

ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY 2024/2025-ÖS TANÉV

Kezdők és Haladók I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

*A verseny a Kulturális és Innovációs Minisztérium, a Nemzeti Tehetség Program
és az Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő támogatásával
az NTP-TMV-M-24-B-0030 azonosító számú pályázat alapján valósult meg.*



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



Nemzeti
Tehetség Program



EMBERI ERŐFORRÁS
TÁMOGATÁSKEZELŐ



Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló	5
Kezdők I–II. kategória 2. forduló	9
Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló	13
Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló	16
Kezdők III. kategória 1. forduló	22
Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló	26
Haladók I. kategória 1. forduló	31
Haladók I. kategória 2. forduló	35
Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló	38
Haladók II. kategória 1. forduló	43
Haladók II. kategória 2. forduló	48
Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló	52
Haladók III. kategória 1. forduló	55
Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló	60

Kezdők I–II. kategória 1. forduló**Feladatok**

1. A 2024 olyan pozitív négyjegyű szám, amelyben a páros számjegyek száma páros. Hány ilyen tulajdonságú pozitív négyjegyű szám van? **6 pont**
2. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2$ cm, $BC = 1$ cm. Az AD oldalra írt szabályos háromszög harmadik csúcsa legyen E , a DC oldalra írt szabályos háromszög harmadik csúcsa legyen F . (A háromszögeknek az adott oldalakon kívül nincs más közös pontja a téglalappal.)
a) Bizonyítsuk be, hogy az EFB háromszög szabályos!
b) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCF$ négyszög területe több, mint $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ cm²! **6 pont**
3. Egy játszótérben egy csúszda alatti térben egyforma méretű piros, kék, zöld és sárga labdák vannak. Ezek közül egy bohóc beletölt néhányat egy zsákba és a következőket árulja el a zsák tartalmáról: Ha bekötött szemmel húzunk a zsákból, akkor
(1) legalább 4 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük két egyforma színű;
(2) legalább 8 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük piros vagy zöld;
(3) legalább 17 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük zöld vagy sárga;
(4) legalább 20 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük piros és zöld és
(5) legalább 22 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük kék vagy sárga.
Hány darab van az egyes színű labdákból a zsákban összesen? **6 pont**
4. Rózi az 1-től 100-ig terjedő pozitív egész számok segítségével felírta a felváltva kivonásokból és összeadásokból álló
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 98 + 99 - 100$$

műveletsort. Ezután kitörölte az egyik műveleti jelet, és helyette az $=$ jelet írta. Így éppen egy helyes egyenlőséget kapott. Melyik szám elé kerülhetett az egyenlőségjel? Adjuk meg az összes lehetőséget, és a válaszunkat indokoljuk! **6 pont**

Kezdők I–II. kategória 1. forduló**Megoldások és javítási útmutató**

1. A 2024 olyan pozitív négyjegyű szám, amelyben a páros számjegyek száma páros. Hány ilyen tulajdonságú pozitív négyjegyű szám van? **6 pont**
- 1. megoldás.** A számban összesen 4, 2 vagy 0 db páros számjegy lehet. **1 pont**
- 4 páros számjegy van benne: Az első helyen 2, 4, 6, 8 állhat, az összes többi helyen 0, 2, 4, 6, 8, így ezek száma: $4 \cdot 5^3$.

– 2 páros számjegy van benne	ppnn alakú: $4 \cdot 5^3$ (p: páros, n: nem páros) pnnp alakú: $4 \cdot 5^3$ pnnp alakú: $4 \cdot 5^3$ nppn alakú: 5^4 npnp alakú: 5^4 nnpp alakú: 5^4 darab van.	3 pont
– 0 páros számjegy van benne:	5^4 darab van.	1 pont

Tehát összesen $4 \cdot 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 = 4500$ olyan négyjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páros. 1 pont

Összesen: 6 pont

2. megoldás. A négyjegyű számok száma: $9 \cdot 10^3$, egy szám rossz, ha 1 vagy 3 páros számjegy van benne. 1 pont

Rosszak: – 1 páros számjegy:	pnnn alakú $4 \cdot 5^3$. npnn, nnpn, nnnp alakú összesen $3 \cdot 5^4$.	2 pont
– 3 páros számjegy:	pppn, ppnp, pnpp alakú összesen $3 \cdot 4 \cdot 5^3$. nppp alakú 5^4 .	2 pont

Tehát összesen $9 \cdot 10^3 - 4 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^4 - 3 \cdot 4 \cdot 5^3 - 5^4 = 4500$ olyan négyjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páros. 1 pont

Összesen: 6 pont

3. megoldás. Az első három számjegy bármi lehet, a negyedik dönti el, hogy páros vagy páratlan sok páros számjegy van-e számban vagy sem. 2 pont

Mivel az első három számjegy mindegyikéhez ötféle páros és ötféle páratlan számot tudunk negyedikként hozzáírni, 2 pont

ezért a számok felére, azaz 9000 szám közül 4500-ra teljesül a feladat feltétele. 2 pont

Összesen: 6 pont

2. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2$ cm, $BC = 1$ cm. Az AD oldalra írt szabályos háromszög harmadik csúcsa legyen E , a DC oldalra írt szabályos háromszög harmadik csúcsa legyen F . (A háromszögeknek az adott oldalakon kívül nincs más közös pontja a téglalappal.)

a) Bizonyítsuk be, hogy az EFB háromszög szabályos!

b) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCF$ négyszög területe több, mint $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ cm²! 6 pont

Megoldás. a) Az EAB , illetve BCF szög egyaránt $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ -os. Az EDF szög szintén 150° ($360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 90^\circ$). 1 pont

Az EDF , BCF , illetve EAB háromszögek mindegyikében van egy 1 cm és egy 2 cm hosszúságú oldal, a bezárt szögük pedig 150° , így egybevágóak, de akkor a harmadik oldalak is egyenlő hosszúságúak, ezért az EFB háromszög valóban szabályos.

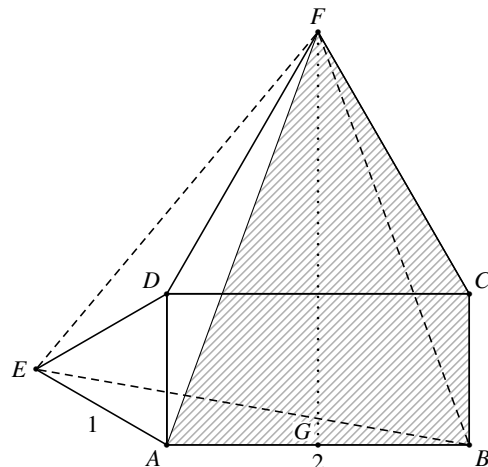
b) Az ABF háromszög AB oldalához tartozó magassága a DCF szabályos háromszög magasság hosszának és a téglalap kisebb oldalhosszának összege, így $\sqrt{3} + 1$ cm. Ezért a háromszög területe:

$$\frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot 2}{2} \text{ cm}^2 = \sqrt{3} + 1 \text{ cm}^2.$$

Az FCB háromszög BC oldalához tartozó magassága GB , a hossza tehát 1 cm, így a háromszög területe $\frac{1 \cdot 1}{2} \text{ cm}^2 = 0,5 \text{ cm}^2$.

A négyszög területe a két terület összege: $(\sqrt{3} + 1,5) \text{ cm}^2$, ami valóban több, mint $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$, mert $\sqrt{2} < 1,5$.

Összesen:



2 pont

1 pont

1 pont

1 pont

6 pont

3. Egy játszóházban egy csúszda alatti térben egyforma méretű piros, kék, zöld és sárga labdák vannak. Ezek közül egy bohóc beletölt néhányat egy zsákba és a következőket árulja el a zsák tartalmáról: Ha bekötött szemmel húzunk a zsákból, akkor

- (1) legalább 4 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük két egyforma színű;
- (2) legalább 8 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük piros vagy zöld;
- (3) legalább 17 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük zöld vagy sárga;
- (4) legalább 20 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük piros és zöld és
- (5) legalább 22 labdát kell kihúznunk, hogy biztosan legyen közöttük kék vagy sárga.

Hány darab van az egyes színű labdákból a zsákban összesen?

6 pont

Megoldás. (1) miatt csak háromféle szín szerepel a zsákban. (Csak három különböző színű labdát tudunk kihúzni, a 4. már biztosan egyező színű lesz valamelyikkel.)

1 pont

(2) miatt 7 labda kék vagy sárga. (Csak 7 kék, illetve sárga labdát tudunk kihúzni, a 8. már biztosan piros vagy zöld lesz.)

1 pont

Hasonlóan (5) miatt 21 labda piros vagy zöld, így összesen 28 labda van a zsákban.

1 pont

(2) és (4) miatt tudjuk, hogy a piros és zöld közül valamelyikből 12 van. (Ennyivel több labdát kell kihúzni, ha azt szeretnénk, hogy mindkét szín szerepeljen.)

1 pont

Ha pirosból lenne 12, akkor (5) miatt 9 zöld labda lenne, (3) miatt 4 kék labda lenne, (2) miatt pedig 3 sárga, de akkor mind a négy szín szerepelne.

1 pont

Tehát csak zöldből lehet 12, ekkor (5) miatt 9 piros van, (3) miatt 7 kék labda van, (2) miatt 0 sárga – ez megfelel a feladat követelményeinek.

Tehát 9 piros, 7 kék, 12 zöld és 0 sárga golyó van a zsákban.

1 pont

Összesen:

6 pont

Megjegyzések.

1. Az indoklás nélküli helyes eredményért 2 pont adható.
2. Ha a versenyző nem vizsgálja mindkét esetet, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat. (Más gondolatmenettel is el lehet jutni a kapott eredményhez, de annak során is több esetet kell megvizsgálni.)

4. Rózi az 1-től 100-ig terjedő pozitív egész számok segítségével felírta a felváltva kivonásokból és összeadásokból álló

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 98 + 99 - 100$$

műveletsort. Ezután kitörölte az egyik műveleti jelet, és helyette az = jelet írta. Így éppen egy helyes egyenlőséget kapott. Melyik szám elé kerülhetett az egyenlőségjel? Adjuk meg az összes lehetőséget, és a válaszunkat indokoljuk!

6 pont

Megoldás. 1. eset. Tegyük fel, hogy Rózi a $(2k)$. $(1 \leq k \leq 49, k \in \mathbb{N}^+)$ szám utáni összeadásjel helyett írt egyenlőséget. Ekkor

$$(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + [(2k - 1) - 2k] = (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -k \quad 1 \text{ pont}$$

$$[(2k + 1) - (2k + 2)] + [(2k + 3) - (2k + 4)] + \dots + (99 - 100) = (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -(50 - k) \quad 1 \text{ pont}$$

A kialakított egyenlőség alapján:

$$\begin{aligned} -k &= -(50 - k), \\ k &= 25. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy Rózi a $2 \cdot 25 + 1 = 51$ előtti + jelet írhatta át egyenlőségre. 1 pont

2. eset. Ezután vizsgáljuk azt az esetet, amikor Rózi a $(2k)$. szám előtti kivonásjel helyett írt egyenlőségjelet. Ekkor

$$\begin{aligned} 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2k - 3) - (2k - 2) + (2k - 1) &= \\ = 1 + (3 - 2) + (5 - 4) + \dots + [(2k - 1) - (2k - 2)] &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = k, \end{aligned} \quad 1 \text{ pont}$$

$$\begin{aligned} 2k + [(2k + 1) - (2k + 2)] + [(2k + 3) - (2k + 4)] + \dots + (99 - 100) &= \\ = 2k - 1 - 1 - \dots - 1 = 2k - (50 - k) = 3k - 50. \end{aligned} \quad 1 \text{ pont}$$

A kialakított egyenlőség alapján:

$$\begin{aligned} k &= 3k - 50, \\ k &= 25. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy Rózi az 50-es szám előtti kivonásjelet is átírhatta egyenlőségjelre. 1 pont

Összesen:**6 pont**

Megjegyzés. A fenti eredmény „okoskodással” is megkapható.

2. megoldás. A felírt művelet eredménye $(-1) \cdot 50 = -50$. Az elejétől kezdve tagonként összegezve a számokat az 1, -1, 2, -2, ..., 49, -49, 50, -50 részletösszegek adódnak. 1 pont

Ha egy összeadásjelet írunk át egyenlőségjelre, akkor a két részben lévő számok összege ugyanannyi: -25. A -25 csak egyszer fordul elő ezek között, nevezetesen az 50-edik tag után – tehát az 51-edik tag előtt –, vagyis az 51 előtti összeadásjelet írtuk át egyenlőségjelre. 1 pont

Ha viszont egy kivonásjelet írunk át – az a -adik szám előtt – egyenlőségjelre, akkor a tagok összege (mivel ekkor $-a$ helyett a szerepel): $-50 + 2a$. Az egy-egy részben lévő számok összege ennek a fele: $-25 + a$.

1 pont

Ebből következik, hogy 1-től $(a - 1)$ -ig véve a tagokat a művelet eredménye $-25 + a$, viszont ha továbblépünk, és 1-től a -ig tekintjük a tagokat (vagyis ha mégiscsak kivonjuk a -t), akkor az eredmény ennél a -val kevesebb: $(-25 + a) - a = -25$.

2 pont

Mivel -25 csak egyszer szerepel a részletösszegekben (ha 1-től 50-ig végezzük el a műveletet), ebből következik, hogy a csak 50 lehet. Tehát a az 50-edik tag, és előtte valóban kivonásjel szerepel, vagyis az 50 előtti kivonásjel helyére került az egyenlőségjel.

1 pont

(A két részben lévő számok összege pedig $-25 + 50 = 25$.)

Összesen:

6 pont

Kezdők I–II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Hány természetes szám van a $\frac{2^{2024} - 1}{2}$ és a $\frac{2^{2026} + 1}{4}$ racionális számok között? 6 pont
2. Hányféleképpen lehet az első 14 pozitív egész számból 7 párt alkotni úgy, hogy mindegyik párban a nagyobbik szám legalább a kétszerese legyen a másiknak? 6 pont
3. Egy 6×6 -os négyzetet oldalaival párhuzamos vágásokkal felosztunk 8 olyan téglalapra, amelyek oldalainak hosszúságai egész számok.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy az így kapott téglalapok között van legalább kettő olyan, amelyeknek egyenlő a területe.
 - b) Adjunk példát a feltételnek megfelelő olyan felosztásra, amelyben nincs két egybevágó téglalap.8 pont
4. Az $ABCD$ négyzet oldalhossza 5 cm. A négyzet A csúcsa illeszkedik egy olyan körre, amelynek a CD oldal az érintője, az érintési pontot jelöljük E -vel (az E pont a CD szakasz belső pontja). Ez a kör az AB oldalt az F belső pontban, az AD oldalt a G belső pontban még metszi. Mekkora az AE szakasz hossza, ha az FG szakasz 6 cm hosszú? 10 pont
5. Egy 8×8 -as tábla bal felső sarkából kell a jobb alsó sarkába eljuttatni egy bábút. A két játékos felváltva lép vele. Egy lépés során vagy csak jobbra, vagy csak lefelé lehet tetszőleges számú mezőt mozogni. (Mindenképpen új mezőre kell lépni.) Az a játékos nyer, aki a jobb alsó sarokba lép a bábuval.
 - a) Igazoljuk, hogy ebben a játékban mindig a másodiknak lépő játékosnak van nyerő stratégiája, azaz, bárhol játszik a kezdő játékos, mindig tud a második játékos nyerni!

- b) Ha a második játékos ismeri a nyerő stratégiát és aszerint is játszik, akkor hányféle útvonalon mozoghat a bábu a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba a játék során? (Két útvonalat akkor tekintünk különbözőnek, ha az egyik során a bábu áthalad olyan mezőn, amelyen a másik út során nem.)

10 pont

Kezdők I–II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány természetes szám van a $\frac{2^{2024} - 1}{2}$ és a $\frac{2^{2026} + 1}{4}$ racionális számok között?

6 pont

Megoldás. $\frac{2^{2024} - 1}{2} = 2^{2023} - \frac{1}{2}.$

1 pont

$$\frac{2^{2026} + 1}{4} = \frac{2^{2026}}{2^2} + \frac{1}{4} = 2^{2024} + \frac{1}{4}.$$

1 pont

A keresett természetes számok közül a legkisebb a 2^{2023} , a legnagyobb a 2^{2024} .

1 pont

Ezért a feltételeknek megfelelő számok száma

$$2^{2024} - 2^{2023} + 1 = 2^{2023}(2 - 1) + 1 = 2^{2023} + 1.$$

2 pont

Tehát $2^{2023} + 1$ természetes szám van a megadott racionális számok között.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. Hányféleképpen lehet az első 14 pozitív egész számból 7 párt alkotni úgy, hogy mindegyik párban a nagyobbik szám legalább a kétszerese legyen a másiknak?

6 pont

Megoldás. 8-tól 14-ig a számoknak külön párban kell lenniük, tehát a 8-tól 14-ig terjedő számoknak kell párt keresni az 1-től 7-ig terjedők között.

1 pont

A 7 csak a 14-gyel lehet egy párban.

1 pont

Így a 6 párja csak a 12 vagy a 13 lehet.

1 pont

Bontsuk két esetre a megoldást aszerint, hogy a 6-ot melyik számmal rakjuk egy párba:

1. eset. Ha a 6 párja a 13, akkor az 5 a 10-zel, a 11-gyel vagy a 12-vel kerülhet egy párba (3 lehetőség),

1 pont

ezután az 1, 2, 3 és 4 számok bármelyik 8 és 12 közötti még megmaradt számmal párba állíthatók, erre $4! = 24$ lehetőség van.

1 pont

2. eset. Ha a 6 a 12-vel lesz párban, akkor az 5-höz a 10, a 11 vagy a 13 tartozhat. Az 1, 2, 3, illetve 4 bármelyik 8 és 14 közötti még megmaradt számhoz rendelhető: $4! = 24$ lehetőség.

Ez tehát összesen $2 \cdot 3 \cdot 24 = 144$ lehetőség.

1 pont

Összesen:

6 pont

Megjegyzés. Az esetekre bontásnál ugyanazt kell észrevenni a második esetben, mint az elsőben. Vagyis azt, hogy az 5-ös párja háromféle lehet, és hogy a maradék 4 számot $4!$ -féleképpen állíthatjuk párba, ezért a második esetnél erre a gondolatra külön már nem jár pont.

3. Egy 6×6 -os négyzetet oldalával párhuzamos vágásokkal felosztunk 8 olyan téglalapra, amelyek oldalainak hosszúságai egész számok.

- a) Bizonyítsuk be, hogy az így kapott téglalapok között van legalább kettő olyan, amelyeknek egyenlő a területe.
 b) Adjunk példát a feltételnek megfelelő olyan felosztásra, amelyben nincs két egybevágó téglalap.

8 pont

Megoldás. a) Tegyük fel, hogy a négyzet felosztásával kapott 8 téglalap területe páronként különböző. Jelöljük ezeket nagyságrendjük növekvő sorrendjében $t_1 < t_2 < \dots < t_8$ -cal.

Mivel a téglalapok oldalai egész egység hosszúságúak, ezért a területeik is egész egységnyiek, és $t_1 \geq 1, t_2 \geq 2, \dots, t_8 \geq 8$.

1 pont

Ennek a nyolc területnek az összege adja az eredeti négyzet területét, azaz – négyzetcentiméterben kifejezve:

$$36 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.$$

2 pont

Mivel a felírt egyenlőtlenség-láncban a bal oldal és a jobb oldal között egyenlőség áll fenn, ezért a korábbi becsléseknél is az egyenlőségnek kell teljesülnie. Ennek figyelembevételével $t_7 = 7$.

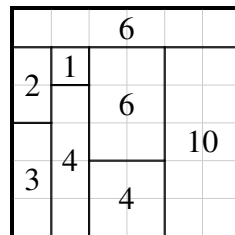
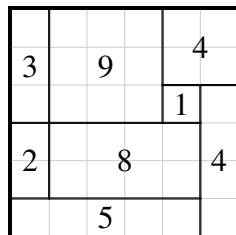
1 pont

Mivel a 7 prímszám, ezért egyetlen szorzattá bontása a $7 \cdot 1$, vagyis a felosztás során keletkező téglalapok egyikének kell, hogy legyen 7 egység hosszú oldala. Mivel a négyzet felbontása az oldalakkal párhuzamos vágásokkal történik, ezért minden keletkező téglalap bármely oldala legfeljebb 6 egység lehet.

Tehát a $t_1 < t_2 < \dots < t_8$ feltevés ellentmondásra vezet, azaz a részek területei között biztosan van két egyenlő.

2 pont

b) Két lehetséges felosztás:



2 pont

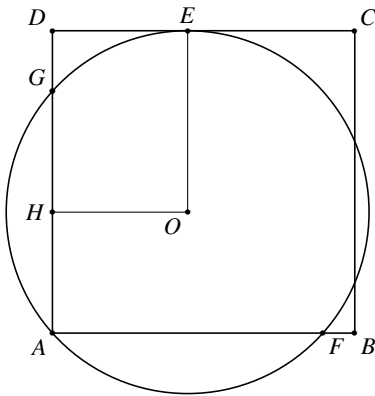
Összesen:

8 pont

Megjegyzés. Természetesen egy megfelelő felosztás megadása esetén is jár a 2 pont.

4. Az $ABCD$ négyzet oldalhossza 5 cm. A négyzet A csúcsa illeszkedik egy olyan körre, amelynek a CD oldal az érintője, az érintési pontot jelöljük E -vel (az E pont a CD szakasz belső pontja). Ez a kör az AB oldalt az F belső pontban, az AD oldalt a G belső pontban még metszi. Mekkora az AE szakasz hossza, ha az FG szakasz 6 cm hosszú?

10 pont



Megoldás. Vegyük fel a kör O középpontját, a CD szakaszon az E érintési pontot és a H pontot, amely az O pontból az AD oldalra állított merőleges talppontja.

2 pont

Az FAG háromszögben $FAG\angle = 90^\circ$, és mivel a háromszög mindhárom csúcsa illeszkedik a megadott körre, a Thalesz-tétel megfordítása miatt FG éppen a kör átmérője, vagyis a kör sugara $\frac{FG}{2} = 3$ cm.

2 pont

Ebből következik, hogy $OE = HD = AO = 3$ cm,

1 pont

tehát $AH = AD - HD = 2$ cm.

1 pont

Az AHO derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt $HO = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ cm.

2 pont

Végül az ADE derékszögű háromszögben, amelyben $DE = HO$, a Pitagorasz-tételt felírva kapjuk, hogy $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{5^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{30}$ cm.

2 pont

Összesen:

10 pont

5. Egy 8×8 -as tábla bal felső sarkából kell a jobb alsó sarkába eljuttatni egy bábút. A két játékos felváltva lép vele. Egy lépés során vagy csak jobbra, vagy csak lefelé lehet tetszőleges számú mezőt mozogni. (Mindenképpen új mezőre kell lépni.) Az a játékos nyer, aki a jobb alsó sarokba lép a bábuval.

