

ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY 2025/2026-OS TANÉV

Kezdők és Haladók I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

*A verseny a Kulturális és Innovációs Minisztérium, a Nemzeti Tehetség Program
és a Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő támogatásával
az NTP-TMV-M-24-B-0030 azonosító számú pályázat alapján valósult meg.*



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



Nemzeti Tehetség
Program



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ



ARANY DÁNIEL
MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló	3
Kezdők I–II. kategória 2. forduló	6
Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló	10
Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló	14
Kezdők III. kategória 1. forduló	16
Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló	20
Haladók I. kategória 1. forduló	24
Haladók I. kategória 2. forduló	27
Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló	31
Haladók II. kategória 1. forduló	35
Haladók II. kategória 2. forduló	39
Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló	42
Haladók III. kategória 1. forduló	45
Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló	50

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

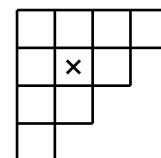
1. A sarki ABC polcán hat csokoládémikulás sorakozik. Tömegük 60 g, 64 g, 72 g, 76 g, 80 g és 124 g. Az egyik fehér csokoládéból, a többi tejsokoládéból készült. Ödön és Dömötör megvásárolták az összes tejsokoládé-mikulást, és megállapították, hogy Ödön csokoládémikulásainak össztömege éppen kétszerese a Dömötör által vásárolt csokoládémikulások tömegének. Mekkora a fehér csokoládéból készült mikulás tömege?

6 pont

2. Egy nem lakatlan sziget minden lakója törpe vagy óriás. Mindegyik vezetékneve Kis vagy Nagy. Az óriások 45%-a Kis vezetéknevű, a Kis vezetéknevűek kétharmada törpe, a törpéknek pedig 75%-a Kis vezetéknevű. Legkevesebb hányan laknak a szigeten?

6 pont

3. A mellékelt, 10 cellából álló táblázatba helyezzük el úgy a 13, 15, 17, 19, 21, 20, 22, 24, 26, 28 számokat, hogy a táblázat bármely két szomszédos négyzetét is tekintsük, az azokba beírt számok legnagyobb közös osztója 1 legyen! (Két négyzetet szomszédosnak nevezünk, ha van közös oldaluk.) Melyik szám állhat az $\times$ -szel jelölt cellában? Ha egy szám szerepelhet a megjelölt cellában, adjuk meg a táblázat teljes kitöltését, ha egy szám nem szerepelhet a megjelölt cellában, indokoljuk meg, hogy az miért nem lehetséges!



6 pont

4. Helyezzünk el egy asztalra 675 darab százforintost, úgy, hogy egymást érinthetik, de egymás fölé nem csúszhatnak. Igazoljuk, hogy az érintési pontok száma kevesebb, mint 2025.

6 pont

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. A sarki ABC polcán hat csokoládémikulás sorakozik. Tömegük 60 g, 64 g, 72 g, 76 g, 80 g és 124 g. Az egyik fehér csokoládéból, a többi tejsokoládéból készült. Ödön és Dömötör megvásárolták az összes tejsokoládé-mikulást, és megállapították, hogy Ödön csokoládémikulásainak össztömege éppen kétszerese a Dömötör által vásárolt csokoládémikulások tömegének. Mekkora a fehér csokoládéból készült mikulás tömege?

6 pont

Megoldás. Ha Dömötör összesen x g csokoládét vásárolt, akkor Ödön $2x$ -et, így ketten együtt $3x$ -et. Tehát a tejsokoládé-mikulások össztömege 3-mal osztható.

2 pont

A 6 csokoládémikulás össztömege 3-mal osztva 2 maradékot ad.

1 pont

Tehát a fehér csokoládéból készült mikulásnak is 2 a hármassal maradéka.

1 pont

Így ez csakis a 80 g-os lehet.

1 pont

A maradék 5 mikulás valóban kettéosztható, például az alábbi módon: 60 g, 72 g és 64 g, 76 g, 124 g.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. Egy nem lakatlan sziget minden lakója törpe vagy óriás. Mindegyik vezetékneve Kis vagy Nagy. Az óriások 45%-a Kis vezetéknevű, a Kis vezetéknevűek kétharmada törpe, a törpéknek pedig 75%-a Kis vezetéknevű. Legkevesebb hányan laknak a szigeten?

6 pont

1. megoldás. Jelöljük x -szel a Nagy vezetéknevű törpék számát (x pozitív egész szám)!

Ők adják a törpék 25%-át. Így a Kis vezetéknevű törpék száma ennek háromszorosa, azaz $3x$.

1 pont

Ők alkotják a Kis nevűek kétharmadát. Így a Kis vezetéknevű óriások száma ennek fele, azaz $1,5x$.

1 pont

Ők képviselik az óriások 45%-át, a Nagy vezetéknevűek pedig a $\frac{11}{9}$ részét, vagyis az ő számuk

$$\frac{3}{2}x \cdot \frac{11}{9} = \frac{11}{6}x.$$

1 pont

	törpe	óriás
Kis	$3x$	$\frac{3}{2}x$
Nagy	x	$\frac{11}{6}x$

Mivel $\frac{3}{2}x$ és $\frac{11}{6}x$ csak egész szám lehet, ezért x -nek oszthatónak kell lennie 6-tal, azaz x legkisebb értéke 6 lehet.

1 pont

Ha a Nagy vezetéknevű törpék száma 6, akkor a Kis vezetéknevű törpéké 18, a Kis vezetéknevű óriásoké 9 és a Nagy vezetéknevű óriásoké 11.

1 pont

Tehát legkevesebb $6 + 18 + 9 + 11 = 44$ -en laknak a szigeten.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. megoldás. Legyen az óriások létszáma a , a Kis nevű szigetlakóké b !

Kétféleképpen is megkaphatjuk a Kis vezetéknevű óriások számát:

• egyrészt ez az óriások 45%-a, azaz $0,45a$,

• másrészt ez a Kis vezetéknevűek egyharmada, azaz $\frac{b}{3}$.

2 pont

Innen kapjuk, hogy $0,45a = \frac{b}{3}$, azaz $27a = 20b$.

1 pont

Mivel $(20; 27) = 1$, így $20 \mid a$ és $27 \mid b$, így a legalább 20 és b legalább 27.

2 pont

Innen a Kis vezetéknevű óriások száma 9, a Nagy vezetéknevű óriások száma $20 - 9 = 11$, a Kis nevű törpék száma $27 - 9 = 18$. Ez a törpék számának 75%-a, így a Nagy vezetéknevű törpék száma ennek harmada, azaz 6.

	törpe	óriás
Kis	18	9
Nagy	6	11

Tehát legkevesebb $9 + 11 + 18 + 6 = 44$ -en laknak a szigeten.

1 pont

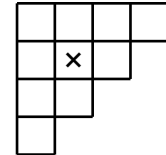
Összesen:

6 pont

Megjegyzések. 1. Ha a versenyző megsejti a táblázat valamelyik celláját és ez alapján helyesen tölti ki a táblázatot (azaz konkrét számmal helyes százalékszámítást végez), akkor 3 pontot kaphat.

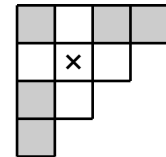
2. Ha a versenyző próbálgatással kizárja a megsejtettnél kisebb létszámú eseteket (pl. $x \leq 5$ -öt az 1. megoldás esetén), akkor a teljes pontszám jár.

3. A mellékelt, 10 cellából álló táblázatba helyezzük el úgy a 13, 15, 17, 19, 21, 20, 22, 24, 26, 28 számokat, hogy a táblázat bármely két szomszédos négyzetét is tekintsük, az azokba beírt számok legnagyobb közös osztója 1 legyen! (Két négyzetet szomszédosnak nevezünk, ha van közös oldaluk.) Melyik szám állhat az $\times$ -szel jelölt cellában? Ha egy szám szerepelhet a megjelölt cellában, adjuk meg a táblázat teljes kitöltését, ha egy szám nem szerepelhet a megjelölt cellában, indokoljuk meg, hogy az miért nem lehetséges!



6 pont

Megoldás. Az $\times$ jelű cellába nem kerülhet páros szám, hiszen akkor az alább színezett cellákba összesen 4 darab páros számnak kellene kerülnie, de az öt színezett cella közül 2-2 szomszédos, tehát háromnál több páros szám nem helyezhető el bennük. Tehát a kért cellába biztosan nem kerülhet egyik páros szám sem.



2 pont

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy bármelyik páratlan számra létezik jó konstrukció.

A 13 vagy 17 vagy 19 esetén például egy-egy jó kitöltés:

15	22	21	26
28	13	20	
19	24		
17			

15	22	21	26
28	17	20	
19	24		
13			

15	22	21	26
28	19	20	
13	24		
17			

Bármely három jó kitöltés:

2 pont

Egy vagy két jó kitöltés:

1 pont

A 15 esetén például egy jó kitöltés:

20	17	19	24
13	15	28	
21	22		
26			

A 21 esetén például egy jó kitöltés:

26	17	13	24
19	21	20	
15	22		
28			

Bármely két jó kitöltés:

2 pont

Egy jó kitöltés:

1 pont

Összesen:

6 pont

4. Helyezzünk el egy asztalra 675 darab százforintost, úgy, hogy egymást érinthetik, de egymás fölé nem csúszhatnak. Igazoljuk, hogy az érintési pontok száma kevesebb, mint 2025.

6 pont

Megoldás. Használható ábra:

Ha három egyenlő sugarú kör páronként érinti egymást, akkor középpontjaik szabályos háromszöget határoznak meg.

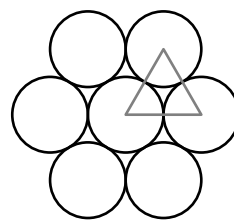
Így egy kört legfeljebb 6 másik érinthet.

Ha minden körön 6 érintési pont lenne, az érintési pontok száma

$$\frac{675 \cdot 6}{2} = 2025 \text{ lenne, mert minden érintési pont két körhöz tartozik.}$$

Mivel a szélső százforintosoknak biztosan nincs 6 szomszédjuk, azért az érintési pontok száma kevesebb, mint 2025.

Összesen:



1 pont

1 pont

1 pont

2 pont

1 pont

6 pont

Kezdők I–II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Péter és Pál tököt árulnak a falu piacán. Mindkettőjüknek négynél több portékája van. Mivel haragosok, egymásnak háttal állítják fel a bódéikat, hogy még csak ne is lássák egymás termékeit. Azt azonban nem bírják ki, hogy egymáshoz se szóljanak, amikor nagyság (tömeg) szerint növekvő sorrendben rendezik a pulton az áruikat. Dicsekszenek, azonban a rivalizálásból az derül ki, hogy ugyanannyi tököt hoztak, a tökök össztömege is megegyezik, és a sor közepén mindkét árusnál azonos tömegű tök van, továbbá legtöbbet mindketten ugyanakkora termésből hoztak, sőt még a legnagyobb is ugyanannyi kilóval több a legkisebbnél.

János bácsi Pál standjánál hallgatja végig a beszélgetést, miközben kinézi magának a második helyen álló zöldséget (mert a kettő a kedvenc száma). Korábban azt gondolta, először mindkét árus kínálatát meglekinti, csak utána választ. A hencegést hallva azonban úgy dönt, megveszi Pál portékáját, hiszen ha ennyi minden egyezik, Péternél is ugyanakkora áru áll a második helyen.

Helyesen okoskodik János bácsi? Indokoljuk a választ!

6 pont

2. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$ olyan egész számok, amelyek szorzata 2.

Mennyi lehet az $A = \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) \cdot \dots \cdot \left(a_{2025} + \frac{1}{a_1}\right)$ kifejezés értéke? 6 pont

3. A 0-tól különböző a, b, c egész számok teljesítik az $\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$ egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $a+b+c \leq 0$.

8 pont

4. Egy 4×8 -as négyzetrácsot szeretnénk hézagmentesen lefedni 1×1 , 2×2 , 3×3 és 4×4 -es lapokkal úgy, hogy a lapok nem fedhetik egymást, és nem nyúlhatnak át a rácson. Megvalósítható-e a lefedés, és ha igen, melyik fajta lapból hányra van szükség, ha a felhasznált lapok száma összesen

a) 19,

b) 14,

c) 7?

10 pont

5. Az ABC háromszögben D az A csúcsból induló belső szögfelező egy olyan pontja, amelyre az $AC = DB$, továbbá $\angle ABD : \angle BAD : \angle DBC = 2 : 3 : 4$. Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit!

10 pont

Kezdők I–II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Péter és Pál tököt árulnak a falu piacán. Mindkettőjüknek négynél több portékája van. Mivel haragosok, egymásnak háttal állítják fel a bódéikat, hogy még csak ne is lássák egymás termékeit. Azt azonban nem bírják ki, hogy egymáshoz se szóljanak, amikor nagyság (tömeg) szerint növekvő sorrendben rendezik a pulton az áruikat. Dicsekszenek, azonban a rivalizálásból az derül ki, hogy ugyanannyi tököt hoztak, a tökök össztömege is megegyezik, és a sor közepén mindkét árusnál azonos tömegű tök van, továbbá legtöbbet mindketten ugyanakkora termésből hoztak, sőt még a legnagyobb is ugyanannyi kilóval több a legkisebbnél.

János bácsi Pál standjánál hallgatja végig a beszélgetést, miközben kinézi magának a második helyen álló zöldséget (mert a kettő a kedvenc száma). Korábban azt gondolta, először mindkét árus kínálatát megtekinti, csak utána választ. A hencegést hallva azonban úgy dönt, megveszi Pál portékáját, hiszen ha ennyi minden egyezik, Péternél is ugyanakkora áru áll a második helyen.

Helyesen okoskodik János bácsi? Indokoljuk a választ!

6 pont

Megoldás. János bácsi nem okoskodik helyesen.

Egy lehetséges ellenpélda.

2 pont

A magyarázatra, annak részletezettségétől függően 1–3 pont adható. Például:

Ha legalább öt-öt termés van, választhatjuk a tömegek adatsorának közös mediánját és móduszát is m -nek. Ekkor a két adatsor lehet $m - 3 < m = \dots = m < m + 1 < m + 2$ és $m - 2 < m - 1 < m = \dots = m < m + 3$. Konkrét példa: $\{3, 6, 6, 7, 8\}$ és $\{4, 5, 6, 6, 9\}$. Az elemszám, az összeg (átlag), a módusz, a medián és a terjedelem ugyanannyi, de a második szám nem egyenlő a két adatsorban.

3 pont

Tehát 4-nél több tök esetén nem garantált, hogy a második tökök tömege egyenlő.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$ olyan egész számok, amelyek szorzata 2.

Mennyi lehet az $A = \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) \cdot \dots \cdot \left(a_{2025} + \frac{1}{a_1}\right)$ kifejezés értéke? 6 pont

Megoldás. Ha $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2025} = 2$, akkor pontosan egy tényező 2 vagy -2 , a többi tényező pedig 1 vagy -1 .

1 pont

Az általánosság megszorítása nélkül legyen az $a_{2025} = 2$ vagy -2 .

Ha $a_{2025} = 2$ és minden további szám 1, akkor

$$A = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(2 + \frac{1}{1}\right) = 2^{2023} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = 2^{2022} \cdot 9.$$

1 pont

Ha $a_{2025} = 2$ és minden további szám -1 (ami lehet, mert 2024 tényező van még), akkor

$$A = \left(-1 + \frac{1}{-1}\right) \left(-1 + \frac{1}{-1}\right) \left(-1 + \frac{1}{-1}\right) \dots \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \left(2 + \frac{1}{-1}\right) = (-2)^{2023} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 2^{2022}. \quad 1 \text{ pont}$$

Ha $a_{2025} = 2$ és van a számok között 1 és -1 is, akkor A -ban van olyan szorzótényező, amely nulla, és ekkor $A = 0$. 1 pont

Ha $a_{2025} = -2$, akkor biztosan van a számok között 1 és -1 is (hiszen a 2024 tényező szorzata negatív), akkor A -ban van olyan szorzótényező, amely nulla, és ekkor $A = 0$. 1 pont

Tehát A értéke $9 \cdot 2^{2022}$ vagy 2^{2022} vagy 0 lehet. 1 pont

Összesen:

6 pont

3. A 0-tól különböző a, b, c egész számok teljesítik az $\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$ egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $a+b+c \leq 0$. 8 pont

Megoldás.

$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$$

$$ab = ab + ac^2 + bc^2 + c^4$$

$$0 = ac^2 + bc^2 + c^4 \quad 1 \text{ pont}$$

$$0 = c^2(a+b+c^2) \quad 1 \text{ pont}$$

Mivel $c \neq 0$, a kapott egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a+b+c^2 = 0$. 1 pont

Ha $c = 1$, akkor $a+b+c = a+b+c^2 = 0$, és a feladat állítása teljesül. 2 pont

Ha c 0-tól és 1-től különböző egész szám, akkor c és $c-1$ azonos előjelű egész számok. 1 pont

Így $c(c-1) > 0$, vagyis $c^2 > c$. 1 pont

Ezt felhasználva $a+b+c < a+b+c^2 = 0$. Tehát az állítás ebben az esetben is igaz. 1 pont

Összesen:

8 pont

4. Egy 4×8 -as négyzetrácsot szeretnénk hézagmentesen lefedni 1×1 , 2×2 , 3×3 és 4×4 -es lapokkal úgy, hogy a lapok nem fedhetik egymást, és nem nyúlhatnak át a rácson. Megvalósítható-e a lefedés, és ha igen, melyik fajta lapból hányra van szükség, ha a felhasznált lapok száma összesen

a) 19,

b) 14,

c) 7?

10 pont

Megoldás. Legyen a felhasznált 1×1 , 2×2 , 3×3 és 4×4 -es lapok száma rendre x, y, z, w ($x, y, z, w \in \mathbb{N}$)

$$a) \quad x + 4y + 9z + 16w = 32$$

$$x + y + z + w = 19 \quad 1 \text{ pont}$$

Kivonva az első egyenletből a másodikat:

$$3y + 8z + 15w = 13,$$

$15w \in \mathbb{N}$, $15w \leq 13$ alapján $w = 0$ és $3y + 8z = 13$.

A kapott egyenlet a természetes számok halmazán nem oldható meg, így 19 lappal a lefedés nem valósítható meg.

1 pont

$$b) \quad x + 4y + 9z + 16w = 32$$

$$x + y + z + w = 14$$

Kivonva az első egyenletből a másodikat:

$$3y + 8z + 15w = 18,$$

$15w \leq 18$ miatt $w = 0$ vagy $w = 1$.

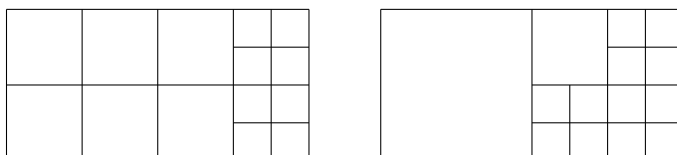
Ha $w = 0$, akkor $3y + 8z = 18$, amiből $y = 6$, $z = 0$ és $x = 8$ adódik.

1 pont

Ha $w = 1$, akkor $3y + 8z = 3$, amiből $y = 1$, $z = 0$ és $x = 12$ adódik.

1 pont

A kapott eredményeknek megfelelő lefedések:



1 + 1 pont

$$c) \quad x + 4y + 9z + 16w = 32$$

$$x + y + z + w = 7$$

Kivonva az első egyenletből a másodikat:

$$3y + 8z + 15w = 25.$$

$15w \leq 25$ miatt $w = 0$ vagy $w = 1$.

Ha $w = 0$, akkor $3y + 8z = 25$, amiből $y = 3$, $z = 2$ és $x = 2$ adódik.

1 pont

Ha $w = 1$, akkor $3y + 8z = 10$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán.

1 pont

A kapott eredmény alapján a lefedést két 1×1 , három 2×2 és két 3×3 -as négyzettel kellene megvalósítani.

Ez nem lehetséges, mert a négyzetrács hosszabbik oldala mentén a 3×3 -as lapok mellett hat egységnyi négyzet alakul ki. Ezek a részek csak 1×1 -es lapokkal fedhetők le, viszont azokból csak kettő van.

2 pont

Összesen:

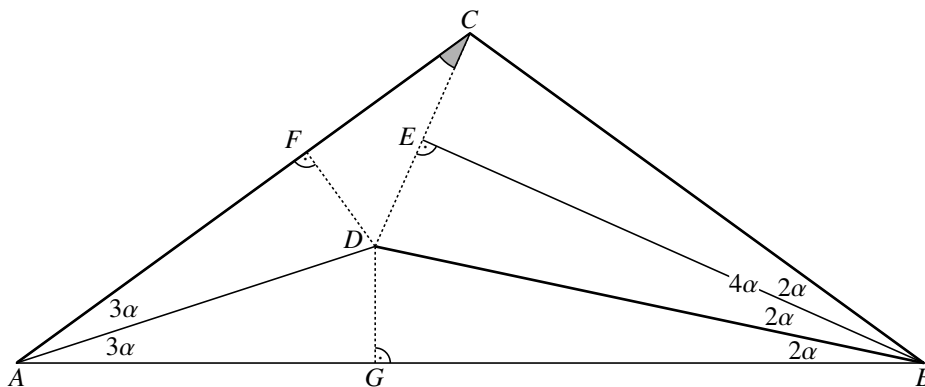
10 pont

5. Az ABC háromszögben D az A csúcsból induló belső szögfelező egy olyan pontja, amelyre az $AC = DB$, továbbá $\angle ABD : \angle BAD : \angle DBC = 2 : 3 : 4$. Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit!

