

ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY 2023/2024-ES TANÉV

Kezdők és Haladók I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

*A verseny a Kulturális és Innovációs Minisztérium, a Nemzeti Tehetség Program
és az Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő támogatásával
az NTP-TMV-M-23-B-0024 azonosító számú pályázat alapján valósult meg.*



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



Nemzeti
Tehetség Program



EMBERI ERŐFORRÁS
TÁMOGATÁSKEZELŐ

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló	3
Kezdők I–II. kategória 2. forduló	6
Kezdők III. kategória 1. forduló	10
Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló	13
Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló	17
Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló	20
Haladók I. kategória 1. forduló	23
Haladók II. kategória 1. forduló	27
Haladók I. kategória 2. forduló	30
Haladók II. kategória 2. forduló	34
Haladók III. kategória 1. forduló	38
Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló	42
Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló	44
Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló	49

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy sorozat első tagja a 23. A további tagokat a következőképpen képezzük:

- ha a tag 3-mal osztható, akkor elosztjuk 3-mal,
- ha 3-mal osztva 1 a maradéka, akkor a szám 5-szörösénél 4-gyel nagyobb szám lesz a következő tag,
- ha 3-mal osztva 2 a maradéka, akkor növeljük 7-tel.

Határozd meg a sorozat első 2023 tagjának összegét!

6 pont

2. Hány olyan nyolcjegyű pozitív szám van, amely csak 2-es és 4-es számjegyet tartalmaz és osztható 24-gyel?

6 pont

3. Egy ABC szabályos háromszög oldalai 5780 egység hosszúak. Az AB oldalt meghosszabbítjuk A -n túl 1734 egységgel, így kapjuk a D pontot. Az AC oldalon E az a pont, amelyre teljesül, hogy AE és EC szakaszok hosszának aránya $3 : 7$. A DE egyenes a BC szakaszt az F pontban metszi. Hány egység hosszú a CF szakasz?

6 pont

4. A Kosárlabda Diákolimpia döntőjében a mérkőzés első felében András 20 próbálkozásból 15, míg a második félidőben 10 kísérletből 10 kosarat szerzett. Balázs az első félidőben 12-szer, míg a másodikban 18-szor dobott kosárra. András mindkét félidőben nagyobb százalékban volt eredményes, mint Balázs, de meglepő módon a mérkőzés végéig mindketten ugyanannyiszor találtak be. Hány kosárral szerzett többet a második félidőben Balázs, mint az elsőben?

6 pont

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sorozat első tagja a 23. A további tagokat a következőképpen képezzük:

- ha a tag 3-mal osztható, akkor elosztjuk 3-mal,
- ha 3-mal osztva 1 a maradéka, akkor a szám 5-szörösénél 4-gyel nagyobb szám lesz a következő tag,
- ha 3-mal osztva 2 a maradéka, akkor növeljük 7-tel.

Határozd meg a sorozat első 2023 tagjának összegét!

6 pont

Megoldás. A sorozat így kezdődik: 23, 30, 10, 54, 18, 6, 2, **9, 3, 1**, 9, 3, 1, ...

1 pont

Innentől kezdve a 9, 3, 1 számok ismétlődnek.

1 pont

Az első hét tag összege 143.

1 pont

2023 – 7 = 2016, ami osztható 3-mal.

2016 : 3 = 672-szer ismétlődik a 9, 3, 1,

1 pont

ezek összege 13,

1 pont

így a sorozat első 2023 tagjának összege: $143 + 672 \cdot 13 = 8879$.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. Hány olyan nyolcjegyű pozitív szám van, amely csak 2-es és 4-es számjegyet tartalmaz és osztható 24-gyel?

6 pont

Megoldás. $24 = 2^3 \cdot 3$, így szükséges és elégséges feltétel a 8-cal és a 3-mal való oszthatóság.

1 pont

A 8-cal való oszthatóság szükséges feltétele, hogy a szám 4-gyel osztható legyen, emiatt az utolsó két számjegy 24 vagy 44. A százask helyi értékén is csak 2-es vagy 4-es számjegy állhat, az adódó négy esetből csak a 224 és a 424 osztható 8-cal, a 244 és a 444 nem, tehát a keresett szám utolsó három számjegye 224 vagy 424.

1 pont

Mivel $2 + 2 + 4 = 8$, illetve $4 + 2 + 4 = 10$, az első esetben a maradék öt számjegy összegének 3-mal vett osztási maradéka 1, az utóbbiban 2 kell, hogy legyen.