- a) Igazoljuk, hogy ebben a játékban mindig a másodiknak lépő játékosnak van nyerő stratégiája, azaz, bárhogyan játszik a kezdő játékos, mindig tud a második játékos nyerni!
- b) Ha a második játékos ismeri a nyerő stratégiát és aszerint is játszik, akkor hányféle útvonalon mozoghat a bábu a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba a játék során? (Két útvonalat akkor tekintünk különbözőnek, ha az egyik során a bábu áthalad olyan mezőn, amelyen a másik út során nem.)

10 pont

Megoldás. a) A második játékosnak mindig a főátló (bal felső sarkot a jobb alsó sarokkal összekötő átló) mezőibe kell lépni.

2 pont

Az ellenfele mindig kilép a főátlóból, ő pedig mindig visszalép. Így csak ő juthat el a jobb alsó sarokba.

2 pont

- b) Az útvonalakat az alapján fogjuk megszámlálni, hogy a főátló mely mezőin haladnak át, és ezekre a mezőkre mely irányokból érkeznek.

1 pont

A főátló minden egyes mezőjére (a bal felsőt és a jobb alsót leszámítva) a következő igaz: vagy bele kellett lépni az út során felülről, vagy bele kellett lépni balról vagy nem kellett egyáltalán belelépni.

2 pont

A jobb alsó mező esetén csak az első két lehetőség áll fenn.

1 pont

Ez alapján $3^6 \cdot 2 = 1458$ útvonal lehetséges.

2 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

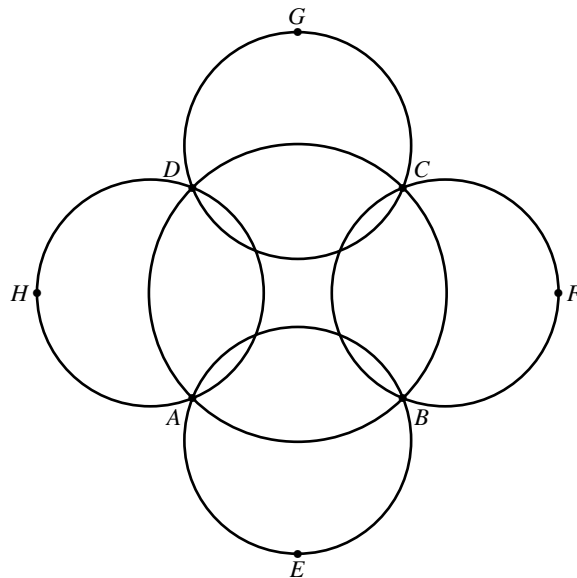
1. Az $ABCD$ konkáv deltoid DAB belső szöge 270° -os, két átlója pedig egyenlő hosszú. A BA és DA oldalak meghosszabbításai a deltoid másik két oldalát a P és Q pontokban metszik. Milyen arányban osztja a PQ szakasz az AC átlót?

10 pont

2. Öt körön felvesszünk 8 pontot (A, B, C, D, E, F, G, H) az ábrán látható módon. Hányféleképpen írhatunk 1-től 8-ig egész számokat a betűk helyére úgy, hogy az alábbiak teljesüljenek:

- minden számot pontosan egyszer használunk fel,
- minden körön ugyanannyi a rajta szereplő számok összege.

3. Bizonyítsa be, hogy bármely három természetes szám közül biztosan kiválasztható kettő – jelöljük őket a -val és b -vel – amelyekre teljesül, hogy $a^3b - ab^3$ osztható 30-cal!



10 pont

10 pont

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ konkáv deltoid DAB belső szöge 270° -os, két átlója pedig egyenlő hosszú. A BA és DA oldalak meghosszabbításai a deltoid másik két oldalát a P és Q pontokban metszik. Milyen arányban osztja a PQ szakasz az AC átlót?

10 pont

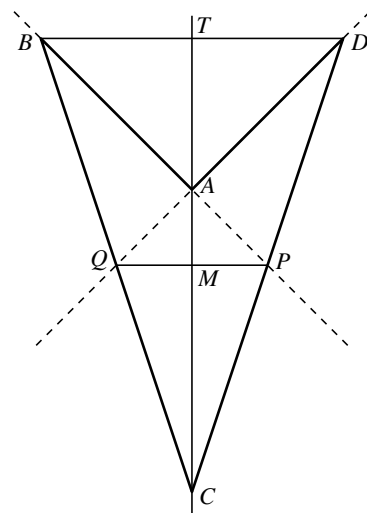
Megoldás. Készítsünk ábrát! Jelöljük az átlók egyenesének metszéspontját T -vel, a PQ szakasz és AC átló metszéspontját M -mel.

A deltoid szimmetriatengelye CA (CT) egyenese, tehát merőlegesen felezi a DB szakaszt, valamint felezi a DAB szöget, illetve $DA = AB, CD = CB$.

A DAB háromszögben $DAB = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, azaz DAB egyenlő szárú derékszögű háromszög.

A tengelyes szimmetria miatt DTA és BTA háromszögek is egyenlő szárú derékszögű háromszögek, így oldalhosszaik $TD = TB = BD/2 = TA$.

Mivel T felezési pont a BD szakaszon, így CT a BDC háromszögben súlyvonal és $TA = BD/2 = AC/2$ miatt az A pont a BDC háromszög súlypontja.



1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

2 pont

Így a DA és DB oldalak meghosszabbításai a DBC háromszögben a másik két súlyvonal, tehát P és Q oldalfelezési pontok, azaz PQ a DBC háromszögben középvonal.

1 pont

Emiatt PQ párhuzamos DB -vel, és $PQ = DB/2$.

1 pont

A párhuzamosság miatt AC merőlegesen felezi PQ -t, valamint DQP és BDQ váltószögek, így QMA háromszög is egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek befogói $MA = MQ = QP/2 = BD/4 = AC/4$. Hasonlóképpen, a PMA háromszögről ugyanez elmondható.

1 pont

Tehát azt kaptuk, hogy $MA = AC/4$, vagyis az M pont az A -hoz közelebbi negyedelő pont az AC átlón, azaz a PQ szakasz $1 : 3$ arányban osztja az AC átlót.

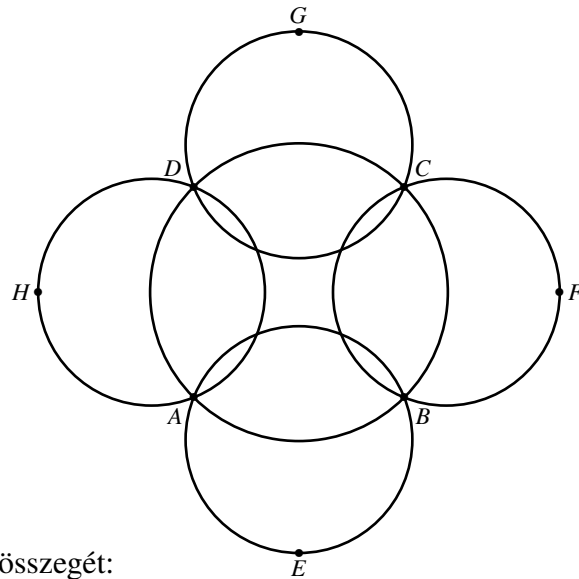
1 pont

Összesen:

10 pont

2. Öt körön felvesszünk 8 pontot (A, B, C, D, E, F, G, H) az ábrán látható módon. Hányféleképpen írhatunk 1-től 8-ig egész számokat a betűk helyére úgy, hogy az alábbiak teljesüljenek:

- minden számot pontosan egyszer használunk fel,
- minden körön ugyanannyi a rajta szereplő számok összege.



10 pont

Megoldás. Tudjuk, hogy $A + B + C + D + E + F + G + H$ az első 8 pozitív egész összege, azaz 36.

1 pont

Jelöljük X -szel az egy körön lévő számok összegét! Adjuk össze az öt körön lévő számok összegét:

$$(A + B + C + D) + (A + B + E) + (B + C + F) + (C + D + G) + (D + A + H) = 5X$$

$$2 \cdot (A + B + C + D) + (A + B + C + D + E + F + G + H) = 5X$$

1 pont

mivel $A + B + C + D = X$, ezért $2X + 36 = 5X$, vagyis $X = 12$. Tehát 12 az egy körön lévő számok összege.

2 pont

Tehát $A + B + C + D = 12$. Ez kétféleképpen lehetséges: $\{A, B, C, D\} = \{1, 2, 3, 6\}$ vagy $\{A, B, C, D\} = \{1, 2, 4, 5\}$. (Mivel a négy legkisebb pozitív egész összege már 10, ezért vagy csak 2-vel vagy 2-szer 1-gyel lehet növelni az első 4 pozitív egész valamelyikét.)

1 pont

$\{A, B, C, D\} = \{1, 2, 4, 5\}$ nem lehet, mert például, ha az alsó körön van a 8-as, vagyis $E = 8$, akkor az $A + B$ összegnek 4-nek kellene lennie (mivel az egy körön lévő számok összege 12), de a 4-es összeget az $\{1, 2, 4, 5\}$ halmaz semelyik két eleméből nem tudjuk előállítani.

1 pont

Ha $\{A, B, C, D\} = \{1, 2, 3, 6\}$, akkor a 8-ast 4 helyre tehetjük: az E, F, G vagy H betűk helyére.

1 pont

A 8-as mellé az adott körön csak az $1 + 3$ kerülhet, ennek elhelyezkedése 2-féle lehet.

1 pont

Az $ABCD$ körön az 1-es másik szomszédja nem lehet 2, mert akkor azon a körön, amelyikre az 1 és 2 esik, a harmadik számnak 9-nek kellene lennie a 12-es összeghez, de az nem lehet. Tehát az 1 másik szomszédja a 6, vagyis az $ABCD$ körön $\{1, 3, 2, 6\}$ sorrendben vannak a számok, amik meghatározzák a külső körökön lévő többi számot.

1 pont

Vagyis $4 \cdot 2 = 8$ elhelyezés lehetséges.

1 pont

Összesen:

10 pont

3. Bizonyítsa be, hogy bármely három természetes szám közül biztosan kiválasztható kettő – jelöljük őket a -val és b -vel – amelyekre teljesül, hogy $a^3b - ab^3$ osztható 30-cal!

Megoldás. Mivel $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, és a 2, 3 és 5 páronként relatív prímek, ezért egy szám pontosan akkor osztható 30-cal, ha osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel.

1 pont

$$a^3b - ab^3 = a \cdot b \cdot (a^2 - b^2) = a \cdot b \cdot (a - b) \cdot (a + b).$$

1 pont

Egy szorzat pontosan akkor osztható egy prímszámmal, ha valamelyik tényezője osztható vele.

1 pont

A fenti szorzat tetszőleges a és b esetén osztható 2-vel, mivel

– vagy a és b közül legalább az egyik páros;

– vagy mindkét szám páratlan, ekkor az összegük és a különbségük is páros

1 pont

A fenti szorzat tetszőleges a és b esetén osztható 3-mal, mivel

– vagy a és b közül legalább az egyik osztható 3-mal;

– vagy a és b egyike sem osztható 3-mal. Ezt az esetet vizsgálva, ha ekkor

• a és b ugyanolyan maradékot adnak 3-mal osztva, akkor a különbségük osztható 3-mal vagy

• a és b 1, illetve 2 maradékot adnak 3-mal osztva, akkor az összegük osztható 3-mal.

2 pont

Most már csak azt kell igazolnunk, hogy három természetes szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy a kifejezés osztható legyen 5-tel is.

1 pont

Ezt a következőképpen tudjuk megtenni:

– vagy van a három szám között 5-tel osztható, ekkor válasszuk ki ezt a számot, legyen ez a (vagy b)

– vagy nincs a három szám között 5-tel osztható, ekkor

• tekintsük a következő két „skatulyát”:

5-tel osztva 1 vagy 4 maradékot adó számok,

5-tel osztva 2 vagy 3 maradékot adó számok.

A skatulyaelv értelmében a három szám között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanabba a skatulyába kerül, legyenek ezek a és b . Ha azonos maradékot adnak 5-tel osztva, akkor a különbségük, ha különbözőt, akkor az összegük lesz 5-tel osztható.

3 pont

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Összesen:

10 pont

Megjegyzés.

1. Az oszthatóságok az algebrai átalakítás nélkül is igazolhatók (maradékokkal számolva).

2. Lehet érvelni a számok négyzetének maradékával is.

– Egy 3-mal nem osztható szám négyzete 3-mal osztva 1 maradékot ad, mert $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$, az első két tag osztható 3-mal, tehát 1 a hármas osztási maradéka, így $a^2 - b^2$ osztható 3-mal.

– Egy 5-tel nem osztható szám négyzete 3-mal osztva 1 vagy 4 maradékot ad, mert $(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, az első két tag osztható 5-tel, tehát 1 az ötös osztási maradéka; $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, az első két tag osztható 5-tel, tehát 4 az ötös osztási maradéka.

Három 5-tel nem osztható természetes szám között biztosan van kettő, amelyek négyzete ugyanolyan maradékot ad 5-tel osztva, ezeket kiválasztva $a^2 - b^2$ osztható 5-tel.

3. Az is egy lehetőség a 2-vel és 3-mal való oszthatóság igazolására, hogy $a - b$, a , $a + b$ egy b különbségű számtani sorozat három szomszédos tagja, és ha b nem is lenne osztható 2-vel, illetve 3-mal, a három szám valamelyike biztosan az.

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy 4×4 -es négyzetrács mezőit kiszínezzük a piros, kék, sárga színek valamelyikével úgy, hogy minden kis négyzet pontosan két szomszédjával azonos színű. (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.) A színezéshez nem kell minden színt felhasználni. Hány különböző módon végezhető el a színezés? 10 pont
2. Határozzuk meg a valós számoknak azokat a legfeljebb 5 elemű, nem üres A részhalmazait, amelyek a következő két tulajdonsággal rendelkeznek:
 - (i) ha $a \in A$, akkor $1 - a \in A$;
 - (ii) ha $a \in A$, akkor $\frac{1}{a} \in A$ ($a \neq 0$).10 pont
3. Legyen ABC olyan szabályos háromszög, amelynek oldalai 5 egység hosszúságúak. A BC oldalon kijelölünk egy olyan D pontot, amelyre $BD = 1$. Legyen D felezőpontja annak az EF szakasznak, ahol E az AC oldal egy belső pontja, F pedig az AB oldal B -n túli meghosszabbításán helyezkedik el. Milyen hosszú ekkor az EF szakasz? 10 pont

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy 4×4 -es négyzetrács mezőit kiszínezzük a piros, kék, sárga színek valamelyikével úgy, hogy minden kis négyzet pontosan két szomszédjával azonos színű. (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.) A színezéshez nem kell minden színt felhasználni. Hány különböző módon végezhető el a színezés? 10 pont

Megoldás. Jelölje m_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) a rács i -edik sorához és j -edik oszlopához tartozó egységnégyzetét.

m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}
m_{21}	m_{22}	m_{23}	m_{24}
m_{31}	m_{32}	m_{33}	m_{34}
m_{41}	m_{42}	m_{43}	m_{44}

Az m_{11} , m_{14} , m_{41} , m_{44} sarokmezőknek csak két-két szomszédja van, ezért nekik azonos színűeknek kell lenniük, mint a szomszédjaiknak.

1 pont

1. eset:

Legyen a rács egyik oldalára eső két saroknégyzete azonos A színű, ahol $A \in \{\text{piros, kék, sárga}\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy m_{11} és m_{14} azonos színűek. Ekkor a korábbi megállapításunk alapján m_{11} , m_{12} , m_{13} , m_{14} , m_{21} és m_{24} is azonos színű.

Így már m_{12} és m_{13} két-két szomszédja is A színű, ezért további egy-egy szomszédjuk m_{22} és m_{23} csak más színű lehet. Mivel ezen két mezőnek egymáson kívül már csak egy-egy szomszédjuk van m_{32} , illetve m_{33} , ezért m_{22} és m_{23} azonos színű, és velük megegyezik az említett m_{32} , m_{33} mezők színezése is.

1 pont

Tegyük fel, hogy az ehhez felhasznált szín B , ahol $B \neq A$ és $B \in \{\text{piros, kék, sárga}\}$. Ezzel megállapítottuk, hogy a rács 4 belső négyzete azonos B színű.

Továbbá m_{21} , illetve m_{24} A színe miatt, és a belső mezők B színe alapján m_{31} és m_{34} is csak A színű lehet, és ennek figyelembevételével az m_{41} és m_{44} sarokmezők is ezt a festést kapják.

1 pont

A rács szimmetriáját felhasználva a táblázat szerkezete:

A	A	A	A
A	B	B	A
A	B	B	A
A	A	A	A

Az A és B színek kiválasztása $3 \cdot 2 = 6$ -féle lehet.

1 pont

2. eset:

Nincs két azonos színű sarokmező a rács azonos oldalán

Ekkor m_{11} és szomszédai m_{12} , m_{21} A , m_{14} és szomszédai m_{13} , m_{24} , illetve m_{41} és szomszédai m_{31} , m_{42} nem A színűek.

Így m_{12} és m_{21} közös m_{22} szomszédja velük azonos A színű lesz.

1 pont

Ennek figyelembevételével a rács bal felső 2×2 -es blokkját négy egyszínű mező alkotja.

Ezt a gondolatmenetet alkalmazva a másik 3 sarokmezőhöz tartozó 2×2 -es blokkra is az egyszínűség jellemző.

1 pont

Így a megfelelő színezések szerkezete:

a) Két színt használva:

A	A	B	B
A	A	B	B
B	B	A	A
B	B	A	A

A színválasztás $3 \cdot 2 = 6$ -féle lehet.

1 pont

b) Három színt használva:

A	A	B	B
A	A	B	B
C	C	A	A
C	C	A	A

A	A	B	B
A	A	B	B
B	B	C	C
B	B	C	C

1 pont

A színválasztás mindkét esetben $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehet.

1 pont

Így a 2. esetben 18, összesen pedig 24 megfelelő színezés valósítható meg.

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzés. Ha a 2. esetben helyesen megállapítja, hogy 2×2 -es blokkok vannak, de nem gondol mindhárom fajta elrendezésre, akkor legfeljebb 8 pont adható.

2. Határozzuk meg a valós számoknak azokat a legfeljebb 5 elemű, nem üres A részhalmazait, amelyek a következő két tulajdonsággal rendelkeznek:

(i) ha $a \in A$, akkor $1 - a \in A$;

(ii) ha $a \in A$, akkor $\frac{1}{a} \in A$ ($a \neq 0$).

10 pont

Megoldás. Legyen a a keresett A halmaz egy eleme. Ha $a \in A$, akkor (i) miatt $1 - a \in A$, (ii) miatt $\frac{1}{1 - a} \in A$ ($a \neq 1$).

Ha $a \in A$, akkor (ii) miatt $\frac{1}{a} \in A$, (i) miatt $1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a} \in A$, (ii) miatt $\frac{a}{a - 1} \in A$ ($a \neq 0; 1$).

Így kapjuk a $B = \left\{ a; 1 - a; \frac{1}{a}; \frac{1}{1 - a}; \frac{a - 1}{a}; \frac{a}{a - 1} \right\}$ halmazt, amely részhalmaza A -nak.

3 pont

De ha A legfeljebb 5 elemű, akkor legalább két elem egyenlő.

1 pont

a) Ha $a = 1 - a$, akkor $a = \frac{1}{2}$. Ekkor $A = \left\{ 2; -1; \frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}; 2 \right\} = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 2 \right\}$.

1 pont

b) Ha $a = \frac{1}{a}$, akkor $a^2 = 1$, azaz $a = \pm 1$, de $a \neq 1$ miatt $a = -1$. Ekkor $A = \left\{ -1; 2; -1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2} \right\} = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 2 \right\}$.

1 pont

c) Ha $a = \frac{1}{1-a}$, akkor $a - a^2 = 1$, azaz $a^2 - a + 1 = 0$, ahonnan $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$. Ez nem lehetséges. 0,5 pont

d) Ha $a = \frac{a-1}{a}$, akkor $a^2 = a - 1$, ami azonos a c) esettel. 0,5 pont

e) Ha $a = \frac{a}{a-1}$, akkor $a^2 - a = a$, ahonnan $a^2 - 2a = 0$, azaz $a = 0$ vagy $a = 2$. De $a \neq 0$, tehát $a = 2$. 0,5 pont

f) Ha $\frac{1}{a} = \frac{1}{1-a}$, akkor $a = \frac{1}{2}$. Ekkor $A = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; 2; -1; -1\right\} = \left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$. 0,5 pont

A további 9 eset a fenti hat eset valamelyikére vezet. 1 pont

Így $A = \left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

*A további 9 eset:

1. Ha $1 - a = \frac{1}{a}$, akkor $a - a^2 = 1$, ami azonos a c) esettel.

2. Ha $1 - a = \frac{1}{1-a}$, akkor $(1-a)^2 = 1$, ahonnan $1 - a = \pm 1$, azaz vagy $a = 0$, ami nem lehet, vagy $a = 2$, ami azonos az a) esettel.

3. Ha $1 - a = \frac{a-1}{a}$, akkor $a^2 = 1$, ami azonos a b) esettel.

4. Ha $1 - a = \frac{a}{a-1}$, akkor $a - a^2 - 1 = 0$, ami azonos a c) esettel.

5. Ha $\frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$, akkor $a = 2$, ami azonos az e) esettel.

6. Ha $\frac{1}{a} = \frac{a}{a-1}$, akkor $a - 1 = a^2$, ami azonos a c) esettel.

7. Ha $\frac{1}{1-a} = \frac{a-1}{a}$, akkor $a = -a^2 + 2a - 1$, ami azonos a c) esettel.

8. Ha $\frac{1}{a} = \frac{a}{a-1}$, akkor $a - 1 = a^2$, ami azonos a c) esettel.

9. Ha $\frac{a-1}{a} = \frac{a}{a-1}$, akkor $a^2 - 2a + 1 = a^2$, ahonnan $a = \frac{1}{2}$, ami azonos az f) esettel.

2. megoldás. Vegyük észre, hogy tetszőleges $n \neq 0$ számra $1 - (1 - n) = n$ és $\frac{1}{\frac{1}{n}} = n$, tehát ha kiindulunk egy halmazbeli számból, akkor az (i) és a (ii) szabályokat ebben vagy fordított sorrendben egymás után alkalmazva kaphatunk újabb halmazbeli számokat. 1 pont

Induljunk ki egy tetszőleges, 0-tól és 1-től is különböző n számból, és vizsgáljuk meg, hogy n -nel együtt milyen számoknak kell még bekerülni az A halmazba.

$$n \xrightarrow{(ii)} \frac{1}{n} \xrightarrow{(i)} 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \xrightarrow{(ii)} \frac{n}{n-1} \xrightarrow{(i)} 1 - \frac{n}{n-1} = \frac{-1}{n-1} = \frac{1}{1-n} \xrightarrow{(ii)} 1 - n \xrightarrow{(i)} n \dots,$$

illetve

$$n \xrightarrow{(i)} 1 - n \xrightarrow{(ii)} \frac{1}{1-n} \xrightarrow{(i)} 1 - \frac{1}{1-n} = \frac{-n}{1-n} = \frac{n}{n-1} \xrightarrow{(ii)} \frac{n-1}{n} \xrightarrow{(i)} 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{(ii)} n \dots,$$

ami ugyanazokat a számokat eredményezi (számok ciklikus sorozata), csak fordított sorrendben. 1 pont

Tetszőleges számból kiindulva, ha a műveletek elvégezhetők ($n \neq 0, 1$), akármilyen ciklikus sorrendben, legfeljebb 6 különböző számot kaphatunk. Mivel A elemszáma legfeljebb öt lehet, az így kapható számok között kell lenni azonosaknak is. 1 pont

A sorozatban két szomszédos szám vagy egymás reciproka, vagy 1-re egészítik ki egymást.