10 pont

Megoldás. Legyen a $\angle BAD = 3\alpha$, ekkor a $\angle DAC$ nagysága is 3α , $\angle DBA = 2\alpha$, a $\angle DBC$ nagysága pedig 4α , tehát az A és B csúcsnál is 6α nagyságú szög van, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

1 pont



Így $AC = BC$, de akkor $BD = BC$, vagyis a BDC háromszög is egyenlő szárú.

1 pont

A BDC háromszögben húzzuk be a BE magasságot. Mivel BDC egyenlő szárú, $DE = EC$, illetve BE egyben szögfelező is, és így $\angle EBD = 2\alpha$.

1 pont

Legyen G az ABD háromszög AB oldalhoz tartozó magasságának talppontja. Ekkor a BED háromszög egybevágó a BGD háromszöggel (mindkettő derékszögű, egy hegyesszögük nagysága és az átfogójuk megegyezik), így $DG = DE$.

2 pont

Legyen F az ADC háromszög AC oldalhoz tartozó magasságának talppontja. Mivel a szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a szög két szárától, azért $DF = DG$, így $DF = DG = DE = EC$.

1 pont

Eszerint az FCD derékszögű háromszög félszabályos, vagyis $\angle FCD = 30^\circ$.

2 pont

Az ABC háromszögben felírható a $6\alpha + 6\alpha + (30^\circ + 90^\circ - 2\alpha) = 180^\circ$ egyenlet, amiből $\alpha = 6^\circ$.

1 pont

Vagyis a háromszög szögei: 36° , 36° és 108° .

1 pont

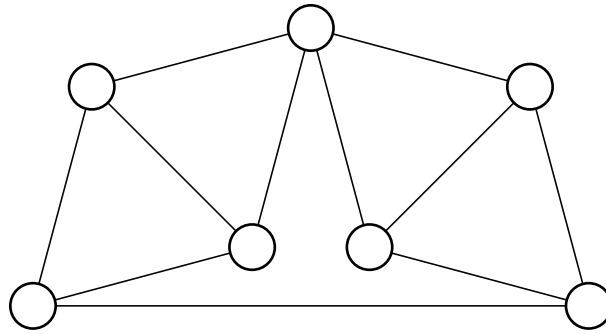
Összesen:

10 pont

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCDE$ ötszögben az AB oldal 11 cm, a DE oldal 5 cm, a BD átló 10 cm hosszú, valamint $\angle EAB = \angle BCD = \angle DEA = 90^\circ$ és $\angle ABC = 135^\circ$. Mekkora az ötszög területe? **10 pont**
2. Keressük meg az összes olyan p ($p \in \mathbb{N}^+$) prímszámot, amelyekre $(p^2 + 11)$ -nek pontosan hat különböző pozitív osztója van (beleértve az 1-et és magát a számot is). **10 pont**
3. Az alábbi ábrán látható 7 kör közül bizonyosakat szakaszokkal kötöttünk össze. A szakasszal összekötött köröket a továbbiakban szomszédosnak nevezzük.



- a) Igazoljuk, hogy a 7 kör nem színezhető ki 3 színnel úgy, hogy a szomszédos körök különböző színűek legyenek!
- b) Hányféleképpen lehet a 7 kört 4 színnel (pl. pirossal, kékkel, sárgával és zölddel) kiszínezni úgy, hogy a szomszédos körök különböző színűek legyenek? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy kör színezése eltér.)

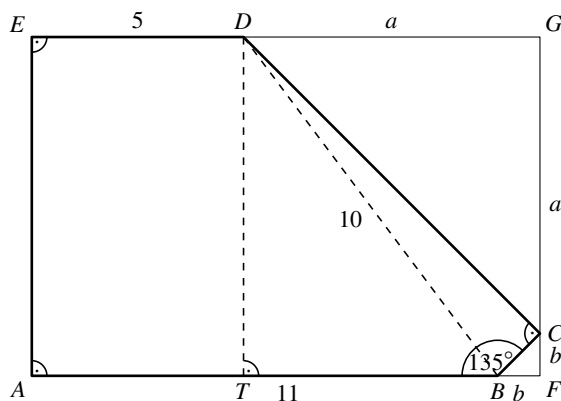
10 pont

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCDE$ ötszögben az AB oldal 11 cm, a DE oldal 5 cm, a BD átló 10 cm hosszú, valamint $\angle EAB = \angle BCD = \angle DEA = 90^\circ$ és $\angle ABC = 135^\circ$. Mekkora az ötszög területe?

10 pont



Megoldás. Mivel AB merőleges AE -re és AE merőleges ED -re, az ötszög kiegészíthető egy olyan $AFGE$ téglalappá, amelynek FG oldalára C illeszkedik.

2 pont

D -ből állítsunk merőlegest AB -re, ennek talponti: T . Ekkor $TB = AB - ED = 6$ cm.

1 pont

A TBD háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk, hogy:

$$DT = \sqrt{BD^2 - TB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm.}$$

1 pont

$\angle CBF = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, így a CBF háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, befogójának hossza: b .

1 pont

Mivel $\angle BCD = 90^\circ$ és $\angle FCB = 45^\circ$, így $\angle DCG = 180^\circ - \angle BCD - \angle FCB = 45^\circ$, tehát a DCG háromszög is egyenlő szárú derékszögű háromszög, befogójának hossza: a .

1 pont

Így $6 + b = a$, másrészt $a + b = 8$. Ebből $b = 1$, $a = 7$.

2 pont

Az ötszög területe:

1. Az $AFGE$ téglalap területéből kivonva a CBF és a DGC háromszög területét kapjuk, hogy:

$$T = 8 \cdot 12 - \frac{49}{2} - \frac{1}{2} = 71 \text{ cm}^2.$$

2. Az $ABDE$ trapéz és a BCD háromszög területét összeadva kapjuk, hogy:

$$T = (5 + 11) \cdot \frac{8}{2} + 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 71 \text{ cm}^2.$$

2 pont

Megjegyzés. Az utolsó 4 pont az alábbi gondolatmenetre is jár.

A CGD háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk, hogy: $2a^2 = CD^2$, a BFC háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk, hogy: $2b^2 = BC^2$.

Amiből a BCD háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk, hogy:

$$2a^2 + 2b^2 = CD^2 + BC^2 = BD^2 = 10^2.$$

Ebből adódik, hogy a CBF és a DGC háromszög területének összege:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{2a^2 + 2b^2}{4} = \frac{10^2}{4} = 25. \quad 2 \text{ pont}$$

Tehát az ötszög területét megkapjuk, ha az $AFGE$ téglalap területéből kivonjuk a CBF és a DGC háromszög területének összegét:

$$T = 8 \cdot 12 - 25 = 71 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ pont}$$

Összesen:

10 pont

2. Keressük meg az összes olyan p ($p \in \mathbb{N}^+$) prímszámot, amelyekre $(p^2 + 11)$ -nek pontosan hat különböző pozitív osztója van (beleértve az 1-et és magát a számot is). **10 pont**

Megoldás. Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15$, amely számnak csak 4 osztója van. Ezek az $\{1, 3, 5, 15\}$. 1 pont

Ha $p = 3$, akkor $p^2 + 11 = 20$, amely számnak pontosan 6 osztója van. Ezek az $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. 1 pont

Ha $p \neq 2$ és $p \neq 3$, akkor $3 \mid p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, és így $3 \mid p^2 - 1 + 12 = p^2 + 11$. 2 pont

Másrészt $4 \mid p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, és emiatt $4 \mid p^2 - 1 + 12 = p^2 + 11$. 2 pont

Mivel $(3; 4) = 1$, ezért $12 \mid p^2 + 11$, tehát $p^2 + 11$ osztói közé tartoznak az 1, 2, 3, 4, 6, 12 számok. 2 pont

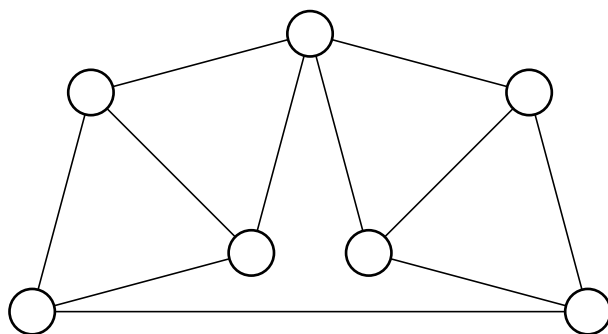
Továbbá $p > 1$ miatt $p^2 + 11 > 12$ és $p^2 + 11 \mid p^2 + 11$, így a vizsgált esetben $(p^2 + 11)$ -nek 6-nál több osztója van.

Tehát a feladatnak egyetlen megoldása a $p = 3$. 2 pont

Összesen:

10 pont

3. Az alábbi ábrán látható 7 kör közül bizonyosakat szakaszokkal kötöttünk össze. A szakasszal összekötött köröket a továbbiakban szomszédosnak nevezzük.

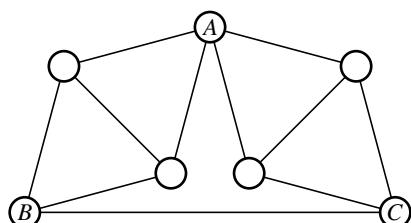


- a) Igazoljuk, hogy a 7 kör nem színezhető ki 3 színnel úgy, hogy a szomszédos körök különböző színűek legyenek!
- b) Hányféleképpen lehet a 7 kört 4 színnel (pl. pirossal, kékkel, sárgával és zölddel) kiszínezni úgy, hogy a szomszédos körök különböző színűek legyenek? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy kör színezése eltér.)

10 pont

Megoldás. a) Egy háromszög három csúcsának páronként különböző színűnek kell lennie.

1 pont



Ha három színnel színezünk, akkor B -t ugyanolyan színnel kell színeznünk, mint A -t, mert B szomszédos A -nak két, A -tól és egymástól is különböző színű szomszédjával.

1 pont

Ugyanez igaz C -re. De B és C szomszédosak, így nem színezhetjük őket azonos színnel.

1 pont

b) **1. megoldás.** Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy A piros!

Ekkor a tőle balra elhelyezkedő három pontot $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ -féleképpen színezhetjük ki.

1 pont

Az A -tól jobbra elhelyezkedő három pont színezése is $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ -féle lehet. Ez elvileg $12 \cdot 12 = 144$ -féle lehetőség lenne.

1 pont

Ezek közül azonban nem jók azok, amikor B és C azonos színű.

Mint láttuk, 12-féleképpen színezhető az ábra bal oldali része. A 12 esetből 6-nál piros B is, 2-2-2 esetben pedig kék, sárga vagy zöld. Ugyanez igaz a jobb oldali részre.

1 pont

B és C tehát $6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ esetben lesz azonos színű.

2 pont

Ha A piros, akkor $144 - 48 = 96$ helyes színezés van.

1 pont

Mivel A színe négyféle lehet, ezért $96 \cdot 4 = 384$ lehetséges színezés van.

1 pont

2. megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy B piros!

A B -t és A -t összekötő két érintkező háromszöget $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ -féleképpen színezhetjük ki.

1 pont

A 12 esetből 6-nál piros A is, 2-2-2 esetben pedig kék, sárga vagy zöld.

1 pont

Két esetet vizsgálunk:

1. eset: B piros – A piros – C pirostól eltérő: $6 \cdot 6 = 36$ lehetőség (B és A között a fent említett 6 lehetőség van, A és C között pedig ugyanígy számolhatunk.)

1 pont

2. eset: B piros – A pirostól eltérő – C pirostól eltérő: $6 \cdot 10 = 60$ lehetőség (B és A között a fent említett 6 lehetőség van. A és C között, pedig a 12 lehetőségéből 2 nem jó: amikor C piros.)

2 pont

Ez összesen $36 + 60 = 96$ lehetőség.

1 pont

Mivel B színe négyféle lehet, ezért $96 \cdot 4 = 384$ lehetséges színezés van.

1 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az $[a; b]$ intervallumot, ha tudjuk, hogy $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ és

$$|b - a - 1| \geq a^2 + b^2 + \frac{a}{2} - 2b + \frac{21}{16} \quad 10 \text{ pont}$$

2. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge 90° . Legyen D a C csúcshoz tartozó magasság talppontja, E és F pontok pedig rendre a BC és CA oldalak felezőpontjai. Az A csúcshoz tartozó belső szögfelező a K pontban metszi az EF szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy K a CDE háromszög beírt körének középpontja. 10 pont

3. A síkon megrajoltunk n ($n \in \mathbb{N}^+$) egyenest úgy, hogy mindegyiket pontosan 15 másik egyenes metsz. Határozd meg n összes lehetséges értékét, jellemezd az összes lehetséges helyzetet, és igazold, hogy más lehetőségek nincsenek. 10 pont

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az $[a; b]$ intervallumot, ha tudjuk, hogy $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ és

$$|b - a - 1| \geq a^2 + b^2 + \frac{a}{2} - 2b + \frac{21}{16} \quad 10 \text{ pont}$$

Megoldás. Ha $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, akkor $b - a < 1$, azaz $b - a - 1 < 0$, ebből következik, hogy $|b - a - 1| = -b + a + 1$. 2 pont

Ezért az egyenlőtlenség így írható: $-b + a + 1 \geq a^2 + b^2 + \frac{a}{2} - 2b + \frac{21}{16}$.

Az egyenlőtlenséget átrendezve, majd teljes négyzeteket kialakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\geq a^2 + b^2 - \frac{a}{2} - b + \frac{5}{16}, \\ 0 &\geq \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad 4 \text{ pont}$$

Mivel a négyzetes kifejezések nem negatívak, ezért ez csak úgy lehetséges, ha

$$\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \quad \text{és} \quad \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Ezért $a = \frac{1}{4}$ és $b = \frac{1}{2}$. 3 pont

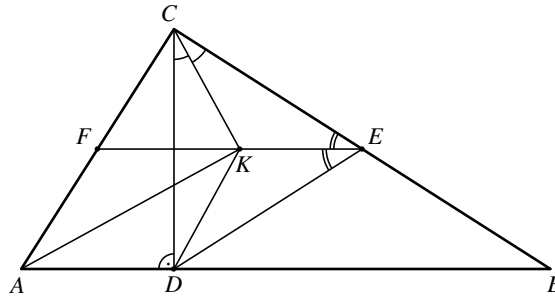
Tehát a keresett intervallum: $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge 90° . Legyen D a C csúcsához tartozó magasság talppontja, E és F pontok pedig rendre a BC és CA oldalak felezőpontjai. Az A csúcsához tartozó belső szögfelező a K pontban metszi az EF szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy K a CDE háromszög beírt körének középpontja.

10 pont

Megoldás. Legyen $CAB \sphericalangle = \alpha$. Ekkor $CAK \sphericalangle = KAB \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.



FE középvonal az ABC háromszögben, ezért $FE \parallel AB$ és $CFE \sphericalangle = CAB \sphericalangle = \alpha$, mivel egyállású szögek.

1 pont

Az AKF háromszögre a külsőszög-tételt alkalmazva $AKF \sphericalangle = CFK \sphericalangle - FAK \sphericalangle = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$,

1 pont

így az AKF háromszög egyenlő szárú és $KF = FA = FC$.

1 pont

Ennek figyelembevételével $KCF \sphericalangle = \frac{180^\circ - CFK \sphericalangle}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

1 pont

Másrészt

$$DCA \sphericalangle = 180^\circ - CAD \sphericalangle - ADC \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$$

$$BCD \sphericalangle = BCA \sphericalangle - DCA \sphericalangle = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$

1 pont

$$KCD \sphericalangle = KCF \sphericalangle - DCA \sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}BCD \sphericalangle,$$

tehát a CK egyenes a BCD háromszög C csúcsához tartozó belső szögfelező egyenese.

2 pont

A Thalész-tétel megfordítása alapján E és F rendre a BCD és CAD derékszögű háromszög körülírt körének középpontja, ezért az EF egyenes a CD magasság felezőmerőlegese és egyben a CDE egyenlő szárú háromszög E csúcsához tartozó belső szögfelezője is.

2 pont

Ezzel megmutattuk, hogy a K pont a DEC és ECD szögek szögfelezőinek metszéspontja, vagyis a CDE háromszög beírt körének középpontja.

1 pont

Összesen:

10 pont

3. A síkon megrajzoltunk n ($n \in \mathbb{N}^+$) egyenest úgy, hogy mindegyiket pontosan 15 másik egyenes metsz. Határozd meg n összes lehetséges értékét, jellemezd az összes lehetséges helyzetet, és igazold, hogy más lehetőségek nincsenek.

10 pont

Megoldás. Két egyenes akkor és csak akkor metszi egymást, ha nem párhuzamosak, azaz különböző irányúak. Jelölje d ($d \in \mathbb{N}^+$) a síkon húzott egyenesek különböző irányainak számát, $e_1, e_2, \dots, e_d$ pedig az egyes irányokhoz tartozó egyenesek számát. A feladat feltétele szerint:

$$15 = n - e_i \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

1 pont

Ez alapján $e_1 = e_2 = \dots = e_d$, és a továbbiakban jelöljük közös értéküket e -vel.

1 pont

Így kapjuk, hogy $n = e_1 + e_2 + \dots + e_d = de$ és $15 = de - e = (d - 1)e$.

2 pont

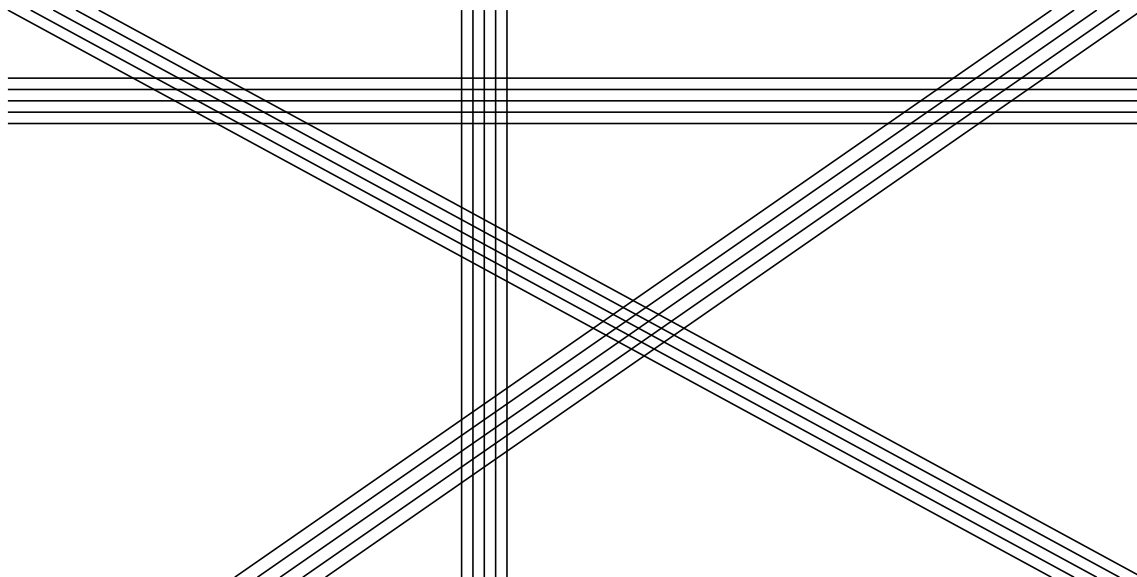
Tehát $d - 1 \mid 15$, és ennek figyelembevételével a feladat feltételének megfelelő $(d; e)$ párok az alábbiak lehetnek: $(2; 15)$, $(4; 5)$, $(6; 3)$, $(16; 1)$.

 4×1 pont

Könnyen belátható, hogy minden helyzet megvalósítható, elegendő d különböző irány mind-egyikével e db párhuzamos egyenest rajzolni.

1 pont

Például $d = 4$, $e = 5$ esetén egy lehetséges helyzet:



Tehát n lehetséges értékei 16, 18, 20 vagy 30.

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzés. Ha valaki nem igazolja, hogy a fenti 4 eseten kívül más lehetőség nincs, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat az alábbi megoszlás szerint: $n = 16$

1 pont

$n = 18, 20, 30$

2-2-2 pont

Kezdők III. kategória 1. forduló

Feladatok

- Péter és Pál tököt árulnak a falu piacán. Mindkettőjüknek négynél több portékája van. Mivel haragosok, egymásnak háttal állítják fel a bódéikat, hogy még csak ne is lássák egymás termékeit. Azt azonban nem bírják ki, hogy egymáshoz se szóljanak, amikor nagyság (tömeg) szerint növekvő sorrendben rendezik a pulton az áruikat. Dicsekszenek, azonban a rivalizálásból az derül ki, hogy ugyanannyi tököt hoztak, a tökök össztömege is megegyezik, és a sor közepén mindkét árusnál azonos tömegű tök van, továbbá legtöbbet mindketten ugyanakkora termésből hoztak, sőt még a legnagyobb is ugyanannyi kilóval több a legkisebbnél.