1 pont*

I. eset: ha a szám végződése 224: az öt helyen lehet A) 0 db 4-es és 5 db 2-es vagy B) 3 db 4-es és 2 db 2-es, az ilyen számok darabszáma rendre 1, illetve 10.

1 pont

II. eset: ha a szám végződése 424: az öt helyen lehet A) 0 db 2-es és 5 db 4-es vagy B) 3 db 2-es és 2 db 4-es, az ilyen számok darabszáma rendre 1, illetve 10.

1 pont

Válasz: Tehát összesen 22 db ilyen szám van.

1 pont

* Ha a versenyző az első öt helyi értéken szereplő 2-es és 4-es számjegyek darabszámára vonatkozóan az összes lehetséges esetet megvizsgálja mindkét végződés esetén, mindegyik esetben indokolja, hogy az adhat-e megoldást vagy sem, és így jut arra a következtetésre, hogy a két végződés esetén mennyi lehet a 2-esek és a 4-esek darabszáma, akkor ezt a pontot kapja meg.

Összesen:

6 pont

3. Egy ABC szabályos háromszög oldalai 5780 egység hosszúak. Az AB oldalt meghosszabbítjuk A -n túl 1734 egységgel, így kapjuk a D pontot. Az AC oldalon E az a pont, amelyre teljesül, hogy AE és EC szakaszok hosszának aránya 3 : 7. A DE egyenes a BC szakaszt az F pontban metszi. Hány egység hosszú a CF szakasz?

6 pont

Megoldás. Ha az 5780 egység hosszú AC oldalt felosztjuk 3 : 7 arányban, akkor AE hossza 1734 egység lesz ($CE = 4046$),

1 pont

$AD = AE$, tehát az ADE háromszög egyenlő szárú,

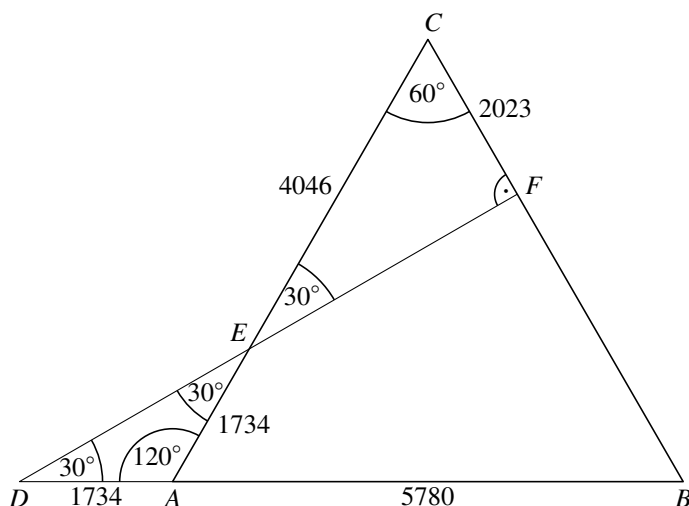
1 pont

és (mivel a szabályos háromszög külső szöge, DAE 120° -os) az ADE háromszögben a D és E csúcsnál 30° -os szögek vannak.

1 pont

Lévén a DEA szög csúcsszöge, a CEF szög is 30° , és mivel a CEF háromszögben C -nél 60° van, ezért a CFE szög 90° .

1 pont



Ezért a CFE háromszög egy félszabályos háromszög.

1 pont

Ebből következik, hogy a CF oldal hossza a CE oldal hosszának a fele: $4046 : 2 = 2023$ egység.

1 pont

Összesen:

6 pont

4. A Kosárlabda Diákolimpia döntőjében a mérkőzés első felében András 20 próbálkozásból 15, míg a második félidőben 10 kísérletből 10 kosarat szerzett. Balázs az első félidőben 12-szer, míg a másodikban 18-szor dobott kosárra. András mindkét félidőben nagyobb százalékban volt eredményes, mint Balázs, de meglepő módon a mérkőzés végéig mindketten ugyanannyiszor találtak be. Hány kosárral szerzett többet a második félidőben Balázs, mint az elsőben?

