg is mutatjuk.

A T22.1. bizonyítása nem könnyű feladat, bizonyítását egy segédtétellel vezetjük be.

Segédtétel. Vegyünk fel az e egyenesből kiinduló S_0, S_1, S_2 félsíkokat, melyek közül semelyik kettő nem esik egy síkba. Tegyük fel, hogy S_1 és S_2 szöge kisebb, mint 90°, és S_0 ebbe a szögtérbe esik. Messük el az e egyenest egy T síkkal. A T sík és az S_i félsík metszetét jelöljük a_i-vel ($i = 0, 1, 2$). Vegyünk fel egy $0 < \varphi < 180°$ szöget tetszőlegesen. A T sík mindig megadható oly módon, hogy a_1 és a_2 szöge φ legyen, és a_0 felezze az a_1 és a_2 szögét.

Bizonyítás. Vegyünk fel egy térbeli koordináta rendszert úgy, hogy a z tengely egyezzen meg az e egyenessel és az y tengely az S_0 síkba essen. Jelöljük az S_1 és az S_0 sík szögét α-val, az S_2 és S_0 szögét β-val (α < 90°, β < 90°). Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\alpha \leq \beta$. (Az xy koordinátasíkra való vetületben tudjuk legjobban felrajzolni és követni az elmondottakat.)

Vegyünk fel egy $\boldsymbol{v}_1$ egységvektort az S_1 síkban, ennek általános alakja: $\boldsymbol{v}_1 = (x, x\text{ctg}\alpha, z_1)$, ahol

$$|\boldsymbol{v}_1|^2 = x^2 + x^2\text{ctg}^2\alpha + z_1^2 = \frac{x^2}{\sin^2\alpha} + z_1^2 = 1.$$

Ebből $x \leq \sin\alpha$, és feltehető, hogy $x > 0$. Első lépésben megmutatjuk, hogy $\boldsymbol{v}_1$-hez mindig található $\boldsymbol{v}_2 = (-x, x\text{ctg}\beta, z_2)$ alakú egységvektor az S_2 síkban, ugyanis

$$x^2 + x^2\text{ctg}^2\beta + z_2^2 = \frac{x^2}{\sin^2\beta} + z_2^2 = 1$$

mindig megoldható z_2-re, hiszen $0 < x \leq \sin\alpha \leq \sin\beta$. Tekintsük a $\boldsymbol{v}_1$ és a $\boldsymbol{v}_2$ vektorokat az origóból kiinduló vektoroknak és a T síkot fektessük át rajtuk, akkor a vektorok által meghatározott háromszögnek a_0 a súlyvonala, de egyenlő szárú háromszög lévén egyben szögfelezője is.

A továbbiakban csak azt kell megmutatni, hogy $\boldsymbol{v}_1$ megválasztható úgy, hogy a $\boldsymbol{v}_2$-vel alkotott szöge φ legyen. Az egyenletből kifejezve

$$z_2 = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{\sin^2\beta}},$$

vagyis $x < \sin\alpha$ esetben z_2-re két megoldás is van.

Foglalkozzunk először a pozitív megoldással. Nyilvánvalóan z_2 az x-nek folytonos függvénye, és ha $x \to 0$, akkor $z_1 \to 1$, $z_2 \to 1$, és a két vektor szögét ψ-vel jelölve

$$\cos\psi = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = x^2(-1 + ctg\,\alpha ctg\,\beta) + z_1 z_2 \to 1.$$

Ha $x = \sin\alpha$, akkor $z_1 = 0$, $\cos\psi = \sin^2\alpha(1 - \text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta) = c_0$. $\cos\psi$ x-nek folytonos függvénye, ezért minden értéket felvesz az értékeket a $[c_0, 1)$ intervallumból választva.

z_2-re negatív megoldást választva hasonló meggondolással, ha $x \to 0$, akkor $z_1 \to 1, z_2 \to -1$, és $\cos\psi = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = x^2(-1+ctg\alpha ctg\beta) + z_1 z_2 \to -1$. Ha $x = \sin\alpha$, akkor $z_1 = 0$, $\cos\psi = c_0$. A $\cos\psi$ x-nek folytonos függvénye, ezért minden értéket felvesz az értékeket a $(-1, c_0]$ intervallumból. Ez azt jelenti, hogy ψ is minden értéket felvesz a $(0, 180^o)$ intervallumban. Ezt akartuk bizonyítani. ♠

T22.1. Bármely háromszögnek van szabályos háromszög alakú merőleges vetülete.

Ugyanígy bizonyítható, hogy bármely háromszögnek van előre megadott háromszöghöz hasonló merőleges vetülete.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $ABC\Delta$-ben $b \geq$ a. Húzzuk meg a C szög szögfelezőjét, ez a c oldalt $a : b$ arányban osztja. Ugyanez igaz a vetületben is. Ha a vetület egyenlő oldalú háromszög, akkor az egyik oldalát $a : b$ arányban osztó pontot jelöljük P-vel. Helyezzük el az xy koordináta rendszerben az *A'B'C'* egyenlő oldalú háromszöget oly módon, hogy a P-vel szemközti *C'* csúcsa az origóba essen, P az y tengely pozitív felén legyen, és a P-t tartalmazó oldalon a P-hez közelebbi *B'* csúcs a pozitív síknegyedbe kerüljön.