János bácsi Pál standjánál hallgatja végig a beszélgetést, miközben kinézi magának a második helyen álló zöldséget (mert a kettő a kedvenc száma). Korábban azt gondolta, először mindkét

árus kínálatát megtekinti, csak utána választ. A hencegést hallva azonban úgy dönt, megveszi Pál portékáját, hiszen ha ennyi minden egyezik, Péternél is ugyanakkora áru áll a második helyen.

Helyesen okoskodik János bácsi? Indokoljuk a választ!

6 pont

2. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$ olyan egész számok, amelyek szorzata 2.

Mennyi lehet az $A = \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) \cdot \dots \cdot \left(a_{2025} + \frac{1}{a_1}\right)$ kifejezés értéke? 6 pont

3. A 0-tól különböző a, b, c egész számok teljesítik az $\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$ egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $a+b+c \leq 0$. 8 pont

4. Egy 2025×2025 -ös tábla néhány mezőjét pirosra színeztük úgy, hogy

- bármely két élszomszédos mező közül legalább az egyik piros, és
- bármely 6 egymáshoz csatlakozó, egy sorban vagy oszlopban elhelyezkedő mező között van két szomszédos piros mező.

Legalább hány mezőt színeztünk pirosra?

10 pont

5. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge 90° . Legyen D a C csúcsához tartozó magasság talppontja, E és F pontok pedig rendre a BC és CA oldalak felezőpontja. Az A csúcsához tartozó belső szögfelező a K pontban metszi az EF szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy K a CDE háromszög beírt körének középpontja. 10 pont

Kezdők III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Péter és Pál tököt árulnak a falu piacán. Mindkettőjüknek négynél több portékája van. Mivel haragosok, egymásnak háttal állítják fel a bódéikat, hogy még csak ne is lássák egymás termékeit. Azt azonban nem bírják ki, hogy egymáshoz se szóljanak, amikor nagyság (tömeg) szerint növekvő sorrendben rendezik a pulton az áruikat. Dicsekszenek, azonban a rivalizálásból az derül ki, hogy ugyanannyi tököt hoztak, a tökök össz tömege is megegyezik, és a sor közepén mindkét árusnál azonos tömegű tök van, továbbá legtöbbet mindketten ugyanakkora termésből hoztak, sőt még a legnagyobb is ugyanannyi kilóval több a legkisebbnél.

János bácsi Pál standjánál hallgatja végig a beszélgetést, miközben kinézi magának a második helyen álló zöldséget (mert a kettő a kedvenc száma). Korábban azt gondolta, először mindkét árus kínálatát megtekinti, csak utána választ. A hencegést hallva azonban úgy dönt, megveszi Pál portékáját, hiszen ha ennyi minden egyezik, Péternél is ugyanakkora áru áll a második helyen.

Helyesen okoskodik János bácsi? Indokoljuk a választ!

6 pont

Megoldás. János bácsi nem okoskodik helyesen.

Egy lehetséges ellenpélda.

2 pont

A magyarázatra, annak részletezettségétől függően 1–3 pont adható.

Ha legalább öt-öt termés van, válasszuk például a tömegek adatsorának közös mediánját és móduszát is m -nek. Ekkor a két adatsor lehet $m - 3 < m = \dots = m < m + 1 < m + 2$ és $m - 2 < m - 1 < m = \dots = m < m + 3$. Konkrét példa: $\{3, 6, 6, 7, 8\}$ és $\{4, 5, 6, 6, 9\}$. Az elemszám, az összeg (átlag), a módusz, a medián és a terjedelem ugyanannyi, de a második szám nem egyenlő a két adatsorban.

3 pont

Tehát 4-nél több tök esetén nem garantált, hogy a második tökök tömege egyenlő.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$ olyan egész számok, amelyek szorzata 2.

Mennyi lehet az $A = \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) \cdot \dots \cdot \left(a_{2025} + \frac{1}{a_1}\right)$ kifejezés értéke? 6 pont

Megoldás. Ha $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2025} = 2$, akkor pontosan egy tényező 2 vagy -2 , a többi tényező pedig 1 vagy -1 .

1 pont

Az általánosság megszorítása nélkül legyen az $a_{2025} = 2$ vagy -2 .

Ha $a_{2025} = 2$ és minden további szám 1, akkor

$$A = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(2 + \frac{1}{1}\right) = 2^{2023} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = 2^{2022} \cdot 9.$$

1 pont

Ha $a_{2025} = 2$ és minden további szám -1 (ami lehet, mert 2024 tényező van még), akkor

$$A = \left(-1 + \frac{1}{-1}\right) \left(-1 + \frac{1}{-1}\right) \left(-1 + \frac{1}{-1}\right) \dots \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \left(2 + \frac{1}{-1}\right) = (-2)^{2023} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 2^{2022}.$$

1 pont

Ha $a_{2025} = 2$ és van a számok között 1 és -1 is, akkor A -ban van olyan szorzótényező, amely nulla, és ekkor $A = 0$.

1 pont

Ha $a_{2025} = -2$, akkor biztosan van a számok között 1 és -1 is (hiszen a 2024 tényező szorzata negatív), akkor A -ban van olyan szorzótényező, amely nulla, és ekkor $A = 0$.

1 pont

Tehát A értéke $9 \cdot 2^{2022}$ vagy 2^{2022} vagy 0 lehet.

1 pont

Összesen:

6 pont

3. A 0-tól különböző a, b, c egész számok teljesítik az $\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$ egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $a+b+c \leq 0$.

8 pont

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c^2} &= \frac{a+c^2}{b} \\ ab &= ab + ac^2 + bc^2 + c^4 \\ 0 &= ac^2 + bc^2 + c^4 \\ 0 &= c^2(a+b+c^2) \end{aligned}$$

1 pont

1 pont

Mivel $c \neq 0$, a kapott egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a+b+c^2 = 0$.

1 pont

Ha $c = 1$, akkor $a+b+c = a+b+c^2 = 0$, és a feladat állítása teljesül.

2 pont

Ha c 0-tól és 1-től különböző egész szám, akkor c és $c - 1$ azonos előjelű egész számok.	1 pont
Így $c(c - 1) > 0$, vagyis $c^2 > c$.	1 pont
Ezt felhasználva $a + b + c < a + b + c^2 = 0$. Tehát az állítás ebben az esetben is igaz.	1 pont
Összesen:	8 pont

4. Egy 2025×2025 -ös tábla néhány mezőjét pirosra színeztük úgy, hogy

- bármely két élszomszédos mező közül legalább az egyik piros, és
- bármely 6 egymáshoz csatlakozó, egy sorban vagy oszlopban elhelyezkedő mező között van két szomszédos piros mező.

Legalább hány mezőt színeztünk pirosra?

10 pont

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy bármely öt egymáshoz csatlakozó, egy sorban vagy oszlopban elhelyezkedő mező között lesz legalább három pirosra színezett. Tekintsünk tehát 5 ilyen mezőt!

Ha közöttük van kettő szomszédos pirosra színezett, akkor a maradék három mező között van két szomszédos, így azok közül legalább az egyik szintén piros. Tehát megvan a legalább három piros mező.

2 pont

Ha nincs két szomszédos piros mező, akkor az öt mező PNPNP vagy NPNPN módon lehet színezve, ahol P jelöli, ha a mező piros, N pedig azt, ha nem. Az első esetben már megvan a három piros mező, így készen vagyunk. A második esetben viszont az öt mezőt kiegészítve egy velük egy sorban/oszlopban elhelyezkedő szomszédos hatodik mezővel, a második feltételnek ellentmondó színezést kapunk, így ez az eset nem állhat fenn.

3 pont

Ezzel igazoltuk, hogy bármely öt egymáshoz csatlakozó, egy sorban vagy oszlopban elhelyezkedő mező között van legalább három pirosra színezett.

Osszuk fel a 2025×2025 -ös táblát 1×5 -ös részekre. A fentiek alapján minden rész tartalmaz legalább 3 piros mezőt, így a teljes táblán legalább

$$\frac{3}{5} \cdot 2025^2 = 2460375$$

piros mező lesz.

2 pont

Ez a becslés éles, amit például az alábbi konstrukcióval láthatunk: színezzük ki a tábla első sorát úgy, hogy minden $5k + 1$, $5k + 2$ és $5k + 4$ alakú mezője legyen piros. Minden további sor színezését pedig az előző sor színezéséből kapjuk úgy, hogy annak színezését ciklikusan eggyel jobbra toljuk. Meggondolható, hogy ez teljesíti mindkét feltételt, és ekkor a táblának pontosan a $\frac{3}{5}$ -része piros.

3 pont

Összesen:

10 pont

5. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge 90° . Legyen D a C csúcshoz tartozó magasság talppontja, E és F pontok pedig rendre a BC és CA oldalak felezőpontja. Az A csúcshoz tartozó belső szögfelező a K pontban metszi az EF szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy K a CDE háromszög beírt körének középpontja.

10 pont

Megoldás. Legyen $\angle CAB = \alpha$. Ekkor $\angle CAK = \angle KAB = \frac{\alpha}{2}$.

FE középvonal az ABC háromszögben, ezért $FE \parallel AB$ és $\angle CFE = \angle CAB = \alpha$, mivel egyállású szögek.

1 pont

Az AKF háromszögre a külsőszög-tételt alkalmazva $\angle AKF = \angle CFK - \angle FAK = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

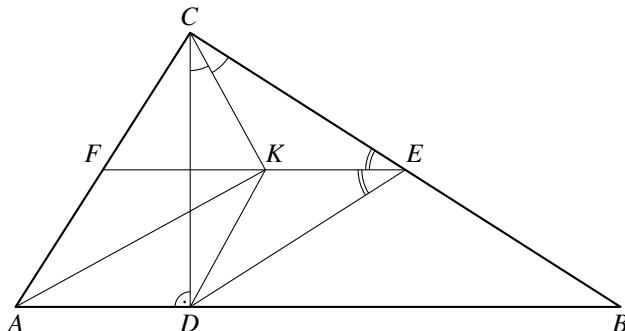
1 pont

Így az AKF háromszög egyenlő szárú és $KF = FA = FC$.

1 pont

Ennek figyelembevételével $\angle KCF = \frac{180^\circ - \angle CFK}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

1 pont



Másrészt

$$\angle DCA = 180^\circ - \angle CAD - \angle ADC = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha.$$

1 pont

$$\angle BCD = \angle BCA - \angle DCA = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$

1 pont

$$\angle KCD = \angle KCF - \angle DCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \angle BCD,$$

tehát a CK egyenes a BCD háromszög C csúcsához tartozó belső szögfelező egyenese.

1 pont

A Thalész-tétel megfordítása alapján E és F rendre a BCD és CAD derékszögű háromszög körülírt körének középpontja, ezért az EF egyenes a CD magasság felezőmerőlegese és egyben a CDE egyenlő szárú háromszög E csúcsához tartozó belső szögfelezője is.

2 pont

Ezzel megmutattuk, hogy a K pont a DEC és ECD szögek szögfelezőinek metszéspontja, vagyis a CDE háromszög beírt körének középpontja.

1 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy minden $\sqrt{n}$ -nél kisebb pozitív egész számmal oszthatók?

10 pont

2. Szerkesztendő egy háromszög, amelynek adott a körülírt körének sugara, illetve az egyik csúcsához tartozó belső szögfelező és magasság hossza. (Készítsünk vázlatot, írjuk le a szerkesztés lépéseit, és végezzünk diszkusziót, azaz adjuk meg a megoldások számát (egybevágóság erejéig) a megadott adatok függvényében.)

10 pont

3. Húsvét előtt egy város 2026 lakója tojásküldő játékot játszik. Minden lakó felírja két másik (tehát saját magától és egymástól is különböző) lakó nevét egy cédulára, akik az ő címzettjei. A húsvéti nyuszi ezután minden cédulával a következőt teszi: mindkét címzettnek ad egy tojást, az egyiknek egy pirosat, a másiknak egy kéket, de hogy a kettő közül ki kapja a pirosat és ki kapja a kéket, azt a nyuszi dönti el.

A lakók a két nevet úgy választják meg, hogy akárhogyan is dönt a nyuszi, a lehető legtöbb lakó kapjon legalább egy piros tojást. Legalább hány lakó kap piros tojást?

10 pont

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy minden $\sqrt{n}$ -nél kisebb pozitív egész számmal oszthatók?

10 pont

Megoldás. Könnyű ellenőrizni, hogy az $n = 1, 2, 3, 4$ számok teljesítik a feltételt.

1 pont

Legyen $n \geq 5$ egy ilyen szám. A $\sqrt{n}$ előtti két egész szám egymáshoz relatív prím osztói n -nek, tehát a szorzatuk is osztja n -et, ráadásul n -nél kisebb, tehát legfeljebb $n/2$.

3 pont

Így

$$(\lceil \sqrt{n} \rceil - 1)(\lceil \sqrt{n} \rceil - 2) \leq \frac{n}{2},$$

amiből

$$(\sqrt{n} - 1)(\sqrt{n} - 2) \leq \frac{n}{2},$$

$$n - 6\sqrt{n} + 4 \leq 0.$$

2 pont

Ezt a $\sqrt{n}$ -ben másodfokú egyenlőtlenséget megoldva az $n \geq 5$ feltétel mellett az adódik, hogy $n \leq 27$.

1 pont

A keresett $5 \leq n \leq 27$ számok mindegyike osztható 2-vel (mivel nagyobbak 4-nél), és a 9-nél nagyobbak 3-mal, a 16-nál nagyobbak 4-gyel is oszthatók. Ezeknek a feltételeknek a 6, 8, 12, 24 számok felelnek meg, és ellenőrizve kapjuk, hogy ezek mind jók.

2 pont

Tehát a keresett számok: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

1 pont

Összesen:

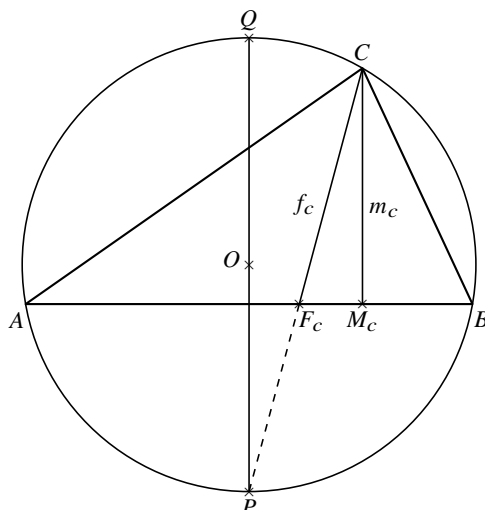
10 pont

Megjegyzés. Az összes lehetséges szám felsorolása (ellenőrzése) annak indoklása nélkül, hogy más szám nem megfelelő 2 pontot ér.

2. Szerkesztendő egy háromszög, amelynek adott a körülírt körének sugara, illetve az egyik csúcs-hoz tartozó belső szögfelező és magasság hossza. (Készítsünk vázlatot, írjuk le a szerkesztés lépéseit, és végezzünk diszkussziót, azaz adjuk meg a megoldások számát (egybevágóság erejéig) a megadott adatok függvényében.)

10 pont

Megoldás. Jelölje a feladatban szereplő csúcst C , az adott magasságot és szögfelezőt m_c és f_c , ezeknek a c oldal egyenesével vett metszéspontját M_c és F_c . Jelölje továbbá a háromszög köré írt kört k , a középpontját O , a C -t nem tartalmazó AB ív felezőpontját P , az erre illeszkedő átmérőt d , az átmérő P -től különböző végpontját Q (ábra).



I. Ha $f_c > m_c$, akkor nem létezik ilyen háromszög, mert a C csúcsot a c oldallal összekötő szakaszok közül a legrövidebb a merőleges, ez az m_c .

1 pont

II. Ha $m_c = f_c$, akkor a háromszög egyenlő szárú, alapja a c oldal.

1 pont

A szerkesztés menete:

1. Felvesszük a k kört, a kerületén kijelöljük a C csúcsot, illetve a C -re illeszkedő d átmérőt.

2. A d -n a C -től $m_c = f_c$ távolságra lévő $F_c \equiv M_c$ pontban a d -re merőleges egyenes és a k kör két metszéspontja – amennyiben léteznek – a háromszög másik két csúcsa.

1 pont

Diszkusszió. A két metszéspont akkor és csak akkor létezik, ha $2r > f_c = m_c$.

1 pont

III. Ha $m_c < f_c$, akkor felhasználjuk azt az összefüggést, hogy a C -ből induló szögfelező a szemközti AB ívet felezi (P pontban). (Az egyenlő kerületű ACP és PCB szögekhez tartozó ívek egyenlősége alapján, de szögszámítással le is vezethető a szokásos módon.) Ebből következik, hogy a PO egyenes az AB oldal szakaszfelező merőlegese, tehát párhuzamos m_c -vel.

2 pont

Az adatok alapján megszerkeszthető az F_cCM_c derékszögű háromszög, ennek F_cCM_c hegyesszöge (ε) egyenlő a CPO szöggel (párhuzamos szárú szögek), így ezt a szöget ismertnek tekinthetjük.

2 pont

A szerkesztés menete:

1. Az O középpontú, r sugarú kör kerületén felvesszük a PQ átmérőt, illetve P csúccsal, PQ szárral az ε szöget.

2. A szög PQ -től különböző szára kimetszi a körből a C csúcspontot. Mivel ε hegyesszög, ez a metszéspont létezik, és szimmetriától eltekintve egyértelmű.

3. A felvett átmérőre merőleges, a C -től (P felé) m_c távolságra lévő egyenes az AB oldal egyenese.

1 pont

Azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen feltételek mellett van ennek két metszéspontja k -val.

Diszkusszió. Ehhez az kell, hogy CP hosszabb legyen, mint f_c , azaz $CP > f_c$.

A PQC és a CF_cM_c háromszögek hasonlósága alapján: $CP : 2r = m_c : f_c$, ahonnan a kívánt feltétel $CP = 2r \frac{m_c}{f_c} > f_c$ szerint a teljes diszkussziós feltétel: $\frac{2r}{f_c} > \frac{f_c}{m_c} \geq 1$.

1 pont

Összesen:

10 pont

Annak a bizonyítása, hogy az ACB szögfelezője P -ben metszi a kört.

Amennyiben O illeszkedik az AC vagy BC oldalra (példának okáért AC -re), akkor az OCB egyenlő szárú háromszög külső AOB szöge a két vele nem szomszédos (és egymással egyenlő) szög összege, tehát egy ilyen szögnek (például $OCB \triangleleft = ACB \triangleleft$) a kétszerese: $AOB \triangleleft = 2ACB \triangleleft$.

Amennyiben O nem illeszkedik az AC oldalra, akkor C' -vel jelölve C -nek O -ra vonatkozó tükörképét, az ACC' és $C'CB$ háromszögekben teljesül a fenti állítás; az $ACB \triangleleft$ pedig az ACC' és a $C'CB$ szögek összegeként vagy különbségeként kapható meg, éppen úgy, ahogyan az AOB szög is az AOC' és $C'OB$ szögek összege vagy különbségeként adódik.

3. Húsvét előtt egy város 2026 lakója tojásküldő játékot játszik. Minden lakó felírja két másik (tehát saját magától és egymástól is különböző) lakó nevét egy cédulára, akik az ő címzettjei. A húsvéti nyuszi ezután minden cédulával a következőt teszi: mindkét címzettnek ad egy tojást, az egyiknek egy pirosat, a másiknak egy kéket, de hogy a kettő közül ki kapja a pirosat és ki kapja a kéket, azt a nyuszi dönti el.

A lakók a két nevet úgy választják meg, hogy akárhogyan is dönt a nyuszi, a lehető legtöbb lakó kapjon legalább egy piros tojást. Legalább hány lakó kap piros tojást?

10 pont

Megoldás. Amennyiben a város lakói 3-as csoportokat alkotnak (egyvalaki csoport nélkül marad), és a csoporttársaikat írják fel a cédulájukra, akkor garantálni tudják, hogy minden csoportnak legalább két tagja kapjon piros tojást. Ez összesen 1350 lakót jelent. Most megmutatjuk, hogy ennél többet nem tudnak biztosítani.