6 pont

Megoldás. Jelölje rendre x és y ($x, y \in \mathbb{N}$) Balázs találatainak számát az első, illetve a második félidőben. Ekkor a találati arányokat megadó táblázat:

Személy	1. félidő	2. félidő
András	$\frac{15}{20}$	$\frac{10}{10}$
Balázs	$\frac{x}{12}$	$\frac{y}{18}$

1 pont

A feladat feltételei alapján:

$$\frac{x}{12} < \frac{15}{20},$$

ahonnan

$$x \leq 8.$$

1 pont

$$\frac{y}{18} < \frac{10}{10},$$

ahonnan

$$y \leq 17.$$

1 pont

$x + y \leq 8 + 17 = 25$, a szöveg szerint viszont $x + y = 25$.

1 pont

A feltételeknek megfelelő megoldás $x = 8$, $y = 17$,

1 pont

innen $y - x = 9$. Tehát Balázs a második félidőben 9-cel szerzett több találatot, mint az elsőben.

1 pont

Összesen:

6 pont

Kezdők I–II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Ádám kiszámította a $10^{2023} + 10^{2018} + 10^{2013} + \dots + 10^{18} + 10^{13} + 10^8 + 10^3$ összeget, és leírta az eredményt. Hány darab 0 számjegyet írt le Ádám? 6 pont
2. Egy $ABCD$ négyzet CD oldalára kifelé szabályos háromszöget rajzolunk, amelynek harmadik csúcsa E . Rajzoljuk meg az ABE háromszög körülírt körét. Bizonyítsuk be, hogy ennek a körnek a sugara és az $ABCD$ négyzet oldala egyenlő. 8 pont
3. Van 9 kártyánk, amelyekre rendre az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok vannak felírva úgy, hogy minden lapon pontosan egy számjegy található. Az összes kártya felhasználásával számokat alakítunk ki (például 8, 213, 49 és 657). Mennyi a képzett számok összegének a legkisebb értéke,
a) ha az összes képzett szám prím, illetve
b) ha az összes kialakított szám összetett? 8 pont
4. Egy légitársaság járataira egy személy csak adott tömegű csomagot vihet magával ingyenesen, ezen felül kilogrammonként valamekkora pótdíjat kell fizetni. Egy házaspár együtt 99 kg tömegű csomagot vitt magával, amiért 90, illetve 120 dollár pótdíjat fizettek. Egy másik utasnak egyedül 99 kg tömegű csomagja volt, és ezért 402 dollár pótdíjat fizetett. Mekkora tömegű poggyász vihető fel a gépre személyenként díjmentesen? Mennyi volt a házaspár poggyászainak tömege? 8 pont
5. Egy 10×10 -es táblázat minden mezőjét pirosra, fehérre vagy zöldre színezzük. A táblázatban 20 piros mező található, és az oldalszomszédos egységnégyzetek mindig különböző színűek. A két szomszédos mezőből álló részeket tekinthetjük egy dominónak. Egy dominót nevezzünk jónak, ha egyik része zöld, a másik pedig fehér színű.
a) Bizonyítsuk be, hogy a táblázatból mindig ki lehet vágni 30 jó dominót.
b) Adjunk példát olyan táblázatra, amiből 40 jó dominót lehet kivágni.
c) Konstruáljunk olyan táblázatot, amelyből nem lehet 30-nál több jó dominót kivágni. 10 pont

Kezdők I–II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Ádám kiszámította a $10^{2023} + 10^{2018} + 10^{2013} + \dots + 10^{18} + 10^{13} + 10^8 + 10^3$ összeget, és leírta az eredményt. Hány darab 0 számjegyet írt le Ádám? 6 pont

Megoldás. 10^n : $n + 1$ jegyű szám, amely n darab 0-ra végződik ($n \in \mathbb{N}^+$), az első számjegy pedig 1. Mivel a feladatban szereplő összeg utolsó tagja 10^3 , ezért a szám végén van 3 db 0 jegy, és előttük 1 db 1-es áll.

1 pont

Ezután minden hatvány 4 db 0-val és 1 db 1-essel növeli a szám jegyeit.

2 pont

Ez a növelés 404-szer történik, mert $2023 = 3 + 5 \cdot 404$.

2 pont

Ezért az eredmény $404 \cdot 4 + 3 = 1619$ db 0 számjegyet tartalmaz.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. Egy $ABCD$ négyzet CD oldalára kifelé szabályos háromszöget rajzolunk, amelynek harmadik csúcsa E . Rajzoljuk meg az ABE háromszög körülírt körét. Bizonyítsuk be, hogy ennek a körnek a sugara és az $ABCD$ négyzet oldala egyenlő.