Vegyük fel a koordináta rendszer z tengelyét, ez legyen a segédtételben szereplő e egyenes, majd vegyük fel az S_1 félsíkot, mely átmegy *B'*-n, S_2 félsíkot, mely átmegy *A'*-n, továbbá az S_0 félsíkot, mely az yz koordinátasíkba esik. Az $ABC\Delta$ γ szögéhez készítsük el a segédtétel értelmében létező T metsző síkot. Megmutatjuk, hogy a T síkon az $A_1B_1C_1\Delta$, melynek merőleges vetülete az *A'B'C'* egyenlő oldalú háromszög, hasonló lesz az $ABC\Delta$-höz. Jelöljük P_1-gyel az A_1B_1 oldal azon pontját melynek a vetülete P, akkor C_1P_1 szögfelező lévén

$$\overline{C_1B_1} : \overline{C_1A_1} = \overline{P_1B_1} : \overline{P_1A_1} = \overline{PB'} : \overline{PA'} = a : b,$$

tehát két oldal aránya és a közbezárt szög megegyezik, ezért a háromszögek hasonlóak. Nagyítással elérhető az egybevágóság is, így a tételt bebizonyítottuk. ♠

A következő részben a T22.1. alkalmazását mutatjuk be kihasználva azt, hogy a vetítés az egyirányú szakaszok arányát is és a területek arányát is megtartja.

A $0 < p < 1$ számhoz tartozó osztópont háromszög (ld. 9.4.) a, b és c oldalon lévő csúcsait jelölje rendre A_1, B_1 és C_1.

T22.2. Az $ABC\Delta$ területét jelöljük T-vel. Az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek háromszöget határolnak (p = ½ esetben ez elfajult), melynek területe

$$T_0 = \frac{(1-2p)^2}{1-p+p^2}T$$

függetlenül a háromszög alakjától.

Bizonyítás. T22.1. értelmében elég egyenlő oldalú háromszögre bizonyítani az állítást, hiszen a vetítés az egyirányú szakaszok arányát is és a területek arányát is megtartja. Feltehető továbbá, hogy a szabályos háromszög oldala egységnyi.

A $BB_1C\Delta$ T_1 területe $T_1 = pT$, hiszen az egynlő oldalú háromszög AC alapját p-edrészére csökkentettük. A $d = \overline{BB_1}$ távolságot Pythagorasz-tétellel könnyen kiszámíthatjuk:

$$d^2=\left(\frac{1}{2}-p\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1-p+p^2.$$

Jejöljük a BB_1 és a CC_1 egyenesek metszéspontját Q-val, akkor a $BB_1C\Delta$ hasonló a $CB_1Q\Delta$-höz, mert a B_1-nél lévő szögük közös és a B_1BC szög megegyezik a C_1CA szöggel a háromszögek egybevágósága miatt. Ebből, x-szel jelölve a B_1Q távolságot $p : d = x : p$, vagyis

$$\frac{x}{d}=\frac{p^2}{d^2}.$$

A $CB_1Q\Delta$ T_2 területe ebből adódóan $T_2=\frac{x}{d}T_1$ és így $T_1-T_2=pT\left(1-\frac{x}{d}\right)$. Az $ABC\Delta$ területéből három darab $T_1 - T_2$ nagyságú területet kell elhagyni, hogy megkapjuk T_0-t:

$$T_0=T-3(T_1-T_2)=T\left(1-3p\left(1-\frac{x}{d}\right)\right)=T\left(1-3p\left(1-\frac{p^2}{d^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{T}{d^2}(1-4p+4p^2)=\frac{(1-2p)^2}{1-p+p^2}T,$$

amit bizonyítani akartunk.

22.2. *Síkbeli vetítés*

Az $ABC\Delta$ síkjában lévő t egyenesre vetítjük a háromszöget. Vetítésen itt nem feltétlenül merőleges vetítést értünk, és csupán a háromszög „árnyékát” vizsgáljuk.

T22.3. Az $ABC\Delta$ t-re vonatkozó vetülete nem lehet rövidebb, mint a háromszög legkisebb magassága. Egyenlőség csak merőleges vetítéssel érhető el.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy t nem metszi a háromszöget és a háromszöget úgy betűztük meg, hogy A az egyenestől legtávolabbi (esetleg az egyik legtávolabbi), C pedig a legközelebbi csúcsa (esetleg egyik ezek közül). Húzunk a t-vel párhuzamos egyenest a B-n keresztül, ez metszeni fogja az AC egyenest egy P pontban. A BP szakasz a háromszögbe esik, tehát a háromszög vetülete tartalmazza a BP szakasz $B'P'$ vetületét. Ebből következik, hogy a vetület hossza legalább akkora, mint

$$\overline{B'P'}=\overline{BP}\geq m_b\geq\min(m_a,m_b,m_c)=m_0,$$

ahol m_a, m_b és m_c a háromszög magasságait jelöli.