3 pont

Készítsünk gráfot a lakókból: két lakót kössünk össze éllel, ha valaki éppen ezt a két nevet írta fel. Mivel minden lakó egy párt ír fel, a gráfban pontosan 2026 csúcs és 2026 él van. Megmutatjuk, hogy ebben a gráfban található 676 olyan csúcs, amelyek közül semelyik kettő sincsen összekötve egymással. Ha lennének ilyen csúcsok, akkor a húsvéti nyuszi ezen 676 lakónak nem biztos, hogy adna piros tojást: közülük semelyik kettő sem szerepel ugyanazon cédulán, és lehetséges, hogy azon cédulákról, amelyeken ők szerepelnek, a nyuszi mindig a másik lakónak (a maradék 1350 egyikének) adja a piros tojást.

2 pont

Megmutatjuk, hogy ha egy n csúcsú gráfnak legfeljebb n éle van, akkor mindig kiválasztható legalább $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ olyan csúcs, amelyek közül semelyik kettő sincs összekötve. Az állítás $n = 1, 2, 3$ esetén nyilvánvalóan igaz. Ha a gráfnak n -nél kevesebb éle van, akkor egészítsük ki az élek számát n -re fiktív élek behúzásával. Ha a kiegészített gráfban találunk elég egymással nem összekötött pontot, akkor azok az eredeti gráfban is jók lesznek. Így tehát feltehetjük, hogy a fokszámok összege $2n$. Ekkor vagy minden csúcs foka 2, vagy van legfeljebb elsőfokú és legalább harmadfokú csúcs is.

2 pont

Ha minden csúcs foka 2, akkor a gráf felbomlik körökre, egy m hosszú körből pedig minden második csúcsot véve találunk egymással páronként nem szomszédos $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \geq \lceil \frac{m}{3} \rceil$ csúcsot.

1 pont

A másik esetben legyen a legfeljebb egy fokú csúcs P , a legalább három fokú pedig Q . Válasszuk P -t a 676 keresett csúcs közé, majd hagyjuk el a gráfból P -t és Q -t, valamint ha volt szomszédja P -nek, akkor azt is. Ezzel egy kisebb, $n - 3$ vagy $n - 2$ csúcsú gráfot kapunk, aminek legfeljebb $n - 3$ éle van. Teljes indukciót alkalmazva, vagy csak folytatva ezt az eljárást látható a bizonyítandó állítás.

2 pont

Összesen:

10 pont

Haladók I. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Gergő elhatározta, hogy kiszámolja a kétjegyű pozitív egész számok összegét. Sajnos az összeadásnál egy számot véletlenül kihagyott, így a kapott összeg egy palindrom szám lett (azaz olyan szám, amely odafele és visszafele olvasva is ugyanaz). Melyik számot hagyta ki Gergő? 7 pont
2. Az ABC háromszögben $AC = BC$. Az A csúcsból húzott belső szögfelező a P , az A csúcsból húzott magasságvonal pedig az R pontban metszi a BC oldal egyenesét. Mekkora az ABC háromszög szögei, ha $AP = 2 \cdot AR$? 7 pont
3. A háromelemű H halmaz elemei pozitív egész számok. Imre felírta a H halmaz összes valódi (azaz H -től különböző) nemüres részhalmazát, majd minden egyes részhalmaz esetén kiszámította a részhalmazban lévő számok szorzatát. (Az egyelemű részhalmazok esetén ez a szorzat maga az elem.) Végül az így kapott szorzatokat is szerette volna összeszorozni, de figyelmetlen volt, ezért az egyik szorzatot kifelejtette, így a többi szorzat szorzatára 400-at kapott. Mely számok lehettek a H halmaz elemei? 7 pont
4. Az a, b, c egész számokra teljesül, hogy az $a(b+c)$ és $b(a+c)$ kifejezések értéke két egymást követő egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a kapott két szomszédos szám közül legalább az egyik négyzetszám. 7 pont
5. Az egységnyi oldalú $ABCDEF$ szabályos hatszögben vegyük fel az AC átlón a P pontot, a CE átlón pedig a Q pontot úgy, hogy $AP = 1$ és $CQ = 1$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy B, P és Q pontok egy egyenesre esnek. 7 pont

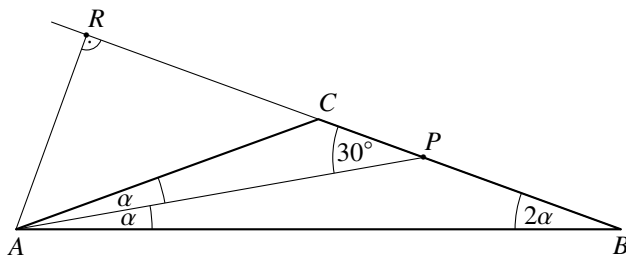
Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Gergő elhatározta, hogy kiszámolja a kétjegyű pozitív egész számok összegét. Sajnos az összeadásnál egy számot véletlenül kihagyott, így a kapott összeg egy palindrom szám lett (azaz olyan szám, amely odafele és visszafele olvasva is ugyanaz). Melyik számot hagyta ki Gergő? 7 pont
Megoldás. A kétjegyű számok összege: $10 + 11 + 12 + \dots + 99 = 4905$, és ebben az összegben a kihagyott szám is benne van. 3 pont
A kihagyott szám legfeljebb 99 és legalább 10, ezért a kihagyott szám nélkül az összeg legalább 4806, legfeljebb pedig 4895. 2 pont
A kihagyott szám nélküli összeg első két számjegye tehát 4 és 8, és mivel ennek az összegnek egy palindrom számnak kell lennie, csak a 4884 lehet. 1 pont
Tehát a kihagyott szám a $4905 - 4884 = 21$. 1 pont
Összesen: 7 pont
2. Az ABC háromszögben $AC = BC$. Az A csúcsból húzott belső szögfelező a P , az A csúcsból húzott magasságvonal pedig az R pontban metszi a BC oldal egyenesét. Mekkora az ABC háromszög szögei, ha $AP = 2 \cdot AR$? 7 pont

Megoldás. Az ARP háromszög derékszögű, átfogója kétszerese az egyik befogónak, ezért ez egy félszabályos háromszög, vagyis az AR oldallal szemközti szöge 30° , míg az RP oldallal szemközti szöge 60° .

3 pont



Legyen az ABC háromszög AB alapon fekvő szöge 2α . Ha az R pont a BC oldalon, C és P között lenne, akkor az RP szakasszal szemközti 60° -os szög az α szög része lenne, ezért $\alpha \geq 60^\circ$ lenne, és ekkor az alapon fekvő 2α szög 120° -nál nagyobb lenne, ami lehetetlen. Emiatt az R pont a BC oldal C -n túli meghosszabbításán van, azaz a háromszög C -nél lévő szöge tompaszög. Hasonló lenne a helyzet akkor is, ha az R pont a P és a B között lenne.

(Amennyiben a versenyző rájön, hogy a háromszög tompaszögű, vagy a dolgot az ábráján tompaszögű háromszög van, de azt nem indokolja meg korrekt módon; akkor ennél a résznél 2 helyett 1 pontot kapjon.)

2 pont

Az ABP háromszög P -nél lévő szöge $APB = 150^\circ$, ezért $\alpha + 2\alpha = 30^\circ$, innen $\alpha = 10^\circ$. Tehát az ABC háromszög szögei 20° , 20° és 140° .

1 pont

1 pont

Összesen:

7 pont

3. A háromelemű H halmaz elemei pozitív egész számok. Imre felírta a H halmaz összes valódi (azaz H -től különböző) nemüres részhalmazát, majd minden egyes részhalmaz esetén kiszámította a részhalmazban lévő számok szorzatát. (Az egyelemű részhalmazok esetén ez a szorzat maga az elem.) Végül az így kapott szorzatokat is szerette volna összeszorozni, de figyelmetlen volt, ezért az egyik szorzatot kifelejtette, így a többi szorzat szorzatára 400-at kapott. Mely számok lehettek a H halmaz elemei?

7 pont

Megoldás. A H halmaz elemei legyenek az a , b és c pozitív egészek. H -nak hat nemüres valódi részhalmaza van.

Az egyes szorzatok: a , b , c , ab , ac és bc , ezek szorzata $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$.

1 pont

A feladat szövege alapján $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = 400 \cdot x$, ahol x a kifelejtett részhalmazban lévő elemek szorzata, azaz x a fentebb felsorolt 6 szorzat valamelyike.

1 pont

Feltehetjük, hogy $a < b < c$, ekkor a hat szorzat közül bc a legnagyobb, azaz $x \leq bc$.

Ekkor $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = 400 \cdot x \leq 400 \cdot bc$, innen $a^3 \cdot b^2 \cdot c^2 \leq 400$.

1 pont

Továbbá $x^2 \leq b^2 \cdot c^2 \leq a^3 \cdot b^2 \cdot c^2 \leq 400$, ezért $x \leq 20$.

1 pont

$400 \cdot x = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (a \cdot b \cdot c)^3$ köbszám. 400 prímfelbontását vizsgálva látható, hogy $x = 20t^3$ alakú (t pozitív egész). Ekkor $a \cdot b \cdot c = 20t$, de $t > 1$ esetén $x > a \cdot b \cdot c$, ami lehetetlen, $t = 1$ esetén pedig $x = a \cdot b \cdot c$, ami pontosan akkor lehetséges, ha a , b , c közül a legkisebb (azaz a) 1, és a szorzatuk (azaz $b \cdot c$) pedig 20.

1 pont

A 20-at kétféleképpen lehet három különböző pozitív egész szám szorzatára felbontani, így a H halmaz elemei: $a = 1$, $b = 2$, $c = 10$ vagy $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$, és mindkét esetben $bc = 20$, tehát el is lehet egy megfelelő szorzatot hagyni.

2 pont

Összesen:

7 pont

4. Az a, b, c egész számokra teljesül, hogy az $a(b+c)$ és $b(a+c)$ kifejezések értéke két egymást követő egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a kapott két szomszédos szám közül legalább az egyik négyzetszám.

7 pont

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a(b+c) > b(a+c)$, és a feladat feltétele alapján: $1 = a(b+c) - b(a+c) = ab + ac - ab - bc = ac - bc = c(a-b)$.

2 pont

Mivel a c és $a-b$ számok szorzata 1, ezért mindkettő 1-gyel vagy -1 -gyel egyenlő.

2 pont

Mindkét esetben teljesül, hogy $a-b = c$, azaz $a = b+c$.

2 pont

Ezt felhasználva $a(b+c) = a^2$, tehát teljesül a feladat állítása.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. A feladat szövegében a „legalább” szó használata indokolt, hiszen például $b = 0$ és $a = c = 1$ esetén az $a(b+c)$ és a $b(a+c)$ szám is négyzetszám.

5. Az egységnyi oldalú $ABCDEF$ szabályos hatszögben vegyük fel az AC átlón a P pontot, a CE átlón pedig a Q pontot úgy, hogy $AP = 1$ és $CQ = 1$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy B, P és Q pontok egy egyenesre esnek.

7 pont

Megoldás. Először belátjuk, hogy $\angle CBQ = 45^\circ$. A szabályos hatszög szögei 120° -osak,

1 pont

így az ECD egyenlő szárú háromszögben $\angle ECD = 30^\circ$, emiatt $\angle BCQ = 90^\circ$,

1 pont

vagyis BCQ derékszögű, egyenlő szárú háromszög, amiből következik, hogy $\angle CBQ = 45^\circ$.

1 pont

Másodjára belátjuk, hogy $\angle CBP$ is 45° -os. $\angle BAC = 30^\circ$, ez egyben az ABP egyenlő szárú háromszög csúcshöge.

1 pont

Ebből adódóan $\angle ABP = 75^\circ$,

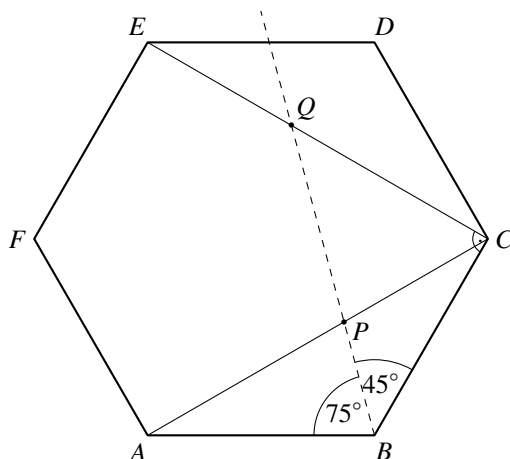
1 pont

amiből pedig következik, hogy $\angle CBP = 45^\circ$.

1 pont

A $\angle CBQ$ és $\angle CBP$ szögek egyenlőségéből pedig következik, hogy a B, P és Q pontok egy egyenesre esnek.

1 pont



Összesen:

7 pont

Haladók I. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Zita növekvő sorrendben 45 egymást követő pozitív egész számot írt fel a táblára. Öccse, Áron, éppen az összeadást és a kivonást tanulja az iskolában, ezért kiválasztott két számot a táblán, összeadta őket, az eredményt felírta a táblára, majd a kiválasztott két számot letörölte. Ezt folytatva ezután újra választott két számot a tábláról, azok összegét megint felírta a táblára, majd törölte a két kiválasztott számot. Mindezt addig csinálta, míg a táblán már csak két szám maradt. Zita megállapította, hogy egyikük az eredeti számok közül éppen a középső. Áron pedig kiszámolta, hogy a megmaradt két szám különbsége 1935. Mennyi a táblán maradt számok összege? **7 pont**
2. Határozzuk meg mindazokat az n egész számokat, amelyekre a $\sqrt{n^4 - 17n^2 + 56}$ kifejezés értéke egész szám lesz. **7 pont**
3. Négy testvérpár mindegyikében az egyik gyerek leány, a másik pedig fiú. Három csoportba osztjuk őket úgy, hogy minden csoportban legalább ketten legyenek, de testvérek ne kerüljenek azonos csoportba. Hányféleképpen történhet ez meg? **7 pont**
4. Legyen E az $ABCD$ négyzet CD oldalának a felezőpontja. A négyzet egy belső M pontjára igaz, hogy $\angle MAB = \angle MBC = \angle CME = \alpha$. Határozzuk meg az α értékét. **7 pont**

Haladók I. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Zita növekvő sorrendben 45 egymást követő pozitív egész számot írt fel a táblára. Öccse, Áron, éppen az összeadást és a kivonást tanulja az iskolában, ezért kiválasztott két számot a táblán, összeadta őket, az eredményt felírta a táblára, majd a kiválasztott két számot letörölte. Ezt folytatva ezután újra választott két számot a tábláról, azok összegét megint felírta a táblára, majd törölte a két kiválasztott számot. Mindezt addig csinálta, míg a táblán már csak két szám maradt. Zita megállapította, hogy egyikük az eredeti számok közül éppen a középső. Áron pedig kiszámolta, hogy a megmaradt két szám különbsége 1935. Mennyi a táblán maradt számok összege? **7 pont**
Megoldás. A táblán lévő számok összege tetszőleges lépés során megmarad. **1 pont**
Így a megmaradt két szám összege megegyezik az eredetileg felírt 45 szám összegével. **1 pont**
Az eredeti 45 szám átlaga a szimmetria miatt éppen az egyik megmaradó, eredetileg középső szám. **1 pont**
Ezt x -szel jelölve, egyfelől a megmaradt (és az eredeti) számok összege $45x$, másrészt a megmaradó nagyobb szám $45x - x = 44x$. **1 pont**
A különbség így $43x = 1935$. Ebből $x = 45$, **1 pont**
a keresett összeg pedig $45 \cdot 45 = 2025$ lesz, **1 pont**

az eredetileg a táblán lévő számok pedig: 23, 24, 25, ..., 66, 67.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Határozzuk meg mindazokat az n egész számokat, amelyekre a $\sqrt{n^4 - 17n^2 + 56}$ kifejezés értéke egész szám lesz.

7 pont

1. megoldás. Mivel a négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll, teljesülnie kell a $n^4 - 17n^2 + 56 \geq 0$ feltételnek.

Mivel $n^4 - 17n^2 + 56 = (n^2 - 8,5)^2 - 16,25$, így $\sqrt{16,25} \leq |n^2 - 8,5|$ és innen (mivel n^2 egész szám) adódik, hogy $n^2 > 8,5 + \sqrt{16,25} > 12$, vagy $n^2 < 8,5 - \sqrt{16,25} < 5$.

Figyelembe véve, hogy n is egész szám, továbbá 5 és 12 között a 9 az egyetlen négyzetszám, kapjuk, hogy $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-3; 3\}$ kell legyen.

1 pont

Legyen $t = \sqrt{n^4 - 17n^2 + 56}$, ahol t természetes szám, ekkor

$$(2t)^2 = 4t^2 = 4n^4 - 68n^2 + 224 = (2n^2 - 17)^2 - 65,$$

1 pont

amelyet átrendezve $(2n^2 - 17)^2 - (2t)^2 = 65$, innen pedig szorzattá alakítás után

$$(2n^2 - 17 - 2t)(2n^2 - 17 + 2t) = 65$$

adódik.

1 pont

A $65 = 5 \cdot 13$ prímfelbontás miatt a 65 (a pozitív és negatív osztópárokra is ügyelve) a tényezők sorrendjétől eltekintve négyféleképpen írható fel két egész szám szorzataként. Mivel a $(2n^2 - 17 - 2t)(2n^2 - 17 + 2t)$ szorzat tényezői egész számok és $2n^2 - 17 - 2t \leq \leq 2n^2 - 17 + 2t$, az alábbi négy esetet különböztetjük meg:

1 pont

I. $2n^2 - 17 - 2t = -65$ és $2n^2 - 17 + 2t = -1$. Ekkor $4n^2 - 34 = -66$, ahonnan $n^2 = -8$, amely egyenletnek nincs valós megoldása.

II. $2n^2 - 17 - 2t = -13$ és $2n^2 - 17 + 2t = -5$. Ekkor $4n^2 - 34 = -18$, ahonnan $n^2 = 4$, mely egyenletnek $n = 2$ és $n = -2$ lesznek a megoldásai. Mindkét esetben $t = 2$ lesz.

1 pont

III. $2n^2 - 17 - 2t = 1$ és $2n^2 - 17 + 2t = 65$. Ekkor $4n^2 - 34 = 66$, ahonnan $n^2 = 25$, mely egyenletnek $n = 5$ és $n = -5$ lesznek a megoldásai. Mindkét esetben $t = 16$ lesz.

IV. Végül $2n^2 - 17 - 2t = 5$ és $2n^2 - 17 + 2t = 13$ esetén pedig $4n^2 - 34 = 18$, ahonnan $n^2 = 13$ adódik, amely egyenletnek nincs egész megoldása.

1 pont

Ezzel megkaptuk, hogy n lehetséges értékei -5 , -2 , 2 és 5 .

A kapott számok teljesítik a feladat feltételeit, amelyről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. (A második megoldást azért közöljük, mert elképzelhető, hogy a versenyzők több új változó bevezetésével és használatával jutnak hasonló eredményre, mint az első megoldás során.) Az első megoldáshoz hasonlóan igazoljuk, hogy $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-3; 3\}$ kell, hogy teljesüljön.

1 pont

Legyen $y = n^2$ és $t = \sqrt{n^4 - 17n^2 + 56} = \sqrt{y^2 - 17y + 56}$, ahol t és y természetes számok. Így $y^2 - 17y + 56 = t^2$, ahonnan $y^2 - 17y + 56 - t^2 = 0$.

1 pont

Az y -ban másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 289 - 224 + 4t^2 = 4t^2 + 65$ teljes négyzet kell, hogy legyen, vagyis $4t^2 + 65 = u^2$, ahol u egész szám, amely egyenletet átrendezve $(u - 2t)(u + 2t) = 65$. Feltehető továbbá az is, hogy u nemnegatív egész szám.

1 pont

Figyelembe véve, hogy $u - 2t \leq u + 2t$ egész számok, továbbá $u + 2t$ nemnegatív is, valamint a két tényező osztópárja a 65-nek az alábbi két esetet különböztetjük meg:

1 pont

I. $u - 2t = 1$ és $u + 2t = 65$. Ekkor $u = 33$ és $t = 16$, ahonnan $y^2 - 17y - 200 = 0$, amely egyenletnek $y_1 = 25$ és $y_2 = -8$ a megoldásai (y_2 nem jó a feltételek miatt). Az $y = n^2 = 25$ egyenlet megoldásai: $n = -5$ és $n = 5$, és ezek teljesítik is a feltételeket.

1 pont

II. $u - 2t = 5$ és $u + 2t = 13$. Ekkor $u = 9$ és $t = 2$, ahonnan $y^2 - 17y + 52 = 0$, amely egyenletnek $y_1 = 4$ és $y_2 = 13$ a megoldásai. Az $y = n^2 = 4$ egyenlet megoldásai: $n = -2$ és $n = 2$, és ezek teljesítik is a feltételeket, míg az $y = n^2 = 13$ egyenlet nem ad egész megoldásokat.

1 pont

Ezzel megkaptuk, hogy n lehetséges értékei $-5, -2, 2$ és 5 .

A kapott számok teljesítik a feladat feltételeit, amelyről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. megoldás. Az első két megoldáshoz hasonlóan igazoljuk, hogy $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-3; 3\}$ kell, hogy teljesüljön.