8 pont

1. megoldás. Vegyük fel a kör középpontját (O), és kössük össze A -val és E -vel.

1 pont

Húzzuk be az AE szakaszt.

Be fogjuk látni, hogy AEO és AED egybevágó háromszögek. Mivel mindkettő egyenlő szárú és közös az alapjuk, ezért elegendő szögeik (egy megfelelő szögük) egyenlőségét megmutatni.

Az ADE egyenlő szárú háromszög,

a D -nél lévő szárszöge 150° ,

mert a négyzet és a szabályos háromszög egy-egy belső szögének összege.

Tehát a $DEA \sphericalangle$ és az $DAE \sphericalangle$ egyaránt 15° -os.

1 pont

Az EO egyenes a szabályos háromszög (és a négyzet) szimmetriatengelye (mert O és E is rajta van AB szakaszfelező merőlegesén, mert $OA = OB$ és $EA = EB$), ezért a $DEO \sphericalangle = 30^\circ$, ebből a $DEA \sphericalangle = 15^\circ$ -ot tesz ki, tehát az $AEO \sphericalangle = 15^\circ$.

1 pont

1 pont

Vagyis az AEO egyenlő szárú háromszög szögei szintén 15° , 15° és 150° , tehát egybevágó az AED háromszöggel.

1 pont

Tehát $AO = AD$, vagyis a négyzet oldala és a kör sugara egyenlő.

1 pont

Összesen:

8 pont

2. megoldás. Vegyük fel a kör középpontját (O), és kössük össze A -val, E -vel és B -vel.

1 pont

Az $AOED$ négyszög deltoid, mert $AO = OE$ (a kör sugarai), és $AD = DE$.

1 pont

$DEO \sphericalangle = 30^\circ$, mert az O és E pontok illeszkednek az AB szakasz felezőmerőlegesére – amely egyben DC felezőmerőlegese is –, tehát OE felezi a $CED \sphericalangle$ -et.

2 pont

Mivel $AOED$ deltoid, ezért $DAO \sphericalangle$ is 30° ,

1 pont

ezért az $OAB \sphericalangle = 60^\circ$.

1 pont

Vagyis az OAB egyenlő szárú háromszög (tudjuk, hogy $OA = OB$) szabályos, tehát minden oldala egyenlő hosszú.

1 pont

Tehát $OA = AB$, azaz a négyzet oldala és a kör sugara egyenlő.

1 pont

Összesen:

8 pont

3. Van 9 kártyánk, amelyekre rendre az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok vannak felírva úgy, hogy minden lapon pontosan egy számjegy található. Az összes kártya felhasználásával számokat alakítunk ki (például 8, 213, 49 és 657). Mennyi a képzett számok összegének a legkisebb értéke,

- a) ha az összes képzett szám prím, illetve
b) ha az összes kialakított szám összetett? 8 pont

Megoldás. Mindkét esetben arra kell törekedni, hogy a képzett számok minél kevesebb jegyből álljanak, vagyis lehetőleg egy- vagy kétjegyűek legyenek, és közöttük minél több legyen az egyjegyű szám. 1 pont

a) A prímszámok kialakításánál a 4, 6, 8 számjegyek nem szerepelhetnek az egyes helyiértéken, a 2 és az 5 pedig csak akkor, ha nincs mellettük más számjegy. 1 pont

Így a megalkotott számok összege nem lehet kevesebb, mint

$$10 \cdot (4 + 6 + 8) + (1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9) = 207. \quad \text{1 pont}$$

Ez az összeg megvalósítható például a 2, 3, 5, 41, 67, 89 számok segítségével. 1 pont

b) Mivel a felsorolt számjegyek között 4 összetett szám található (4, 6, 8, 9), ezért a maradék 5 számjegy segítségével legalább 3 kétjegyű számot kell képezni. 1 pont

A legkisebb összeg esetén a legkisebb számjegyeknek (1, 2, 3) kell a tízes helyiértéken szerepelnie. 1 pont

Így ebben az esetben a megalkotott számok összege nem lehet kevesebb, mint

$$10 \cdot (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 99. \quad \text{1 pont}$$

Ez az összeg megvalósítható például a 6, 8, 9, 15, 27, 34 számok segítségével. 1 pont