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy valamely nem merőleges vetület hossza is m_0. A vetítősugarakra merőlegesen vegyünk fel egy t_1 egyenest; a háromszögnek t_1-re vonatkozó vetülete m_0-nál kisebb lesz, ami lehetetlen. ♠

Alkalmazásként mutatjuk be az alábbi állítást.

T22.4. Ha az ABC általános háromszögből kivágunk egy szabályos háromszöget, akkor a szabályos háromszög magassága mindig kisebb, mint az $ABC\Delta$ legkisebb oldala. A becslés pontos abban az értelemben, hogy tetszőleges $0 < p < 1$ számhoz található olyan háromszög, amelynek legkisebb oldala a és amelyből kivágható pa-nál nagyobb magasságú szabályos háromszög.

Bizonyítás. A kivágott szabályos háromszöget rajzoljuk be az *ABC*Δ-be, majd az *AB* egyenessel (vagy az *AC* egyenessel) párhuzamos vetítősugarakkal vetítsük rá a legkisebbnek felvett a oldalra. Mivel a szabályos háromszög vetülete az *AB* szakaszra kerül, T22.3. miatt az egyenlő oldalú háromszög m magassága nem lehet a-nál nagyobb.

$m = a$ lehetetlen, mert ez csak merőleges vetítés esetén lenne lehetséges, de *AB* és *AC* egyike biztosan nem merőleges a-ra.

Válasszunk derékszögű háromszöget, legyen $\gamma = 90°$, és $\mathrm{tg}\alpha < \min(1, \sqrt{3}(1-p))$. Az *AC* oldalon legyen a szabályos háromszög két csúcsa, míg a harmadik csúcs kerüljön az *AB* oldalra. Mivel $\mathrm{tg}\alpha < 1$, a legkisebb oldal a. Erre a háromszögre

$$a - m = \frac{m}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha < \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{3}(1-p) = a(1-p),$$

mely szerint $m > pa$. ♠

23. Körök baricentrikus egyenletei

A célunk a körök általános egyenletét, majd speciális, háromszöghöz kapcsolható körök konkrét egyenletét megadni baricentrikus koordinátákkal. Ebben a fejezetben végig feltételezzük, és többször is kimondjuk feltételként, hogy a baricentrikus koordináták normáltak, vagyis a koordináták összege 1.

23.1. *Mese a koordinátarendszerekről*

Egyszer volt, ősrégen volt a jó öreg Descartes-féle koordinátarendszer. Jóval később – az Óperenciás tengeren is túl – észrevették, hogy a háromszög geometriájában jól alkalmazható a baricentrikus koordinátarendszer is. Most (részben meseszerű) összehasonlítást kívánunk adni a két koordinátarendszer vonatkozásában. Az első alapvető különbség az, hogy – mivel az *ABC*Δ-et midig adottnak tételezzük fel – a baricentrikus rendszer is adott. A Descartes koordnátarendszert azonban tetszőlegesen megválaszthatjuk.

Első meseszerű – matematikailag nem megalapozott – kérdésünk az, hogy melyik pont tekinthető a baricentrikus koordinátarendszer origójának? Az Euler-tételben is (T14.1.) és a Feuerbach-tételben is (T15.1.) a bizonyítás azzal kezdődik, hogy a Descartes koordinátarendszer origóját *O*-nak, a körülírt kör középpontjának választjuk. Feltehetőleg nem véletlenül. Mint a továbbiak mutatják, nem helytelen elképzelés, *O*-t lehet a baricentrikus koordinátarendszer origójának tekinteni.

A Descartes koordinátarendszerben a legegyszerűbb kör-egyenlet az origó körüli egységsugarú kör egyenlete, amit röviden egységkörnek nevezünk. Képlettel megadva az

$$K(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

egyenletről van szó. Második meseszerű kérdés: mi felel meg a $K(x,y)=0$ egyenletnek baricentrikus esetben? Tudjuk a választ, hiszen meglepett minket, hogy a körülírt kör egyenlete baricentrikus koordinátákkal milyen egyszerű:

$$H(p,q,r)=a^2qr+b^2rp+c^2pq=0.$$

Feltehetően ez az egységkör megfelelője, és a kör középpontja is *O*, amit az origónak képzelünk.

A további bámulatos párhuzamok már mellőzik a meseszerű elemeket, matematikailag is igazoltak. A Descartes koordinátarendszerre vonatkozó állításokat nem fogjuk igazolni, noha igen egyszerűen beláthatók, de nem fogjuk ezeket használni. A baricentrikus koordinátákra vonatkozóakat a későbbiek során (a 23.4. és 23.5. fejezetben) be fogjuk bizonyítani, a bizonyítások helyenként elég hosszadalmasak.

Innen kezdve tételezzük fel, hogy a baricenrtikus koordináták összege 1, azaz normáltak.

Az egységkörrel, ill. a körülírt körrel koncentrikus körök egyenletei

$$K(x,y)+d=0, \qquad \text{ill.} \qquad H(p,q,r)+d=0.$$

A fenti egyenleteket kielégítő pontok halmaza vagy üres, vagy kör, beleértve a nullasugarú kört is. A kör sugara

$$r=\sqrt{d-1}, \qquad \text{ill.} \qquad r=\sqrt{d+R^2},$$

ahol *R* a körülírt kör sugara (ld. a 23.4. fejezet 1. és 2. segédtétele).