1 pont

A továbbiakban alulról és felülről is becsléseket teszünk az $n^4 - 17n^2 + 56$ négyzetszámra.

Egyfelől $n^4 - 17n^2 + 56 = n^4 - 18n^2 + 81 + n^2 - 25 = (n^2 - 9)^2 + n^2 - 25$,

másrészt $n^4 - 17n^2 + 56 = n^4 - 16n^2 + 64 - n^2 - 8 = (n^2 - 8)^2 - n^2 - 8$.

1 pont

Mindezek alapján, ha $5 < |n|$, akkor

$$(n^2 - 9)^2 < (n^2 - 9)^2 + n^2 - 25 = n^4 - 17n^2 + 56 = (n^2 - 8)^2 - n^2 - 8 < (n^2 - 8)^2.$$

2 pont

Mivel $n^2 - 9$ és $n^2 - 8$ szomszédos egész számok, a négyzeteik közé eső $n^4 - 17n^2 + 56$ nem lehet négyzetszám, így $5 < |n|$ esetén nincs megoldás.

1 pont

Elegendő tehát megvizsgálni azokat az eseteket, amikor $|n| \leq 5$, és $|n| \neq 3$.

– Ha $|n| = 0$, akkor $n^4 - 17n^2 + 56 = 56$, ami nem négyzetszám, azaz ez nem megoldás.

– Ha $|n| = 1$, akkor $n^4 - 17n^2 + 56 = 40$, ami nem négyzetszám, azaz ez nem megoldás.

– Ha $|n| = 2$, akkor $n^4 - 17n^2 + 56 = 4$, ami négyzetszám, azaz $n = 2$ és $n = -2$ megoldás.

– Ha $|n| = 4$, akkor $n^4 - 17n^2 + 56 = 40$, ami nem négyzetszám, azaz ez nem megoldás.

– Ha $|n| = 5$, akkor $n^4 - 17n^2 + 56 = 256$, ami négyzetszám, azaz $n = 5$ és $n = -5$ megoldás.

1 pont

Tehát n lehetséges értékei $-5, -2, 2$ és 5 .

A kapott számok teljesítik a feladat feltételeit, amelyről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Négy testvérpár mindegyikében az egyik gyerek leány, a másik pedig fiú. Három csoportba osztjuk őket úgy, hogy minden csoportban legalább ketten legyenek, de testvérek ne kerüljenek azonos csoportba. Hányféleképpen történhet ez meg?

7 pont

Megoldás. A feladat feltételei szerint az egyes csoportokba 4, 2 és 2, vagy pedig 3, 3 és 2 gyerek kerülhet.

1 pont

– Az első $(4; 2; 2)$ esetben a négyfős csoport tagjait 2^4 -féleképpen választhatjuk ki (mindegyik családból pontosan az egyik testvért kell kiválasztani), 1 pont

a további négy gyerek (mondjuk A , B , C és D) között már nincsenek testvérek, így ők háromféleképpen alkothatnak két kétfős csoportot. (A három lehetőséget felsorolva: $(A; B)$ és $(C; D)$, vagy $(A; C)$ és $(B; D)$, vagy pedig $(A; D)$ és $(B; C)$ van egy-egy csoportban.) Az első esetben tehát $3 \cdot 2^4 = 48$ lehetőség van. 1 pont

– A második $(3; 3; 2)$ esetben az első háromfős csoportot $4 \cdot 2^3$ -féleképpen állíthatjuk össze, hiszen a négy testvérpárból négyféleképpen jelölhetünk ki hármat, majd a három kiválasztott testvérpár mindegyikénél 2-2 lehetőségünk van a választásra. 1* pont

A két fennmaradó csoportra öt gyerek marad, közülük ketten testvérek. A testvérpár egyik, de csak az egyik tagja a kétfős csoportba kerül, így a kéttagú csoport $2 \cdot 3$ -féleképpen választható ki. 1* pont

Végül a kimaradók – azaz a második háromfős csoport tagjai – már biztosan nem testvérek. A

második esetben tehát $\frac{4 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 96$ lehetőség van, ahol 2-vel azért kell osztanunk, mivel a két háromfős csoport sorrendje nem számít. 1* pont

Összesen tehát $48 + 96 = 144$ -féle csoportosítás lehetséges. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A *-gal megjelölt 3 pont a következő módon is megkapható: A $(3; 3; 2)$ esetben

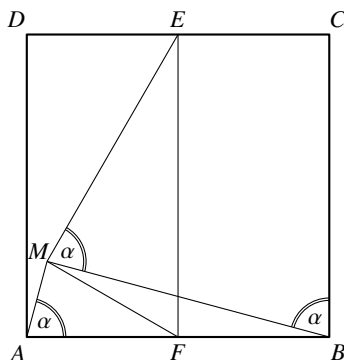
válasszuk ki először a kétfős csoportot. Erre $\frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ lehetőségünk van, hiszen az első gyerek bármelyik lehet a 8 közül, a második viszont nem lehet a testvére, továbbá (2-vel osztanunk kell, mivel) a gyerekek sorrendje a kétfős csoportban lényegtelen. 1 pont

Jelölje a kétfős csoportba kiválasztott két gyereket E és X , továbbá E testvérét F , míg X testvérét Y . Ekkor F és Y nem kerülhetnek közös háromfős csoportba, mivel ekkor a másik háromfős csoportba testvérpár kerülne. Továbbá mind F , mind Y háromfős csoportjába a fennmaradó két testvérpárból egy-egy gyerek kell hogy kerüljön. 1 pont

Ez alapján az a háromfős csoport, ahová F került $2 \cdot 2 = 4$ -féleképpen választható ki (hiszen a fennmaradó két testvérpárból egy-egy gyereket kell választanunk), így Y háromfős csoportja már adott (és nem tartalmazhat testvéreket). Így a $(3; 3; 2)$ -es esetben $24 \cdot 4 = 96$ -féleképpen választhatóak ki a csoportok. 1 pont

4. Legyen E az $ABCD$ négyzet CD oldalának a felezőpontja. A négyzet egy belső M pontjára igaz, hogy $\angle MAB = \angle MBC = \angle BME = \alpha$. Határozzuk meg az α értékét. 7 pont

Megoldás. $\angle MBA = 90^\circ - \alpha$, így $\angle MAB + \angle MBA = 90^\circ$, tehát az ABM háromszög derékszögű, amelynek derékszögű csúcsa M . 1 pont



A Thalesz-tétel megfordítása miatt $AF = BF = MF$, ahol F az AB szakasz felezőpontját jelöli.

1 pont

Így az MFB háromszög egyenlő szárú, azaz $FMB \sphericalangle = MBF \sphericalangle = 90^\circ - \alpha$.

1 pont

Ekkor pedig $FME \sphericalangle = FMB \sphericalangle + BME \sphericalangle = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$.

1 pont

Mivel $MF = AF = \frac{AB}{2} = \frac{EF}{2}$, és az EMF háromszög derékszögű (M a derékszögű csúcs), így ez a háromszög félszabályos.

1 pont

Ezért $MFE \sphericalangle = 60^\circ$, tehát $MFA \sphericalangle = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

1 pont

Mivel (a korábban bizonyított $AF = MF$ miatt) az MAF háromszög egyenlő szárú, és a csúcsszőge 30° -os, így az alapon fekvő szögek 75° -osak, és ezek egyike éppen a feladatban kért α , azaz $\alpha = 75^\circ$.

1 pont

Összesen:

7 pont

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy 3×3 -as táblázatba beírjuk az 1, 2, 3, ..., 9 számokat. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha azt szeretnénk, hogy minden sorban és minden oszlopban az ott lévő három szám

a) összege páratlan legyen;

b) szorzata páros legyen?

7 pont

2. Az $ABCD$ paralelogrammában A -nál hegyesszög van. A C -ből AB egyenesre állított merőleges talppontját jelölje E , a C -ből AD egyenesre állított merőleges talppontját pedig F . Bizonyítsuk be, hogy $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

7 pont

3. Mely pozitív valós $(x; y; z)$ számhármásokra teljesül a következő egyenlőtlenség-rendszer?

$$\frac{x}{4} \leq \frac{y^2}{4 + y^2};$$

$$\frac{y}{4} \leq \frac{z^2}{4 + z^2};$$

$$\frac{z}{4} \leq \frac{x^2}{4 + x^2}.$$

7 pont

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy 3×3 -as táblázatba beírjuk az 1, 2, 3, ..., 9 számokat. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha azt szeretnénk, hogy minden sorban és minden oszlopban az ott lévő három szám

a) összege páratlan legyen;

b) szorzata páros legyen?

7 pont

Megoldás. *a)* Minden sorban és oszlopban nulla vagy kettő páros számnak kell lennie. Kell, hogy legyen legalább egy olyan sor, amelyben pontosan két páros szám van, és e sorban lévő mindkét páros szám oszlopában kell legyen még egy-egy páros szám (ez azt jelenti, hogy a négy páros szám két oszlopban van). Ez utóbbi két páros szám pedig ugyanabban a sorban kell, hogy legyen, mert ha külön sorban lennének, akkor e két külön sorban csak egy-egy páros szám lenne (tehát a négy páros szám két sorban van).

Ezért pontosan egy olyan sor és egy olyan oszlop van, amelyben nincs páros szám. Ezt a sor-oszlop párt kilencféleképpen lehet kiválasztani.

2 pont

Ha kiválasztottuk ezt a sor-oszlop párt, akkor ezekbe helyezzük el az öt páratlan számot. Ezt $5!$ -féleképpen tehetjük meg. A táblázat üresen maradt mezőibe a négy páros számot pedig $4!$ -féleképpen tehetjük le. Így a lehetőségek száma az *a)* esetben $9 \cdot 4! \cdot 5! (= 25\,920)$.

1 pont

b) Dolgozzunk komplementer elvvel. Egy kitöltés rossz, ha valamelyik oszlopban vagy valamelyik sorban csak páratlan számok vannak. Ezt a sort vagy oszlopot hatféleképpen választhatjuk ki, emellé a maradék hat mezőből $\binom{6}{2} = 15$ -féleképpen választhatunk ki kettőt, ahová szintén páratlan számokat írunk.

1 pont

Ez eddig $6 \cdot 15 = 90$ -féle lehetőség, de kétszer számoltuk azokat az eseteket, amikor a táblázatban van olyan sor és oszlop is, amelyikben csak páratlan számok állnak. Ahogy ezt az *a)* pontban már láttuk, egy ilyen sor-oszlop párt kilencféleképpen lehet kiválasztani, így ezeket kivonva, a kiválasztások száma $90 - 9 = 81$.

1 pont

Ha már kiválasztottuk azt az öt mezőt, ahová páratlan számot írunk, akkor a számokat $4! \cdot 5!$ -féleképpen írhatjuk be. Így a rossz kitöltések száma $81 \cdot 4! \cdot 5!$.

1 pont

Mivel a táblázat összes lehetséges kitöltéseinek száma $9!$, így a helyes kitöltések száma a *b)* esetben $9! - 81 \cdot 4! \cdot 5! (= 129\,600)$.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzések. 1. A *b)* rész indoklása (direkt úton) a következő módon is történhet.

Minden sorban és minden oszlopban kell lennie legalább egy páros számnak. Mivel összesen 4 darab páros szám van 3 sorban, ezért az egyik sorban pontosan 2 páros lesz, a másik kettőben pedig 1-1. Az 3-féleképp választható, hogy melyik sorban legyen a 2 páros szám, az pedig, hogy ezen a soron belül melyik 2 mezőben legyenek a párosak, ismét 3-féle lehet. Ez eddig 9 lehetőség.

1 pont

A másik két sorba kerülő 1-1 páros szám helyét az oszlopok figyelembevételével tudjuk meghatározni. A 2 párost tartalmazó sor garantálja a két megfelelő oszlopban a páros szám jelenlétét, már csak a harmadik oszlop kérdéses, tekintsük ezt az oszlopot. Két eset lehetséges. Vagy a másik két sorban lévő 1-1 páros mindegyike ebben az oszlopban van, ez 1 lehetőség. Vagy ezekből a párosakból csak az egyik van ebben az oszlopban, a másik pedig a másik két oszlop egyikében, ez $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség.

2 pont

Tehát $9 \cdot (1 + 2 \cdot 2) = 45$ lehetőség adódik arra, hogy mely mezőkben lehet páros és melyekben páratlan szám, egy ilyen rögzített állásnál pedig a konkrét számokat $4! \cdot 5!$ -féleképpen írhatjuk be. Az összes lehetséges kitöltések száma tehát $45 \cdot 4! \cdot 5! (= 129\,600)$.

1 pont

2. Ha a versenyző az egymásba (a nemidentikus) egybevágósági transzformációkkal (forgatásokkal, tükrözésekkel) átvihető kitöltéseket azonosnak tekinti, akkor – mivel nyolc olyan egybevágósági transzformáció van, ami egy négyzetet önmagába visz át, továbbá mivel minden a táblázatban szereplő szám pontosan egyszer szerepel ott – a fent leírt esetszámok helyett

2. megoldás. Használjuk a fenti ábrát és jelöléseit. Ezekkel a jelölésekkel a bizonyítandó állítás: $a(a+k) + b(b+s) = AC^2$.

1 pont

Pitagorasz tételét felírva a DFC és a BEC derékszögű háromszögekben $l^2 + s^2 = a^2$ és $k^2 + m^2 = b^2$,

1 pont

míg Pitagorasz tételét az AFC és AEC derékszögű háromszögekre alkalmazva $(b+s)^2 + l^2 = AC^2$ és $(a+k)^2 + m^2 = AC^2$ adódik.

1 pont

Utóbbi két összefüggés mindegyikében AC^2 áll a jobb oldalon, azaz $(b+s)^2 + l^2 = (a+k)^2 + m^2$, innen $b^2 + s^2 + l^2 + 2bs = a^2 + k^2 + m^2 + 2ak$,

1 pont

majd ez utóbbi összefüggésbe behelyettesítve az első két Pitagorasz tételből származó összefüggéseket $a^2 + b^2 + 2bs = a^2 + k^2 + m^2 + 2ak$, és így $bs = ak$ adódik.

1 pont

Innen

$$AC^2 = (a+k)^2 + m^2 = a(a+k) + ak + k^2 + m^2 = a(a+k) + bs + b^2 = a(a+k) + b(b+s),$$

1 pont

és mivel $AB = a$, $AE = a+k$, $AD = b$, $AF = b+s$, éppen a bizonyítandó $AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF$ állítást kapjuk.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Mely pozitív valós $(x; y; z)$ számhármásokra teljesül a következő egyenlőtlenség-rendszer?

$$\frac{x}{4} \leq \frac{y^2}{4+y^2};$$

$$\frac{y}{4} \leq \frac{z^2}{4+z^2};$$

$$\frac{z}{4} \leq \frac{x^2}{4+x^2}.$$

7 pont

1. megoldás. Adjuk össze a három egyenlőtlenséget.

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} \leq \frac{x^2}{4+x^2} + \frac{y^2}{4+y^2} + \frac{z^2}{4+z^2}.$$

1 pont

Az így kapott egyenlőtlenséget nullára rendezve az ugyanazon ismeretlent tartalmazó tagokat összevonjuk.

$$\frac{x}{4} - \frac{x^2}{4+x^2} + \frac{y}{4} - \frac{y^2}{4+y^2} + \frac{z}{4} - \frac{z^2}{4+z^2} \leq 0,$$

1 pont

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{4(4+x^2)} + \frac{y^3 - 4y^2 + 4y}{4(4+y^2)} + \frac{z^3 - 4z^2 + 4z}{4(4+z^2)} \leq 0,$$

1 pont

$$\frac{x(x-2)^2}{4(4+x^2)} + \frac{y(y-2)^2}{4(4+y^2)} + \frac{z(z-2)^2}{4(4+z^2)} \leq 0.$$

2 pont

Mivel x , y és z pozitív valósak, és a nemnegatív számok összege nemnegatív, ezért csak $x = y = z = 2$ esetén teljesül az egyenlőtlenség,

1 pont

és ekkor teljesül is.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. Figyelembe véve, hogy az x, y és z pozitív valós számok, képezzük az egyenlőtlenségek reciprokainak negyedét, majd adjuk össze azokat.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4+y^2}{4y^2} + \frac{4+z^2}{4z^2} + \frac{4+x^2}{4x^2}. \quad 2 \text{ pont}$$

Az egyenlőtlenséget nullára rendezve, és az ugyanazon ismeretlent tartalmazó tagokkal teljes négyzetet képezve a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0. \quad 3 \text{ pont}$$

Mivel x, y és z pozitív valósak és a nemnegatív számok összege nemnegatív, ezért csak $x = y = z = 2$ esetén teljesül az egyenlőtlenség, 1 pont

és ekkor teljesül is. 1 pont

Összesen:

7 pont

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Melyek azok a p, q, r pozitív prímszámok, amelyek teljesítik az alábbi egyenlőséget?

$$p^3 + p^2 + p + 1 = qr \quad 7 \text{ pont}$$

2. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvényre teljesül, hogy $f(20 - x) = f(24 + x)$ az x minden valós értéke mellett. Tudjuk, hogy az f függvénynek két különböző darab zérushelye van. Adjunk példát ilyen másodfokú függvényre, és határozzuk meg, hogy mennyi lehet a zérushelyek összege. 7 pont

3. Legyenek x és y pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy $x + y = 1$ esetén

$$\frac{(45x-1)^2}{x} + \frac{(45y-1)^2}{y} \geq 1849.$$

Milyen $(x; y)$ számpárok esetén teljesül az egyenlőség? 7 pont

4. Egy városi ifjúsági rendezvényen minden résztvevő pontosan 3 fiút és pontosan 7 lányt ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma osztható 20-szal. (Feltételezzük, hogy két személy között az ismeretség kölcsönös, és senki nem számolja saját magát az ismerősei közé.) 7 pont

5. Az $ABCD$ rombuszban $\angle ABC = 100^\circ$. A CD oldalon kijelölünk egy olyan P pontot, melyre $\angle PBC = 20^\circ$. A P ponton áthaladó, DA oldallal párhuzamos egyenes a Q pontban metszi az AC átlót. Bizonyítsuk be, hogy $BP = AQ$. 7 pont

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok a p, q, r pozitív prímszámok, amelyek teljesítik az alábbi egyenlőséget?

$$p^3 + p^2 + p + 1 = qr \quad 7 \text{ pont}$$

Megoldás. A $p^3 + p^2 + p + 1 = qr$ egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva $(p^2 + 1)(p + 1) = qr$. 1 pont

Ha $p > 2$, akkor p páratlan prímszám, így mind $p^2 + 1$, mind pedig $p + 1$ páros szám, ezáltal a szorzatuk 4-nek a többszöröse, azaz $4 \mid qr$. 2 pont

Figyelembe véve, hogy q és r prímszámok, ezért ez utóbbi feltétel csak $q = r = 2$ esetén teljesül. 1 pont

Vizsgálatunk ekkor $qr = 4$, és $p > 2$ esetén $(p^2 + 1)(p + 1) > 4$. Ellentmondásra jutottunk, így ez az eset nem állhat fenn. 1 pont

$p = 2$ esetén $qr = 15$, és mivel 15 prímfelbontása $15 = 3 \cdot 5$ az egyenlőség megoldásai: $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$ és $p = 2$, $q = 5$, $r = 3$. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvényre teljesül, hogy $f(20 - x) = f(24 + x)$ az x minden valós értéke mellett. Tudjuk, hogy az f függvénynek két különböző darab zérushelye van. Adjunk példát ilyen másodfokú függvényre, és határozzuk meg, hogy mennyi lehet a zérushelyek összege. 7 pont

- 1. megoldás.** Behelyettesítve a függvény képletét a feltételbe azt kapjuk, hogy

$$a(20 - x)^2 + b(20 - x) + c = a(24 + x)^2 + b(24 + x) + c. \quad 1 \text{ pont}$$

Az egyenlőséget rendezve

$$\begin{aligned} a(400 - 40x + x^2) + b(20 - x) + c &= a(576 + 48x + x^2) + b(24 + x) + c \\ ax^2 - (40a + b)x + (400a + 20b + c) &= ax^2 + (48a + b)x + (576a + 24b + c) \\ -(176a + 4b) &= (88a + 2b)x. \end{aligned} \quad 2 \text{ pont}$$

Ez csak akkor teljesülhet x minden valós értéke mellett, ha $88a + 2b = 0$ és $176a + 4b = 0$. Mindkét feltételből $b = -44a$ adódik. 1 pont

A gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján a gyökök összege $-\frac{b}{a} = 44$. 1 pont

A feladat feltételei kielégíthetők például az $a = 1$, $b = -44$ és $c = 0$ választással. 2 pont

Összesen: 7 pont

- 2. megoldás.** A $t = x + 2$ (ekkor $x = t - 2$) helyettesítéssel a feladat feltétele így alakul: $f(22 - t) = f(22 + t)$. 3 pont

Ez azt jelenti, hogy az f függvény grafikonja szimmetrikus a függőleges $x = 22$ egyenesre. Ez pedig azt jelenti, hogy a zérushelyek is szimmetrikusan helyezkednek el az $x = 22$ értékre, azaz az összegük 44. 2 pont

A feladat feltételeit kielégíti például az $f(x) = (x - 22)^2 - 1$ függvény. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás. A függvénynek legalább az egyik zérushelye nem egyenlő 22-vel, jelöljük ezt x_1 -gyel.