Összesen: 8 pont

4. Egy légitársaság járataira egy személy csak adott tömegű csomagot vihet magával ingyenesen, ezen felül kilogrammonként valamekkora pótdíjat kell fizetni. Egy házaspár együtt 99 kg tömegű csomagot vitt magával, amiért 90, illetve 120 dollár pótdíjat fizettek. Egy másik utasnak egyedül 99 kg tömegű csomagja volt, és ezért 402 dollár pótdíjat fizetett. Mekkora tömegű poggyász vihető fel a gépre személyenként díjmentesen? Mennyi volt a házaspár poggyászainak tömege? 8 pont

1. megoldás. A házaspár a 99 kg-ért együtt 210 \$ pótdíjat fizetett, ami 192 \$-ral kevesebb, mint amit az egyedül utazó utas fizetett 99 kg-ért. 1 pont

Ez a különbség abból adódott, hogy ők ketten voltak, így az ingyenesen felvihető mennyiséget kétszer vették igénybe. Vagyis az ingyenesen felvihető tömeg pótdíja, ha túlsúly, 192 \$ lenne. 2 pont

Így (az egyedül utazó utas adatai alapján), hogy 99 kg poggyászért összesen $402 + 192 = 594$ \$ pótdíjat kellene fizetni, ha nem lenne ingyenesen felvihető mennyiség. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy a pótdíj $594 : 99 = 6$ \$ kg-onként. 1 pont

Tehát az egyedül utazó utas $402 : 6 = 67$ kg után fizetett pótdíjat, vagyis $99 - 67 = 32$ kg az ingyenesen felvihető tömegű csomag. 1 pont

Ellenőrzés: a házaspár $90 : 6 = 15$ kg, illetve $120 : 6 = 20$ kg után fizetett pótdíjat, vagyis $32 + 15 = 47$ kg, illetve $32 + 20 = 52$ kg tömegű csomagjuk volt, ami összesen valóban $47 + 52 = 99$ kg. 1 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. A feladat egyenlettel, egyenletrendszerrel is megoldható, például ismeretlent (x) bevezetve az ingyenesen felvihető tömegre és a pótdíj kg-onkénti mértékére (y)

1 pont

felírhatók az alábbi egyenletek:

$$x + \frac{90}{y} + x + \frac{120}{y} = 99, \quad (1) \quad 1 \text{ pont}$$

$$x + \frac{402}{y} = 99. \quad (2) \quad 1 \text{ pont}$$

$\frac{6}{y} = z$ helyettesítéssel (nem szükséges, de átláthatóbb):

$$2x + 35z = 99, \quad (1)$$

$$x + 67z = 99. \quad (2)$$

A két egyenlet jobb oldala egyenlő, így a bal oldalaik is, ezért $x = 32z$ (vagy $x = \frac{192}{y}$)

1 pont

adódik, ahonnan behelyettesítéssel $99z = 99$, vagyis $z = 1$ (vagy $\frac{6}{y} = 1$),

1 pont

amiből megkapjuk, hogy $x = 32$ (kg)

1 pont

és $y = 6$ (\$/kg)

1 pont

A házaspár $90 : 6 = 15$ kg, illetve $120 : 6 = 20$ kg után fizetett pótdíjat vagyis $32 + 15 = 47$ kg, illetve $32 + 20 = 52$ kg tömegű csomagjuk volt, ami összesen valóban $47 + 52 = 99$ kg. Az egyedülálló személy által fizetendő pótdíj $(99 - 32) \cdot 6 = 67 \cdot 6 = 402$ \$ valóban.

1 pont

Összesen:

8 pont

- 5.** Egy 10×10 -es táblázat minden mezőjét pirosra, fehérre vagy zöldre színezzük. A táblázatban 20 piros mező található, és az oldalszomszédos egységnégyzetek mindig különböző színűek. A két szomszédos mezőből álló részeket tekinthetjük egy dominónak. Egy dominót nevezzünk jónak, ha egyik része zöld, a másik pedig fehér színű.

a) Bizonyítsuk be, hogy a táblázatból mindig ki lehet vágni 30 jó dominót.

b) Adjunk példát olyan táblázatra, amiből 40 jó dominót lehet kivágni.

c) Konstruáljunk olyan táblázatot, amelyből nem lehet 30-nál több jó dominót kivágni.