Tetszőleges kör egyenlete

$$K(x,y)+l(x,y)=0, \qquad \text{ill.} \qquad H(p,q,r)+l(p,q,r)=0$$
alakú, ahol $l(x, y)$ ill. $l(p, q, r)$ a változók lineáris függvénye, és minden ilyen egyenletnek eleget tevő pontok halmaza vagy üres, vagy (esetleg nullasugarú) kör. (Ld. T23.6. és T23.7.)

Ha a tetszőleges P pont koordinátái x, y ill. p, q, r, $(p+q+r=1)$ és a fenti egyenletek ténylegesen kör egyenletek, akkor
$$K(x,y)+l(x,y), \qquad \text{ill.} \qquad -[H(p,q,r)+l(p,q,r)]$$
a P pont körre vonatkozó hatványa (ld. T23.8.).

Ha két kör egyenlete
$$K_i(x,y)+l_i(x,y)=0, \qquad \text{ill.} \qquad H_i(p,q,r)+l_i(p,q,r)=0$$
(i = 1, 2), akkor a két kör hatványvonalának az egyenlete
$$l_1(x,y)-l_2(x,y)=0, \qquad \text{ill.} \qquad l_1(p,q,r)-l_2(p,q,r)=0$$
(ld. 23.9.).

23.2. *A háromszöghöz kapcsolt körök egyenletei*

Tudjuk, hogy pl. a beírt kör baricentrikus egyenletét a $H(p,q,r) + l(p,q,r) = 0$ alakban kell keresni.

T23.1. A beírt kör baricentrikus egyenlete (normált koordinátákat használva)
$$a^2qr+b^2pr+c^2pq-(s-a)^2p-(s-b)^2q-(s-c)^2r=0.$$

B. T23.7. alapján, ha ellenőrizzük, hogy az érintési pontok koordinátái kielégítik az adott egyenletet, ez csak a beírt kör egyenlete lehet. Az a oldalon lévő érintési pont (nem normált) baricentrikus koordinátái 0, $s-c$, $s-b$, normálva: 0, $\frac{s-c}{a}, \frac{s-b}{a}$. Helyettesítsük be az egyenletbe:
$$a^2qr+b^2pr+c^2pq=a^2\frac{(s-c)(s-b)}{a^2}=(s-b)(s-c),$$
$$(s-a)^2p+(s-b)^2q+(s-c)^2r=(s-b)^2\frac{s-c}{a}+(s-c)^2\frac{s-b}{a}=$$
$$=\frac{1}{a}(s-b)(s-c)(s-c+s-b)=(s-b)(s-c),$$
tehát a kör átmegy az a oldalon lévő érintési ponton.
Az egyenlet ciklikus szimmetriája miatt a b és a c oldalon lévő érintési pontok koordinátái is kielégítik az egyenletet. ♠

T23.2. Az a oldalhoz hozzáírt kör baricentrikus egyenlete (normált koordinátákat feltételezve)
$$a^2qr+b^2pr+c^2pq-s^2p-(s-c)^2q-(s-b)^2r=0.$$
Hasonlóan a b és a c oldalhoz hozzáírt körök egyenletei:
$$a^2qr+b^2pr+c^2pq-(s-c)^2p-s^2q-(s-a)^2r=0,$$
$$a^2qr+b^2pr+c^2pq-(s-b)^2p-(s-a)^2q-s^2r=0.$$

B. Elég az a oldalhoz írt körrel foglalkozni. Az a oldalon lévő érintési pont normált koordinátái 0, $\frac{s-b}{a}$, $\frac{s-c}{a}$. Behelyettesítve az egyenletbe

$$a^2qr+b^2pr+c^2pq=a^2\frac{(s-b)(s-c)}{a^2}=(s-b)(s-c),$$

$$s^2p+(s-c)^2q+(s-b)^2r=(s-c)^2\frac{s-b}{a}+(s-b)^2\frac{s-c}{a}=$$

$$=\frac{1}{a}(s-b)(s-c)(s-c+s-b)=(s-b)(s-c).$$

Itt meg kell nézni még egy érintési pontot, mondjuk a b oldal meghosszabbítására esőt, melynek koordinátái $-\frac{s-b}{b}$, 0, $\frac{s}{b}$. Behelyettesítéssel

$$a^2qr+b^2pr+c^2pq=-b^2\frac{s(s-b)}{b^2}=-s(s-b),$$

$$s^2p+(s^2-c)q+(s-b)^2r=-s^2\frac{s-b}{b}+(s-b)^2\frac{s}{b}=$$

$$=\frac{1}{b}s(s-b)(-s+s-b)=-s(s-b).$$

A harmadik érintési pontra ugyanezt kell elmondani a b és a c jelöléseket felcserélve. ♠

Használjuk itt is a

$$w_1=-a^2+b^2+c^2$$
$$w_2=a^2-b^2+c^2$$
$$w_3=a^2+b^2-c^2$$

jelölésrendszert.