1 pont

Ekkor ha $x_1 = 20 - x$, akkor $x = 20 - x_1$, és ekkor a feladat feltétele szerint $0 = f(x_1) = f(20 - x) = f(24 + x) = f(44 - x_1)$, azaz $44 - x_1$ is zérushelye a függvénynek.

1 pont

Mivel $x_1 \neq 22$, így x_1 és $44 - x_1$ különböznek egymástól, tehát mindkét zérushelyet megtaláltuk.

2 pont

Így tehát a zérushelyek összege csak 44 lehet.

1 pont

Egy lehetséges példa: $f(x) = (x - 20)(x - 24)$, mert ekkor $f(20 - x) = -x(-4 - x)$ és $f(x + 24) = (x + 4)x$, és ezek nyilván egyenlők x minden valós értéke mellett.

2 pont

Összesen:

7 pont

3. Legyenek x és y pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy $x + y = 1$ esetén

$$\frac{(45x - 1)^2}{x} + \frac{(45y - 1)^2}{y} \geq 1849.$$

Milyen $(x; y)$ számpárok esetén teljesül az egyenlőség?

7 pont

Megoldás. A bal oldalon elvégezve a négyzetre emeléseket és $x + y$ kiemelését,

$$\frac{(45x - 1)^2}{x} + \frac{(45y - 1)^2}{y} = 2025(x + y) - 180 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

2 pont

$2025(x + y) = 2025$, valamint a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség miatt teljesül $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x + y}{2} = \frac{1}{2}$, amiből (reciprokot képezve, majd 2-vel szorozva) adódik, hogy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4.$$

3* pont

Így a kifejezés értéke valóban legalább $2025 - 180 + 4 = 1849$.

1 pont

Az egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha a számtani és harmonikus középben szereplő számok megegyeznek, tehát ha $x = y = \frac{1}{2}$.

1* pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. A *-gal jelölt három pont és utolsó egy pont például a következő két módon is igazolható.

– A számtani-mértani közép közötti összefüggés használatával:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4, \text{ és az egyenlőség itt pontosan akkor teljesül, ha a}$$

számtani és mértani középben szereplő számok megegyeznek, azaz ha $x = y = \frac{1}{2}$.

– Teljes négyzetté alakítással:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{x+1-x}{x(1-x)} = \frac{1}{-x^2+x} = -\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}, \text{ és a } 0 < x < 1 \text{ feltétel mellett}$$

ez utóbbi kifejezés minimumának értéke 4, azaz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$. A minimumot pedig $x = \frac{1}{2}$ esetén

kapjuk, és ekkor persze $y = \frac{1}{2}$ is teljesül.

4. Egy városi ifjúsági rendezvényen minden résztvevő pontosan 3 fiút és pontosan 7 lányt ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma osztható 20-szal. (Feltételezzük, hogy két személy között az ismeretség kölcsönös, és senki nem számolja saját magát az ismerősei közé.)

7 pont

Megoldás. Jelöljük a rendezvényen résztvevő fiúk számát f -fel, a lányokét l -lel, így a rendezvényen a résztvevők száma $f + l$.

Ekkor a fiúk és a lányok közötti ismeretségek száma egyrészt $7f$, mert minden fiú 7 lányt ismer, másrészt $3l$, hiszen minden lány 3 fiút ismer.

1 pont

Így $7f = 3l$, ami – figyelembe véve, hogy a 7 és a 3 relatív prímek – azt jelenti, hogy $f = 3k$ és $l = 7k$, valamilyen k pozitív egész szám esetén.

2 pont

A fiúk közötti ismeretségek száma $\frac{1}{2} \cdot 3f$ (mivel az f fiú mindegyike 3 fiút ismer, és a $3f$ szorzatban minden ismeretséget kétszer számoltunk).

1 pont

Az eddigi megállapításainkat figyelembe véve a fiúk közötti ismeretségek száma $\frac{9}{2} \cdot k$ egész szám, ami azt jelenti, hogy k páros szám, azaz $k = 2n$ (n pozitív egész).

2 pont

Így a rendezvényen résztvevők száma: $f + l = 3k + 7k = 10k = 20n$, tehát a feladat állítása valóban teljesül.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Könnyen találhatunk megfelelő 20-tagú társaságot 6 fiúval és 14 lánnyal. Jelölje a fiúkat: $f_1, f_2, \dots, f_6$, a lányokat $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{14}$. A 20 résztvevőt soroljuk a 10-10 fős A és B csoportba úgy, hogy A -ba tartozzon f_1, f_2, f_3 a fiúk közül, míg $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_7$ a lányok közül; a B csoportba pedig a többi résztvevő.

Az A , illetve a B csoport minden egyes tagja ismerje a saját csoportja többi tagját. Továbbá A és B csoportbeli tagok között pontosan a következő párok, mint ismeretségek legyenek: (f_1, f_4) , (f_2, f_5) , (f_3, f_6) , valamint (ℓ_1, ℓ_8) , (ℓ_2, ℓ_9) , $\dots$, (ℓ_7, ℓ_{14}) . Az így definiált ismeretségekkel a 20 fős társaság teljesíti a feladat feltételeit, és $20 \cdot n$ fős társaságra pedig nyilván jó példa a fenti 20 résztvevős társaság n darab „másolata”.

Ha a versenyző egy megfelelő konstrukciót ad 20-tagú társaságra, 3 pontot kapjon a konstrukciójára, azzal a feltétellel, hogy a feladatra kapott összpontszám nem lehet több 7 pontnál.

5. Az $ABCD$ rombuszban $\angle ABC = 100^\circ$. A CD oldalon kijelölünk egy olyan P pontot, melyre $\angle PBC = 20^\circ$. A P ponton áthaladó, DA oldallal párhuzamos egyenes a Q pontban metszi az AC átlót. Bizonyítsuk be, hogy $BP = AQ$.

7 pont

Megoldás. Tükrözzük a P pontot a BD átlóra, és a képpontot jelöljük R -rel.

Ekkor, mivel a rombusz átlói felezik a rombusz szögeit, ezért a DC oldal BD -re vonatkozó tükröképe a DA oldal lesz, és R illeszkedik a DA oldalra.

$PR \perp BD$ és $CA \perp BD$ miatt $PR \parallel AC$.

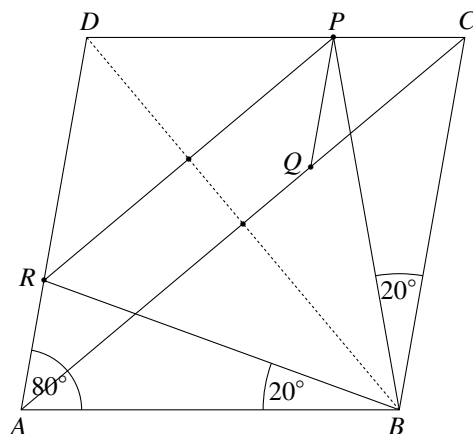
2 pont

Így az $AQPR$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, a négyszög paralelogramma és $AQ = PR$.

1 pont

Másrészt a tengelyes tükrözés távolság- és szögtartó tulajdonsága miatt $BP = BR$ és $\angle RBA = \angle PBC = 20^\circ$.

1 pont



Ezt felhasználva $\angle RBP = \angle ABC - \angle ABR - \angle PBC = 100^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 60^\circ$.

1 pont

Tehát a PRB háromszög 60° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög, azaz szabályos háromszög. Így $BR = BP = PR = AQ$. Ezzel az állítást beláttuk.

2 pont

Összesen:

7 pont

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$\frac{(2x+3)^3 + (4x+9)^3}{(3x+6)^3} = 8$$

7 pont

2. Mennyi az $ab + bc + 2ca$ kifejezés lehetséges legnagyobb értéke, és mely a, b, c esetén veszi fel ezt az értéket, ha a, b, c olyan nemnegatív valós számok, amelyek összege 1?

7 pont

3. Tekintsük a $H = \{0; 1; 2; 3; \dots; 2025\}$ halmaz ötelemű részhalmazait. Ezek között abból van-e több, amelyekben az öt szám összege páratlan, vagy abból, amelyekben az öt szám összege páros?

7 pont

4. Az ABC hegyesszögű háromszögben $\angle BCA = 45^\circ$. A háromszög BC és CA oldalaira kifelé megrajzoljuk a $BCDE$ és $CAFG$ négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy az FE szakasz K felezőpontja egybeesik az ABC háromszög köré írt körének középpontjával.

7 pont

Haladók II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$\frac{(2x+3)^3 + (4x+9)^3}{(3x+6)^3} = 8 \quad 7 \text{ pont}$$

1. megoldás. A tört nevezője nem lehet 0, azaz $x \neq -2$.

Átalakítva a bal oldalt két tört összegére $\left(\frac{2x+3}{3x+6}\right)^3 + \left(\frac{4x+9}{3x+6}\right)^3 = 8$.

Mivel $(2x+3) + (4x+9) = 6x+12$, ezért $\frac{2x+3}{3x+6} + \frac{4x+9}{3x+6} = 2$. 1 pont

Ez alapján legyen $a = \frac{2x+3}{3x+6}$, és így $\frac{4x+9}{3x+6} = 2-a$ lesz. 1 pont

Behelyettesítés után az $a^3 + (2-a)^3 = 8$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Innen a zárójeleket felbontva, rendezés és összevonás után $6a^2 - 12a = 0$, majd $6a(a-2) = 0$ adódik. 1 pont

Az egyenletet a -ban megoldva, majd x -re visszahelyettesítve a megoldásokra

$a_1 = 0$, és innen $x_1 = -\frac{3}{2}$, illetve 1 pont

$a_2 = 2$, és innen $x_2 = -\frac{9}{4}$ adódik. 1 pont

A kapott $x_1 = -\frac{3}{2}$ és $x_2 = -\frac{9}{4}$ értékek valóban megoldásai az eredeti egyenletnek, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. A tört nevezője nem lehet 0, azaz $x \neq -2$. Ha valaki nem veszi észre az első megoldás „trükkjét”, az dolgozhat „nyers erővel” is, az alábbi módon.

Megszorozva az egyenlet bal oldalának a nevezőjével és a zárójeleket felbontva:

$$\begin{aligned} & (8x^3 + 36x^2 + 54x + 27) + (64x^3 + 432x^2 + 972x + 729) = \\ & = 8 \cdot (27x^3 + 162x^2 + 324x + 216) = 216x^3 + 1296x^2 + 2592x + 1728, \end{aligned} \quad 1 \text{ pont}$$

0-ra rendezve $144x^3 + 828x^2 + 1566x + 972 = 0$, végül 18-cal osztva $8x^3 + 46x^2 + 87x + 54 = 0$ adódik. 1 pont

Vegyük észre, hogy ennek az egyenletnek $x = -2$ megoldása (természetesen a kikötések miatt az eredeti egyenletnél $x = -2$ nem megoldás).

Emiatt a bal oldalból az $(x+2)$ tényezőt kiemelve $(x+2)(8x^2 + 30x + 27) = 0$ adódik, 1 pont

ez utóbbi alak lineáris tényezők szorzatává alakítható az $(x+2)(2x+3)(4x+9) = 0$ módon. 1 pont

Ennek (a -2 -től különböző) megoldásai $x_1 = -\frac{3}{2}$, illetve 1 pont

$x_2 = -\frac{9}{4}$. 1 pont

A kapott $x_1 = -\frac{3}{2}$ és $x_2 = -\frac{9}{4}$ értékek valóban megoldásai az eredeti egyenletnek, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Mennyi az $ab + bc + 2ca$ kifejezés lehetséges legnagyobb értéke, és mely a, b, c esetén veszi fel ezt az értéket, ha a, b, c olyan nemnegatív valós számok, amelyek összege 1?

7 pont

1. megoldás. Mivel $a + b + c = 1$, ezért $b = 1 - a - c$.

1 pont

Ezt figyelembe véve $ab + bc + 2ca = a(1 - a - c) + c(1 - a - c) + 2ca = a - a^2 + c - c^2 =$

2 pont

$= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$. Azaz a kifejezés lehetséges legnagyobb értéke $\frac{1}{2}$.

2 pont

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ és $c = \frac{1}{2}$.

2 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. Mivel $a + b + c = 1$, ezért $a + c = 1 - b$.

1 pont

Ezt figyelembe véve és alkalmazva a mértani és számtani közép közötti összefüggést:

$$ab + bc + 2ca = b(a + c) + 2ca = b(1 - b) + 2ca \leq b(1 - b) + 2 \cdot \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 =$$

2 pont

$$= b - b^2 + 2 \cdot \frac{(1 - b)^2}{4} = \frac{2b - 2b^2 + 1 - 2b + b^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{b^2}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Azaz a kifejezés lehetséges legnagyobb értéke $\frac{1}{2}$.

2 pont

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $b = 0$, továbbá (mivel a mértani és számtani közép közötti becslésben is egyenlőségnek kell állnia) $a = c$,

1 pont

azaz $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ és $c = \frac{1}{2}$.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Tekintsük a $H = \{0; 1; 2; 3; \dots; 2025\}$ halmaz ötelemű részhalmazait. Ezek között abból van-e több, amelyekben az öt szám összege páratlan, vagy abból, amelyekben az öt szám összege páros?

7 pont

Megoldás. Tekintsük H egy tetszőleges ötelemű $A = \{a; b; c; d; e\}$ részhalmazát, majd vegyük a $B = \{2025 - e; 2025 - d; 2025 - c; 2025 - b; 2025 - a\}$ halmazt.

2 pont

Az A halmazban lévő öt elem összegének a paritása és a B halmazban lévő öt elem összegének a paritása különböző, hiszen ha

$$a + b + c + d + e = x \quad \text{és} \quad 2025 - a + 2025 - b + 2025 - c + 2025 - d + 2025 - e = y,$$

akkor $x + y = 5 \cdot 2025$ páratlan. Azaz a halmazok közül az egyikben az elemek összege páros, a másikban pedig páratlan (így a halmazok nyilván különböznek is egymástól).

3 pont

Tehát H minden részhalmazához, amelyben az öt elem összege páros, kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhetünk egy olyan, tőle különböző részhalmazt, amelyben az elemek összege páratlan. Így a kétféle részhalmazból ugyanannyi van.

2 pont

Összesen:

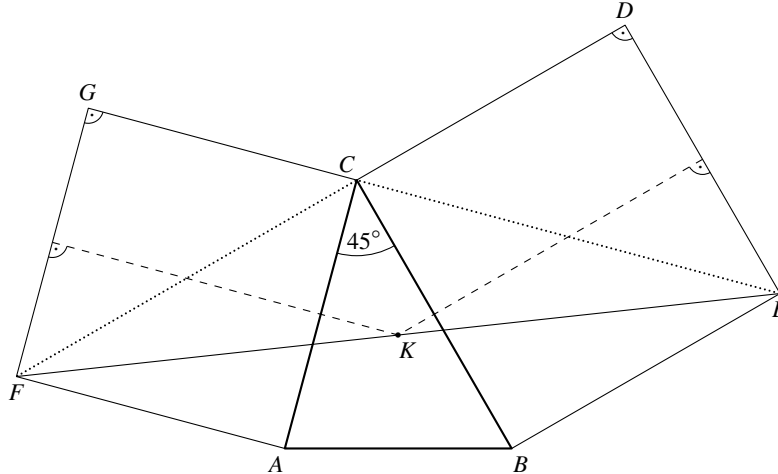
7 pont

4. Az ABC hegyesszögű háromszögben $\angle BCA = 45^\circ$. A háromszög BC és CA oldalaira kifelé megrajzoljuk a $BCDE$ és $CAFG$ négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy az FE szakasz K felezőpontja egybeesik az ABC háromszög köré írt körének középpontjával.

7 pont

Megoldás. Az $\angle ACG + \angle BCA + \angle ECB = 90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ és $\angle ACF + \angle BCA + \angle DCB = 45^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ alapján a G, C, E pontok, illetve az F, C, D pontok egy-egy egyenesre esnek.

2 pont



Valamint $\angle EGF = \angle EDF = 90^\circ$ miatt – a Thalész-tétel megfordítása alapján – az FEG és FED derékszögű háromszögek köré írt körének középpontja az FE szakasz K felezőpontja.

2 pont

Így K illeszkedik az FG és ED szakaszok felezőmerőleges egyenesére.

1 pont

Másrészt az FG és ED szakaszok felezőmerőlegesei egybeesnek a CA és BC oldalak felezőmerőlegeseivel, azaz az ABC háromszög köré írt körének középpontjában metszik egymást. Tehát az FE szakasz K felezőpontja megegyezik az ABC háromszög köré írt körének középpontjával, és ez az, amit bizonyítani akartunk.

2 pont

Összesen:

7 pont

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + cx + d = 0$$

$$x^2 + ex + f = 0$$

($a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$) másodfokú egyenleteknek egymástól páronként különböző gyökei hat egymást követő egész szám. Határozzuk meg az $m = a^2 + c^2 + e^2 - 2(b + d + f)$ kifejezés minimális értékét.

7 pont

2. Az $1, 2, 3, \dots, 26$ pozitív egészek egy tetszőleges sorrendjében az első tagot a_1 -gyel, a másodikat a_2 -vel, $\dots$, az utolsót a_{26} -tal jelöljük. Hány olyan sorrend van, ahol

$$|a_1 - a_2| \leq |a_1 - a_3| \leq |a_1 - a_4| \leq \dots \leq |a_1 - a_{26}|?$$

7 pont

3. Az AB átmérőjű félkörbe $ABCD$ konvex négyszöget írunk. Legyen P a CD oldal (szakasz) egy belső pontja és Q a P pont merőleges vetülete AB -re. Igazoljuk, hogy

$$PQ^2 = QA \cdot QB - PC \cdot PD.$$

7 pont

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + cx + d = 0$$

$$x^2 + ex + f = 0$$

$(a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z})$ másodfokú egyenleteknek egymástól páronként különböző gyökei hat egymást követő egész szám. Határozzuk meg az $m = a^2 + c^2 + e^2 - 2(b + d + f)$ kifejezés minimális értékét.

7 pont

Megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján az $x^2 + ax + b = 0$ egyenlet esetén $x_1 + x_2 = -a$ és $x_1 x_2 = b$,

1 pont

innen $a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2$.

1 pont

Hasonlóképpen $c^2 - 2d = x_3^2 + x_4^2$ és $e^2 - 2f = x_5^2 + x_6^2$.

1 pont

Mindezek alapján: $m = a^2 + c^2 + e^2 - 2(b + d + f) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$.

1 pont

Felhasználva, hogy az egyenletek gyökei egymást követő egész számok, így ezeket $k, k + 1, k + 2, k + 3, k + 4, k + 5$ -tel ($k \in \mathbb{Z}$) jelölve

$$m = k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 + (k+3)^2 + (k+4)^2 + (k+5)^2 = 6k^2 + 30k + 55 = 6\left(k + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{35}{2}.$$

2 pont

A kapott kifejezés, figyelembe véve, hogy k egész, $k = -2$ vagy $k = -3$ esetén veszi fel a minimumát, és ez a minimum $m_{\min} = 19$.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Az $1, 2, 3, \dots, 26$ pozitív egészek egy tetszőleges sorrendjében az első tagot a_1 -gyel, a másodikat a_2 -vel, $\dots$, az utolsót a_{26} -tal jelöljük. Hány olyan sorrend van, ahol

$$|a_1 - a_2| \leq |a_1 - a_3| \leq |a_1 - a_4| \leq \dots \leq |a_1 - a_{26}|?$$

7 pont

Megoldás. Az $a_2, a_3, \dots, a_{26}$ számok értékét úgy kell megállapítani, hogy először az a_1 -hez „legközelebbi” számot/számokat írjuk utána, majd ezután a „második legközelebbi” számmal/számokkal folytatjuk, és így haladunk az a_1 -től „legtávolabbi” számok felé.

1 pont

Így $a_1 = 1$ esetén a következő tag csak $a_2 = 2$ lehet, aztán a 3, 4, 5, ..., 26 ebben a sorrendben. Ez 1 sorrend.

$a_1 = 2$ esetén a következő két tag az 1 és a 3 lehet, ezek kétféle sorrendben állhatnak (azaz $a_2 = 1$ és $a_3 = 3$, vagy pedig $a_2 = 3$ és $a_3 = 1$), aztán pedig a 4, 5, ..., 26 ebben a sorrendben. Ez 2 sorrend.

1 pont

$a_1 = 3$ esetén a következő két tag a 2 és a 4 lehet, ezek kétféle sorrendben állhatnak, aztán az 1 és az 5 is kétféle sorrendben állhat, ezek után pedig a 6, 7, 8, ..., 26 sorrend lehetséges csak. Ez $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ sorrend.