Egy szám és a reciproka csak úgy lehet egyenlő, ha a két szám egyaránt 1 vagy -1 . Mivel azonban 1 nem lehet a halmazban, hiszen arra $1 - 1 = 0$, az (ii) szabály nem alkalmazható, így csak a -1 jöhet szóba. 1 pont

Egy szám és az azt 1-re kiegészítő szám csak úgy lehet egyenlő, ha a két szám egyaránt $\frac{1}{2}$. 1 pont

Másodszomszédos számok egyenlősége lehet $n = 1 - \frac{1}{n}$, illetve $n = \frac{1}{1-n}$, ez utóbbi reciproka viszont $\frac{1}{n} = 1 - n$, így mindkettőből $n + \frac{1}{n} = 1$ adódik. Ez azonban lehetetlen, mert (az egyaránt pozitív) n és $\frac{1}{n}$ közül a nagyobbik legalább 1, a másik pedig pozitív. 1 pont

Két harmadszomszédos szám egyenlősége esetén $n = 1 - \frac{1}{1-n}$ vagy $n = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$. Az elsőből

$n - 1 = \frac{1}{n-1}$, vagyis $n - 1 = 1$ vagy -1 , ahonnan $n = 2$ vagy $n = 0$ – ez utóbbi nem fogadható

el a második feltétel alapján; a másodikból (reciprokot véve) $\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, azaz $n = \frac{1}{2}$. 1 pont

A negyedszomszédos számok ugyanazok, mint a másodszomszédosak (csak a másik irányból), az ötödszomszédosak pedig éppen a másik irányból szomszédosak. 1 pont

Ezek szerint az A halmaznak csak a -1 , az $\frac{1}{2}$ és a 2 lehet az eleme. 1 pont

Ez az A halmaz valóban megfelel a feltételeknek, mert $-1, \frac{1}{2}, 2$ a

$$2 \xrightarrow{(ii)} \frac{1}{2} \xrightarrow{(i)} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{(ii)} 2 \xrightarrow{(i)} 1 - 2 = -1 \xrightarrow{(ii)} -1 \xrightarrow{(i)} 1 - (-1) = 2 \dots,$$

sorozat tagjai.

1 pont

Összesen:

10 pont

3. megoldás. Tegyük fel, hogy van ilyen egyelemű halmaz. Csak egy olyan szám van, amely

1-re egészíti ki önmagát ((i)-es tulajdonság), az $\frac{1}{2}$, tehát ha volna ilyen halmaz, akkor az az $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ kellene, hogy legyen, de a (ii)-t alkalmazva már 2-t kapunk, tehát nincs ilyen egyelemű halmaz. 2 pont

Ha lenne ilyen kételemű a halmaz, akkor a két szám vagy önmaga reciproka, ilyen csak az 1 és a -1 , ám akkor nincs a halmazban az őket 1-re kiegészítő elem; vagy egymás reciprokai, és 1-re egészítik ki egymást (hiszen önmagát 1-re kiegészítő szám csak egy van), tehát $n + \frac{1}{n} = 1$, azonban ez nem lehet (mindkét szám pozitív, és az egyik legalább 1). Ilyen halmaz tehát nincs. 2 pont

Eszerint a keresett halmaznak legalább három eleme van. Mivel a reciprok olyan, hogy egy szám reciprokának a reciproka maga a szám, így csak két szám lehet, amelyek egymás reciprokai, a harmadik szám önmaga reciproka. A harmadik szám 1 vagy -1 , ám az 1-re nem alkalmazható az (i), majd a (ii) tulajdonság. Eszerint a harmadik elem a -1 . Az azt 1-re kiegészítő szám a 2, annak a reciproka az $\frac{1}{2}$. Most már minden számra alkalmazható a halmazon belül az (i) és a (ii) tulajdonság: $\frac{1}{2}$ -re $\frac{1}{2}$ és 2 adódik, 2-re -1 és $\frac{1}{2}$, míg -1 -re 2 és -1 . Van ilyen háromelemű halmaz: $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$. 2 pont

Bebizonyítjuk, hogy egy legfeljebb ötelemű A halmaznak nem lehet más eleme, mint az imént kapott három szám. Legyen egy, a feladatban adott tulajdonságú halmaz egy -1 -től, $\frac{1}{2}$ -től és 2-től különböző eleme p_1 úgy, hogy $0 < p_1 < \frac{1}{2}$. Ekkor $p_2 = \frac{1}{p_1}$ esetén $p_2 > 2$; $p_3 = 1 - p_2$ esetén $p_3 < -1$; $p_4 = \frac{1}{p_3}$ esetén $-1 < p_4 < 0$; $p_5 = 1 - p_4$ esetén $1 < p_5 < 2$; $p_6 = \frac{1}{p_5}$ esetén $\frac{1}{2} < p_6 < 1$; $p_7 = 1 - p_6$ esetén $0 < p_7 < \frac{1}{2}$. $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ mind a halmazban van és mind különböző, mert a valós számok halmazának különböző részhalmazai esnek. 2 pont

Tetszőleges részintervallumból véve egy számot, ciklikusan ugyanabba a hat részintervallumba esnek a képezett további számok, így minden esetben lesz legalább 6 különböző szám, amelyeknek a halmazhoz kell tartozniuk – ez viszont nem megengedett a feladat feltétele szerint. 2 pont

Összesen: 10 pont

3. Legyen ABC olyan szabályos háromszög, amelynek oldalai 5 egység hosszúságúak. A BC oldalon kijelölünk egy olyan D pontot, amelyre $BD = 1$. Legyen D felezőpontja annak az EF szakasznak, ahol E az AC oldal egy belső pontja, F pedig az AB oldal B -n túli meghosszabbításán helyezkedik el. Milyen hosszú ekkor az EF szakasz? 10 pont

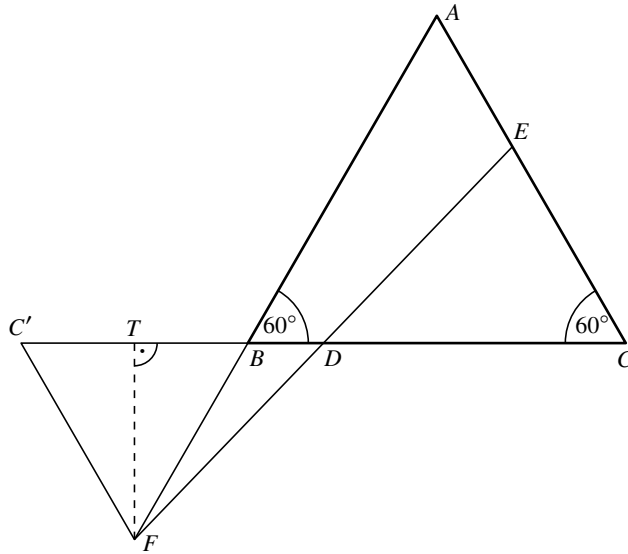
Megoldás. Tükrözzük a C pontot D -re, és a képét jelöljük C' -vel. 2 pont

Ekkor a $CEC'F$ paralelogramma, mivel D -re nézve középpontosan szimmetrikus négyszög, és $C'F \parallel CE$. 1 pont

Így $BC'F \sphericalangle = BCA \sphericalangle = 60^\circ$ (váltószögek), $FBC' \sphericalangle = ABC \sphericalangle = 60^\circ$ (csúcsszögek), és emiatt $BC'F$ szabályos háromszög, 2 pont

amelynek oldalhossza $BC' = C'D - BD = CD - BD = (BC - BD) - BD = 4 - 1 = 3$. 1 pont

Legyen TF a $BC'F$ háromszög magassága. Ekkor $TF = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $TB = \frac{3}{2}$ és $TD = \frac{5}{2}$. 2 pont



A DTF háromszögre a Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$DF = \sqrt{TD^2 + TF^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13},$$

1 pont

és így a keresett EF szakasz hossza $2\sqrt{13}$.

1 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők III. kategória 1. forduló

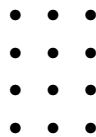
Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész szám esetén fennáll az $(n!)^2 \geq n^n$ egyenlőtlenség, ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

6 pont

2. Van egy 4×3 -as pontrácsunk. A rács mind a 12 pontját pirosra vagy kékre színezzük. Hányféle olyan színezése lehet a rácsnak, amelyre teljesül, hogy a 12 pont közül bárhogy is kiválasztva 4 pontot úgy, hogy az általuk meghatározott téglalap oldalai a rácsvonalakkal párhuzamosak, egyik téglalap sem egyszínű (azaz a négy csúcsa nem mind azonos színű)?

8 pont



3. Legyenek a és b pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy az a , b , $a+b$ számok közül legalább az egyik kifejezhető két négyzetszám különbségeként.

8 pont

4. Felírtuk egy táblára 1-től 24-ig a természetes számokat. Ezután minden lépésben kiválasztunk két számot a táblán lévők közül és helyettük felírjuk az $ab + a + b$ számot. Ezt addig ismételjük, amíg csak egyetlen szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám? **8 pont**
5. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC < BC$ és $\angle BCA = 60^\circ$. Legyen D az AC oldalegyenes olyan A -tól különböző pontja, amelyre $DB = AB$, E pedig a BC oldalegyenes olyan B -től különböző pontja, amelyre $EA = AB$. Határozzuk meg az $\angle EDC$ nagyságát. **10 pont**

Kezdők III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész szám esetén fennáll az $(n!)^2 \geq n^n$ egyenlőtlenség, ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. **6 pont**

Megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala a következőképpen is írható:

$$(1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot \dots \cdot (n \cdot 1).$$

3 pont

Ha be tudjuk látni, hogy $j(n-j+1) \geq n$, ha $n = 1, 2, \dots, n$, akkor készen vagyunk, hiszen a bal oldalon lévő szorzat minden tényezője nagyobb vagy egyenlő a jobb oldalon állóénál. **1 pont**

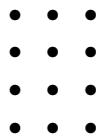
$j(n-j+1) \geq n$ teljesül, mert ez az egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $-j^2 + (n+1)j - n \geq 0$, ez pedig a teljes négyzetté alakítást, majd összevonást alkalmazva azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} -\left(j - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{n-1}{2} - \left(j - \frac{n+1}{2}\right)\right) \left(\frac{n-1}{2} + \left(j - \frac{n+1}{2}\right)\right) = \\ &= (n-j)(j-1) \geq 0. \end{aligned}$$

Ez pedig azért igaz, mert a szorzat mindkét tényezője nemnegatív. **2 pont**

Összesen: **6 pont**

2. Van egy 4×3 -as pontrácsunk. A rács mind a 12 pontját pirosra vagy kékre színezzük. Hányféle olyan színezése lehet a rácsnak, amelyre teljesül, hogy a 12 pont közül bárhogy is kiválasztva 4 pontot úgy, hogy az általuk meghatározott téglalap oldalai a rácsvonalakkal párhuzamosak, egyik téglalap sem egyszínű (azaz a négy csúcsa nem mind azonos színű)? **8 pont**



Megoldás. Először leszámoljuk azokat a színezéseket, amelyekben nincs egyszínű sor. Egy ilyen sor 6-féle lehet (kétféleképp választhatjuk meg, hogy melyik színből legyen 2, melyikből 1, majd a másik kettőtől különbözőt 3 helyre tehetjük, és innen a befejezés egyértelmű). A négy sor közül semelyik kettőt nem lehet azonosan színezeni a feladat feltételeit kielégítendő, viszont

könnyű látni, hogy ha mind a 4 sor páronként különböző színezést kap, akkor az megfelelő. Az ilyenek száma tehát $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

3 pont

Most leszámoljuk, hogy hány olyan megfelelő színezés van, amelyben van teljesen piros sor, de teljesen kék sor nincs. A teljesen piros sor 4 helyen állhat (nyilván nem lehet két ilyen sor), a többi sor mindegyikében kétszer kell a kék színt, egyszer a pirosat használni. Ezt 3-féleképpen lehet megtenni, és mind a három nem teljesen piros sorban máshogyan kell, tehát összesen 6 lehetőség van. Összességében tehát az ilyen színezések száma $4 \cdot 6 = 24$. Ugyanígy 24 azon színezések száma, amelyekben van teljesen kék sor, de teljesen piros sor nincs.

3 pont

Ha pedig egy színezésben teljesen piros és teljesen kék sor is van, akkor már nem lehet jól befejezni, hiszen egy harmadik sornak van két azonos színű eleme, ezzel tiltott téglalapot alkotnának.

1 pont

Mindent összevetve $360 + 24 + 24 = 408$ jó színezés van.

1 pont

Összesen:

8 pont

3. Legyenek a és b pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy az a , b , $a + b$ számok közül legalább az egyik kifejezhető két négyzetszám különbségeként.

8 pont

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy ha egy pozitív egész szám páratlan vagy 4-gyel osztható, akkor felírható két négyzetszám különbségeként. Valóban,

$$2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2, \quad 4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2. \quad 2 + 2 \text{ pont}$$

Ha tehát a és b valamelyike páratlan vagy 4-gyel osztható, akkor készen vagyunk.

2 pont

Ha pedig mindkettő 4-gyel osztva 2 maradékot ad, akkor $a + b$ osztható 4-gyel, és szintén készen vagyunk.

2 pont

Összesen:

8 pont

4. Felírtuk egy táblára 1-től 24-ig a természetes számokat. Ezután minden lépésben kiválasztunk két számot a táblán lévők közül és helyettük felírjuk az $ab + a + b$ számot. Ezt addig ismételjük, amíg csak egyetlen szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám?

8 pont

Megoldás. Egy másik táblán végezzünk párhuzamos könyvelést, amelynek során az eredeti táblán lévő számok 1-gyel megnövelt értékeit jegyezzük. Ez kezdetben 2, 3, ..., 25, és általában, ha az eredeti táblán $a_1, \dots, a_n$ szerepelnek, akkor a második táblán az $a_1 + 1, \dots, a_n + 1$ állnak. Állítjuk, hogy a második táblán lévő számok szorzata végig állandó. Valóban, ha az eredeti tábláról letöröljük az a , b számokat, akkor ezzel párhuzamosan a második tábláról letöröljük $(a + 1)$ -et és $(b + 1)$ -et, az eredeti táblára felkerül $ab + a + b$, a másodikra pedig $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$, ami tényleg a második tábláról éppen letörölt számok szorzata.

5 pont

Mivel a második táblán a szorzat végig állandó, ezért amikor már csak egy szám lesz a második táblán, az $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 25 = 25!$ lesz. Ekkor az eredeti táblán $25! - 1$ fog állni.

3 pont

Összesen:

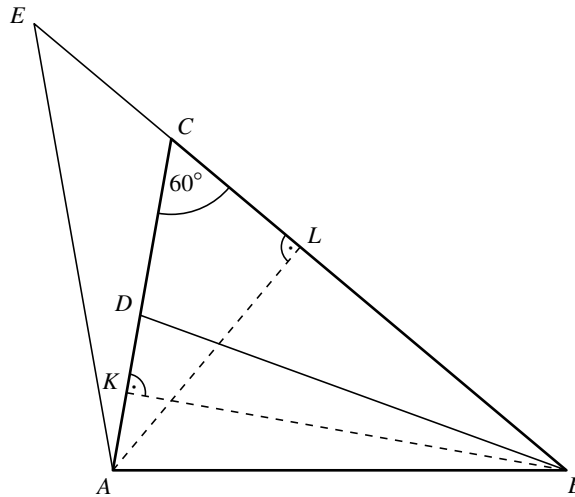
8 pont

5. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC < BC$ és $\angle BCA = 60^\circ$. Legyen D az AC oldalegyenes olyan A -tól különböző pontja, amelyre $DB = AB$, E pedig a BC oldalegyenes olyan B -től különböző pontja, amelyre $EA = AB$. Határozzuk meg az $\angle EDC$ nagyságát.

10 pont

Megoldás. Legyen K és L pont az AD , illetve a BE szakasz felezőpontja. Mivel ezek a pontok a DAB és BEA egyenlő szárú háromszögek alapjainak felezőpontjai, ezért $CKB \sphericalangle = ALC \sphericalangle = 90^\circ$, és így K , illetve L az AC , illetve BC oldalak belső pontjai, hiszen ABC hegyesszögű.

2 pont



Így CAL és BCK olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek hegyesszögei 60° , illetve 30° , tehát azok félszabályos háromszögek, és emiatt átfogójuk kétszer akkora, mint a rövidebbik befogójuk, azaz $|\vec{BC}| = 2|\vec{CK}|$ és $|\vec{CA}| = 2|\vec{CL}|$.

3 pont

Ezeket és a feladat feltételei szerint fennálló $|\vec{DB}| = |\vec{AB}|$, illetve $|\vec{EA}| = |\vec{AB}|$ egyenlőségeket felhasználva

$$|\vec{CD}| = |\vec{CK} - \vec{DK}| = |\vec{CK} - \vec{KA}| = |\vec{CK} - (\vec{CA} - \vec{CK})| = |2\vec{CK} - \vec{CA}| = |\vec{BC}| - |\vec{CA}|,$$

illetve

$$|\vec{EC}| = |\vec{EL} - \vec{CL}| = |\vec{LB} - \vec{CL}| = |(\vec{CB} - \vec{CL}) - \vec{CL}| = |\vec{CB} - 2\vec{CL}| = |\vec{BC}| - |\vec{CA}|.$$

3 pont

Tehát $|\vec{CD}| = |\vec{CE}|$, vagyis a CED olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge

$$DCE \sphericalangle = 180^\circ - BCA \sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Így az alapon fekvő szögei 30° -osak, vagyis $EDC \sphericalangle = 30^\circ$.

2 pont

Kiegészítés. Ha a versenyző szakaszhosszokkal számol vektorok hossza helyett, és az ábrájáról leolvassa (tehát akár az ábra mellett, akár máshol megjegyzi), hogy az AC egyenesen a pontok sorrendje A, K, D, C , a BC egyeneseken pedig B, L, C, E , akkor ugyanígy maximális pontszám jár. Ha azonban szakaszhosszokkal számolva a pontok sorrendjéről nem beszél, akkor 1 pontot le kell tőle vonni.

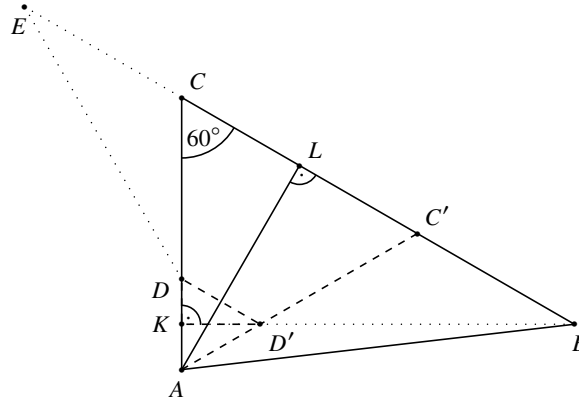
Összesen:

10 pont

2. megoldás. A feladat feltételei szerint $BAC \sphericalangle > ACB \sphericalangle = 60^\circ$, $ABC \sphericalangle < ACB \sphericalangle = 60^\circ$. Ezért az ABD egyenlő szárú háromszögben $BDA \sphericalangle = BAD \sphericalangle > 60^\circ$, vagyis a D pont az AC szakasz belső pontja; illetve a BAE egyenlő szárú háromszögben $AEB \sphericalangle = EBA \sphericalangle < 60^\circ$, tehát az E pont a BC szakasz C -t túli meghosszabbítására illeszkedik.

2 pont

Használjuk az ezen információk alapján készített ábra jelöléseit.



Az A-ból húzott magasság talppontját jelölje L , a B-ből húzott magasság talppontját pedig K . Ezek, mivel ABC hegyesszögű háromszög, a BC , illetve AC oldal belső pontjai.

1 pont

Az $|EA| = |AB|$ feltétel szerint E a B pont AL -re vonatkozó tükörképe. Jelölje a C és a D pont AL egyenesre vonatkozó tükörképét rendre C' , illetve D' .

1 pont

Mivel $EDC \sphericalangle = BD'C' \sphericalangle$, azért elegendő ez utóbbi szög nagyságát meghatározni.

1 pont

Az ACC' háromszög szabályos, mert tengelyesen szimmetrikus és a C csúcsánál 60° -os szöge van.

1 pont

Az ADD' is szabályos, mert szintén tengelyesen szimmetrikus, továbbá mivel D illeszkedik az AC egyenesre, így D' illeszkedik az AC' egyenesre, ezért $DAD' \sphericalangle = CAC' \sphericalangle = 60^\circ$.

1 pont

Mivel az ABD háromszög egyenlő szárú ($|AB| = |BD|$), a K pont felezi az AD szakaszt, eszerint a KD' szakasz az ADD' háromszög súlyvonala, sőt, mivel a háromszög szabályos, egyúttal a magassága is. Tehát D' illeszkedik az AD -re K -ban szintén merőleges BK egyenesre.

1 pont

De D' illeszkedik AC' -re is, mert D az AC szakasz pontja, az AC tükörképének pedig pontja a D' .

1 pont

Mivel tehát D' illeszkedik AC' -re és BK -ra is, így az $AD'K$ és a $BD'C'$ szögek váltószögek, tehát egyenlők, vagyis $AD'K \sphericalangle = BD'C' \sphericalangle = EDC \sphericalangle = 30^\circ$.

1 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Mivel egyenlő a $\sqrt{12} + \sqrt{13} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{16} + \sqrt{17} + \sqrt{18} + \sqrt{19} + \sqrt{20}$ összeg egész része?

10 pont

2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$ és $CAB \sphericalangle = 30^\circ$. K és L az AB , M pedig az AC oldal azon pontjai, amelyekre $AL = CM$ és $KMA \sphericalangle = 45^\circ$. Ha $CML \sphericalangle = 75^\circ$, akkor bizonyítsuk be, hogy $KM + ML = BC$.