T23.3. A Feuerbach-kör baricentrikus egyenlete

$$a^2qr+b^2pr+c^2pq-\frac{1}{4}(w_1p+w_2q+w_3r).$$

B. Meg kell mutatni, hogy a kör átmegy az oldalfelező pontokon. A szimmetria miatt elég az a oldal felezőpontjára, vagyis a 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ koordinátájú pontra bizonyítani. Behelyettesítve

$$a^2qr+b^2pr+c^2pq=\frac{a^2}{4},$$

$$\frac{1}{4}(w_1p+w_2q+w_3r)=\frac{1}{8}(w_2+w_3)=\frac{1}{8}2a^2=\frac{a^2}{4}.$$ ♠

A Feuerbach-tétel, T15.1., szerint a Feuerbach kör érinti a beírt kört. Közös érintőjük baricentrikus egyenlete könnyen meghatározható, hiszen a közös érintő egyben hatványvonal is.

T23.4. A Feuerbach kör és a beírt kör közös érintőjének baricentrikus egyenlete

$$(a-b)(a-c)p+(b-c)(b-a)q+(c-a)(c-b)r=0,$$

ami, ha az oldalak különbözőek, akkor átalakítható a

$$\frac{p}{b-c}+\frac{q}{c-a}+\frac{r}{a-b}=0$$

alakba. (Itt nem normált koordinátákat is használhatunk.)

B. A T23.9. értelmében a hatványvonal egyenlete $l_1(p,q,r) - l_2(p,q,r) = 0$, ahol l_1 és l_2 a körök egyenletében szereplő homogén lineáris tagok. Felhasználva T23.1.-et és T23.3.-at

$$l_1(p,q,r) - l_2(p,q,r) = ((s-a)^2-\frac{1}{4}w_1)p+((s-b)^2-\frac{1}{4}w_2)q+((s-c)^2-\frac{1}{4}w_3)r.$$

Alakítsuk át az első tagot, a többi átalakítása ugyanígy elvégezhető:

$$(s-a)^2-\frac{1}{4}w_1=\frac{1}{4}\left((-a+b+c)^2+a^2-b^2-c^2\right)=\frac{1}{2}(a^2-ab-ac+bc)=\frac{1}{2}(a-b)(a-c).$$

Az érintő egyenlete tehát

$$(a-b)(a-c)p+(b-c)(b-a)q+(c-a)(c-b)r=0,$$

amit, feltételezve *a, b* és *c* különbözőségét, végig oszthatunk $(a-b)(a-c)(b-c)$-vel, így megkapjuk a tételben kimondott másik alakot is. ♠

23.3. *A Feuerbach-pont*

A Feuerbach-tételből (T15.1.) tudjuk, hogy a Feuerbach-kör és a beírt kör érintik egymást. Röviden az érintési pontot nevezzük Feuerbach-pontnak. Pontosabban az Euler-féle sugáregyenlőtlenség (T14.1) alapján azt is tudjuk, hogy a Feuerbach-körnek nagyobb a sugara, mint a beírt körnek, kivéve az egyenlő oldalú háromszöget, amikor a két kör azonos. Ezért a Feuerbach-pont definíciójánál, fel kell tételezni, hogy nem egyenlő oldalú háromszögről van szó. Ebben a fejezetben ezt végig feltételezzük. Célunk a Feuerbach-pont baricentrikus koordinátáinak az előállítása.

Segédtétel. Adott a P_1 és a P_2 pont p_i, q_i, r_i baricentrikus koordinátákkal és a súlyok összege legyen $S_i = p_i + q_i + r_i$ $(i = 1, 2)$. A Q pont baricentrikus koordinátái legyenek $k_1p_1 + k_2p_2$, $k_1q_1 + k_2q_2$, $k_1r_1 + k_2r_2$, akkor a Q pont $k_2S_2 : k_1S_1$ arányban osztja a P_1P_2 szakaszt:

$$\overline{P_1Q}:\overline{QP_2}=k_2S_2:k_1S_1.$$

B. A $k_1p_1 + k_2p_2$, $k_1q_1 + k_2q_2$, $k_1r_1 + k_2r_2$ súlyok súlypontját úgy is megkaphatjuk, ha először képezzük k_1p_1, k_1q_1, k_1r_1 súlypontját, ide elhelyezzük a $k_1p_1 + k_1q_1 + k_1r_1 = k_1S_1$ súlyt, majd a k_2p_2, k_2q_2, k_2r_2 súlypontjába elhelyezzük a $k_2p_2 + k_2q_2 + k_2r_2 = k_2S_2$ súlyt, és ezeknek vesszük a súlypontját. Q ezek súlypontjaként kapható meg, tehát Q nyilván $k_2S_2 : k_1S_1$ arányban osztja a P_1P_2 szakaszt. ♠