Az előzőekhez hasonlóan, ha $a_1 = k$ és $1 < k \leq 13$, akkor $\{a_2, a_3\} = \{k-1, k+1\}$, $\{a_4, a_5\} = \{k-2, k+2\}$, ..., $\{a_{2k-2}, a_{2k-1}\} = \{1, 2k-1\}$, a többi tag pedig egyértelmű, azaz $a_i = i$, ha $i \geq 2k$, ami 2^{k-1} lehetőséget jelent. Ha pedig $14 \leq k \leq 26$, akkor megfigyelve, hogy az a_i sorozat pontosan akkor teljesíti a feltételt, ha a $b_i = 27 - a_i$ sorozat teljesíti, így a lehetséges sorrendek száma 2^{26-k} , azaz például $a_1 = 26$ esetén a következő tag csak a 25 lehet, aztán pedig a 24, 23, 22, ..., 1 ebben a sorrendben, és ez valóban $2^{26-26} = 1$ eset.

3 pont

Tehát az összes lehetséges sorrend száma

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{12} + 2^{12} + 2^{11} + \dots + 2^1 + 2^0 = 2(2^{13} - 1) = 2^{14} - 2.$$

2 pont

Összesen:

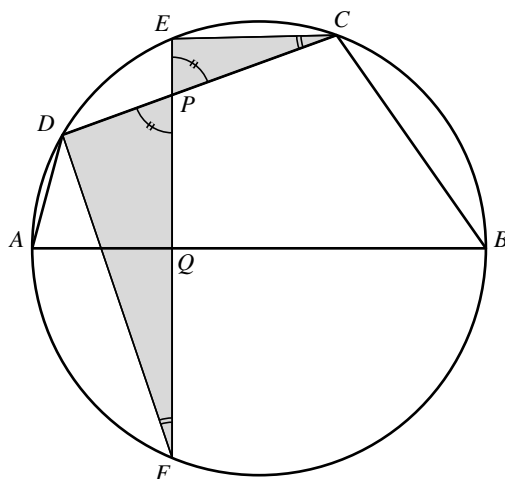
7 pont

3. Az AB átmérőjű félkörbe $ABCD$ konvex négyszöget írunk. Legyen P a CD oldal (szakasz) egy belső pontja és Q a P pont merőleges vetülete AB -re. Igazoljuk, hogy

$$PQ^2 = QA \cdot QB - PC \cdot PD.$$

7 pont

Megoldás. Használjuk az alábbi ábrát!



A félkör helyett a teljes körben fogunk dolgozni. Jelölje a PQ egyenesnek a körrel vett metszéspontjait (az ábra szerint) E , illetve F .

$\angle DPF = \angle EPC$ (mivel csúcsszögek), továbbá $\angle PCE = \angle DCE = \angle EFD = \angle PFD$ (mivel azonos köríven nyugvó kerületi szögek),

1 pont

ezért PEC háromszög és PDF háromszög hasonlóak.

1 pont

A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányából adódik, hogy $\frac{PE}{PC} = \frac{PD}{PF}$, amit átrendezve kapjuk, hogy

$$PC \cdot PD = PF \cdot PE. \quad (*) \quad 1 \text{ pont}$$

Thalész tétele miatt $\angle AEB = 90^\circ$, ezért az AEB derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó EQ magasságára a magasság-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$EQ^2 = AQ \cdot QB. \quad (**) \quad 1 \text{ pont}$$

Figyelembe véve, hogy $EQ = FQ$, valamint, hogy E, P, Q és F pontok (ebben a sorrendben) egy egyenesre esnek, továbbá felhasználva a $(*)$ összefüggést, kapjuk hogy

$$PC \cdot PD = PE \cdot PF = (EQ - PQ) \cdot (FQ + PQ) = \quad 1 \text{ pont}$$

$$= (EQ - PQ) \cdot (EQ + PQ) = EQ^2 - PQ^2. \quad 1 \text{ pont}$$

$PC \cdot PD = EQ^2 - PQ^2$ egyenlőségből pedig a $(**)$ összefüggés alapján $PC \cdot PD = AQ \cdot QB - PQ^2$ adódik, amelyet átrendezve $PQ^2 = QA \cdot QB - PC \cdot PD$ és ez az, amit bizonyítani szerettünk volna.

1 pont

Összesen:

7 pont

Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok a és b pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy teljesüljön az $(a \cdot b; a + b) = 3 \cdot (a; b)$ feltétel, ahol $(m; n)$ az m és az n egész számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

7 pont

2. Egy 5×5 -ös táblázat minden kis egységnégyzete tartalmaz egy felfelé, lefelé, balra vagy jobbra mutató nyilat. (A feladat során megállapodunk abban, hogy minden nyíl az általa jelzett irányban – a nyilat tartalmazó egységnégyzet kivételével – az összes többi egységnégyzetre mutat.)

a) Bizonyítsuk be, hogy bármely elrendezés esetén eltávolítható a táblázatból 20 nyíl úgy, hogy a megmaradó 5 nyíl közül semelyik kettő ne mutasson ugyanarra az egységnégyzetre.

b) Indoklással együtt adjuk meg a táblázatban a nyilaknak egy olyan elrendezését, amikor 19 nyíl eltávolítása nem elegendő ahhoz, hogy ne maradjon az egységnégyzetek között olyan, amelyre legalább két nyíl is mutat.

7 pont

3. Létezik-e olyan egész együtthatós $p(n)$ polinom, amelyre $p(n) + 5^n$ minden n természetes szám esetén osztható 64-gyel?

7 pont

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$x + y = 6 \quad \text{és} \quad y = x + \sqrt{x + \sqrt{y}}.$$

7 pont

5. Legyen ABC egy olyan derékszögű háromszög, amelynek C -nél van a derékszöge. Legyen az AC befogó felezőpontja F , a C -ből BF -re állított merőleges talppontja T , a B pont C -re vonatkozó tükörképe pedig B' . Bizonyítsuk be, hogy a BTB' háromszög köré írt köre érinti az AB átfogó egyenesét.

7 pont

Haladók III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok a és b pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy teljesüljön az $(a \cdot b; a + b) = 3 \cdot (a; b)$ feltétel, ahol $(m; n)$ az m és az n egész számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

7 pont

Megoldás. A feladat igazolásához speciális alakban fogunk megfelelő a és b számokat adni. Legyen $a = 3^k \cdot 2^l$ és $b = 3^m \cdot 2^n$ alakú, ahol $k \geq m$ és $l \geq n$ pozitív egész számok.

Ekkor az a és b számok választása miatt $(a; b) = b$, valamint

$$(a \cdot b; a + b) = (3^{k+m} \cdot 2^{l+n}; 3^m \cdot 2^n \cdot (1 + 3^{k-m} \cdot 2^{l-n})). \quad 1 \text{ pont}$$

A $(d \cdot x; d \cdot y) = d \cdot (x; y)$ összefüggést felhasználva $(a \cdot b; a + b) = b \cdot (3^k \cdot 2^l; 1 + 3^{k-m} \cdot 2^{l-n})$. 1 pont

Ha $k > m$, akkor $(3^k \cdot 2^l; 1 + 3^{k-m} \cdot 2^{l-n}) \neq 3$, hiszen az első szám osztható 3-mal, a második pedig nem, 2 pont

míg $k = m$ esetén $(3^k \cdot 2^l; 1 + 3^{k-m} \cdot 2^{l-n}) = (3^k \cdot 2^l; 1 + 2^{l-n})$. A $3^k \cdot 2^l$ -nek két prímosztója van: a 2 és a 3, de $l > n$ esetén $1 + 2^{l-n}$ nem osztható 2-vel. Ezért azt kell elérni, hogy $1 + 2^{l-n}$ osztható legyen 3-mal, de 9-cel már ne. 2* pont

Ez pedig elérhető, ha az $l - n$ értékét 1-nek választjuk, azaz ha $k = m$ és $l = n + 1$, ami valóban végtelen sok számpárt jelent. 1* pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Az utolsó 3 (csillaggal jelölt) pont a binomiális tételt használva is megkapható az alábbi módon:

Válasszuk a $2^{l-n} + 1$ összegben az $l - n$ kitevőt páratlan számnak, konkrétan $2u + 1$ -nek.

$$\begin{aligned} 2^{l-n} + 1 &= (3 - 1)^{2u+1} + 1 = 3^{2u+1} - \binom{2u+1}{1} \cdot 3^{2u} + \dots + \binom{2u+1}{2u} \cdot 3 - 1 + 1 = \\ &= 3 \cdot \left(3^{2u} - \binom{2u+1}{1} \cdot 3^{2u-1} + \dots + \binom{2u+1}{2u} \right). \end{aligned} \quad 2 \text{ pont}$$

A zárójelben az utolsó tag kivételével minden tag osztható 3-mal. Ezért ha $\binom{2u+1}{2u} = 2u + 1$ -et úgy választjuk, hogy ne legyen osztható 3-mal, akkor $2^{l-n} + 1$ osztható 3-mal, de 9-cel már nem.

Azaz, bármely olyan (fenti) speciális alakú a és b szám jó, ahol $l - n$ 6-tal osztva 1 vagy 5 maradékot ad, tehát a és b valóban végtelen sokféleképpen választható. 1 pont

2. Egy 5×5 -ös táblázat minden kis egységnégyzete tartalmaz egy felfelé, lefelé, balra vagy jobbra mutató nyilat. (A feladat során megállapodunk abban, hogy minden nyíl az általa jelzett irányban – a nyilat tartalmazó egységnégyzet kivételével – az összes többi egységnégyzetre mutat.)

a) Bizonyítsuk be, hogy bármely elrendezés esetén eltávolítható a táblázatból 20 nyíl úgy, hogy a megmaradó 5 nyíl közül semelyik kettő ne mutasson ugyanarra az egységnégyzetre.

b) Indoklással együtt adjuk meg a táblázatban a nyilaknak egy olyan elrendezését, amikor 19 nyíl eltávolítása nem elegendő ahhoz, hogy ne maradjon az egységnégyzetek között olyan, amelyre legalább két nyíl is mutat.

7 pont

Megoldás. a) A továbbiakban az „egységnégyzet”, és a „mező” szavak ugyanazt fogják jelenteni. Nevezzük a felfelé vagy lefelé mutató nyilat függőlegesnek, a balra vagy jobbra mutatót pedig vízszintesnek.

Ha a táblázat minden sora tartalmaz vízszintes helyzetű nyilat, akkor ha minden sorban egy-egy vízszintes helyzetű nyilat hagyunk meg, akkor azok közül semelyik kettő nem mutat ugyanarra a mezőre.

1 pont

Ha a táblázat nem minden sora tartalmaz vízszintes helyzetű nyilat, azaz ha egy sor csak függőleges nyilakat tartalmaz, akkor ezek közül semelyik kettő nem mutat azonos mezőre, ezért elegendő ezt az 5 nyilat meghagyni a táblán ahhoz, hogy teljesüljön az előírt cél.

2 pont

b) Egy lehetséges megoldás:

→	→	→	→	↓
→	→	→	→	↑
→	→	→	→	↑
→	→	→	→	↑
→	→	→	→	↑

(Bármilyen helyes ábra esetén)

1 pont

A 6 megmaradó nyíl helyzete alapján:

– ha megmarad a jobb felső sarokban lévő egyetlen lefele mutató nyíl, akkor ez a nyíl a sorában lévő négy darab jobbra mutató nyíl és a közvetlenül alatta lévő egy darab felfelé mutató nyíl kivételével minden más nyíl esetén megadható olyan mező, amelyre mindkét nyíl mutat, viszont ezen hat nyíl meghagyása esetén a felső sor vízszintes nyilai közös mezőre mutatnak;

– ha nem marad meg a lefele mutató nyíl, viszont megmarad legalább két felfele mutató nyíl, akkor ezen nyilak a közös jobb felső mezőre mutatnak;

1 pont

– ha nem marad meg a lefele mutató nyíl, de megmarad pontosan egy darab felfele mutató nyíl, akkor vagy minden sorban pontosan egy vízszintes nyíl maradt még, és ez esetben két nyíl a jobb felső mezőre mutat, vagy egy sorban legalább két vízszintes nyíl maradt, és ezek a sor végén lévő mezőre mutatnak;

1 pont

– ha pedig egyetlen függőleges nyíl sem maradt meg, akkor biztosan van olyan sor, amelyben legalább két vízszintes nyíl maradt, és ezek a nyilak közös mezőre mutatnak.

1 pont

Ezzel a konstrukció helyességét igazoltuk.

Összesen:

7 pont

3. Létezik-e olyan egész együtthatós $p(n)$ polinom, amelyre $p(n) + 5^n$ minden n természetes szám esetén osztható 64-gyel?

7 pont

Megoldás. Ha $n > 2$, akkor a binomiális tételt felhasználva $5^n = (1 + 4)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot 4 + \binom{n}{2} \cdot 16 + 64A$ alakú, ahol A pozitív egész.

2 pont

$$\text{Így } 5^n = 1 + 4n + \frac{16n(n-1)}{2} + 64A = 8n^2 - 4n + 1 + 64A.$$

1 pont

Mivel $64 \mid p(n) + 5^n$, a kapott eredményt felhasználva adódik, hogy $p(n) + 8n^2 - 4n + 1$ szintén osztható kell legyen 64-gyel.

1 pont

A $q(n) = 0$, azaz a konstans 0 polinom nyilvánvalóan minden n természetes szám esetén 64-nek a többszöröse. Ez alapján a $p(n) = -8n^2 + 4n - 1$ választással, az $5^n + p(n)$ minden $n > 2$ egész szám esetén osztható lesz 64-gyel.

2 pont

Már csak azt kell belátnunk, hogy a kapott $p(n) = -8n^2 + 4n - 1$ polinom a „hiányzó” ($n = 0, 1, 2$) esetekben is teljesíti a feladat feltételeit.

Mivel $p(0) + 5^0 = -1 + 1 = 0$, $p(1) + 5^1 = (-8 + 4 - 1) + 5 = 0$ és $p(2) + 5^2 = (-32 + 8 - 1) + 25 = 0$, a $p(n) = -8n^2 + 4n - 1$ polinom valóban megfelel.

1 pont

Tehát a feladat egy lehetséges megoldása a $p(n) = -8n^2 + 4n - 1$ polinom.

Összesen:

7 pont

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$x + y = 6 \quad \text{és} \quad y = x + \sqrt{x + \sqrt{y}}.$$

7 pont

1. megoldás. A négyzetgyök definíciója miatt $y \geq 0$ és így $x \leq 6$. Ha $y < x + \sqrt{y}$, akkor felhasználva, hogy a négyzetgyök függvény szigorúan monoton nő, $y < x + \sqrt{y} < x + \sqrt{x + \sqrt{y}}$, azaz az egyenlet nem teljesülhet.

2 pont

Hasonlóan, ha $y > x + \sqrt{y}$, akkor $y > x + \sqrt{y} > x + \sqrt{x + \sqrt{y}}$, azaz egyenlet ismét nem teljesülhet.

1 pont

Tehát az egyenletrendszer arra az esetre redukálódik, hogy $x + y = 6$ és $y = x + \sqrt{y}$, és ennek megoldásai kielégítik az eredeti egyenletrendszert is.

1 pont

A második egyenletet gyöktelenítve $(y - x)^2 = y$ adódik, majd x helyett $6 - y$ -t írva az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$36 - 24y + 4y^2 = y.$$

1 pont

Ennek $y = 4$ és $y = \frac{9}{4}$ a megoldása, ahonnan $x = 2$ és $x = \frac{15}{4}$ adódik.

1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $x = 2$ és $y = 4$ tényleg megoldás, míg $x = \frac{15}{4}$ és

$y = \frac{9}{4}$ hamis gyök (pl. azért, mert a második egyenlethől következik, hogy $y \geq x$).

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Ha az eredeti egyenletrendszerben a második egyenletet gyöktelenítjük és az x -et küszöböljük ki, akkor az $(4y^2 - 23y + 30)^2 = y$ egyenletet kapjuk. Ennek két racionális gyöke van, 4 és $\frac{9}{4}$, és két irracionális, $\frac{21 - \sqrt{41}}{8}$ és $\frac{21 + \sqrt{41}}{8}$. Ezek közül csak az $y = 4$ valódi gyök, a többi hamis gyök.

2. megoldás. A négyzetgyök definíciója miatt $y \geq 0$ és így $x \leq 6$. Az $y = 6 - x$ helyettesítést végrehajtva a második egyenletből $6 - x = x + \sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$ adódik. Innen $6 = 2x + \sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$, és a négyzetgyök nemnegativitása miatt $3 \geq x$.

1 pont

Vegyük észre, hogy $x = 2, y = 4$ megoldása az egyenletrendszernek. Megmutatjuk, hogy nincs más megoldás, és ehhez a felírt $6 = 2x + \sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$ alakot fogjuk használni.

1 pont

Ehhez először igazoljuk, hogy a gyökjel alatti $x + \sqrt{6 - x}$ kifejezés az $x \leq 3$ feltétel mellett szigorú monoton nő, azaz, ha $z < x \leq 3$, akkor $z + \sqrt{6 - z} < x + \sqrt{6 - x}$.

1 pont

A kérdéses egyenlőtlenséget rendezve, majd a gyökös kifejezés konjugáltjával bővítve $\sqrt{6 - z} - \sqrt{6 - x} < x - z$, illetve $\frac{(6 - z) - (6 - x)}{\sqrt{6 - z} + \sqrt{6 - x}} < x - z$, azaz $\frac{x - z}{\sqrt{6 - z} + \sqrt{6 - x}} < x - z$ adódik.

1 pont

Ezt a pozitív $x - z$ -vel osztva, és a pozitív nevezővel szorozva kapjuk: $1 < \sqrt{6 - z} + \sqrt{6 - x}$, ami nyilván igaz, mert a gyökfüggvény szigorú monotonitása, és $z < x \leq 3$ miatt $\sqrt{6 - z} + \sqrt{6 - x} > 2\sqrt{3} > 1$. Ezzel igazoltuk $x + \sqrt{6 - x}$ ($x \leq 3$ feltétel melletti) szigorú monoton növekedését.

1 pont

Most vizsgáljuk a „teljes” $2x + \sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$ kifejezést az $x \leq 3$ feltétel mellett növekedés szempontjából. $2x$ szigorúan monoton nő, az előzőek alapján $x + \sqrt{6 - x}$ is szigorúan monoton nő, ezért $\sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$ is, azaz maga $2x + \sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$ is, hiszen két szigorúan monoton növekvő függvény összege.

1 pont

De akkor a $2x + \sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$ összeg legfeljebb egy helyen veheti fel a 6 értéket, vagyis a $6 = 2x + \sqrt{x + \sqrt{6 - x}}$ egyenlet (és így az eredeti egyenletrendszer) egyetlen megoldása valóban csak $x = 2$ (és így $x = 2, y = 4$).

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. A második megoldásból könnyen látható, hogy az

$$x + y = 6 \quad \text{és} \quad y = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}$$

egyenletrendszernek (ha tetszőleges számú gyökjellel is írjuk fel) egyetlen megoldása $x = 2, y = 4$.

- 5.** Legyen ABC egy olyan derékszögű háromszög, amelynek C -nél van a derékszöge. Legyen az AC befogó felezőpontja F , a C -ből BF -re állított merőleges talppontja T , a B pont C -re vonatkozó tükörképe pedig B' . Bizonyítsuk be, hogy a BTB' háromszög köré írt köre érinti az AB átfogó egyenesét.

7 pont

– Ha a szakasz két végpontja ugyanolyan színű, akkor a szakaszra ráírjuk a szakasz két végpontjában lévő két szám különbségének az abszolútértékét.

– Ha a szakasz két végpontja eltérő színű, akkor a szakaszra ráírjuk a szakasz két végpontjában lévő két szám különbsége abszolútértékének az ellentettjét.

Mely n értékek esetén igaz az, hogy bármilyen valós számokat is írtunk a pontokhoz, a pontokat ki lehet úgy színezni, hogy a szakaszokra írt számok összege nulla legyen?

7 pont

3. Kezdő és Második a következő játékot játsszák: Az i -dik lépésben a soron következő játékos a nemnegatív egész együtthatós, negyedfokú $p_{i-1}(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinom valamelyik a_j ($j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) együtthatóját 1-gyel megnövelve a $p_i(x)$ polinomot kapja. A játék kezdetén $p_0(x) = x^4 + 1$, és a játékosok Kezdő kezdésével felváltva 2026-szor lépnek. Ha a $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{2026}(x)$ polinomok közül bármelyiknek van valós gyöke, akkor Kezdő nyer, ha pedig egyiknek sincs valós gyöke, akkor Második nyer. Kinek van nyerő stratégiája? Ha például a játékosok rendre az $a_4, a_2, a_3, a_1, a_2, a_1, a_1$ együtthatókat növelték, akkor 7 lépés után a $p_7(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ polinomot kapták, és Kezdő nyer, mivel

$$p_7\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{16} - \frac{1}{8} + \frac{2}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0,$$

azaz a $p_7(x)$ polinomnak a $-\frac{1}{2}$ valós gyöke.