10 pont

3. Bergengócia városai az $1, 2, \dots, n$ számokkal számozottak, ahol $n \geq 3$ egész szám. Az a és b számú városok között közvetlen buszjárat közlekedik mindkét irányba akkor és csak akkor, ha $ab + 1$ négyzetszám. Az 1-es számú városból kiindulva szeretnénk busszal bejárni Bergengóciát úgy, hogy a végén visszajutunk az 1-es számú városba, és minden városba pontosan egyszer érkezünk meg. Bizonyítsuk be, hogy ezt nem lehet megtenni.

10 pont

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Mivel egyenlő a $\sqrt{12} + \sqrt{13} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{16} + \sqrt{17} + \sqrt{18} + \sqrt{19} + \sqrt{20}$ összeg egész része?

10 pont

Megoldás. $\sqrt{16} = 4$, az összeg fennmaradó tagjaiból képezünk párokat, és ezeket a párokat becsüljük majd úgy, hogy a becsléshez az összegük négyzetét használjuk.

3 pont

Legyenek a párajaink: $\sqrt{12} + \sqrt{20}$, $\sqrt{13} + \sqrt{19}$, $\sqrt{14} + \sqrt{18}$ és $\sqrt{15} + \sqrt{17}$.

Négyzetre emelés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} + \sqrt{20})^2 &= 12 + 20 + 2\sqrt{240} < 32 + 2 \cdot 16 = 64, \\(\sqrt{13} + \sqrt{19})^2 &= 32 + 2\sqrt{247} < 32 + 2 \cdot 16 = 64, \\(\sqrt{14} + \sqrt{18})^2 &= 32 + 2\sqrt{252} < 32 + 2 \cdot 16 = 64, \\(\sqrt{15} + \sqrt{17})^2 &= 32 + 2\sqrt{255} < 32 + 2 \cdot 16 = 64.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a párok mindegyike kisebb 8-nál, ezért a vizsgált összeg kisebb 36-nál.

2 pont

Becsüljünk alulról:

$$\begin{aligned}62 &= 32 + 2 \cdot 15 < 32 + 2\sqrt{240}, \\62 &= 32 + 2 \cdot 15 < 32 + 2\sqrt{247}, \\62 &= 32 + 2 \cdot 15 < 32 + 2\sqrt{252}, \\62 &= 32 + 2 \cdot 15 < 32 + 2\sqrt{255}.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a párok mindegyike nagyobb $\sqrt{62}$ -nél, ezért a vizsgált összeg nagyobb, mint $4 + 4\sqrt{62}$.

1 pont

Egyszerű számítással igazolható, hogy $7,75 < \sqrt{62}$.

2 pont

Így az összeg nagyobb, mint $4 + 4 \cdot 7,75 = 35$.

1 pont

A fentiekből következik, hogy a $\sqrt{12} + \sqrt{13} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{16} + \sqrt{17} + \sqrt{18} + \sqrt{19} + \sqrt{20}$ összeg egész része 35.

1 pont

Összesen:

10 pont

2. megoldás. Minden pozitív n, m esetén $\sqrt{n^2 \pm m} < \sqrt{\left(n \pm \frac{m}{2n}\right)^2} = n \pm \frac{m}{2n}$. Legyen $n = 4$, és alkalmazzuk ezt az összefüggést az összeg tagjainak felső becslésére.

3 pont

$$\begin{aligned} & \sqrt{12} + \sqrt{13} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{16} + \sqrt{17} + \sqrt{18} + \sqrt{19} + \sqrt{20} < \\ & < 4 - \frac{4}{8} + 4 - \frac{3}{8} + 4 - \frac{2}{8} + 4 - \frac{1}{8} + 4 + 4 + \frac{1}{8} + 4 + \frac{2}{8} + 4 + \frac{3}{8} + 4 + \frac{4}{8} = 36. \end{aligned}$$

1 pont

Mivel 36 láthatólag elég jó felső becslés, remélhető, hogy a 35 jó alsó becslés. Ehhez azt vizsgáljuk, hogy az összeg nyolc tagjára adott felső becslésnél $\frac{1}{8}$ -dal kisebb érték alsó becslés-e minden tagra (a $\sqrt{16} = 4$ tagot nem becsüljük alulról).

3 pont

$$4 \pm \frac{m}{8} - \frac{1}{8} \stackrel{?}{<} \sqrt{16 \pm m}.$$

Négyzetre emelve:

$$16 \pm m + \frac{m^2}{64} \mp \frac{2m}{64} + \frac{1}{64} - 1 = 16 \pm m + \frac{1}{64}(m \mp 1)^2 - 1 \stackrel{?}{<} 16 \pm m,$$

azaz $(m \mp 1)^2 \stackrel{?}{<} 64$, ami esetünkben ($0 < m \leq 4$) nyilván teljesül.

2 pont

Tehát az összeg egész része 35.

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzések. 1. A 2. megoldásban még a $4 \pm \frac{m}{8} - \frac{1}{16}$ is megfelelő tagonkénti alsó becslés lenne. Ezzel az összeg alsó becslése 35,5.

2. A 2. megoldásban adott felső becslés után a következőképpen is folytatható a megoldás.

Látjuk, hogy $\sqrt{16-m} + \sqrt{16+m} < 8$. Válasszuk ki a $\sqrt{16-m} + \sqrt{16+m}$ összegek közül a legkisebbet, és becsüljük alulról. $\sqrt{15} + \sqrt{17} > \sqrt{14} + \sqrt{18} > \sqrt{13} + \sqrt{19} > \sqrt{12} + \sqrt{20}$, hiszen négyzeteikre $15 + 17 + 2\sqrt{255} > 14 + 18 + 2\sqrt{252} > 13 + 19 + 2\sqrt{247} > 12 + 20 + 2\sqrt{240}$. A legkisebb tehát $\sqrt{12} + \sqrt{20} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$. A $\sqrt{3}$ -at és a $\sqrt{5}$ -öt becsüljük tagonként alulról.

2 pont

Ismeretes, de könnyen ellenőrizhető is, hogy $1,7^2 = 2,89 < 3$, azaz $1,7 < \sqrt{3}$, illetve $2,2^2 = 4,84 < 5$, vagyis $2,2 < \sqrt{5}$. Innen pedig $\sqrt{12} + \sqrt{15} > 2(1,7 + 2,2) = 7,8$.

2 pont

A többi pár összege szintén becsülhető alulról 7,8-del, ezért a kérdéses összeg nagyobb, mint $4 \cdot 7,8 + 4 = 35,2$, ebből következik, hogy a kifejezés egész része 35.

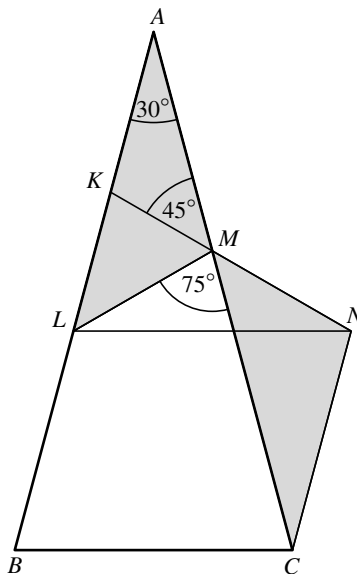
2 pont

2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$ és $CAB \sphericalangle = 30^\circ$. K és L az AB , M pedig az AC oldal azon pontjai, amelyekre $AL = CM$ és $KMA \sphericalangle = 45^\circ$. Ha $CML \sphericalangle = 75^\circ$, akkor bizonyítsuk be, hogy $KM + ML = BC$.

10 pont

Megoldás. Az ábrát elkészítve vegyük észre, hogy a K és L pontok csak az A, K, L sorrendben helyezkedhetnek el. A K és L pontok felcserélésével nem teljesíthető a feladatban szereplő szögekre adott feltétel.

1 pont



Legyen N a KM és az L ponton át BC -vel párhuzamosan rajzolt egyenesek metszéspontja.

1 pont

Az ABC háromszögben $ABC\angle = BCA\angle = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

$LN \parallel BC$ miatt $KLN\angle = ABC\angle = 75^\circ$ (egyállású szögek).

1 pont

Az AKM háromszögre a külsőszög-tételt alkalmazva $NKL\angle = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

A KLN egyenlő szárú háromszögben $LNK\angle = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

1 pont

$NMC\angle = KMA\angle = 45^\circ$ (csúcsszögek), és így $NML\angle = 75^\circ + 45^\circ = 120^\circ$,

1 pont

továbbá az LMN háromszög harmadik szöge $MLN\angle = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$.

1 pont

$MLN\angle = LMN\angle = 30^\circ$ miatt az LMN háromszög egyenlő szárú és $LM = MN$.

1 pont

$LMK\angle = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$, és ez alapján a KLM háromszögben $KLM\angle = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.

Az eddigi megállapításaink: $AL = CM$, $LM = MN$, $ALM\angle = CMN\angle = 45^\circ$ alapján $ALM\Delta \cong CMN\Delta$.

1 pont

Az egybevágóság alapján $NC = AM = AC - CM = AB - AL = LB$, illetve $MCN\angle = LAM\angle = 30^\circ$.

Így tehát a CN és a BL szakaszok párhuzamosok és egyenlő hosszúak, azaz a $BCNL$ négyszög paralelogramma.

1 pont

Az LMN , KLN egyenlő szárú háromszögek és a $BCNL$ paralelogramma megfelelő oldalainak egyenlőségét felhasználva $KM + ML = KM + MN = KN = LN = BC$.

1 pont

Ezzel az állítást igazoltuk.

Összesen:

10 pont

3. Bergengócia városai az $1, 2, \dots, n$ számokkal számozottak, ahol $n \geq 3$ egész szám. Az a és b számú városok között közvetlen buszjárat közlekedik mindkét irányba akkor és csak akkor, ha $ab + 1$ négyzetszám. Az 1-es számú városból kiindulva szeretnénk busszal bejárni Bergengóciát úgy, hogy a végén visszajutunk az 1-es számú városba, és minden városba pontosan egyszer érkezünk meg. Bizonyítsuk be, hogy ezt nem lehet megtenni.

10 pont

Megoldás. A megoldás során városok helyett számokról beszélünk, és közöttük szomszédsági relációról, ami a buszjáratokkal való összekötöttséget jelzi. Általában véve használjuk a gráfelméleti terminológiát.

Vegyük észre, hogy egy 4-gyel osztva 2 maradékot adó számnak csak 4-gyel osztható szomszédja lehet. Valóban, ha $a = 4k + 2$, $b = 2\ell + 1$ (páratlan), akkor

$$ab + 1 = (4k + 2)(2\ell + 1) + 1 = 8k\ell + 4k + 4\ell + 2 + 1 = 4(2k\ell + k + \ell) + 3,$$

ami nem lehet négyzetszám, hiszen egy négyzetszám 4-es maradéka 0 vagy 1; míg ha $a = 4k + 2$, $b = 4\ell + 2$ (4-gyel osztva 2 maradékot ad), akkor

$$ab + 1 = (4k + 2)(4\ell + 2) + 1 = 16k\ell + 8k + 8\ell + 4 + 1 = 8(2k\ell + k + \ell) + 5,$$

ami nem lehet négyzetszám, hiszen egy négyzetszám 8-as maradéka 0, 1 vagy 4.

5 pont

Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy be lehet járni Bergengóciát a kívánt módon, azaz

$$1 = a_0 \rightsquigarrow a_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow a_n = 1$$

egy olyan felsorolás, amelyre $\{a_1, \dots, a_{n-1}\} = \{2, \dots, n\}$, valamint a_{j-1} és a_j szomszédosak minden $1 \leq j \leq n$ -re.

1 pont

Az előző észrevétel alapján minden $4k + 2$ alakú szám előtt és után közvetlenül egy $4k$ alakú szám szerepel. Ez azt jelenti, hogy bármelyik két, egymás után meglátogatott $4k + 2$ alakú szám között van legalább egy $4k$ alakú, valamint mivel az 1-ből indulunk, és az 1-ből érkezünk, a legelőször előforduló $4k + 2$ alakú szám előtt és az utoljára előforduló $4k + 2$ alakú szám után is van egy-egy $4k$ alakú. Ez azonban azt jelenti, hogy a felsorolásunkban legalább 1-gyel több $4k$ alakú szám van, mint $4k + 2$ alakú, ami ellentmond annak, hogy az $\{1, \dots, n\}$ halmazban $4k + 2$ alakú számból legalább annyi van, mint $4k$ alakúból.

4 pont

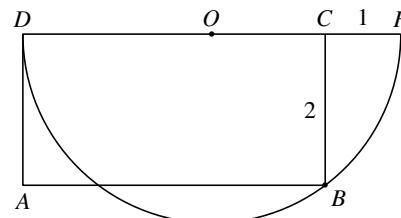
Összesen:

10 pont

Haladók I. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Jelölje O a DF szakasz felezőpontját és rajzoljunk félkört a DF szakasz fölé. Az $ABCD$ téglalap (az ábra szerint) úgy helyezkedik el, hogy D és B csúcsai illeszkednek a félkörre, valamint a CF szakasz hossza 1, a CB szakasz hossza pedig 2 egység hosszúságú. Mekkora az $ABCD$ téglalap területe?



7 pont

2. Az első 12 pozitív egész szám közül leírtunk egymás mellé néhányat úgy, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztja a másikat. Legfeljebb hány számot írhattunk fel?

7 pont

3. Határozzuk meg a pozitív valós számokon értelmezett

$$x^{1011} + x^{1010} + \dots + x^2 + x^1 + x^0 + \frac{1}{x^0} + \frac{1}{x^1} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{1010}} + \frac{1}{x^{1011}}$$

kifejezés legkisebb értékét. Milyen valós szám esetén veszi fel a kifejezés ezt az értéket?

7 pont

4. Hány pozitív egész $(n; k)$ számpár elégíti ki a következő egyenletet?

$$kn + n + 3k = 2021$$

7 pont

5. 10 osztálytárs színházba megy, ahol ugyanabban a sorban, egymás melletti székeken kapnak helyet. A szünetről visszatérve ugyanazokat az üléseket foglalják el, de nem mindenki ül vissza a saját helyére. Aki máshová ül, az eredeti helye melletti ülésre kerül. Hányféleképpen ülhetnek vissza, ha pontosan

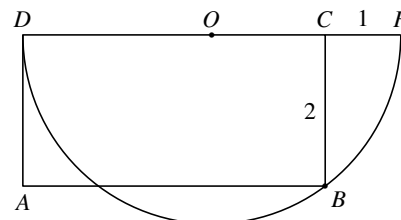
- 2 diák ül vissza az eredeti helyére?
- 3 diák ül vissza az eredeti helyére?
- 4 diák ül vissza az eredeti helyére?

7 pont

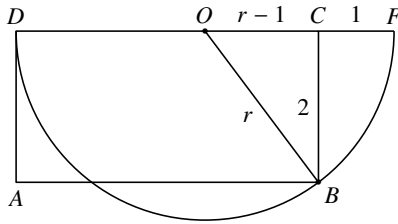
Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje O a DF szakasz felezőpontját és rajzoljunk félkört a DF szakasz fölé. Az $ABCD$ téglalap (az ábra szerint) úgy helyezkedik el, hogy D és B csúcsai illeszkednek a félkörre, valamint a CF szakasz hossza 1, a CB szakasz hossza pedig 2 egység hosszúságú. Mekkora az $ABCD$ téglalap területe?



7 pont



1. megoldás. Készítsünk vázlatrajzot.

1 pont

A téglalap ismeretlen oldalát jelöljük x -szel. Ekkor a kör sugara $r = \frac{x+1}{2}$.

1 pont

A kör középpontját O -val jelölve felírhatjuk az OCB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt: $r^2 = 2^2 + (r-1)^2$.

2 pont

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $r = \frac{5}{2}$.

1 pont

Ekkor a téglalap keresett oldala $CD = x = 2r - 1 = 4$ egység hosszúságúnak adódik.

1 pont

A téglalap területe tehát $T = 4 \cdot 2 = 8$ területegység.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. Thalész tétele miatt a DBF háromszög B csúcsánál derékszög van.

1 pont

A DBF derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága BC .

1 pont

Ebben a háromszögben felírva a magasságtételt $BC^2 = FC \cdot CD$ adódik.

3 pont

Azaz $2^2 = 1 \cdot CD$, vagyis a CD szakasz 4 egység hosszú.

1 pont

A téglalap területe tehát $T = 4 \cdot 2 = 8$ területegység.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. megoldás. Tükrözzük B pontot DF egyenesére. Ekkor a B pont B' tükörképe a DF szakasz Thalész-körére esik, míg DF ennek a Thalész-körnek az átmérője.

1 pont

Ekkor a (belső) szelőtétel miatt a C ponton átmenő két szelőre teljesül $BC \cdot CB' = FC \cdot CD$.

4 pont

Azaz $2 \cdot 2 = 1 \cdot CD$, vagyis a CD szakasz 4 egység hosszú.

1 pont

A téglalap területe tehát $T = 4 \cdot 2 = 8$ területegység.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Az első 12 pozitív egész szám közül leírtunk egymás mellé néhányat úgy, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztja a másikat. Legfeljebb hány számot írhattunk fel?

7 pont

Megoldás. Tegyük fel indirekt, hogy mind a 12 számot sorba lehet rendezni. A prímeknek a többi szám között csak 1 osztója van, továbbá a 7-nek és a 11-nek a kétszerese már nincs ott a felsorolt számok között, így ezek csak az 1-gyel állnak oszthatósági viszonyban.

1 pont

Ha a 7-et és a 11-et is felsoroljuk, ezek állnak a két szélén. Viszont mivel mindkét szám csak az 1-gyel áll oszthatósági viszonyban, így ekkor legfeljebb csak 3 számból állhat a sor.

Tehát mind a 12 számot nem tudjuk a feltételeknek megfelelően felsorolni.

3 pont

Ha viszont egyiküket elhagyjuk, a maradék 11 számot már sorba tudjuk rendezni az előírt módon.

Egy lehetséges konstrukció: 11, 1, 9, 3, 6, 12, 4, 8, 2, 10, 5.

3 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Az utolsó 3 pont helyett adható részpontszám 11-nél kevesebb számból álló sorra mutatott konstrukcióért is a következők szerint:

- konstrukció 8-nál rövidebb sorra: 0 pont
- konstrukció 8 vagy 9 hosszú sorra: 1 pont
- konstrukció 10 hosszú sorra: 2 pont

3. Határozzuk meg a pozitív valós számokon értelmezett

$$x^{1011} + x^{1010} + \dots + x^2 + x^1 + x^0 + \frac{1}{x^0} + \frac{1}{x^1} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{1010}} + \frac{1}{x^{1011}}$$

kifejezés legkisebb értékét. Milyen valós szám esetén veszi fel a kifejezés ezt az értéket?

7 pont

Megoldás. Az összeadandók csoportosításával alkossunk párokat.

$$\left(x^{1011} + \frac{1}{x^{1011}}\right) + \left(x^{1010} + \frac{1}{x^{1010}}\right) + \dots + \left(x^1 + \frac{1}{x^1}\right) + \left(x^0 + \frac{1}{x^0}\right)$$

2 pont

A zárójelekben lévő kifejezések mindegyikére alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepek közötti összefüggést:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cdot \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{x^n \cdot \frac{1}{x^n}} = 2$$

2 pont

Így az 1012 tagú összeg legkisebb lehetséges értéke $1012 \cdot 2 = 2024$.

1 pont

A legkisebb értéket az egyes párok a tagok egyenlőségekor veszik fel, ekkor:

$$x^n = \frac{1}{x^n} \Rightarrow x^{2n} = 1 \Rightarrow x = 1,$$

és ekkor a kifejezés értéke valóban 2024.

Tehát a kifejezés a legkisebb értékét $x = 1$ esetén veszi fel.

2 pont

Összesen:

7 pont

4. Hány pozitív egész $(n; k)$ számpár elégíti ki a következő egyenletet?

$$kn + n + 3k = 2021$$

7 pont

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalához hármat adva a bal oldal a következő módon szorzattá alakítható: $(n+3)(k+1) = 2024$.

1 pont

A $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ prímtényezős felbontás alapján 2024 osztóit párokban felsorolva:

1 pont

$2024 = 1 \cdot 2024 = 2 \cdot 1012 = 4 \cdot 506 = 8 \cdot 253 = 11 \cdot 184 = 22 \cdot 92 = 23 \cdot 88 = 44 \cdot 46$, összesen 8 pozitív osztópárt (és 16 pozitív osztót) kapunk.

1 pont

A negatív osztókat is figyelembe véve a 2024-nek 32 darab osztója van.

Mivel k pozitív, ezért $k+1$ nem lehet 1 vagy 1-nél kisebb, míg n pozitivitása miatt $n+3$ nem lehet 3 vagy 3-nál kisebb. Azaz a $k+1 = 1$, $n+3 = 2024$ és a $k+1 = 2024$, $n+3 = 1$, illetve

a $k + 1 = 1012$, $n + 3 = 2$ osztópárok és a negatív osztópárok sem adnak n -re és k -ra is pozitív megoldást.

2 pont

Azaz összesen $16 - 1 - 2 = 13$ darab pozitív egész $(n; k)$ számpár elégíti ki az egyenletet.

2 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző utal rá, hogy a negatív osztópárok nem adnak helyes megoldást, az utolsó 4 pontból kapjon meg 1-et, továbbá ha valamilyen módon felsorolja az alábbi táblázatban található 13 megoldást, kapja meg a további 3 pontot.

$(n + 3)$	4	8	11	22	23	44	46	88	92	184	253	506	1012
$(k + 1)$	506	253	184	92	88	46	44	23	22	11	8	4	2
n	1	5	8	19	20	41	43	85	89	181	250	503	1009
k	505	252	183	91	87	45	43	22	21	10	7	3	1

5. 10 osztálytárs színházba megy, ahol ugyanabban a sorban, egymás melletti székeken kapnak helyet. A szünetről visszatérve ugyanazokat az üléseket foglalják el, de nem mindenki ül vissza a saját helyére. Aki máshová ül, az eredeti helye melletti ülésre kerül. Hányféleképpen ülhetnek vissza, ha pontosan

a) 2 diák ül vissza az eredeti helyére?

b) 3 diák ül vissza az eredeti helyére?

c) 4 diák ül vissza az eredeti helyére?

7 pont

Megoldás. A szünetről visszatérve csakis úgy változhat meg az ülésrend, hogy két-két egymás mellett ülő diák cserél helyet.

1 pont

Például vegyük balról az első olyan diákot, aki mozgott. Ő csak egy hellyel jobbra ülhet, és az ő helyét csak a jobb oldali szomszédja foglalhatta el. Ha van még helycsere, ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva a tőlük jobbra ülő diákokra, ugyanígy csak egymás melletti diákok cserélhetnek helyet.

1 pont

a) Ha ketten ülnek vissza, akkor 4 párban volt helycsere, és ketten maradtak helyben.