T23.5. Az F Feuerbach-pont baricentrikus koordinátái:

$$(s-a)(b-c)^2,\ (s-b)(c-a)^2,\ (s-c)(a-b)^2.$$

B. Jelöljük a beírt kör sugarát ρ-val és határozzuk meg a Feuerbach-kör és a beírt kör Q külső hasonlósági centrumát. Tudjuk. hogy a Q pont $\frac{R}{2}:\rho$ arányban osztja a körközéppontok távolságát, és negatívnak kell venni, mert Q a körközéppontok által meghatározott szakaszon kívül esik. A Feuerbach-kör F_0 középpontjának koordinátái átalakítva:

$$p_1=b^2w_2+c^2w_3=b^2(a^2-b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)=a^2(b-c)^2-(b^2-c^2)^2,$$

és hasonlóan

$$q_1 = b^2(c-a)^2 - (c^2-a^2)^2, \quad r_1 = c^2(a-b)^2 - (a^2-b^2)^2,$$

továbbá T10.10. alapján $p_1 + q_1 + r_1 = S_1 = 2(4T)^2$. A beírt kör O_0 középpontjának koordinátái

$$p_2 = a, \quad q_2 = b, \quad r_2 = c, \quad S_2 = 2s.$$

Alkalmazzuk a segédtételt, akkor

$$2sk_2 : 2(4T)^2 k_1 = -\frac{R}{2} : \rho,$$

amiből a területképleteket használva

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{R}{2\rho}\frac{(4T)^2}{s} = -2abc.$$

Ebből kiszámíthatók Q baricentrikus koordinátái:

$$p = p_1 - 2a^2bc = a^2(b-c)^2 - (b^2-c^2)^2 =$$
$$= (b-c)^2(a^2-(b-c)^2) = (b-c)^2 4s(a-s),$$

és hasonlóan a többiek. (-4s)-sel eloszva Q baricentrikus koordinátái

$$(s-a)(b-c)^2, \ (s-b)(c-a)^2, \ (s-c)(a-b)^2.$$

A Feuerbach-tétel következtében $Q = F$, tehát megkaptuk F baricentrikus koordinátáit. ♠

Egyben újabb bizonyítását is kaptuk a Feuerbach-tételnek, ugyanis a koordinátákat behelyettesítve könnyen látható, hogy Q rajta van a két kör hatványvonalán (a hatványvonal egyenletét lásd T23.4.), továbbá egyszerűen belátható, hogy két különböző sugarú kör hatványvonalán a hasonlósági centrum csak akkor lehet rajta, ha érintik egymást.

23.4. *A körök általános egyenlete*

Alapvető szerepet játszik a T14.2 tétel, melynek két következményét segédtételként is kimondjuk. A segédtételek később, általánosabb alakban, tétel formájában is megjelennek. Továbbra is használjuk a $H(p,q,r) = a^2qr + b^2pr + c^2pq$ rövidített kifejezést, akkor a körülírt kör normál egyenlete $H(p,q,r) = 0$ (ld. pl. T14.2).

1. segédtétel. Ha az általánosan felvett P pont baricentrikus koordinátái p, q, r ($p + q + r = 1$), akkor ezt a körülírt kör normál egyenletébe ($H(p,q,r)$ kifejezésbe) helyettesítve a P pontnak a körülírt körre vonatkozó hatványát kapjuk meg ellenkező előjellel.

T14.2.-re tekintettel a bizonyítás mellőzhető, ugyanis $\overline{OP}^2 - R^2$ a P pont hatványa a körülírt körre vonatkozóan.

2. segédtétel. A körülírt körrel koncentrikus ρ sugarú kör baricentrikus egyenlete

$$H(p,q,r) - R^2 + \rho^2 = 0.$$

Minden olyan ponthalmaz, melyek pontjaira $H(p,q,r) + d = 0$, kör (ha $d > -R^2$), nulla sugarú kör (ha $d = -R^2$), vagy üres halmaz (ha $d < -R^2$).

A bizonyítás itt is mellőzhető, hiszen $\overline{OP} = \rho$.

T23.6. A körök általános, baricentrikus egyenlete

$$H(p,q,r) + l(p,q,r) = 0,$$

ahol $l(p,q,r)$ homogén lineáris kifejezése a p, q, r ($p + q + r = 1$) változóknak. (Az $l(p,q,r)$ kifejezés tartalmazhat állandó tagot is, de ez a $p + q + r = 1$ felhasználásával kiküszöbölhető.)

B. Tetszőleges K kör előállítható a körülírt körrel koncentrikus (szintén O középpontú) körből eltolással. Vegyük fel tetszőlegesen egy Q pontot, melynek normált baricentrikus koordinátái u, v, w, és az eltolás vektora legyen $\boldsymbol{h} = \overrightarrow{AQ}$. Ha az A, B és C csúcsok helyvektorait $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ és $\boldsymbol{c}_0$ jelöli, akkor

$$\boldsymbol{h} = u\boldsymbol{a}_0 + v\boldsymbol{b}_0 + w\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}_0 .$$

Az eltolásra váró kör egy P pontjának baricentrikus koordinátái legyenek p, q és r, akkor az eltolt P' pont helyvektora

$$pa_0 + qb_0 + rc_0 + u\boldsymbol{a}_0 + v\boldsymbol{b}_0 + w\boldsymbol{c}_0 - a_0 = (p+u-1)\boldsymbol{a}_0 + (q+v)\boldsymbol{b}_0 + (r+w)\boldsymbol{c}_0 .$$