10 pont

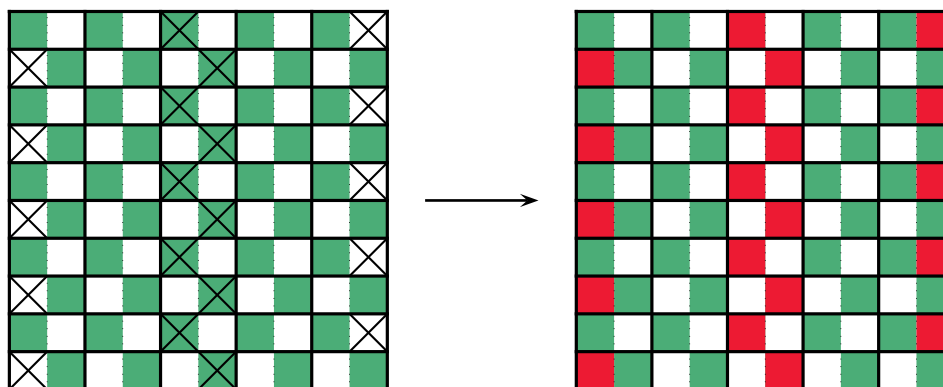
Megoldás.

a) Osszuk fel a táblázatot az ábra szerint 50 dominóra. Ezek közül legfeljebb 20 tartalmaz piros színű mezőt. A többi 30 mindegyike jó dominó, mivel nincs két szomszédos egységnégyzete azonos színűre festve.

2 pont

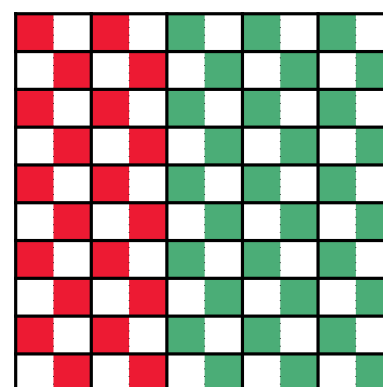
b) Színezzük ki a táblázatot a sakktábla mintájára zöld-fehérre, majd a megjelölt 20 mezőt fessük át pirosra. Végül a táblázat többi részét az ábra szerint osszuk fel 40 dominóra.

Így a kívánt esethez juthatunk.



4 pont

c) Osszuk fel a táblázatot az a) pontban leírtak szerint, majd fessük zöld-fehérre a b) szerint. Ha ezután bármely 20 zöld cellát átfestjük pirosra, akkor összesen 30 jó dominónk lesz. Egy lehetőséget mutat be a következő ábra:



4 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABC \sphericalangle = DAB \sphericalangle = 45^\circ$, valamint $AB = 7\sqrt{2}$, $BC = 4$, $DA = 3$. Határozzuk meg a CD oldal hosszát.

6 pont

2. Legyenek x, y, z pozitív valós számok úgy, hogy $x + y + z = 2024$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} \leq 3036.$$

6 pont

3. Egy kavicsot helyezünk el a derékszögű koordináta-rendszer (m, n) koordinátájú rácspontjába, majd a következő játékot játszunk. Ha a kavics az (x, y) pontban van, akkor áthelyezhetjük az $(x-1, y-1)$, $(x+1, y+1)$, $(11x, y)$ és $(x, 11y)$ pontok valamelyikébe. Határozzuk meg azokat az (m, n) kezdőpontokat, ahonnan a kavicsot néhány megengedett lépéssel az origóba juttathatjuk.

8 pont

4. Legyenek a, b, c olyan pozitív egész számok, hogy egyik sem osztója a másiknak, továbbá $ab - b + 1 \mid abc + 1$. Bizonyítsuk be, hogy $c > b$.

10 pont

5. Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög CA oldalát A -n túl AB -vel, a kapott pontot jelöljük D -vel. Jelölje E a BAC szögfelezőjének és a BC oldalnak a metszéspontját, és F az AE szakasz felezőpontját. CF és AB metszéspontját jelöljük G -vel. Igazoljuk, hogy a D , E , G pontok egy egyenesre esnek!

10 pont

Kezdők III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABC\angle = DAB\angle = 45^\circ$, valamint $AB = 7\sqrt{2}$, $BC = 4$, $DA = 3$. Határozzuk meg a CD oldal hosszát.