1 pont

A helyben maradó diákokat egyesével, a helyet cserélőket pedig páronként egy-egy blokknak tekintve összesen 6 blokk van, amelyek közül a két darab egy fős blokk helyét kell kiválasztani.

Ezt $\binom{6}{2} = 15$ -féle módon tehetjük meg.

1 pont

b) Mivel összesen páros számú diák van, és a cserék is párokban történnek, a helyben maradó diákok száma is páros lesz. 3 helyben maradó diák esetén így a lehetséges sorrendek száma 0.

1 pont

c) Ha 4 diák marad helyben, akkor 3 párban történik helycsere. Most 7 blokkból kell 4-et kiválasztanunk,

1 pont

azaz ekkor $\binom{7}{4} = 35$ lehetőség van.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Az a) és a c) feladatrészekre járó pontokat akkor is kapja meg a versenyző, ha helyesen felírja az összes lehetőséget.

Haladók I. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek 999-szerese nem tartalmaz 9-es számjegyet? **7 pont**
2. Az ABC háromszög AB oldalának A -hoz közelebbi harmadolópontja P , BC oldalának B -hez legközelebbi negyedelőpontja Q , míg CA oldalának C -hez legközelebbi ötödőlőpontja R . Hányadrésze PQR háromszög területe az ABC háromszög területének? **7 pont**
3. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész n számot, amelyre teljesül, hogy egy $n \times n$ -es négyzet szétvágható 1×1 -es, illetve 2×2 -es négyzetekre úgy, hogy ugyanannyi 1×1 -es és 2×2 -es darab keletkezzen. **7 pont**
4. Adjunk meg olyan x és y egész számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = x + y\sqrt{2}.$$

7 pont

Haladók I. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek 999-szerese nem tartalmaz 9-es számjegyet? **7 pont**

1. megoldás. Legyen x a keresett pozitív egész szám. A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$999x = 1000(x - 1) + 900 + 90 + (10 - x). \quad (1)$$

I. Ha $1 \leq x \leq 9$ (azaz x egyjegyű), akkor az (1) összefüggés alapján $999x = 1000(x - 1) + \underline{900} + \underline{90} + (10 - x)$, így a tízesek és a százask helyiértékén 9-es áll (azaz a $999x$ mindig tartalmaz legalább két 9-es számjegyet). Tehát, ekkor nincs megoldás. **1 pont**

II. Ha $10 \leq x = \overline{ab} \leq 99$ (azaz x kétjegyű), akkor az (1) összefüggést és az I. esetben kapott eredményt felhasználva

$$\begin{aligned} 999x &= 999 \cdot (10a + b) = 10 \cdot 999a + 999b = \\ &= 10 \cdot [1000(a - 1) + 900 + 90 + (10 - a)] + [1000(b - 1) + 900 + 90 + (10 - b)] = \\ &= 10\,000(a - 1) + 1000(b + 9) + \underline{900} + 10(9 - a) + (10 - b), \end{aligned}$$

így a százask helyiértékén 9-es áll (azaz a $999x$ mindig tartalmaz legalább egy 9-es számjegyet). Tehát ebben az esetben sincs megoldás. **2 pont**

III. Ha $100 \leq x = \overline{abc} \leq 999$ (azaz x háromjegyű), akkor az (1) összefüggést és az II. esetben

kapott eredményt felhasználva

$$\begin{aligned}
 999x &= 999 \cdot (100a + 10b + c) = 10 \cdot (10 \cdot 999a + 999b) + 999c = \\
 &= 10 \cdot [10\,000(a-1) + 1000(b+9) + 900 + 10(9-a) + (10-b)] + \\
 &\quad + [1000(c-1) + 900 + 90 + (10-c)] = \\
 &= 100\,000(a-1) + 10\,000(b+9) + 1000(c+9) + 100(9-a) + 10(9-b) + (10-c).
 \end{aligned}$$

2 pont

Ahhoz, hogy a szám ne tartsalmazzon 9-es számjegyet, és figyelembe véve, hogy a legkisebb ilyen tulajdonságú számot keressük, a következőknek kell teljesülnie:

$$\begin{cases} 10-c < 9 \\ 9-b < 9 \\ 9-a < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < c \\ 0 < b \\ 0 < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \geq 2 \\ b \geq 1 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

1 pont

Tehát a legkisebb lehetséges x a 112, és erre $999 \cdot 112 = 111\,888$ valóban jó is.

1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Legyen x a keresett pozitív egész szám. Nyilván $999x = 1000x - x$, és $1000x$ bármilyen pozitív egész x esetén három darab nullára végződik.

1 pont

Tekintsük az $1000x - 1$; $1000x - 2$; ...; $1000x - 100$ számok utolsó három jegyét.

$1000x - 1 = \overline{\dots 999}$; $1000x - 2 = \overline{\dots 998}$; ...; $1000x - 99 = \overline{\dots 901}$; $1000x - 100 = \overline{\dots 900}$. Ezen számok mindegyikében a százask helyi értékén 9-es számjegy áll, így a 100-nál nem nagyobb x számok 999-szereseiben van 9-es számjegy.

3 pont

Továbbá a következő számok utolsó három jegyét vizsgálva: $1000x - 101 = \overline{\dots 899}$; $1000x - 102 = \overline{\dots 898}$; ...; $1000x - 110 = \overline{\dots 890}$; $1000x - 111 = \overline{\dots 889}$, adódik, hogy x nem lehet 111 vagy annál kisebb,

2 pont

míg $1000x - 112$ utolsó három jegye: $1000x - 112 = \overline{\dots 888}$. Innen $x = 112$ a legelső szóba jöhető szám, és erre $999 \cdot 112 = 111\,888$ valóban jó is.

1 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás. Legyen x a keresett pozitív egész szám, és $999x = \overline{abcdef}$. Megmutatjuk, hogy van olyan háromjegyű x , és hatjegyű $\overline{abcdef}$, ami megfelel a feladat feltételeinek.

A 9-es oszthatóság analógiájára a legfeljebb hatjegyű $\overline{abcdef} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{def} = 999 \cdot \overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{def})$ szám pontosan akkor osztható 999-cel, ha $\overline{abc} + \overline{def}$ osztható vele.

2 pont

Mivel $\overline{abcdef}$ nem tartalmazhat 9-es számjegyet, ezért $\overline{def}$ legfeljebb 888, így $\overline{abc}$ legalább 111, és ekkor az $\overline{abcdef} = 111\,888$ meg is felel a feladat feltételeinek,

4 pont

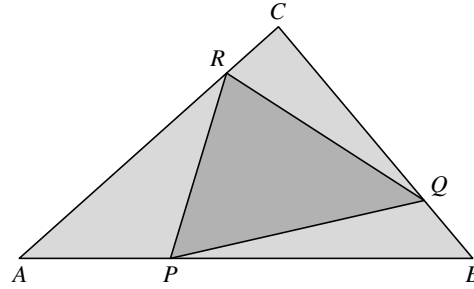
hiszen $111\,888 = 999 \cdot 112$. Azaz a legkisebb megfelelő szám az $x = 112$.

1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ABC háromszög AB oldalának A -hoz közelebbi harmadolópontja P , BC oldalának B -hez legközelebbi negyedelőpontja Q , míg CA oldalának C -hez legközelebbi ötödölőpontja R . Hányadrésze PQR háromszög területe az ABC háromszög területének?
- 7 pont

Megoldás. A megoldásban felhasználjuk, hogy ha két háromszögben egy-egy oldal ugyanolyan hosszú, akkor a területeik aránya megegyezik az egyenlő hosszú oldalakhoz tartozó magasságok arányával, illetve ha két magasság ugyanolyan hosszú, akkor a területek aránya megegyezik azon oldalak arányával, amelyekhez ezek a magasságok tartoznak.



1 pont

Így T -vel jelölve az ABC háromszög területét $\frac{T_{BQA}}{T_{BCA}} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{4}$, azaz $T_{BQA} = \frac{T}{4}$,

1 pont

ezért a vele megegyező (BQ) oldalú, $\frac{2}{3}$ -szor akkora magasságú PBQ háromszög területe:

$$T_{PBQ} = \frac{T}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{T}{6}.$$

1 pont

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a QCR és PAR háromszögek területe

$$T_{QCR} = \frac{T}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3T}{20},$$

1 pont

$$T_{PAR} = \frac{T}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4T}{15}.$$

1 pont

A keresett háromszög területe így

$$T_{PQR} = T - (T_1 + T_2 + T_3) = T \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{20} + \frac{4}{15}\right)\right) = \frac{5}{12}T.$$

2 pont

Összesen:

7 pont

3. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész n számot, amelyre teljesül, hogy egy $n \times n$ -es négyzet szétvágható 1×1 -es, illetve 2×2 -es négyzetekre úgy, hogy ugyanannyi 1×1 -es és 2×2 -es darab keletkezzen.

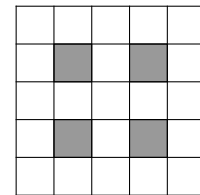
7 pont

Megoldás. Tegyük fel, hogy az $n \times n$ -es négyzet $2k$ darab részre vágható fel, amelyek közül k darab 1×1 -es és k darab 2×2 -es négyzet. Ekkor a keletkező részek területének összege megegyezik a teljes négyzet területével, vagyis $n^2 = k \cdot 1^2 + k \cdot 2^2 = 5k$, és ez alapján $5 \mid n$.

3 pont

Ezután megmutatjuk, hogy az 5×5 -ös négyzet nem vágható fel öt 2×2 -es és öt 1×1 -es részre. Színezzük be az 5×5 -ös négyzetnek 4 mezőjét az 1. ábra szerint.

Ekkor bárhol vágunk is ki az 5×5 -ös négyzetből egy teljes mezőkből álló 2×2 -es négyzetet, a kivágott alakzat mindig pontosan egy színezett mezőt fog tartalmazni. Mivel a színezett ábrán csak 4 sötét mező található, ezért ezek legfeljebb 4 darab 2×2 -es négyzethez tartozhatnak csak. Ez pedig azt jelenti, hogy az 5×5 -ös négyzetből nem vágható ki 5 darab 2×2 -es négyzet.



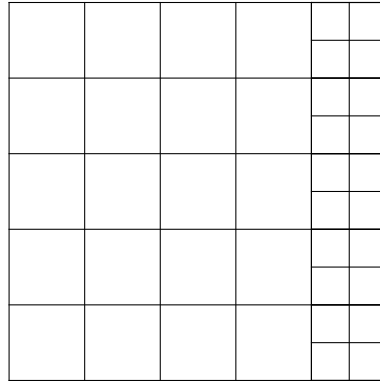
1. ábra

Így n csak 5-nél nagyobb 5-tel osztható szám lehet.

1 pont

$n = 10$ esetén a szétvágás már megvalósítható, például a 2. ábra szerint. Ekkor 20-20 darab 2×2 -es és 1×1 -es négyzet keletkezik. Így a feladat feltételeit teljesítő legkisebb szám az $n = 10$.

3 pont



2. ábra

Összesen:**7 pont**

4. Adjunk meg olyan x és y egész számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = x + y\sqrt{2}.$$

7 pont

Megoldás. Próbáljuk meg az egyenlet bal oldalán szereplő kifejezést egyszerűbb formában felírni. Alakítsuk át a bal oldalon álló kifejezést „belülről kifelé.”

Mivel $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} = 2\sqrt{2} + 1,$

2 pont

ezért a bal oldal átírható $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + (2\sqrt{2} + 1)}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$ alakra.

1 pont

Az előzőekhez hasonló módon $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1,$

1 pont

azaz a bal oldalt tovább alakítva $\sqrt{13 + 30\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{13 + 30 \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{43 + 30\sqrt{2}}.$

1 pont

Végül pedig az előzőekhez hasonlóan

$$\sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{25 + 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} + 18} = \sqrt{(5 + 3\sqrt{2})^2} = 5 + 3\sqrt{2}.$$

1 pont

Tehát az $x = 5$ és $y = 3$ egész számok megfelelnek a feladat feltételeinek.

1 pont

Összesen:**7 pont**

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha $a + b\sqrt{2} = x + y\sqrt{2}$, ahol a, b, x és y egészek, akkor csak az $a = x$ és $b = y$ lehetséges, vagyis a megtalált megoldás az egyetlen megoldása a feladatnak.

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

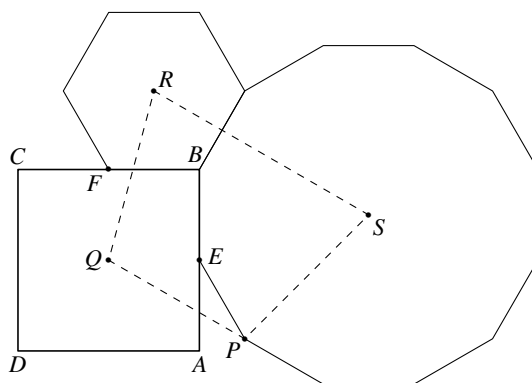
1. Bence érettségire készülve egy hónapban hét darab 100 pontos tesztet töltött ki. Ezekre – nem időrendben, hanem pontszám szerinti növekvő sorrendben – a következő pontszámokat kapta: 34,

64, 71, 75, 80, 82, 91. Minden teszt kitöltése után az elért eredményeket beírta egy számítógépes programba, amely mindig kiszámolta az addig beírt eredmények átlagát. Bence azt vette észre, hogy minden egyes pontszám beírása után az addig beírt pontszámok átlaga mindig egész szám. Bence arra már nem emlékszik, hogy a hét pontszámot milyen sorrendben kapta. Hány olyan sorrendje van a hét számnak, amely eleget tesz a feladatban megfogalmazott feltételnek?

7 pont

2. Az $ABCD$ négyzet AB és BC oldalainak felezőpontjai rendre az E és F pontok. Az ábra szerint a BF , illetve BE szakaszokkal mint oldalakkal a négyzeten kívül egy-egy szabályos hatszöget, illetve szabályos tizenkétszöget rajzolunk. A tizenkétszög E -vel szomszédos, B -től különböző csúcsát jelöljük P -vel, a négyzet, a hatszög és a tizenkétszög középpontját pedig rendre Q , R , S -sel. Igazoljuk, hogy a $PQRS$ szimmetrikus trapéz.

7 pont



3. Egy 3×3 -as négyzetrács mezőit kitöltjük az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz elemeivel. Ezután minden sor mellé és minden oszlop alá odaírjuk az abban a sorban, illetve oszlopban szereplő legnagyobb számot. Hány olyan kitöltése lehet a táblázatnak, amikor a sorokhoz, illetve az oszlopokhoz rendelt számok között az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike előfordul?

7 pont

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Bence érettségire készülve egy hónapban hét darab 100 pontos tesztet töltött ki. Ezekre – nem időrendben, hanem pontszám szerinti növekvő sorrendben – a következő pontszámokat kapta: 34, 64, 71, 75, 80, 82, 91. Minden teszt kitöltése után az elért eredményeket beírta egy számítógépes programba, amely mindig kiszámolta az addig beírt eredmények átlagát. Bence azt vette észre, hogy minden egyes pontszám beírása után az addig beírt pontszámok átlaga mindig egész szám. Bence arra már nem emlékszik, hogy a hét pontszámot milyen sorrendben kapta. Hány olyan sorrendje van a hét számnak, amely eleget tesz a feladatban megfogalmazott feltételnek?

7 pont

Megoldás. A hét szám összege valóban osztható 7-tel. Tekintsük az egyes pontszámok 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal való osztási maradékait.

1 pont

Érdemes időrendben visszafelé kitalálni a beírt pontszámokat. Először úgy kell elhagyni egy számot, hogy a többi hat összege osztható legyen hattal. Tekintsük a következő táblázato(ka)t.

pontszám	34	64	71	75	80	82	91	maradékok összege
maradék (mod 6)	4	4	5	3	2	4	1	$23 \equiv 5$

Ebből látszik, hogy az 5 maradékot adó 71 az utolsó (hetedik) beírt szám, mert $23 - 5 = 18$, tehát a maradékok összege, és ezáltal a fennmaradó hat pontszám összege csak így lesz osztható 6-tal. 1 pont

Ezután újabb számot elhagyva a többi öt összege osztható kell legyen 5-tel, innen hasonló gondolatmenettel:

pontszám	34	64	75	80	82	91	maradékok összege
maradék (mod 5)	4	4	0	0	2	1	$11 \equiv 1$

Azaz innen látszik, hogy az utolsó előttinek (hatodiknak) beírt szám a 91, mert csak ennek elhagyásával lesz a maradékok összege 5-tel osztható. 1 pont

Folytatva az „eljárást”:

pontszám	34	64	75	80	82	maradékok összege
maradék (mod 4)	2	0	3	0	2	$7 \equiv 3$

azaz az ötödiknek beírt szám a 75, és végül: 1 pont

pontszám	34	64	80	82	maradékok összege
maradék (mod 3)	1	1	2	1	$5 \equiv 2$

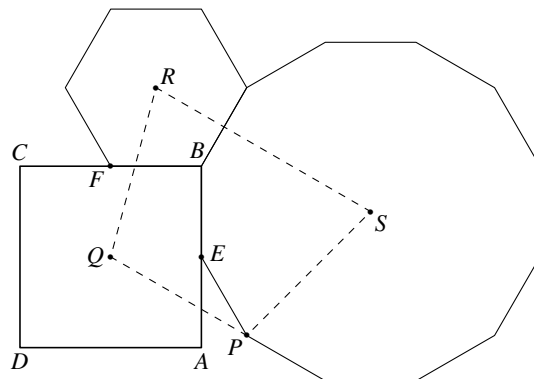
így a negyediknek beírt szám a 80, mert csak ennek elhagyásával lehet a maradékok összege 3-mal osztható. 1 pont

Tehát az első három szám – nem feltétlenül ebben a sorrendben – 34, 64 és 82. Ezeket bármilyen sorrendben beírva teljesül, hogy az első két szám átlaga, illetve az első három szám átlaga is egész. 1 pont

Mivel a negyediknek, ötödiknek, hatodiknak, hetediknek beírt négy szám helye a sorban adott, ezért $3! = 6$ -féle sorrendben jöhetett ki a hét pontszám. 1 pont

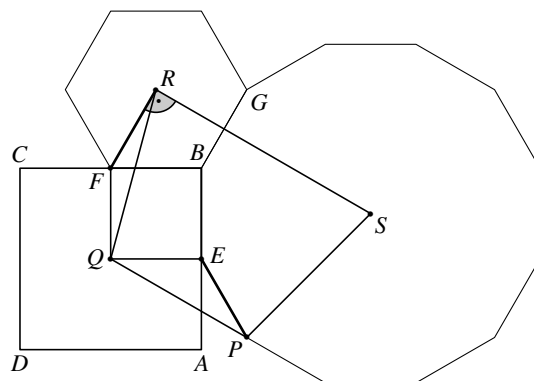
Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ négyzet AB és BC oldalainak felezőpontjai rendre az E és F pontok. Az ábra szerint a BF , illetve BE szakaszokkal mint oldalakkal a négyzeten kívül egy-egy szabályos hatszöget, illetve szabályos tizenkétszöget rajzolunk. A tizenkétszög E -vel szomszédos, B -től különböző csúcsát jelöljük P -vel, a négyzet, a hatszög és a tizenkétszög középpontját pedig rendre Q , R , S -sel. Igazoljuk, hogy a $PQRS$ szimmetrikus trapéz. 7 pont



Megoldás. Jelöljük a hatszög és a tizenkétszög közös oldalának B -től különböző csúcsát G -vel. Az SR szakasz felezőmerőlegese a hatszög és a tizenkétszög közös BG oldalának, tehát $SR \perp BG$. Másrészt a hatszögben $BGRF$ négyszög egy rombusz, ezért $FR \parallel BG$, így $SRF \sphericalangle = 90^\circ$.

1 pont



Mivel $FQ = FR$ és $RFQ \sphericalangle = RFB \sphericalangle + BFQ \sphericalangle = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$,

1 pont

ezért $QRF \sphericalangle = RQF \sphericalangle = \frac{180^\circ - RFQ \sphericalangle}{2} = 15^\circ$, továbbá $SRQ \sphericalangle = SRF \sphericalangle - QRF \sphericalangle = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

1 pont

A $PQRS$ négyszög P -nél és Q -nál levő szögeit vizsgálva $PEQ \sphericalangle = 360^\circ - QEB \sphericalangle - BEP \sphericalangle = 360^\circ - 90^\circ - 150^\circ = 120^\circ$,

1 pont

és $EQ = EP$ figyelembevételével $QPE \sphericalangle = PQE \sphericalangle = \frac{180^\circ - PEQ \sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Mindezeket összevetve $RQP \sphericalangle = RQE \sphericalangle + EQP \sphericalangle = 90^\circ - RQF \sphericalangle + EQP \sphericalangle = 90^\circ - 15^\circ + 30^\circ = 105^\circ$.

1 pont

Másrészt mivel PS szögfelezője a tizenkétszög P -nél levő belső szögének, ezért $EPS \sphericalangle = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ és $QPS \sphericalangle = QPE \sphericalangle + EPS \sphericalangle = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ$.

1 pont

Tehát $PQRS$ négyszög szögei 75° és 75° , 105° és 105° , ezért a négyszög valóban szimmetrikus trapéz.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Egy 3×3 -as négyzetrács mezőit kitöltjük az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz elemeivel. Ezután minden sor mellé és minden oszlop alá odaírjuk az abban a sorban, illetve oszlopban szereplő legnagyobb számot. Hány olyan kitöltése lehet a táblázatnak, amikor a sorokhoz, illetve az oszlopokhoz rendelt számok között az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike előfordul?

7 pont

Megoldás. A táblázat kitöltésénél a számokat írjuk be csökkenő sorrend szerint.

Ekkor a táblázatban pontosan egy 5-öst kell elhelyezni, mivel az 5-ös a sorának és oszlopának is a legnagyobb értéke, és a sorokhoz, oszlopokhoz rendelt számok között kettőnél több azonos nem fordulhat elő. Valamint a további 1, 2, 3, 4 számok mindegyike pontosan egy-egy helyen (sorban vagy oszlopban) fog előfordulni.

Az egyetlen 5-ös tehát 9-féleképpen írható be a táblázatba.

1 pont

A (szintén egyetlen) 4-esnek ugyanabba a sorba vagy oszlopba kell kerülnie, mint az 5-ösnek, mivel ellenkező esetben abban a sorban és oszlopban is a 4-es lenne a legnagyobb, így nem maradna elég sor és oszlop ahhoz, hogy hozzájuk tudjuk rendelni az 1, 2, 3 számok mindegyikét. A 4-es beírására így 4 lehetőség adódik.

1 pont

A 3-as elhelyezését esetekre bontva vizsgálhatjuk. Először tekintsük azt az esetet, amikor a 3-as a 4-essel és 5-össel azonos sorba vagy oszlopba kerül.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az említett három szám egy sort alkot. Ekkor a maradék két sor egyikébe csupa 1-est kell írni, míg az utolsó sorba legalább egy 2-est (és a többi helyre 1-est). Így a további kitöltésre $2 \cdot (2^3 - 1) = 14$ lehetőség adódik.