Ebből leolvashatók P' baricentrikus koordinátái

$$\begin{aligned} p' &= p+u-1 \\ q' &= q+v \qquad (1) \\ r' &= r+w . \end{aligned}$$

Természetes, hogy $p' + q' + r' = 1$. Rendezzük át az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} p &= p' - (u-1) \\ q &= q' - v \\ r &= r' - w. \end{aligned}$$

Ha P rajta van a $H(p, q, r) + d = 0$ ($d \geq -R^2$) körön, mely koncentrikus a körülírt körrel, akkor az eltolással előállított kör egyenlete:

(2) $$a^2(q'-v)(r'-w) + b^2(p'-(u-1))(r'-w) + c^2(p'-(u-1))(q'-v) + d = 0 .$$

Összeszorozva kapjuk, hogy

(3) $$\begin{aligned} H(p',q',r') - a^2(q'w + r'v) - b^2(p'w + r'u) - c^2(p'v + q'u) + b^2(r'-w) + c^2(q'-v) + \\ + H(u,v,w) + d = 0 . \end{aligned}$$

A $H(u,v,w) + d - b^2w - c^2v$ konstans tagot be lehet olvasztani a homogén lineáris tagba, ha helyette a $(H(u,v,w) + d - b^2w - c^2v)(p'+q'+r')$ kifejezést írjuk. ♠

Szükségünk lesz a T23.1. megfordítására is, melynek igazolása kissé hosszadalmasabb.

T23.7. A sík azon pontjai, melyeknek normált baricentrikus koordinátáira

$$H(p,q,r) + l(p,q,r) = 0$$

fennáll, vagy üres halmazt, vagy kört alkotnak, beleértve a nulla sugarú kört is. Itt $H(p,q,r)$ a fejezet bevezetésében definiált függvény, $l(p,q,r)$ pedig tetszőleges homogén lineáris függvény.

B. Az előző bizonyítással összhangban írjunk p, q, r helyett p'-t, q'-t és r'-t, és tegyük fel, hogy van a síknak olyan pontja, melyre $H(p',q',r') + l(p',q',r') = 0$. Kíséreljük meg az előző bizonyításban szereplő $\boldsymbol{h}$ vektort előállítani, amellyel az O középpontú megfelelő sugarú kört eltolva a $H(p',q',r') + l(p',q',r') = 0$ alakzat megkapható.

Legyen $l(p',q',r') = k_1p' + k_2q' + k_3r'$, akkor, a konstans taggal egyelőre nem törődve, a feladatunk a

$$\begin{aligned} c^2v+b^2w&=-k_1\\ c^2u+\quad\quad a^2w&=-k_2+c^2\\ b^2u+a^2v\quad\quad&=-k_3+b^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása. Az egyenletrendszer mindig megoldható, mert az egyenletrendszer determinánsa $2a^2b^2c^2 > 0$ (a megoldás a 3. segédtételben követett eljárás szerint el is végezhető). Legyen a megoldásrendszer u_1, v_1, w_1, és jelöljük az összegüket t_1-gyel:

$$t_1=u_1+v_1+w_1.$$

Általában t_1 különbözik 1-től, ezért a $\boldsymbol{h}$ konstrukciójához ez közvetlenül nem használható fel.

A következő lépéshez újabb segédtételre van szükségünk.

3. segédtétel. A

$$\begin{aligned} c^2y+b^2z&=1\\ c^2x+\quad\quad a^2z&=1\\ b^2x+a^2y\quad\quad&=1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható és a megoldásrendszerére $x+y+z=\dfrac{(4T)^2}{2a^2b^2c^2}$.

A tételhez csak annyit fogunk felhasználni, hogy $x + y + z \neq 0$.

B. Szorozzuk a második egyenletet b^2-tel, az elsőt a^2-tel és vonjuk ki egymásból, továbbá vegyük hozzá a harmadik egyenlet c^2-szeresét:

$$\begin{aligned} b^2c^2x-a^2c^2z&=b^2-a^2\\ b^2c^2x+a^2c^2z&=c^2, \end{aligned}$$

amiből

$$x=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2b^2c^2}.$$

Hasonlóan

$$y=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a^2c^2} \text{ és } z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2b^2}.$$

Adjuk össze az eredményeket és használjuk fel a Heron-képlet összeszorzott alakját (T5.5.):

$$\begin{aligned} 2a^2b^2c^2(x+y+z)&=a^2(-a^2+b^2+c^2)+b^2(a^2-b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)=\\ &=-(a^4+b^4+c^4)+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=(4T)^2. \end{aligned}$$

♠

A 3. segédtétel megoldásaira vonatkoztatva legyen $t = x + y + z$, a segédtételből csupán annyi használunk fel, hogy t nem lehet nulla.