6 pont

Megoldás. Ábra:

1 pont

Legyen az AD és BC félegyenesek metszéspontja E . Ekkor az ABE háromszögben

$$BEA\angle = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ.$$

Ebben az egyenlő szárú háromszögben a $BE = EA = a$ jelölést bevezetve, és a Pitagorasz-tételt alkalmazva $a^2 + a^2 = (7\sqrt{2})^2$, amiből $a = 7$ adódik. Így $CE = BE - BC = 7 - 4 = 3$ és $DE = AE - AD = 7 - 3 = 4$.

2 pont

Az ABE derékszögű háromszögben szintén a Pitagorasz-tételt alkalmazva

$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

2 pont

Tehát a négyszög keresett oldalának hossza 5 egység.

1 pont

Összesen:

6 pont

2. Legyenek x , y , z pozitív valós számok úgy, hogy $x + y + z = 2024$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} \leq 3036.$$

6 pont

Megoldás. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\sqrt{xy + xz} = \sqrt{x(y + z)} \leq \frac{x + (y + z)}{2} = \frac{2024}{2} = 1012.$$

4 pont

Ugyanígy $\sqrt{xy + yz} \leq 1012$ és $\sqrt{xz + yz} \leq 1012$. Ezeket összeadva adódik a bizonyítandó állítás.

2 pont

Összesen:

6 pont

Megjegyzés. Az egyenlőség nem teljesülhet, mivel az $x = y + z$, $y = z + x$, $z = x + y$ feltételek a pozitív valós számok halmazán egyszerre nem állhatnak fenn.

3. Egy kavicsot helyezünk el a derékszögű koordináta-rendszer (m, n) koordinátájú rácspontjába, majd a következő játékot játszunk. Ha a kavics az (x, y) pontban van, akkor áthelyezhetjük az $(x-1, y-1)$, $(x+1, y+1)$, $(11x, y)$ és $(x, 11y)$ pontok valamelyikébe. Határozzuk meg azokat az (m, n) kezdőpontokat, ahonnan a kavicsot néhány megengedett lépéssel az origóba juttathatjuk. **8 pont**

Megoldás. Ha az első vagy a második típusú lépést alkalmazzuk, akkor $m - n$ nem változik, ha pedig a harmadik vagy a negyedik típusút, akkor 10 többszörösével nő vagy csökken. Tehát az $m - n$ szám 10-es maradéka végig változatlan marad, így ahhoz, hogy az origót elérjük, mindenképpen

$$m \equiv n \pmod{10}$$

kell, hogy teljesüljön.

3 pont

Most megmutatjuk, hogy ezekből a pontokból az origó mindig elérhető. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $m \geq n$, legyen $m = n + 10k$. A lépések ismételt alkalmazásával

$$(m, n) \mapsto (m - n + 1, 1) = (10k + 1, 1) \mapsto (10k + 1, 11) \mapsto (10(k - 1) + 1, 1)$$

$$(10(k - 1) + 1, 1) \mapsto (10(k - 1) + 1, 11) \mapsto (10(k - 2) + 1, 1).$$

3 pont

Ezt ismételve látható, hogy elérhetünk a $(11, 1)$ pontba, ahonnan a

$$(11, 1) \mapsto (11, 11) \mapsto (0, 0)$$

lépésekkel fejezzük be a konstrukciót.

2 pont

Összesen:

8 pont

4. Legyenek a, b, c olyan pozitív egész számok, hogy egyik sem osztója a másiknak, továbbá $ab - b + 1 \mid abc + 1$. Bizonyítsuk be, hogy $c > b$. **10 pont**

Megoldás. A feltételből következik, hogy

$$ab - b + 1 \mid abc + 1 - (ab - b + 1) = abc - ab + b = b(ac - a + 1). \quad 2 \text{ pont}$$

Mivel $b \mid ab - b$, ezért $(b, ab - b + 1) = 1$, vagyis $ab - b + 1 \mid ac - a + 1$. 2 pont

Ha $ab - b + 1 = ac - a + 1$ lenne, akkor $a(c - 1) = b(a - 1)$. Mivel a, b és c közül egyik sem osztja a másikat, ezért $a, b, c > 1$. Továbbá $(a, a - 1) = 1$ miatt ekkor $a \mid b$ teljesülne, ami ellentmondás. 2 pont

Tehát $ac - a + 1 \geq 2ab - 2b + 2$, amiből

$$ac + 2b \geq 2ab + a + 1 = ab + ab + a + 1 \geq ab + 2b + a + 1 > ab + 2b,$$

azaz $c > b$.