1 pont

Ezután vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a 3-as a 4-essel és az 5-össel nem azonos irányba (pl. nem azonos sorba) kerül. Ekkor a 3-as elhelyezésére két üres sor marad. A 3-as az adott soron belül 2 különböző helyre írható be. (Vagy a 4-essel, vagy az 5-össel azonos oszlopba kell kerülnön, mivel ellenkező esetben már csak egy irányhoz lehetne rendelni az 1-es vagy 2-es értéket.) (Jelölések a táblázatban: L – a 3-as beírása lehetséges, illetve T – a 3-as beírása tiltott.)

1 pont

L	L	T
4	5	
L	L	T

Az egymás mellé írt LL mezők egyikére a $(3; 3), (3; 2), (2; 3), (3; 1), (1; 3)$ számpárok valamelyike kerülhet csak, ami 5 lehetőséget jelent.

1 pont

Az LL mezők egyikének kitöltése után az üresen maradt sorba vagy oszlopba kell beírni három 1-est (lásd az ábra szerinti 2 lehetőséget).

L	L	1
4	5	1
		1

vagy

L	L	
4	5	
1	1	1

Végül az egymás mellett maradt két mezőben a $(2; 2), (2; 1)$ vagy $(1; 2)$ számpárokat kell elhelyezni ahhoz, hogy a hatodik irányhoz a 2-es értéket rendelhessük.

Így ebben az esetben a 3-as beírására és a folytatásra $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 60$ lehetőség adódik.

1 pont

Eddigi eredményeinket összegezve a táblázat megfelelő kitöltéseinek száma: $9 \cdot 4 \cdot (14 + 60) = 2664$.

1 pont

Összesen:

7 pont

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ téglalapban $AB : BC = 4 : 3$. Legyen F az AB , G a CD oldal felezőpontja, míg K az AC átló felezőpontja. Az AF és FB , valamint a CG és GD szakaszok fölé a téglalap belsejébe azonos sugarú félköröket rajzolunk. A K középpontú k kör pedig kívülről érinti az előző félköröket. Mekkora a k kör sugara és félkörök sugara arányának pontos értéke? 7 pont

2. Adjuk meg az $|y| = \sqrt{x^2 + x - 2}$ egyenlet megoldásait, ha x és y egész számok. 7 pont

3. Adott öt különböző pozitív egész szám. Ha az összes lehetséges módon képezzük kettőnek az összegét, akkor pontosan hét különböző értéket kapunk. Igazoljuk, hogy az öt szám összege 5-tel osztható. 7 pont

4. Mely egész $(a; b)$ számpárok esetén teljesül az alábbi egyenlet?

$$(a - 3)b^2 + (2a - 6)b = 3a - 4$$
 7 pont

5. 10 osztálytárs színházba megy, ahol ugyanabban a sorban, egymás melletti székeken kapnak helyet. A szünetről visszatérve ugyanazokat az üléseket foglalják el, de nem biztos, hogy mindenki a saját helyére ül vissza. Aki máshová ül, az eredeti helye melletti ülésre kerül. Tegyük fel, hogy n diák kerül új helyre, ahol n 10-nél nem nagyobb természetes szám. Adjuk meg n függvényében a lehetséges ülésrendek számát! 7 pont

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

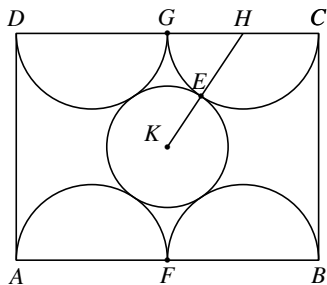
1. Az $ABCD$ téglalapban $AB : BC = 4 : 3$. Legyen F az AB , G a CD oldal felezőpontja, míg K az AC átló felezőpontja. Az AF és FB , valamint a CG és GD szakaszok fölé a téglalap belsejébe azonos sugarú félköröket rajzolunk. A K középpontú k kör pedig kívülről érinti az előző félköröket. Mekkora a k kör sugara és félkörök sugara arányának pontos értéke? 7 pont

- Megoldás.** Készítsünk vázlatrajzot. 1 pont

- Jelölje r a félkörök sugarát, ekkor $AB = 4r$ és $BC = 3r$.

- Érintkező körök érintési pontja rajta van a körök középpontjait összekötő centrálison, tehát K , E és H pontok egy egyenesen vannak. 1 pont

- Jelölje a k kör sugarát $KE = R$. A GKH derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt (a két



befogó $KG = \frac{3}{2}r$ és $GH = r$, míg az átfogó $KH = R + r$):

1 pont

$$(R + r)^2 - r^2 = \left(\frac{3}{2}r\right)^2.$$

1 pont

$$R^2 + 2Rr + r^2 - r^2 = \frac{9}{4}r^2, \quad \text{és innen} \quad 4R^2 + 8Rr - 9r^2 = 0.$$

1 pont

$$R = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 16 \cdot 9}}{8}r = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{2}r.$$

1 pont

Mivel R és r pozitív számok, így az $\frac{R}{r}$ arány is pozitív lesz, ezért $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{13} - 2}{2}$.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Adjuk meg az $|y| = \sqrt{x^2 + x - 2}$ egyenlet megoldásait, ha x és y egész számok.

7 pont

1. megoldás. Mivel $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) \geq 0$ teljesülése szükséges, ezért csak $x \geq 1$ vagy $x \leq -2$ értékek jöhetnek szóba.

1 pont

Ebből $x = 1$ és $x = -2$ esetén is $y = 0$ adódik, tehát a $(-2; 0)$ és az $(1; 0)$ megoldások.

1 pont

Ha $x > 2$, akkor $x^2 < x^2 + x - 2 < x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, vagyis a gyök alatti kifejezés két szomszédos négyzetszám közé esik, így $\sqrt{x^2 + x - 2}$ nem lehet egész, ilyen megoldás tehát nincs.

2 pont

$x = 2$ esetén $|y| = 2$ adódik, vagyis a $(2; -2)$ és a $(2; 2)$ is megoldások.

1 pont

Ha $x < -3$, akkor pedig $x + 1 < -2$ felhasználásával $x^2 > x^2 + x - 2 > x^2 + x + x + 1 = (x + 1)^2$, vagyis $\sqrt{x^2 + x - 2}$, ebben az esetben sem lehet egész, tehát ilyen megoldás sincs.

1 pont

$x = -3$ esetén pedig szintén $|y| = 2$ adódik, vagyis a $(-3; -2)$ és a $(-3; 2)$ is megoldások.

1 pont

Tehát hat megoldás van, és ezek: $(-2; 0)$, $(1; 0)$, $(2; -2)$, $(2; 2)$, $(-3; -2)$ és $(-3; 2)$.

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Az $x > 2$ és $x < -3$ esetek bármelyikének teljes körű vizsgálatáért 2 pont, mindkettőért összesen 3 pont jár.

2. megoldás. Mivel $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) \geq 0$ teljesülése szükséges, ezért csak $x \geq 1$ vagy $x \leq -2$ értékek jöhetnek szóba.

1 pont

Legyen $|y| = k \geq 0$. Ekkor $\sqrt{x^2 + x - 2} = k$, ahonnan négyzetre emelés után $x^2 + x - 2 = k^2$ adódik.

Végigszorozva 4-gyel, átrendezve, majd teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$(2x + 1)^2 - (2k)^2 = 9, \quad 1 \text{ pont}$$

majd azt, hogy

$$(2x + 1 - 2k)(2x + 1 + 2k) = 9. \quad 1 \text{ pont}$$

Felhasználva egyfelől, hogy $2x + 1 - 2k$ és $2x + 1 + 2k$ egész számok és így a 9 osztói, illetve hogy ($k \geq 0$ miatt) $2x + 1 - 2k \leq 2x + 1 + 2k$,

1 pont

másfelől pedig, hogy 9 a következőképpen bontható egészek szorzatára:

$$9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 = (-3) \cdot (-3) = (-9) \cdot (-1);$$

a következő négy eset lehetséges.

1 pont

I: $2x + 1 - 2k = 1$ és $2x + 1 + 2k = 9$; innen $x = 2, k = 2$, azaz $x = 2$ és $y = \pm 2$ adódik,

II: $2x + 1 - 2k = -9$ és $2x + 1 + 2k = -1$; innen $x = -3, k = 2$, azaz $x = -3$ és $y = \pm 2$ adódik,

1 pont

III: $2x + 1 - 2k = 3$ és $2x + 1 + 2k = 3$; innen $x = 1, k = 0$, azaz $x = 1$ és $y = 0$ adódik,

IV: $2x + 1 - 2k = -3$ és $2x + 1 + 2k = -3$; innen $x = -2, k = 0$, azaz $x = -2$ és $y = 0$ adódik.

1 pont

Tehát hat megoldás van, és ezek: $(-2; 0)$, $(1; 0)$, $(2; -2)$, $(2; 2)$, $(-3; -2)$ és $(-3; 2)$.

Összesen:

7 pont

3. Adott öt különböző pozitív egész szám. Ha az összes lehetséges módon képezzük kettőnek az összegét, akkor pontosan hét különböző értéket kapunk. Igazoljuk, hogy az öt szám összege 5-tel osztható.

7 pont

Megoldás. Legyen az 5 különböző szám $a < b < c < d < e$. A tíz lehetséges összegből a következő hét biztosan különböző: $a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e$.

1 pont

A maradék három összegre $b + c < b + d < c + d$. Ezek mindhárman nagyobbak $a + c$ -nél és kisebbek $c + e$ -nél.

1 pont

Figyelembe véve, hogy pontosan hét különböző értékünk van az összegekre, ez csak úgy lehetséges, ha $a + d = b + c$, $a + e = b + d$ és $b + e = c + d$.

1 pont

Az első egyenletből $b = a + d - c$, ezt beírva a harmadik egyenletbe $a + d - c + e = c + d$, amiből $a + e = 2c$,

1 pont

de akkor a második egyenlet alapján $b + d = 2c$ is fennáll.

1 pont

A két utolsó egyenlőséget összeadva $a + b + d + e = 4c$, amiből $a + b + c + d + e = 5c$ következik,

1 pont

és mivel c egész szám, ez éppen azt jelenti, hogy az $a + b + c + d + e$ összeg 5-tel osztható.

1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő számok léteznek is, az 1, 2, 3, 4 és 5 számok például jók.

A páronkénti összegek növekvő sorban: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8 és 9.

Összesen:

7 pont

4. Mely egész $(a; b)$ számpárok esetén teljesül az alábbi egyenlet?

$$(a-3)b^2 + (2a-6)b = 3a-4$$

7 pont

1. megoldás. A bal oldal szorzattá alakítva: $(a-3)(b^2+2b) = 3a-4$.

1 pont

$a \neq 3$, mert különben a bal oldal nulla, a jobb oldal pedig 5 lenne, így $(a-3)$ -mal eloszthatjuk a két oldalt és kapjuk: $b^2 + 2b = \frac{3a-4}{a-3}$.

1 pont

A jobb oldalt átalakítva adódik: $b^2 + 2b = 3 + \frac{5}{a-3}$.

1 pont

A bal oldalon egész szám áll, ezért az $\frac{5}{a-3}$ tört értéke is egész, így $a-3$ osztója az 5-nek, ezért $a-3$ értéke csak $-1, 1, -5$ vagy 5 , az a szám pedig csak $2, 4, -2$ vagy 8 lehet.

2 pont

A lehetséges eseteket táblázatba foglalva:

a	2	4	-2	8
$b^2 + 2b$	-2	8	2	4
$(b+1)^2 = b^2 + 2b + 1$	-1	9	3	5
b	nem valós	2 vagy -4	nem egész	nem egész

Tehát a keresett számpárok: $a = 4$ és $b = 2$, illetve $a = 4$ és $b = -4$.

2 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. $a \neq 3$, mert ekkor a bal oldal nulla, a jobb oldal pedig 5, azaz az

$$(a-3)b^2 + (2a-6)b - 3a + 4 = 0$$

egyenletet (ami b -ben valódi másodfokú egyenlet) kell megoldanunk.

Mivel b egész szám, ahhoz, hogy ennek az egyenletnek legalább az egyik gyöke egész szám legyen, szükséges, hogy az egyenlet $D = 16a^2 - 76a + 84$ diszkriminánsa négyzetszám legyen.

1 pont

Keressünk a $16a^2 - 76a + 84$ kifejezésre „hasonlító” négyzetszámokat!

Ha $a < 0$, akkor

$$16a^2 - 76a + 84 = (4a-9)^2 - 4a + 3 > (4a-9)^2$$

és

$$16a^2 - 76a + 84 = (4a-10)^2 + 4a - 16 < (4a-10)^2,$$

azaz $a < 0$ esetén a diszkrimináns értéke két szomszédos négyzetszám közé esik, így nem lehet négyzetszám.

2 pont

Ha $a > 4$, akkor

$$16a^2 - 76a + 84 = (4a-9)^2 - 4a + 3 < (4a-9)^2$$

és

$$16a^2 - 76a + 84 = (4a-10)^2 + 4a - 16 > (4a-10)^2,$$

azaz $a > 4$ esetén a diszkrimináns értéke szintén két szomszédos négyzetszám közé esik, így nem lehet négyzetszám. Tehát a értéke csak $0, 1, 2$ vagy 4 lehet.

2 pont

Ha $a = 0$, $a = 1$ vagy $a = 2$, akkor a diszkrimináns értéke rendre $84, 24$, illetve -4 , tehát nem négyzetszám.

$a = 4$ esetén pedig a diszkrimináns 36 , ekkor a másodfokú egyenlet megoldásai $b_1 = 2$ és $b_2 = -4$.

Tehát a keresett számpárok: $a = 4$ és $b = 2$, illetve $a = 4$ és $b = -4$.

2 pont

Összesen:

7 pont

5. 10 osztálytárs színházba megy, ahol ugyanabban a sorban, egymás melletti székeken kapnak helyet. A szünetről visszatérve ugyanazokat az üléseket foglalják el, de nem biztos, hogy mindenki a saját helyére ül vissza. Aki máshová ül, az eredeti helye melletti ülésre kerül. Tegyük fel, hogy n diák kerül új helyre, ahol n 10-nél nem nagyobb természetes szám. Adjuk meg n függvényében a lehetséges ülésrendek számát!

7 pont

Megoldás. A szünetről visszatérve csakis úgy változhat meg az ülésrend, hogy két-két egymás mellett ülő diák cserél helyet.

1 pont

Például vegyük balról az első olyan diákot, aki mozgott. Ő csak egy hellyel jobbra ülhet, és az ő helyét csak a jobb oldali szomszédja foglalhatta el. Ha van még helycsere, ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva a tőlük jobbra ülő diákokra, ugyanígy csak egymás melletti diákok cserélhetnek helyet.

1 pont

Mivel összesen páros számú diák van és a cserék is párokban történnek, nem lehetséges, hogy páratlan számú diák ül vissza az eredeti helyére.

1 pont

Ha $n = 2k$ diák ül vissza az eredeti helyére, akkor a helyben maradó diákokat egyesével, a helyet cserélőket pedig páronként egy-egy blokknak tekinthetjük. A lehetséges ülésrendek számát az határozza meg, hogy hányféleképpen helyezhetőek el a kettes blokkok.

1 pont

Van $10 - 2k$ helyben maradó diák és k pár, azaz $10 - k$ blokkból kell kiválasztanunk $10 - 2k$ kétfős blokkot.

2 pont

Tehát $\binom{10 - \frac{n}{2}}{10 - n}$ lehetőség van.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzések. 1. Az utolsó pont a kulcsban felírt bármelyik alak helyes megadásáért jár.

Az utolsó 4 pontot akkor is kapja meg a versenyző, ha helyesen kiszámolja n minden lehetséges értékére a lehetőségek számát, de általános képletet nem ír fel. A lehetőségek $L(n)$ száma:

$L(1) = L(3) = L(5) = L(7) = L(9) = 0$ és $L(0) = L(10) = 1$, $L(2) = 9$, $L(4) = 28$, $L(6) = 35$, $L(8) = 15$.

Ha a versenyző egyesével számolja ki az értékeket, akkor az alábbiak szerint kapja a pontszámát:

• páratlan n -ek kizárása:

3 pont

• $n = 0$; 10; 2 mindegyikének helyes megadása:

1 pont

• $n = 4$; 6; 8 esetek helyes megadása egyenként:

1-1-1 pont

2. Megmutatható (és különböző szövegverziókkal közismert feladat), hogy a lehetőségek együttes száma $L(0) + L(1) + \dots + L(10) = 89 = f_{11}$ a 11-edik Fibonacci-szám, és általában ha 10 helyett n diák van; a lehetőségek együttes száma $L(0) + L(1) + \dots + L(n) = f_{n+1}$, azaz az $(n+1)$ -edik Fibonacci-szám.

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának hossza a beírt kör sugarának egész számú többszöröse. Adjuk meg a két befogó arányát! 7 pont

2. A 0-tól különböző a, b, c valós számokra teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$a^2 + a = b^2$$

$$b^2 + b = c^2$$

$$c^2 + c = a^2.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$. 7 pont

3. Anna és Bea a következő játékot játsszák. Az asztalon levő 1000 darab gyufaszálból felváltva vesznek el, mindegyikük 2-hatvány számú gyufaszálat. Aki az utolsó gyufaszálat elveszi az asztalról az veszít. Kinek van nyerő stratégiája, ha Anna kezd?

Kettőhatványnak a 2 nemnegatív egész kitevős hatványait nevezzük, tehát az 1, 2, 4, 8, ... számokat. 7 pont

4. Két egységnégyzet megfelelő oldalai párhuzamosak, a közös rész területe $\frac{1}{2}$, a közös rész kerülete pedig k . Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{8} \leq k \leq 3. \quad \text{7 pont}$$

Haladók II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának hossza a beírt kör sugarának egész számú többszöröse. Adjuk meg a két befogó arányát! 7 pont

Megoldás. Jelölje a és b a derékszögű háromszög befogóit és c az átfogót. Az általánosság megszorítása nélkül legyen a beírt kör sugara 1 egység, ekkor az oldalhosszak egészek.

A háromszög területét kétféleképpen felírva: $T = \frac{a+b+c}{2} \cdot 1 = \frac{ab}{2}$. 1 pont

Ebből az átfogó: $c = ab - (a + b)$. 1 pont

A Pitagorasz-tételt alkalmazva: $[ab - (a + b)]^2 = a^2 + b^2$, amit átrendezve azt kapjuk, hogy $a^2b^2 + 2ab = 2ab(a + b)$. 1 pont

Mivel a, b pozitívak, ezért oszthatunk ab -vel, ahonnan $ab + 2 = 2a + 2b$. Ezt az a -ra rendezve:

$$a = \frac{2b-2}{b-2} = 2 + \frac{2}{b-2}. \quad \text{1 pont}$$

A befogónak a beírt kör átmérőjénél hosszabbnak kell lennie, ezért $b > 2$, továbbá mivel a és b egészek, $b - 2 \mid 2$. Így $b - 2$ lehetséges értékei a 2 pozitív osztói: 1 és 2.

1 pont

Ekkor b 3 vagy 4 lehet, az a befogó pedig rendre 4 vagy 3.

Azaz a derékszögű háromszög befogóinak aránya 4:3.

1 pont

A számolás során ekvivalens lépéseket hajtottunk végre. A háromszög átfogója 5 egység lesz, a területképletből pedig a beírt kör sugarára valóban 1 egység adódik, így mindhárom oldalhossz a beírt kör sugarának egész számú többszöröse.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Az első 3 pont megkapható a következő módon is: a derékszögű háromszögben $2r = a + b - c$, ahonnan ($r = 1$ értéke esetén) $c = a + b - 2$. Pitagorasz tételét alkalmazva: $(a + b - 2)^2 = a^2 + b^2$, amit átrendezve és az összevonások után azt kapjuk, hogy $2ab - 4a - 4b + 4 = 0$, azaz $ab - 2a - 2b + 2 = 0$.

Ha a versenyző a 3-4-5 egység oldalhosszú derékszögű háromszögről belátja, hogy a beírt körének sugara 1 egység, így az megfelel a feltételeknek, de más lehetséges eseteket nem zár ki, legfeljebb 2 pontot kapjon.

2. A 0-tól különböző a, b, c valós számokra teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$a^2 + a = b^2$$

$$b^2 + b = c^2$$

$$c^2 + c = a^2.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

7 pont

Megoldás. Összeadva az egyenlőségek megfelelő oldalait: $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$, amiből $a + b + c = 0$,

1 pont

illetve $b + c = -a$, $c + a = -b$, $a + b = -c$ adódik.

1 pont

Ezeket az összefüggéseket és az eredeti egyenlőségeket felhasználva:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = -a = b + c$$

$$(b - c)(b + c) = b^2 - c^2 = -b = c + a$$

$$(c - a)(c + a) = c^2 - a^2 = -c = a + b$$

2 pont

A kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva:

$$(a - b)(b - c)(c - a)(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b)(b + c)(c + a).$$

2 pont

Mivel a, b, c 0-tól különböző valós számok, ezért az ellentettjükkal egyenlő $b + c, c + a, a + b$ számok is azok, így az utoljára kapott egyenlőséget oszthatjuk $(a + b)(b + c)(c + a)$ -val, és így éppen a bizonyítandó $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$ egyenlőséget kapjuk.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Anna és Bea a következő játékot játsszák. Az asztalon levő 1000 darab gyufaszálból felváltva vesznek el, mindegyikük 2-hatvány számú gyufaszálat. Aki az utolsó gyufaszálat elveszi az asztalról az veszít. Kinek van nyerő stratégiája, ha Anna kezd?

Kettőhatványnak a 2 nemnegatív egész kitevős hatványait nevezzük, tehát az 1, 2, 4, 8, ... számokat.

7 pont

Megoldás. Legyen N a kezdetben az asztalon lévő gyufaszálak száma. Megvizsgálva az $N = 1, 2, 3, 4$ eseteket látható, hogy mindkét fél jó játéka esetén $N = 1$ -nél és $N = 4$ -nél Bea nyer, $N = 2$ -nél és $N = 3$ -nál pedig Anna.

1 pont*

(További eseteket is megvizsgálva) az a sejtésünk támadhat, hogy az $N = 3n + 1$ alakú eseteknél Beának, az $N = 3n$ és $N = 3n + 2$ alakú eseteknél pedig Annának van nyerő stratégiája.

1 pont*

Felhasználjuk, hogy egy 2-hatvány 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot adhat.

1 pont

Ezért, ha valaki $3n + 1$ alakú gyufaszámból vesz el, akkor a megmaradt gyufák száma 3-mal osztva 0 vagy 2 maradékot fog adni.