A 3. segédtétel ismeretében válasszuk meg a λ számot úgy, hogy $\lambda=\dfrac{t_1-1}{t}$ legyen, és képezzük az (segétételtől különböző) $u=u_1-\lambda x$, $v=v_1-\lambda y$, $w=w_1-\lambda z$ számokat, ezekre már $u + v + w = 1$, tehát a $\boldsymbol{h}$ vektor készítésénél felhasználhatjuk. u, v, w értékét az egyenletrendszerbe helyettesítve

$$c^2v+b^2w=-k_1-\lambda$$

$$c^2u + \qquad a^2w = -k_2 + c^2 - \lambda$$
$$b^2u + a^2v \qquad = -k_3 + b^2 - \lambda \ .$$
Írjuk be ezeket a (3) egyenlőségbe, akkor azt kapjuk, hogy
$$H(p', q', r') + k_1p' + k_2q' + k_3r' + \lambda - b^2w - c^2v + H(u, v.w) + d = 0 .$$
Itt válasszuk meg a d_1-gyel jelölt d értékét úgy, hogy
$$d_1 = b^2w + c^2v - H(u, v, w) - \lambda$$
legyen, akkor a $H(p, q, r) + d_1 = 0$ kör ***h***-val eltolt alakzatának egyenlete
$$H(p', q', r') + k_1p' + k_2q' + k_3r' = 0 .$$

Meg kell még mutatni azt, hogy a $H(p, q, r) + d_1 = 0$ egyenletnek eleget tevő pontok kört alkotnak. Ehhez elég azt belátni, hogy van olyan p, q, r koordinátájú pont, mely eleget tesz az egyenletnek. Ez a pont azonban a (p', q', r') pont visszatolásával származtatható, tehát, ha az eltolt alakzatnak van pontja, akkor ennek is. ♠

Ha a $H(p,q,r) + l(p,q,r) = 0$ köregyenletből a középpont koordinátáit, vagy a sugarát akarjuk kiszámolni, az előbbi bizonyítás erre is lehetőséget ad. Mindkét adat képlettel is megadható, de ezek meglehetősen bonyolultak, ezért nem térünk ki rájuk.

23.5. *Pont hatványa körre, hatványvonal*

Adott pont hatványát egy körre vonatkozóan T3.5.-ben definiáltuk. A 23.4. fejezet 1. segédtétele általánosan is igaz a következő formában.

T23.8. Vegyünk fel egy tetszőleges P_1 pontot a síkban, normált baricentrikus koordinátái legyenek (p_1, q_1, r_1). A P_1 hatványa a $H(p,q,r) + l(p,q,r) = 0$ körre vonatkozóan
$$-(H(p_1,q_1,r_1) + l(p_1,q_1,r_1)).$$
Itt feltételezzük, hogy van olyan p, q, r ($p' + q' + r' = 1$) számhármas, mely eleget tesz a fenti egyenletnek.

B. Állítsuk elő a $H(p',q',r') + l(p',q',r') = 0$ kört a $H(p, q, r) + d = 0$ kör ***h*** vektorral történő eltolásával (ld. T23.2.). A (2) reláció szerint az eltolt kör alakja
$$a^2(q' - v)(r' - w) + b^2(p' - (u-1))(r' - w) + c^2(p' - (u-1))(q' - v) + d = 0 .$$
Helyettesítsünk p', q' és r' helyére p_1-et, q_1-et és r_1-et:
$$a^2(q_1 - v)(r_1 - w) + b^2(p_1 - (u-1))(r_1 - w) + c^2(p_1 - (u-1))(q_1 - v) + d ,$$
és állítsuk elő a P_1 pontot a P pont ***h*** vektorral való eltolásával
$$(1) \qquad \begin{aligned} p_1 &= p + u - 1 \\ q_1 &= q + v \\ r_1 &= r + w . \end{aligned}$$
Ezt behelyettesítve az előző kifejezésbe az
$$a^2qr + b^2pr + c^2pq + d = H(p,q,r) + d$$
kifejezést kapjuk, ami a P pontnak az O középpontú körre vett hatványának a (–1)-szerese (ld. 1. segédtétel). Mivel az eltolással a pont hatványa nem változik, így ez egyben a P_1 hatványának a (–1)-szerese is az eredetileg megadott körre. ♠

T23.9. A $H(p,q,r) + l(p,q,r) = 0$ kör (feltételezve, hogy nem üres halmaz) egyenletéből származtatva az $l(p,q,r) = 0$ alakzat az adott kör és a körülírt kör hatványvonala.
A

$$H(p,q,r) + l_i(p,q,r) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

körökre (feltételezve, hogy egyik sem üres halmaz) $l_1(p,q,r) - l_2(p,q,r) = 0$ a két kör hatványvonala.

B. Elég a második állítást bizonyítani. Ha a *p, q, r* normált baricentrikus koordinátákkal bíró *P* pont a hatványvonal pontja, akkor a *P* hatványa a két körre megegyezik és így

$$H(p,q,r) + l_1(p,q,r) = H(p,q,r) + l_2(p,q,r),$$

vagyis

$$l_1(p,q,r) - l_2(p,q,r) = 0.$$

Ugyanez visszafelé is elmondható, ha *P*-re teljesül, hogy $l_1(p,q,r) - l_2(p,q,r) = 0$, akkor *P* hatványa a két körre megegyezik, tehát a hatványvonal pontja. ♠