7 pont

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

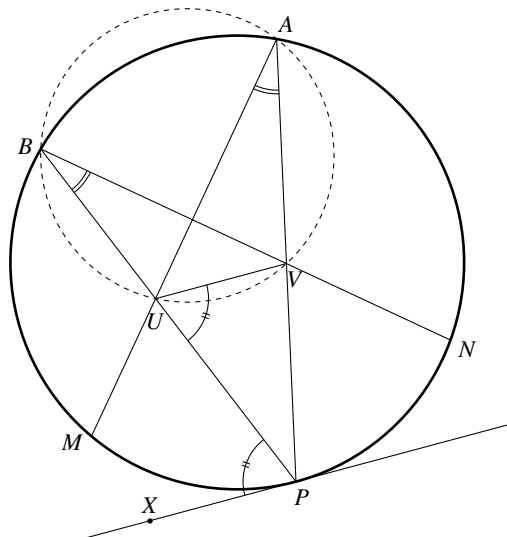
Megoldások és javítási útmutató

1. Az A, B, M, P és N pontok, ebben a sorrendben, egy körön helyezkednek el. Legyen az AM és BP szakaszok metszéspontja U , az AP és BN szakaszok metszéspontja pedig V . Bizonyítsuk be, hogy ha $MP = PN$, akkor az UV egyenes párhuzamos a körhöz a P pontban húzott érintővel.

7 pont

Megoldás. Mivel $MP = PN$, így a kerületi szögek tétele alapján $\angle MAP = \angle NBP$.

1 pont



Ekkor pedig $UAV \sphericalangle = MAP \sphericalangle = NBP \sphericalangle = VBU \sphericalangle$. Így a kerületi szögek tételének megfordítása alapján az $UVAB$ négyszög húrnégyszög.

2 pont

A húrnégyszögek tétele alapján $VAB \sphericalangle = 180^\circ - VUB \sphericalangle = VUP \sphericalangle$.

1 pont

Az érintő szárú kerületi szögek tétele alapján $XPB \sphericalangle = XPU \sphericalangle = PAB \sphericalangle = VAB \sphericalangle$ (mivel a szögek mind a PB húrhoz tartozó kerületi szögek).

2 pont

Így végül $XPU \sphericalangle = PUV \sphericalangle$, azaz a szögek váltószögek, és ebből azonnal következik, hogy UV és a P -beli érintő párhuzamos.

1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. A feladat következik a Pascal-tételből is, ha azt az elfajuló $APPBNM$ húrhat-szögre alkalmazzuk. Sőt, ebből általánosabban az is következik, hogy az $MP = PN$ feltételt elhagyva az is igaz, hogy UV , MN és a P -beli érintő egy ponton mennek át (vagy – a feladat feltétele mellett – párhuzamosak egymással).

2. Egy kör kerületén kijelölünk n számú ($n \geq 2$) pontot, és mindegyik pontba egy valós számot írunk. Mindegyik pontot összekötjük az összes többivel. Ezután mindegyik pontot kiszínezzük kékre vagy sárgára. A pontokat összekötő szakaszokra a következő szabály szerint írunk számokat:

– Ha a szakasz két végpontja ugyanolyan színű, akkor a szakaszra ráírjuk a szakasz két végpontjában lévő két szám különbségének az abszolútértékét.

– Ha a szakasz két végpontja eltérő színű, akkor a szakaszra ráírjuk a szakasz két végpontjában lévő két szám különbsége abszolútértékének az ellentettjét.

Mely n értékek esetén igaz az, hogy bármilyen valós számokat is írtunk a pontokhoz, a pontokat ki lehet úgy színezní, hogy a szakaszokra írt számok összege nulla legyen?

7 pont

Megoldás. Ha $n = 2k$ alakú páros szám, akkor az n darab szám megadható úgy, hogy ne lehessen úgy színezní, hogy a szakaszokra írt számok összege nulla legyen. Például: ha az egyik pontba 1-et írunk, az összes többibe pedig 0-t. Ekkor ugyanis azokra a szakaszokra, amelyek a nullákat kötik össze, nulla kerül, arra a $2k - 1$ szakaszra pedig, amelyik az 1 számot köti össze a többivel 1 vagy -1 kerül, és ennek a $2k - 1$ darab számnak az összege biztos páratlan lesz, tehát nem lehet nulla.

1 pont

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a pontokat azonosítjuk a hozzájuk írt számokkal. Így például kék színű ponthoz írt szám helyett egyszerűen kék számot írunk.

Belátható, hogy ha $n = 2k + 1$ alakú páratlan szám, akkor pedig mindig van megfelelő színezés. Legyenek a pontokba írt számok $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{2k+1}$. Legyen $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2k+1}$ kék, $x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2k}$ pedig sárga. Megmutatjuk, hogy ekkor a szakaszokra írt számok összege nulla lesz.

1 pont

Az x_j szám ($1 \leq j \leq 2k + 1$) a belőle induló $2k$ számú élre írt számban játszik szerepet, ezért amikor az élre írt számokat összeadjuk, akkor az x_j ebben az összegben $2k$ -szor fog szerepelni, hol pozitív, hol negatív előjellel. (Ha esetleg $x_j = 0$, akkor is adjunk neki előjelet.)

Kék-kék és sárga-sárga élre $j < m$ esetén $|x_j - x_m| = -x_j + x_m$, és $j > m$ esetén $|x_j - x_m| = x_j - x_m$ kerül, kék-sárga élre pedig $j > m$ esetén $|x_j - x_m| = -x_j + x_m$, és $j < m$ esetén $|x_j - x_m| = x_j - x_m$ kerül.

Vizsgáljuk meg, hogy hány élen lesz pozitív, illetve negatív az x_j szám előjele.

Ha j páratlan, azaz $j = 2i + 1$ alakú, akkor x_j kék. Ekkor az $x_j = x_{2i+1}$ -t az x_1 -gyel, x_3 -mal, $\dots$, x_{2i-1} -gyel összekötő kék-kék éleken x_j előjele pozitív, az x_j -t x_{2i+3} -mal, x_{2i+5} -tel, $\dots$, x_{2k+1} -gyel összekötő kék-kék éleken pedig az előjel negatív.

Ez i számú pozitív és $k - i$ számú negatív előjelet eredményez.

1 pont

Az $x_j = x_{2i+1}$ -et x_2 -vel, x_4 -gyel, $\dots$, x_{2i} -vel összekötő kék-sárga éleken pedig x_j előjele negatív, míg az x_j -t x_{2i+2} -vel, x_{2i+4} -gyel, $\dots$, x_{2k} -val összekötő kék-sárga éleken az előjel pozitív.

Ez i számú negatív és $k - i$ számú pozitív előjelet eredményez. Tehát összesen k számú esetben lesz x_j előjele pozitív, és szintén k számú esetben lesz az előjel negatív.

1 pont

Hasonlóan látható be az is, hogy ha $j = 2i$ alakú páros szám, azaz x_j sárga, akkor x_j a belőle induló $2k$ számú él felében az élekre pozitív, a másik felében pedig negatív előjellel kerül rá a megfelelő különbségekben.

Ugyanis ekkor az $x_j = x_{2i}$ -t x_2 -vel, x_4 -gyel, $\dots$, x_{2i-2} -vel összekötő sárga-sárga éleken x_j előjele pozitív (ez $i - 1$ számú él), az x_j -t x_{2i+2} -vel, x_{2i+4} -gyel, $\dots$, x_{2k} -val összekötő sárga-sárga éleken pedig az előjel negatív (ez $k - i$ számú él).

1 pont

Az $x_j = x_{2i}$ -t x_1 -gyel, x_3 -mal, $\dots$, x_{2i-1} -gyel összekötő sárga-kék éleken x_j előjele negatív (ez i számú él), az x_j -t x_{2i+1} -gyel, x_{2i+3} -mal, $\dots$, x_{2k+1} -gyel összekötő sárga-kék éleken pedig az előjel pozitív (ez $k - i + 1$ számú él).

Tehát összesen $i - 1 + k - i + 1 = k$ számú esetben lesz az x_j előjele pozitív, és szintén $k - i + i = k$ számú esetben lesz az előjel negatív.

1 pont

Ez azt jelenti, hogy az élekre írt számok összegéhez bármely x_j szám a $k \cdot x_j - k \cdot x_j = 0$ értékű taggal „járul hozzá”, így az élekre írt számok összege a csúcsok ezen színezése mellett valóban nulla.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Kezdő és Második a következő játékot játsszák: Az i -dik lépésben a soron következő játékos a nemnegatív egész együtthatós, negyedfokú $p_{i-1}(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinom valamelyik a_j ($j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) együtthatóját 1-gyel megnövelve a $p_i(x)$ polinomot kapja. A játék kezdetén $p_0(x) = x^4 + 1$, és a játékosok Kezdő kezdetével felváltva 2026-szor lépnek. Ha a $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{2026}(x)$ polinomok közül bármelyiknek van valós gyöke, akkor Kezdő nyer, ha pedig egyiknek sincs valós gyöke, akkor Második nyer. Kinek van nyerő stratégiája? Ha például a játékosok rendre az $a_4, a_2, a_3, a_1, a_2, a_1, a_1$ együtthatókat növelték, akkor 7 lépés után a $p_7(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ polinomot kapták, és Kezdő nyer, mivel

$$p_7\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{16} - \frac{1}{8} + \frac{2}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0,$$

azaz a $p_7(x)$ polinomnak a $-\frac{1}{2}$ valós gyöke.

7 pont

Megoldás. Azt fogjuk igazolni, hogy Másodiknak van nyerő stratégiája.

Legyen a k -dik lépés után kapott polinom $p_k(x)$, és vizsgáljuk ezek után Kezdő, majd Második (erre adott) lépését.

Ha a megfelelő $p_k(x)$ polinomnak nincs valós gyöke, az pontosan azt jelenti, hogy (mivel pozitív főegyütthatós, negyedfokú polinomról van szó) bármely x -re a polinom csak pozitív értéket vesz fel. Kezdetben a $p_0(x)$ polinom nyilván ilyen.

Második nyerő stratégiájának a leírása

- Ha Kezdő előző lépésében az a_0, a_2, a_4 együttthatók valamelyikét növelte, akkor növelje ugyanezt az együttthatót Második a saját lépésében (triviális, hogy ha addig nem volt valós gyök, akkor most sem lesz, hiszen ha $p_k(x) > 0$ minden valós x -re, akkor például a_2 -t kétszer növelve $x^2 \geq 0$ miatt $p_{k+2}(x) = p_k(x) + 2x^2 > 0$ is igaz minden valós x -re.) 1 pont
- Ha Kezdő előző lépésében az a_1 együttthatót növelte, és ezzel a_1 páratlan szám lett, akkor Második növelje a_0 -t, míg ha a_1 páros szám lett, akkor növelje Második a_2 -t,
- ha pedig Kezdő előző lépésében az a_3 együttthatót növelte, és ezzel a_3 páratlan szám lett, akkor Második növelje a_2 -t, míg ha a_3 páros szám lett, akkor növelje Második a_4 -t. 1 pont

A stratégia nyerő voltának igazolása

Most megmutatjuk, hogy ezt a stratégiát (nyilván a korábbi lépések során is) követve a Kezdő lépése után kapott $p_{k+1}(x)$ polinomnak nincs valós gyöke (mivel a Második lépése során páros együttthatót növeltünk, ez maga után vonja, hogy $p_{k+2}(x)$ -nek sincs gyöke.)

Tegyük fel, hogy Kezdő lépése előtt az a_3 együttthatót $2b + m_3$, az a_1 együttthatót $2c + m_1$ esetben növelte Kezdő (ahol b, c nemnegatív egészek, m_3 és m_1 pedig 0, vagy 1), azaz (mivel Második ezeket nem növeli) $a_3 = 2b + m_3$, és $a_1 = 2c + m_1$.

Ekkor (Második stratégiája alapján, és feltételezve, hogy Kezdő nem növel számára „értelmetlenül” páros együttthatót) $a_4 = 1 + b, a_2 = b + c + m_3, a_0 = c + m_1 + 1$.

Azaz

$$\begin{aligned}
 p_k(x) &= (1+b)x^4 + (2b+m_3)x^3 + (b+c+m_3)x^2 + (2c+m_1)x + (c+m_1+1) = \\
 &= b(x^4 + 2x^3 + x^2) + c(x^2 + 2x + 1) + x^4 + 1 + m_3(x^3 + x^2) + m_1(x+1) = \\
 &= bx^2(x+1)^2 + c(x+1)^2 + x^4 + 1 + m_3(x^3 + x^2) + m_1(x+1) \geq \\
 &\geq x^4 + 1 + m_3(x^3 + x^2) + m_1(x+1).
 \end{aligned}$$

1 pont

Most jön Kezdő, és feltehető, hogy a_1 -t, vagy a_3 -t növeli. Az egyes esetekben:

I. Ha Kezdő a_1 -t növeli: $p_{k+1}(x) \geq x^4 + 1 + m_3(x^3 + x^2) + m_1(x+1) + x$, ekkor

I. a) – ha $x \geq 0$, akkor (mivel 1-t és nemnegatív számokat adunk össze) $p_{k+1}(x) \geq 1$ (és így $p_{k+1}(x)$ -nek ezen az intervallumon nincs valós gyöke),

I. b) – ha $-1 \leq x < 0$, akkor $x+1 \geq 0$ miatt

$$p_{k+1}(x) \geq x^4 + 1 + m_3(x+1)x^2 + m_1(x+1) + x \geq x^4 + 1 + x > 0$$

(és $p_{k+1}(x)$ -nek itt sincs valós gyöke),

I. c) – ha pedig $x < -1$ (ekkor $x^3 + x^2 < 0$ és $x+1 < 0$ miatt),

$$\begin{aligned}
 p_{k+1}(x) &\geq x^4 + 1 + m_3x^3 + m_3x^2 + m_1(x+1) + x > \\
 &> x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x^4 + x^3) + (x+1)^2 + 1 > 1
 \end{aligned}$$

(és így $p_{k+1}(x)$ -nek itt sincs valós gyöke).

Mivel az egyes esetekben (**I. a**), **I. b**), **I. c**)) x összes lehetséges értékét megvizsgáltuk $p_{k+1}(x)$ -nek valóban nincs valós gyöke (miután Kezdő a_1 -t növeli).

2 pont

II. Ha pedig Kezdő a_3 -t növeli:

$$p_{k+1}(x) \geq x^4 + 1 + m_3(x^3 + x^2) + m_1(x+1) + x^3,$$

és ekkor

II. a) – ha $x \geq 0$, akkor (mivel 1-t és nemnegatív számokat adunk össze) $p_{k+1}(x) \geq 1$ (és így $p_{k+1}(x)$ -nek ezen az intervallumon nincs valós gyöke),

II. b) – ha $-1 \leq x < 0$, akkor $x + 1 \geq 0$ és $x^3 + 1 \geq 0$ miatt

$$p_{k+1}(x) \geq x^4 + 1 + m_3(x+1)x^2 + m_1(x+1) + x^3 \geq x^4 + 1 + x^3 > 0,$$

II. c) – ha pedig $x < -1$ (ekkor $x^3 + x^2 < 0$ és $x + 1 < 0$ miatt),

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &\geq x^4 + 1 + m_3(x^3 + x^2) + m_1(x+1) + x^3 > x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2 = \\ &= x^2(x+1)^2 + (x+1) + 1 > (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \end{aligned}$$

azaz itt sincs valós gyök.

Mivel az egyes esetekben (**II. a**), **II. b**), **II. c**)) x összes lehetséges értékét megvizsgáltuk $p_{k+1}(x)$ -nek valóban nincs valós gyöke (miután Kezdő a_3 -t növeli).

2 pont

Ezzel igazoltuk Második stratégiájának helyességét, azaz neki van nyerő stratégiája.

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Második (fentebb leírt) stratégiájának nyerő volta a következő módon is igazolható. A továbbiakban a Kezdő legyen az Első játékos, míg a Második legyen a Második játékos

Megmutatjuk, hogy a Második játékosnak van nyerő stratégiája.

Mivel a polinom páros fokú és a főegyütthatója pozitív, ezért a Második játékos célja az, hogy a kapott polinom minden értéke pozitív legyen. Ez nyilván teljesül, ha nemnegatív értékeket helyettesítünk be (hisz a többi együttható is nemnegatív), és az is feltehető, hogy a Második játékos csak páros kitevőjű tagok együtthatóját növeli. Az is világos, hogy az Első játékosnak nem érdemes páros kitevőjű együtthatót növelnie. Ennek formális bizonyításához módosítsuk úgy a játékot, hogy ha az Első játékos egy páros kitevőjű tag együtthatóját növelné, akkor a módosított játékban passzoljon ő is és a Második játékos is.

Ha eredetileg a játék végén a $p(x)$ polinom, a módosított játékban pedig a $p'(x)$ polinom jön ki a játék végén, és a módosított játékban elértük, hogy $p'(x)$ minden értéke pozitív legyen, akkor $p(x)$ is jó lesz, hiszen a $p(x) - p'(x)$ különbségben csak páros kitevőjű tagok szerepelnek nemnegatív együtthatókkal (hiszen feltettük, hogy a Második játékos csak páros kitevőjű tagokat változtat).

1 pont

Ezután megadjuk a Második játékos stratégiáját.

– Amikor az Első játékos az x^3 együtthatóját növeli, akkor a Második játékos felváltva növelje x^2 és x^4 együtthatóját (az x^2 -tel kezdve),

– ha pedig az Első játékos az x együtthatóját növeli, akkor felváltva növelje az x^2 együtthatóját és a konstans tagot (az x^2 -tel kezdve).

1 pont

Ekkor ha az Első játékos $2a + m_1$ -szer növeli az x^3 együtthatóját és $2b + m_2$ -ször növeli az x együtthatóját (ahol m_1 és m_2 értéke is 0 vagy 1 lehet), akkor a Második játékos lépésén után az $(a+1)x^4 + (2a+m_1)x^3 + (a+b+m_1+m_2)x^2 + (2b+m_2)x + (b+1)$ polinomot kapjuk. Erről a polinomról világos, hogy minden értéke pozitív, hiszen átírható az $(a+m_1)(x^2+x)^2 + (b+m_2)(x+1)^2 - m_1x^3 - m_2x + (1-m_1)x^4 + (1-m_2)$ alakba, és itt minden tag nemnegatív, ha x helyére nempozitív értéket helyettesítünk.

1 pont

Azt kell még megvizsgálnunk, hogy ha az Első játékos még egyet lép, az nem ronthatja-e el ezt a polinomot. Itt esetszétválasztást fogunk végezni.

– Ha $m_1 = 0$, és az x^3 együtthatóját növeli az Első játékos, akkor az

$$a(x^2 + x)^2 + (b + m_2)(x + 1)^2 + x^3 - m_2x + x^4 + (1 - m_2)$$

polinomot kapjuk. Ha $x \leq -1$, akkor az $x^4 + x^3$ lesz nemnegatív, ha pedig $-1 < x \leq 0$, akkor $m_2 = 0$ esetén $x^3 + 1$ lesz nemnegatív, $m_2 = 1$ esetén pedig $x^3 - x$ lesz nemnegatív.

1 pont

– Ha pedig $m_1 = 1$, és az x^3 együtthatóját növeli az Első játékos, akkor az

$$(a + 1)(x^2 + x)^2 + (b + m_2)(x + 1)^2 - m_2x + (1 - m_2)$$

polinomot kapjuk, ami pozitív, ha x nemnegatív.

1 pont

A következő két esetet nem kell megnézni, mert algebrai szimmetria áll fenn az x és az x^3 tag között az a , m_1 és a b , m_2 megcserélésével és a polinom „megfordításával”, továbbá annak a jól ismert állításnak a felhasználásával, hogy ha egy polinomot „megfordítunk”, akkor a gyökök a reciprokaikra változnak (illetve a polinom értékeinek előjelei nem változnak, ha a polinom foka páros), de a teljesség kedvéért ezeket az eseteket is leírjuk.

2 pont

– Ha $m_2 = 0$, és x együtthatóját növeli az Első játékos, akkor az

$$(a + m_1)(x^2 + x)^2 + b(x + 1)^2 - m_1x^3 + x + (1 - m_1)x^4 + 1$$

polinomot kapjuk. Ha $-1 < x \leq 0$, akkor az $x + 1$ nemnegatív lesz, ha pedig $x \leq -1$ és $m_1 = 0$, akkor $x + x^4$ lesz nemnegatív, $m_1 = 1$ esetén pedig $x - x^3$ lesz nemnegatív.

– Végül ha $m_2 = 1$, és az x együtthatóját növeljük, akkor az

$$(a + m_1)(x^2 + x)^2 + (b + 1)(x + 1)^2 - m_1x^3 + (1 - m_1)x^4$$

polinomot kapjuk, és itt minden tag nemnegatív, ha x nemnegatív.

Ezzel a feladat megoldását befejeztük.