1 pont

A soron következő játékos biztosan tud úgy elvenni, hogy a hármas maradék ismét 1 legyen, például $3n$ alakú gyufaszám esetén 2 szál gyufát, míg $3n + 2$ alakú gyufaszám esetén 1 szál gyufát elvéve. Ha ezzel a stratégiával játszik, akkor biztosan nem ő fogja elvenni az utolsó szál gyufát (hiszen a 0 nem $3n + 1$ alakú).

2 pont

Jól játszva tehát az nyerhet, aki elé először kerül $3n$ vagy $3n + 2$ alakú gyufaszám, esetünkben ez Bea, hiszen Anna előtt kezdéskor 1000 szál gyufa van és ez 3-mal osztva 1 maradékot ad.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. A *-gal jelölt pontok helyes megoldás esetén akkor is megadandók, ha a versenyző nem vizsgálja külön az eseteket kis N -re, illetve, ha nem fogalmazza meg a sejtést.

4. Két egységnégyzet megfelelő oldalai párhuzamosak, a közös rész területe $\frac{1}{2}$, a közös rész kerülete pedig k . Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{8} \leq k \leq 3.$$

7 pont

1. megoldás. A két négyzet közös része egy téglalap, ennek oldalai legyenek x és y , ahol x és y pozitívak, és egyik sem nagyobb 1-nél. A téglalap területe $xy = \frac{1}{2}$, innen $y = \frac{1}{2x}$, kerülete pedig $k = 2x + 2y = 2x + \frac{1}{x}$.

1 pont

Egyfelől, be kell látni, hogy $\sqrt{8} \leq k$, azaz

$$\sqrt{8} \leq 2x + \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Mivel x pozitív, ezért a bizonyítandó (1) egyenlőtlenséget x -szel szorozva és nullára rendezve azzal ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$0 \leq 2x^2 - \sqrt{8}x + 1, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq (\sqrt{2}x - 1)^2,$$

ez nyilván minden x -re igaz, az (1) egyenlőtlenséget ezzel beláttuk,

2 pont

és a kerület a $\sqrt{8}$ értéket az $x = y = \sqrt{2}/2$ értéke esetén fel is veszi.

Másrészt, azt kell belátnunk, hogy $k \leq 3$, azaz

$$2x + \frac{1}{x} \leq 3. \quad (2)$$

Vegyük észre, hogy x és y szerepe felcserélhető, ezért feltehető, hogy $0 < y \leq x$. Ekkor $\frac{1}{2} = xy \leq x^2$,

innen $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x$, tehát $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$.

1 pont

x -szel szorozva és nullára rendezve a bizonyítandó (2) egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk: $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$, azaz $2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$.

Ennek megoldása: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

2 pont

Mivel $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ez minden $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ esetén igaz, tehát a (2) egyenlőtlenséget is beláttuk.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. A két négyzet közös része egy téglalap, ennek oldalai legyenek x és y , ahol $0 < x, y \leq 1$. A téglalap területe $xy = \frac{1}{2}$, kerülete $k = 2x + 2y$.

Egyfelől, a számtani és mértani közép közötti összefüggést az $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ alakban alkalmazva 1 pont

kapjuk hogy $2x + 2y \geq 2\sqrt{2x \cdot 2y} = 2\sqrt{4xy} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, tehát $k \geq \sqrt{8}$, 2 pont

és a kerület a $\sqrt{8}$ értéket az $x = y = \sqrt{2}/2$ értéke esetén fel is veszi.

Másfelől a $0 < x, y \leq 1$ alapján $1 - x \geq 0$ és $1 - y \geq 0$, így $0 \leq (1 - x)(1 - y) = 1 + xy - x - y$, 1 pont

ahonnan $x + y \leq 1 + xy = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, azaz 2 pont

$2x + 2y \leq 3$, tehát $k \leq 3$.

1 pont

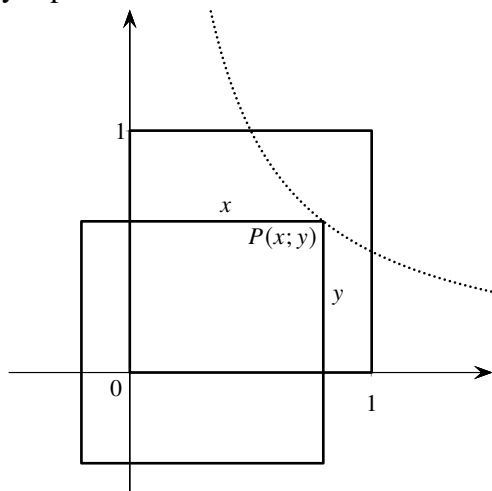
Összesen:

7 pont

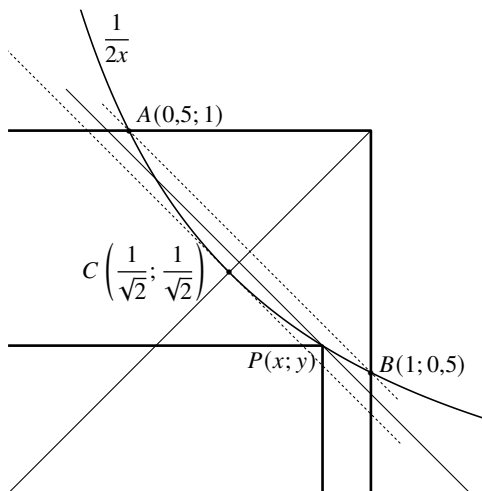
3. megoldás. A két négyzetet helyezzük el egy koordináta-rendszerben az 1. ábra szerint.

Az egyik négyzet csúcsa az origó, a másik négyzetnek az előbbi négyzet belsejében lévő csúcs-pontja $P(x; y)$. Ekkor a közös rész (nyilván egy téglalap) oldalai x és y , e téglalap területe $xy = \frac{1}{2}$.

Ezért a P pont koordinátái $P\left(x; \frac{1}{2x}\right)$, így a P pont rajta van a $h(x) = \frac{1}{2x}$ függvény grafikonján, ami egy hiperbola. 1 pont



1. ábra



2. ábra

Továbbá a P pont rajta van e hiperbola $A(0,5;1)$ és $B(1;0,5)$ pont közötti ívén. A hiperbolának ez az íve az $e = AB$ egyenes alatt, és a hiperbolát a C tengelypontjában érintő f egyenes felett helyezkedik el (2. ábra).

1 pont

A C pont a $g(x) = x$ függvény grafikonján van, hiszen ez a hiperbola szimmetriatengelye, így C koordinátái az $x = \frac{1}{2x}$ egyenletből kiszámíthatók: $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 1 pont

Az e egyenesen az $x + y = 1,5$ feltételnek eleget tevő pontok, az f egyenesen az $x + y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ feltételnek megfelelő pontok vannak. 2 pont

Mivel P ezen két egyenes közé (esetleg valamelyik egyenesre) esik, P koordinátáinak összege $\sqrt{2}$ és $1,5$ közé esik, azaz $\sqrt{2} \leq x + y \leq 1,5$. A közös rész kerülete $k = 2x + 2y$, így $2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8} \leq k \leq 3$. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző a feladatot átfogalmazza az alábbi algebrai feltételre: $xy = \frac{1}{2}$, $0 < x$, $y \leq 1$ és $x + y$ szélsőértékeit keressük –, arra 1 pontot kapjon; továbbá, ha indoklás nélkül közli, hogy adott szorzat mellett a két szám összege akkor a legkisebb, ha a két szám egyenlő, azaz $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén, és ekkor $k = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ éppen – újabb 1 pontot kapjon; továbbá, ha indoklás nélkül közli, hogy adott szorzat mellett a két szám összege akkor a legnagyobb, ha az egyik $\frac{1}{2}$, a másik pedig 1, és ekkor $k = 3$ – újabb 1 pontot kapjon.

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az n pozitív egész szám négy legkisebb pozitív osztója növekvő sorrendben d_1, d_2, d_3, d_4 . Keresük meg az összes olyan n számot, amelyre teljesül az

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$$

egyenlőség. 7 pont

2. Az ABC háromszög egy tetszőleges P belső pontján keresztül párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. A párhuzamosok az AB , BC és CA oldalakat rendre a Q és R , az U és V , valamint a W és Z pontokban metszik. A PQR , PUV és PWZ háromszögek területe rendre 50, 8, illetve 18 területesség. Mekkora az ABC háromszög területe? 7 pont

3. Egy Bowling Klub kölcsönözhető cipői között van n egyforma (színű és méretű) pár cipő ($n \geq 3$). A klub vezetője kiszámolta, hogy ha ezeket a cipőket összekeveri, majd találmra kiválaszt közülük négy darab cipőt, akkor annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott cipők között legalább egy összetartozó pár van (egy jobbos és egy balos cipő), egész számú többszöröse annak a valószínűségének, hogy két pár cipő alakítható ki a kiválasztottakból. Határozzuk meg az n értékét. 7 pont

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az n pozitív egész szám négy legkisebb pozitív osztója növekvő sorrendben d_1, d_2, d_3, d_4 . Keresünk meg az összes olyan n számot, amelyre teljesül az

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$$

egyenlőség.

7 pont

Megoldás. A $(2k)^2 = 4k^2$ és $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$ összefüggések alapján a páros számok négyzete 4-gyel osztva 0, a páratlanoké pedig 1 maradékot ad.

1 pont

Vizsgáljuk meg n -et a néggyel való oszthatóság szempontjából.

1. eset: ha n páratlan szám. Ekkor d_1, d_2, d_3, d_4 páratlan osztói n -nek és $d_1^2, d_2^2, d_3^2, d_4^2$ mindegyike 4-gyel osztva 1 maradékot adó szám. Így az összegüknek, n -nek 4-gyel oszthatónak kellene lennie, ami ellentmondás. Tehát n csak páros szám lehet.

1 pont

2. eset: ha n 4-gyel osztható szám. Ekkor $d_1 = 1, d_2 = 2$, valamint d_3 és d_4 egyike 4. Az ismert három osztó négyzete összegének 4-es maradéka tehát 1, a hiányzó osztó négyzetével együtt $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$, azaz n 4-es maradéka 1 vagy 2 lehet, ami ellentmondás azzal a feltételezéssel, hogy $4 \mid n$. Tehát $4 \nmid n$.

1 pont

3. eset: ha $2 \mid n$, de $4 \nmid n$. Ekkor $\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{1, 2, p, q\}$ vagy $\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{1, 2, p, 2p\}$, ahol p és q páratlan prímek.

1 pont

Az első feltétel mellett n 4-es maradéka $1 + 0 + 1 + 1 = 3$ lenne, ami szintén ellentmond annak a feltételezésnek, hogy n páros.

1 pont

A második feltétel teljesülése esetén pedig $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5(1 + p^2)$. Tehát $5 \mid n$,

1 pont

és így $p = d_3 = 5$, ami alapján $n = 130$.

1 pont

Ennek figyelembevételével a feladat egyetlen megoldása $n = 130$.

Összesen:

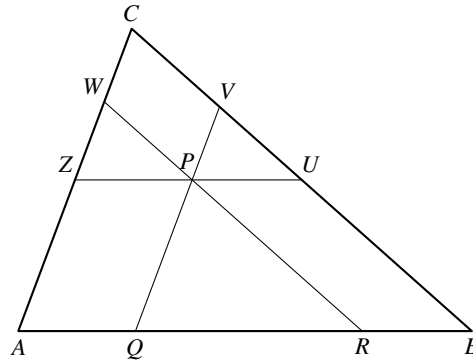
7 pont

2. Az ABC háromszög egy tetszőleges P belső pontján keresztül párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. A párhuzamosok az AB, BC és CA oldalakat rendre a Q és R , az U és V , valamint a W és Z pontokban metszik. A PQR, PUV és PWZ háromszögek területe rendre 50, 8, illetve 18 területegység. Mekkora az ABC háromszög területe?

7 pont

Megoldás. A PWZ és az UPV háromszög hasonló az UCZ háromszöghöz, mert az oldalaik párhuzamossága miatt egyenlőek a szögeik.

1 pont



Az egyik esetben a hasonlóság aránya $\frac{ZP}{ZU}$ a másik esetben pedig $\frac{PU}{ZU}$. Mivel $ZP + PU = ZU$ ezért a két arány összege 1. Jelöljük az első arányt λ -val, a másodikat pedig $1 - \lambda$ -val.

1 pont

Jelöljük T -vel az UCZ háromszög területét. Mivel a területek aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével $\lambda^2 T = 18$ és $(1 - \lambda)^2 T = 8$.

1 pont

A két egyenletet egymással elosztva $\frac{\lambda^2}{(1 - \lambda)^2} = \frac{9}{4}$ -hez jutunk. Innen mivel λ és $1 - \lambda$ pozitív számok $\frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{3}{2}$, majd $\lambda = \frac{3}{5}$ adódik.

1 pont

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 T = 18$ -ből $T = 50$ adódik. Így a $PVCW$ paralelogramma területe $50 - 18 - 8 = 24$.

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk meg az $AQPZ$ paralelogramma területét, felhasználva, hogy a QRP és a ZPW háromszög hasonló ARW háromszöghöz. Ennek a paralelogrammának a területe 60.

1 pont

Az előzőekhez hasonlóan QRP , PUV és QBV háromszögek hasonlóságából az $RBUP$ paralelogramma területe pedig 40-nek adódik.

1 pont

Így a három háromszög és a három paralelogramma területét összeadva az ABC háromszög területére $(50 + 8 + 18) + (24 + 60 + 40) = 200$ -at kapunk.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Egy Bowling Klub kölcsönözhető cipőit között van n egyforma (színű és méretű) pár cipő ($n \geq 3$). A klub vezetője kiszámolta, hogy ha ezeket a cipőket összekeveri, majd találomra kiválaszt közülük négy darab cipőt, akkor annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott cipők között legalább egy összetartozó pár van (egy jobbos és egy balos cipő), egész számú többszöröse annak a valószínűségének, hogy két pár cipő alakítható ki a kiválasztottakból. Határozzuk meg az n értékét.

7 pont

Megoldás. n egyforma pár cipő van, azaz $2n$ darab cipő (n darab „bal” és n darab „jobb”).

Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott cipők között lesz összetartozó pár, míg B azt az eseményt, hogy két pár cipő alakítható ki a kiválasztottakból.

Ha $n = 3$, akkor A biztos esemény, így $P(A) = 1$, míg $P(B) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{3}{5}$. Mindezek alapján

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{5}{3}, \text{ ami nem egész, azaz az } n = 3 \text{ eset nem ad megoldást.} \quad 1 \text{ pont}$$

Ha $n \geq 4$ az A eseménynél komplementer-elvvel dolgozunk $\bar{A}$: a kiválasztott cipők között nem lesz összetartozó pár (mind a négy cipő „balos” vagy mind a négy cipő „jobbos”).

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{n}{4} + \binom{n}{4}}{\binom{2n}{4}} = \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}} = \frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)} \text{ és innen}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{7n^2 - 11n}{2(2n-1)(2n-3)} = \frac{n(7n-11)}{2(2n-1)(2n-3)}. \quad 2 \text{ pont}$$

A B eseményre (két pár cipő alakítható ki a kiválasztottakból)

$$P(B) = \frac{\binom{n}{2} \cdot \binom{n}{2}}{\binom{2n}{4}} = \frac{\frac{n^2(n-1)^2}{4}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}} = \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}. \quad 1 \text{ pont}$$

Mindezeket felhasználva: $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{n(7n-11)}{3n(n-1)} = \frac{7n-11}{3n-3} = k \in \mathbb{Z}^+.$ 1 pont

Ha k pozitív egész, akkor $3k$ is pozitív egész, így a $3k = \frac{7n-11}{n-1} = 7 - \frac{4}{n-1}$ pozitív egész.

Figyelembe véve, hogy $n \geq 4$ kell legyen, az $n-1$ csak 4 lehet, azaz $n = 5$ lesz. 2 pont

Tehát öt pár cipő esetén lesz az adott hányados egész szám.

Ellenőrzés: ha $n = 5$, akkor $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{21}}{\frac{10}{21}} = \frac{20}{10} = 2.$

Összesen:

7 pont

Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Mely 1-nél nagyobb pozitív egész n -ekre lehetséges, hogy a $p_1, p_2, \dots, p_n$ páratlan pozitív egész számok szorzata egyenlő az összegükkel?

7 pont

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $q > 1$ racionális szám esetén a pozitív egész számok halmazát fel lehet bontani egy A és B halmazra úgy, hogy q nem írható fel sem két A -beli, sem két B -beli szám hányadosaként. 7 pont
3. Vannak-e olyan 2025 és 6000 közötti x és y egész számok, amelyekre az $xy + x$ és az $xy + y$ egymástól különböző négyzetszámok? 7 pont
4. Az egyenlő szárú ABC háromszög C -nél lévő szöge 100° . Az A -ból induló belső szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $AD + DC = AB$. 7 pont
5. Vannak-e olyan $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ számok, amelyek mindegyike $\sqrt{2} + 1$ vagy $\sqrt{2} - 1$ értékű, és teljesül rájuk, hogy 7 pont
- $$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199?$$

Haladók III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely 1-nél nagyobb pozitív egész n -ekre lehetséges, hogy a $p_1, p_2, \dots, p_n$ páratlan pozitív egész számok szorzata egyenlő az összegükkel? 7 pont
- Megoldás.** Mivel a p_i számok szorzata páratlan, így az összegük is páratlan, ezért az n csak páratlan lehet. 1 pont
- A továbbiakban két esetet vizsgálunk, aszerint, hogy az n 4-gyel osztva 1 vagy 3 maradékot ad-e.
- I. Ha $n = 4k + 1 > 1$ alakú (ahol k pozitív egész).
- Az $\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{4k-1 \text{ db}}, 3, 2k+1$ számok összege $(4k-1) \cdot 1 + 3 + (2k+1) = 6k+3$ és szorzatuk is $1^{4k-1} \cdot 3 \cdot (2k+1) = 6k+3$. Azaz az n tetszőleges $4k+1$ alakú szám lehet. 2 pont
- II. Ha $n = 4k - 1$ alakú (ahol k pozitív egész).
- Innentől végig a számok 4-es maradékait vizsgáljuk. Legyen a $p_1, p_2, \dots, p_{4k-1}$ számok között m darab -1 és $(n-m)$ darab $+1$ maradékot adó. A p_i számok 4-es maradékainak összege $(4k-1-m) \cdot 1 + m \cdot (-1) = 4k-1-2m$, míg a számok 4-es maradékainak szorzata $(-1)^m$. 2 pont
- a) Ha m páratlan, akkor a p_i számok 4-es maradékainak összege $4k-1-2m \equiv 1 \pmod{4}$, míg a szorzatuk $(-1)^m \equiv -1 \pmod{4}$, azaz a szorzat és az összeg nem lehet egyenlő. 1 pont
- b) Ha pedig m páros, akkor a p_i számok 4-es maradékainak összege $4k-1-2m \equiv -1 \pmod{4}$, míg a szorzatuk $(-1)^m \equiv 1 \pmod{4}$, azaz a szorzat és az összeg megint csak nem lehet egyenlő. 1 pont
- Tehát az n szám nem lehet $4k-1$ alakú.

Válasz: pontosan a $4k+1$ alakú n -ekre teljesülhet a feladat feltétele.

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző bármilyen – egyéb – általános konstrukciót ad az $n = 4k + 1$ alakú számok esetére, természetesen kapja meg az adott rész 2 pontját.

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $q > 1$ racionális szám esetén a pozitív egész számok halmazát fel lehet bontani egy A és B halmazra úgy, hogy q nem írható fel sem két A -beli, sem két B -beli szám hányadosaként.

7 pont

Megoldás. Tekintsük a következő gráfot a pozitív egész számok halmazán: két számot akkor kössünk össze éllel, ha a hányadosuk q . A feladatot lefordítva a gráfunk pontjait két színnel kell színezni úgy, hogy azonos színű pontok között ne menjen él.

2 pont

Ebben a gráfban egy pontnak 0, 1 vagy 2 szomszédja lehet, mert csak a q -szorosával és a q -ad részével lehet összekötni, és ezek nem feltétlenül egész számok.

1 pont

Azt is figyeljük meg, hogy ez a gráf körmentes, ugyanis egymáshoz éllel csatlakozó csúcsok sorozata csak növekvő vagy csökkenő sorozatot alkothat, hiszen egy szám nem lehet két nála kisebb vagy két nála nagyobb számmal összekötve.

1 pont

Az eddigieket összegezve elmondhatjuk, hogy a gráfunk összefüggőségi komponensei véges utak és az egyik irányban végtelen utak lehetnek.

2 pont

Az pedig nyilvánvaló, hogy az utakban szereplő egymás utáni csúcsokat felváltva színezve kielégítettük a kívánt feltételt.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. A fenti megoldást le lehet rövidíteni, ha a versenyző csak azt mutatja meg, hogy a tekintett gráf körmentes, és felhasználja azt a jól ismert állítást, hogy a fagráfok csúcsait két színnel lehet színezni.

A fenti megoldás alapgondolatát felhasználva gráfok használata nélkül is megoldható a feladat, egy lehetőség a következő: a racionális számok halmazát fel lehet bontani egymástól diszjunkt, q hányadosú, mindkét irányban végtelen mértani sorozatokra. Vegyük ezeknek a mértani sorozatoknak a pozitív egész számok halmazával vett metszeteit, és ezeknek a halmazoknak az elemeit növekedő sorrendben felváltva tegyük bele az A , illetve a B halmazba.

3. Vannak-e olyan 2025 és 6000 közötti x és y egész számok, amelyekre az $xy + x$ és az $xy + y$ egymástól különböző négyzetszámok?

7 pont

Megoldás. Mivel két különböző négyzetszámunk van, ezért $x \neq y$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x < y$.

1 pont

Ekkor teljesül, hogy $x^2 < xy + x = (x + p)^2$, ahol $p \geq 1$ pozitív egész szám, valamint $(x + p)^2 < xy + y = (x + q)^2$ ahol $q > p$ pozitív egész.

1 pont

Vegyük a két négyzetszám különbségét: $(xy + y) - (xy + x) = y - x = (x + q)^2 - (x + p)^2 = 2(q - p)x + q^2 - p^2$.

2 pont

Ez a különbség nagyobb, mint $2x$, hiszen $q - p \geq 1$ és $q^2 - p^2 > 0$.

1 pont

Kaptuk tehát, hogy $y - x > 2x$, vagyis $y > 3x$.

1 pont

Emiatt nem lehetséges, hogy mind az x , mind az y egész számok 2025 és 6000 közé essenek.

1 pont

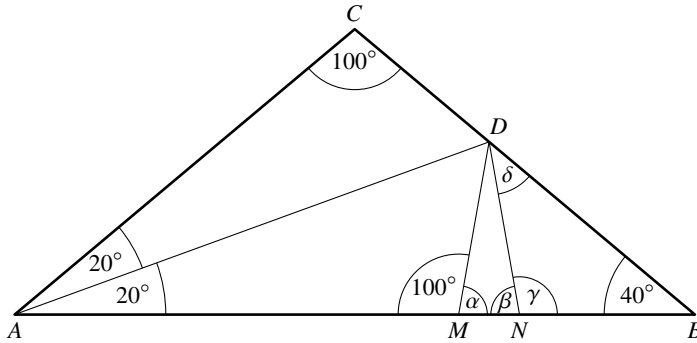
Összesen:

7 pont

4. Az egyenlő szárú ABC háromszög C -nél lévő szöge 100° . Az A -ból induló belső szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $AD + DC = AB$.

7 pont

1. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát és jelöléseit!



Legyen N az AB oldalnak az a pontja, amelyre $AN = AD$. Az ACD háromszöget az AD szögfelezőre tükrözve az AMD háromszöget kapjuk. Ekkor nyilvánvalóan M az AB szakaszon van, $AM < AN$, az AMD háromszög M -nél lévő szöge 100° , továbbá így $DC = DM$.

2 pont

AND háromszögben az alappal szemkötti szög 20° , ezért $AND \sphericalangle = MND \sphericalangle = \beta = 80^\circ$, tehát az MND háromszög egyenlő szárú, $DM = DN$.

2 pont

Mivel $MND \sphericalangle = \beta = 80^\circ$, ezért $DNB \sphericalangle = \gamma = 100^\circ$, így az NBD háromszögben $NDB \sphericalangle = \delta = 40^\circ$, tehát az NBD háromszög is egyenlő szárú, és $DN = NB$.

2 pont

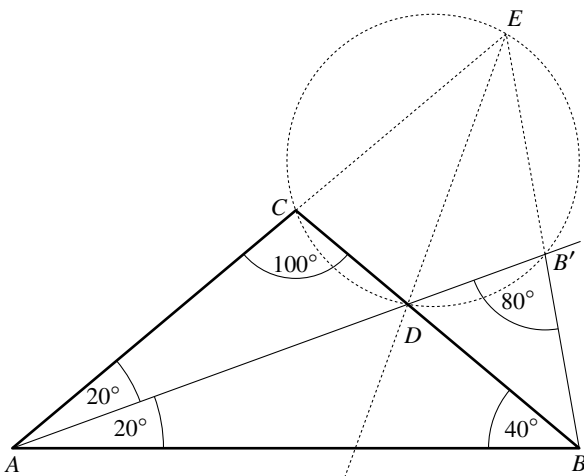
Azaz $DC = DM = DN = NB$, és $AD = AN$, így $AD + DC = AN + NB = AB$.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát és jelöléseit!



Az AD szögfelező meghosszabbításán vegyük fel úgy a B' pontot, hogy $AB = AB'$ teljesüljön. Mivel $AB = AB' = AD + DB'$, elegendő azt igazolnunk, hogy $DB' = DC$ teljesül.

1 pont

Egyszerű szögszámolással adódik, hogy $BAC \sphericalangle = ABC \sphericalangle = 40^\circ$ (az ABC háromszögben), továbbá $BAB' \sphericalangle = 20^\circ$ és így $ABB' \sphericalangle = AB'B \sphericalangle = 80^\circ$ (az ABB' háromszögben).

1 pont

AC egyenesének és BB' egyenesének a metszéspontja legyen E . Mivel $ECD \sphericalangle = 80^\circ$ és $EB'D \sphericalangle = 100^\circ$, ezért E, C, D és B' pontok egy körön vannak.

2 pont

Másfelől ABE háromszögnek AB' és BC belső szögfelezője, így D metszéspontjuk az ABE háromszögbe írt kör középpontja, és így ED is belső szögfelező ABE háromszögben.

1 pont

Mivel ED felezi a CEB' szöget, ezért az $ECDB'$ körben az egyenlő $CED \sphericalangle = DEB' \sphericalangle$ szögekhez tartozó DC és DB' húrok is egyenlőek, és pont ezt akartuk bebizonyítani.

2 pont

Összesen:

7 pont

5. Vannak-e olyan $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ számok, amelyek mindegyike $\sqrt{2} + 1$ vagy $\sqrt{2} - 1$ értékű, és teljesül rájuk, hogy

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199?$$

7 pont

1. megoldás. Igazolni fogjuk, hogy ilyen számok nem léteznek.

Tegyük fel, hogy léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ számok, amelyek megfelelnek a feladat feltételeinek. Ekkor az $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{99}x_1$ szorzatok értékei az alábbi számok közül kerülhetnek ki:

$$(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}, (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{és} \quad (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1. \quad 1 \text{ pont}$$

Legyen a $3 + 2\sqrt{2}$, a $3 - 2\sqrt{2}$ és az 1 szorzatok száma rendre a, b, c .

Ekkor $a + b + c = 99$.

1 pont

Elsőként azt látjuk be, hogy $a = b$. Indirekt tegyük fel, hogy $a \neq b$.

A feladatban megadott egyenlőség alapján:

$$a(3 + 2\sqrt{2}) + b(3 - 2\sqrt{2}) + c = 199,$$

ezt rendezve

$$2(a - b)\sqrt{2} = 199 - c - 3(a + b),$$

$$\text{amiből } a \neq b \text{ esetén } \sqrt{2} = \frac{199 - c - 3(a + b)}{2(a - b)}.$$

A kapott egyenlőség baloldalán irracionális, míg a jobboldalán racionális szám szerepel. A kapott ellentmondás alapján tehát a feladatban szereplő egyenlőség teljesülésének szükséges feltétele, hogy valóban $a = b$ legyen.

2 pont

Másodjára azt fogjuk bizonyítani, hogy c -nek páros számnak kell lennie.

Rajzoljunk egy szabályos 99-szöget az $X_1, X_2, \dots, X_{99}$ csúcsokkal. Az X_1 csúcshoz írjuk az x_1 , az X_2 csúcshoz írjuk az x_2 számot, és ezt folytatva általában az X_i csúcshoz írjuk az x_i számot egészen a 99. csúcsig. Így minden csúcshoz a $\sqrt{2} + 1$ vagy $\sqrt{2} - 1$ szám kerül. Induljunk el az X_1 csúcstól, járjuk végig sorban a csúcsokat és végül térjünk vissza a kezdőpontba. Közben számoljuk meg, hogy a haladás során hányszor változik meg a meglátogatott csúcs melletti szám. Mivel a vándorlás kezdőpontja és végpontja azonos, ezért az értékváltozások száma páros.

2 pont

Másrészt, ha a vándorlás során értékváltozás történik, akkor az ezekhez rendelt két szám szorzata 1-gyel egyenlő. Tehát a változások száma egyenlő c -vel, vagyis c páros szám.

Az $a + b + c = 99$ és $a = b$ feltételek figyelembevételével $c = 99 - 2a$. Ez alapján viszont c páratlan szám. A c -re kapott ellentmondó megállapítások miatt nincsenek a feltételeknek eleget tevő számok.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ számok, amelyek megfelelnek a feladat feltételeinek. Ekkor az $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199$ egyenlőség mindkét oldalát -2 -vel szorozva, és mindkét oldalhoz $2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{99}^2)$ -t adva kapjuk:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{98} - x_{99})^2 + (x_{99} - x_1)^2 = -398 + 2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{99}^2) \quad (*) \quad 2 \text{ pont}$$

Egyrészt, az x_i^2 vagy $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, vagy $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ lehet.

Legyen a $3 + 2\sqrt{2}$ -ből k darab, így a $3 - 2\sqrt{2}$ -ből $99 - k$ darab lesz, ahol $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 99$. 1 pont

Másrészt az $(x_i - x_{i+1})^2$ vagy 0, vagy 4 lehet. Legyen a 4-ből m darab, így a 0-ból $99 - m$ darab lesz, ahol $m \in \mathbb{N}$, $m \leq 99$. 1 pont

Mindezek alapján, a $(*)$ összefüggést felhasználva:

$$4 \cdot m + 0 \cdot (99 - m) = -398 + 2 \left(k(3 + 2\sqrt{2}) + (99 - k)(3 - 2\sqrt{2}) \right),$$

innen $4m + 398 = 6k + 4k\sqrt{2} + 594 - 396\sqrt{2} - 6k + 4k\sqrt{2}$, és végül $4m - 196 = (8k - 396)\sqrt{2}$ adódik. 1 pont

Mivel k egész, és $8 \nmid 396$, ezért $8k - 396 \neq 0$, így $\sqrt{2} = \frac{4m - 196}{8k - 396}$. 1 pont

A kapott egyenlőség bal oldalán irracionális, míg a jobb oldalán racionális szám szerepel. A kapott ellentmondás alapján nincsenek a feltételeknek eleget tevő számok. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

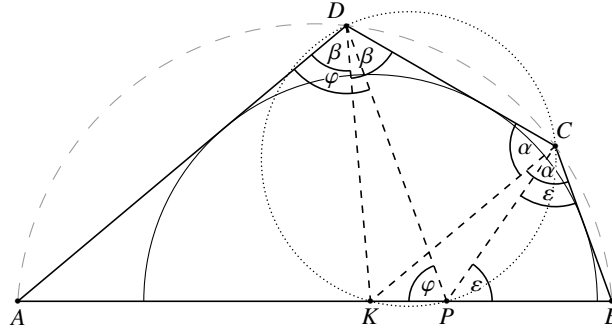
1. Az $ABCD$ húrnégyszög AB oldalának egy K pontja egy olyan kör középpontja, amely érinti a húrnégyszög BC , CD és DA oldalát. Bizonyítsuk be, hogy $AD + BC = AB$. 7 pont
2. Lehet-e néhány (de legalább kettő darab) egymást követő kettő-hatvány összege egy 1-nél nagyobb pozitív egész szám 1-nél nagyobb pozitív egész kitevőjű hatványa? (Kettő-hatványon a 2 szám nemnegatív egész kitevős hatványát értjük.) 7 pont
3. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám. Tekintsünk egy $n \times n \times n$ -es kockát, amelyet felosztottunk n^3 darab egységkockára. Legkevesebb hány darab $1 \times 1 \times n$ -es, n darab egységkockából álló hasáb eltávolításával érhető el, hogy a kockából ne lehessen több ilyen hasábot eltávolítani? (Az eltávolított hasárok nem tartalmazhatnak közös egységkockát.) 7 pont

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ húrnégyszög AB oldalának egy K pontja egy olyan kör középpontja, amely érinti a húrnégyszög BC , CD és DA oldalát. Bizonyítsuk be, hogy $AD + BC = AB$. 7 pont

Megoldás. Használjuk az alábbi ábrát!



Legyen P az AB oldalnak az a pontja, amelyre $BP = BC$. Ekkor $BPC\angle = BCP\angle = \varepsilon$.

1 pont

Jelölje továbbá $APD\angle$ -t φ .

A K pont egyenlő távol van az AD és a CD oldaltól, ezért rajta van az $ADC\angle$ szögfelezőjén, ezért $ADK\angle = CDK\angle = \beta$, hasonlóképpen a K egyenlő távol van a DC és a BC oldaltól, ezért rajta van az $DCB\angle$ szögfelezőjén, ezért $DCK\angle = BCK\angle = \alpha$.

1 pont

Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a B csúcsnál lévő szög egyrészt $180^\circ - 2\beta$, másrészt az egyenlő szárú PCB háromszögben a B csúcsnál lévő szög $180^\circ - 2\varepsilon$, innen $\beta = \varepsilon$.

1 pont

Ez azt jelenti, hogy a $KPCD$ négyszög P -nél lévő külső szöge megegyezik a szemközti D csúcsnál lévő belső szöggel, ezért a $KPCD$ négyszög húrnégyszög.

1 pont

Ebből következik, hogy a KD szakasz P -ből és C -ből ugyanakkora szögben látszik, ezért $\varphi = \alpha$.

1 pont

Továbbá a KP szakasz C -ből és D -ből ugyanakkora szögben látszik, ezért $KCP\angle = \alpha - \varepsilon = KDP\angle$.

1 pont

Az ADP háromszögben $ADP\angle = ADK\angle + KDP\angle = \beta + (\alpha - \varepsilon) = \varepsilon + (\alpha - \varepsilon) = \alpha = \varphi = APD\angle$, és ezért $AP = AD$. Tehát $AB = AP + PB = AD + BC$.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Lehet-e néhány (de legalább kettő darab) egymást követő kettő-hatvány összege egy 1-nél nagyobb pozitív egész szám 1-nél nagyobb pozitív egész kitevőjű hatványa? (Kettő-hatványon a 2 szám nemnegatív egész kitevős hatványát értjük.)

7 pont

Megoldás. Tegyük fel, hogy a válasz igen, azaz valamely l , k , a és m pozitív egész számok esetén (ahol $k, m \geq 2$)

$$2^l + 2^{l+1} + \dots + 2^{l+k-1} = a^m.$$

Ha $l > 0$, akkor a^m páros, így a is.

Legyen ekkor $a = 2^t \cdot b$, ahol $t > 0$ és b páratlan. 2^l -nel osztva

$$1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = \frac{a^m}{2^l},$$

ahol a bal oldal páratlan, így a jobb oldal is az. Mivel 2 kitevője a^m -ben tm , így $tm = l$. Ezeket behelyettesítve

$$1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = b^m.$$

Így tehát az $l > 0$ eset redukálható az $l = 0$ esetre, így innentől csak ezzel az esettel foglalkozunk.

2 pont

Az ismert összegképlet alapján tehát $2^k - 1 = b^m$.

Mivel $k \geq 2$, a bal oldal négyes maradéka 3. Továbbá mivel b páratlan, a jobb oldal négyes maradéka páros m esetén 1, tehát m szükségképpen páratlan.

1 pont

Ekkor viszont az ismert azonosság alapján $2^k = (b+1)(b^{m-1} - b^{m-2} + \dots + 1)$.

1 pont

Így $b+1$ osztja 2^k -t, azaz maga is kettő-hatvány.

1 pont

Most tekintsük a második szorzótényező $b+1$ -es maradékát. A zárójelben egyfelől páratlan számú tag van, másrészt pedig a tagoknak a $(b+1)$ -es maradéka felváltva 1 és -1, így a második szorzótényező $(b+1)$ -es maradéka 1.

Másrészt viszont ennek a tényezőnek is kettő-hatványnak kellene lennie, de ez csak $b+1 = 1$ esetén fordulhat elő, ami nem lehetséges, hiszen $b+1$ legalább 2.

2 pont

Ezzel beláttuk, hogy a válasz: nem lehetséges.

Összesen:

7 pont

3. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám. Tekintsünk egy $n \times n \times n$ -es kockát, amelyet felosztottunk n^3 darab egységkockára. Legkevesebb hány darab $1 \times 1 \times n$ -es, n darab egységkockából álló hasáb eltávolításával érhető el, hogy a kockából ne lehessen több ilyen hasábot eltávolítani? (Az eltávolított hasábok nem tartalmazhatnak közös egységkockát.)

7 pont

Megoldás. Tekintsük az $n \times n \times n$ -es kockának három egy csúcsban találkozó lapját. Tekintsük mindhárom lapon $n-1$ hasábot az első ábra szerint. Ha ezt a $3(n-1)$ darab hasábot elvesszük, egy $1 \times 1 \times 1$ -es és egy $(n-1) \times (n-1) \times (n-1)$ -es kocka fog megmaradni, így nyilván nem választható ki több hasáb (1. ábra).

2 pont

Most belátjuk, hogy ennél kevesebb hasábot nem lehet elhagyni.

Tegyük fel, hogy kiválasztottunk valahány hasábot úgy, hogy többet már nem lehet elhagyni a kockából. Minden egyes hasábnak feleltessük meg azt az egységnégyzet alakú alapját, amely a kocka három tekintett lapjának valamelyikére esik.

A három tekintett lapon jelöljük meg azokat az egységnégyzeteket, amelyek valamelyik kiválasztott hasábnak lettek megfeleltetve. A megoldás kulcsa a következő állítás:

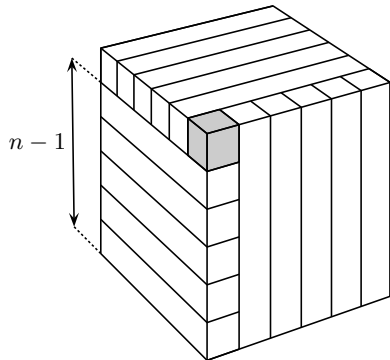
Lemma. Ha a kocka egyik lapján tekintünk két kiválasztott négyzetet és tekintjük az egyiknek a sorát, a másiknak pedig oszlopát az adott lapon, akkor ezek találkozásánál is kiválasztott négyzetnek kell lennie (2. ábra).

A Lemma bizonyítása. Az állítást indirekt úton igazoljuk. Tegyük fel, hogy az egyik négyzetlapon találtunk egy sort és egy oszlopot, amelyek tartalmaznak kiválasztott négyzetet, de a találkozásuknál lévő négyzet nincs kiválasztva: a második ábrán az A és B négyzet ki van választva, de a C (vagy a C') nincsen. Ekkor az ábrán az a -val és a b -vel jelölt négyzetek nem lehetnek kiválasztva, de ekkor a C (vagy a C') jelű négyzethez tartozó hasábbal találkozó egyik hasáb sem lehet kiválasztva, vagyis akkor a C (vagy a C') jelű négyzethez tartozó hasábot el lehetne hagyni a kockából.

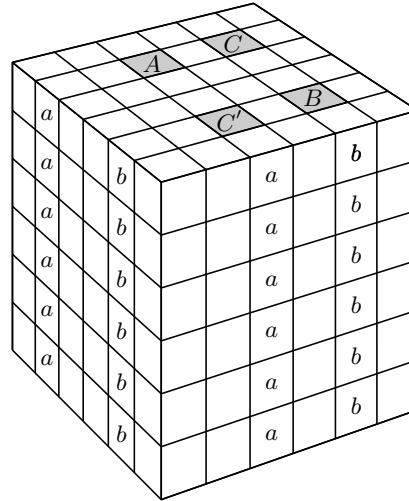
1 pont

Ezt a megfigyelést felhasználva látható, hogy ha egy adott lapon megjelöljük az összes kiválasztott négyzetet tartalmazó sort és oszlopot, akkor ezeknek a találkozásainál mind kell szerepelni kiválasztott négyzetnek, máshol pedig nem lehet kiválasztott négyzet.

1 pont



1. ábra



2. ábra

A továbbiakhoz helyezzük el a kockát egy térbeli derékszögű koordináarendszerben úgy, hogy a kiválasztott csúcs legyen az origó, és az abban találkozó élek egyenesei legyenek a tengelyek, a kocka pedig az első tércadba essen.

Ezután a három lapot jelölje P , Q és R úgy, hogy P az yz síkban, Q az xz síkban és R az xy síkban legyen. (Lásd 3. ábra!)

A lapokon lévő 1×1 -es négyzeteknek feleltessük meg az origóhoz legközelebbi csúcsát, így ennek a csúcsnak a koordinátaival tudunk hivatkozni rájuk. Jelölje P_y a P lapon kiválasztott egység-négyzetek y -koordinátáinak halmazát, P_z pedig a P lapon kiválasztott egység-négyzetek z -koordinátáinak halmazát. A Q_x , Q_z , R_x és R_y halmazok hasonlóan vannak definiálva. Most három esetet vizsgálunk:

1. eset: $Q_x \cup R_x$ legfeljebb $n-1$ elemű. (Ezzel nyilván analóg, ha $P_y \cup R_y$ vagy $P_z \cup Q_z$ legfeljebb $n-1$ elemű.)

Ez azt jelenti, hogy lehet találni egy az yz -síkkal párhuzamos réteget a kockában, amely nem tartalmaz y vagy z irányú kiválasztott hasábot. Ez viszont azt jelenti, hogy P_y és P_z is n -elemű, mert a tekintett rétegben a kizárt négyzetek egy ugyanolyan rácsot alkotnak, mint a P lapon. 1 pont

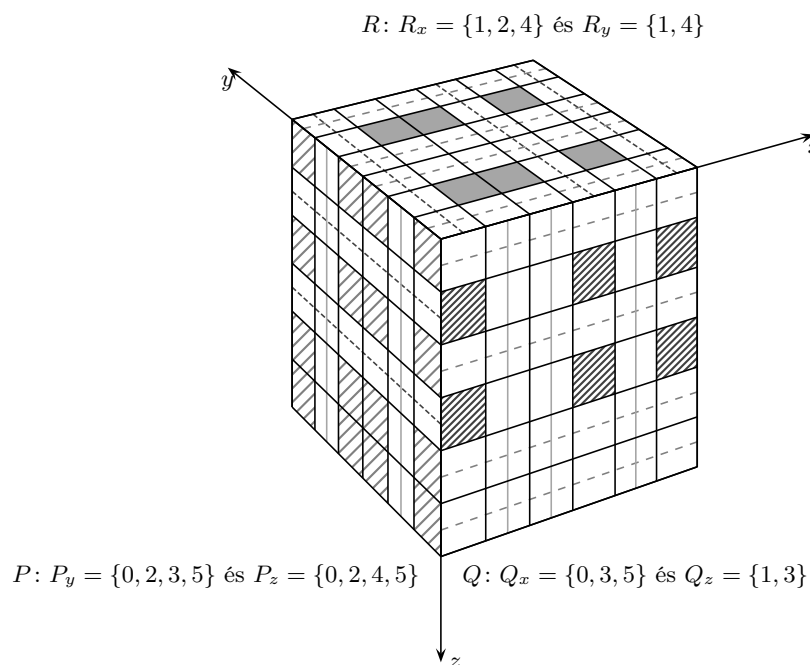
2. eset: P_y üres, azaz egyáltalán nincs x irányú hasáb kiválasztva.

Az 1. eset alapján ekkor R_y n -elemű (különben készen vagyunk), de ekkor y irányú hasáb sem lehet kiválasztva, vagyis megint ki kell választanunk az összes hasábot egy adott irányban, ami $n^2 (> 3n-3)$ darab hasábot eredményez. 1 pont

3. eset: $Q_x \cup R_x$, $P_y \cup R_y$ és $P_z \cup Q_z$ is n elemű, és egyik sem üres a hat halmaz közül.

Jelölje Q_x elemszámát q_x , és alkalmazzuk a hasonló jelöléseket a többi halmazra is. A kiválasztott hasábok száma ekkor

$$\begin{aligned} p_y p_z + q_x q_z + r_x r_y &\geq (p_y + p_z - 1) + (q_x + q_z - 1) + (r_x + r_y - 1) = \\ &= (q_x + r_x) + (p_y + r_y) + (p_z + q_z) - 3 \geq 3n - 3, \end{aligned}$$



3. ábra

ahol az első becslésnél felhasználtuk, hogy ha $t, s \geq 1$, akkor $(t-1)(s-1) \geq 0$ és innen (a zárójeleket felbontva és rendezve) $ts \geq t+s-1$ adódik.

Azaz legalább $3n-3$ darab hasábot valóban el kell hagyni, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

1 pont

Összesen:

7 pont