4 pont

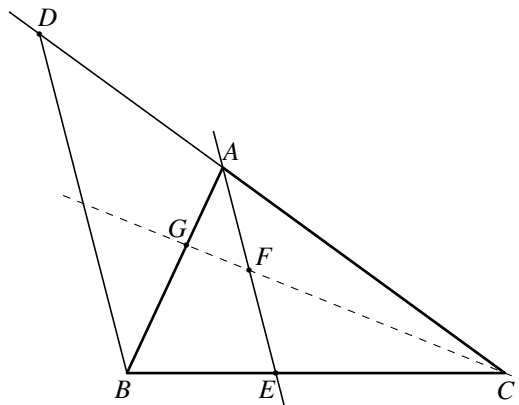
Összesen:

10 pont

5. Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög CA oldalát A -n túl AB -vel, a kapott pontot jelöljük D -vel. Jelölje E a BAC szögfelezőjének és a BC oldalnak a metszéspontját, és F az AE szakasz felezőpontját. CF és AB metszéspontját jelöljük G -vel. Igazoljuk, hogy a D, E, G pontok egy egyenesre esnek! **10 pont**

Megoldás. Az ADB háromszög egyenlő szárú, ezért $\angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD)$.

1 pont



Mivel AE felezi $\angle CAB$ szöveget, ezért $\angle CAE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD)$.

2 pont

Tehát $BD \parallel AE$, vagyis $ADBE$ trapéz.

1 pont

Ismert, hogy egy trapéz alapjainak felezőpontja, a szárak metszéspontja (ha létezik) és az átlók metszéspontja egy egyenesen vannak.

2 pont

Az $ADBE$ trapéz esetén ez az egyenes a CF egyenes. Ez az AB átlót a G pontban metszi, és mivel tartalmazza az átlók metszéspontját is, ezért ez a metszéspont szükségképpen a G pont lehet csak.

2 pont

Tehát a G rajta van a DE átlón, vagyis az állítást igazoltuk.

2 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy görög szigeten csak alfák, béták és gammák élnek. Az alfák mindig igazat mondanak, a béták mindig hazudnak, a gammák felváltva mondanak igazat és hazugságot (nem összevissza, hanem egymástól függetlenül, de hazugság után biztosan igazság jön, igazság után pedig hazugság). Találkozunk egy csoport szigetlakóval, akik ismerik egymást, és mindenkitől megkérdezzük a következő 4 kérdést:

- Van köztetek alfa?
- Te alfa vagy?
- Van köztetek béta?
- Hazudtál már valaha?

Az első kérdésre 31-en, a másodikra 20-an, a harmadikra 13-an válaszoltak igennel.

Hányan válaszoltak igennel az utolsó kérdésre?

10 pont

2. Az $ABCD$ trapéz alapjai az AB és CD oldalak, az AC átló felezőpontja F . Bizonyítsuk be, hogy ha az ABF és az ACD háromszögek területe egyenlő, akkor a $BCDF$ négyszög is trapéz. **10 pont**

3. Egy táblára felírjuk az $1, 2, 3, \dots, 15$ számokat. Ezután minden lépésben kiválasztunk a számok közül két olyat, amelyek közül az egyik osztója a másiknak. A számokat töröljük, és felírjuk helyettük az egész hányadosukat. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a táblán már egyetlen olyan szám sem marad, amelyik osztója lenne egy másiknak.

Legkevesebb hány szám maradhat a táblán?

10 pont

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy görög szigeten csak alfák, béták és gammák élnek. Az alfák mindig igazat mondanak, a béták mindig hazudnak, a gammák felváltva mondanak igazat és hazugságot (nem összevissza, hanem egymástól függetlenül, de hazugság után biztosan igazság jön, igazság után pedig hazugság). Találkozunk egy csoport szigetlakóval, akik ismerik egymást, és mindenkitől megkérdezzük a következő 4 kérdést:

- Van köztetek alfa?
- Te alfa vagy?
- Van köztetek béta?
- Hazudtál már valaha?

Az első kérdésre 31-en, a másodikra 20-an, a harmadikra 13-an válaszoltak igennel.

Hányan válaszoltak igennel az utolsó kérdésre?

10 pont

Megoldás. Legyen a csoportban lévő alfák száma a , béták száma b , olyan gamma, aki az első kérdésre igazat mond c , és olyan gamma, aki az első kérdésre hazudik d , ahol a, b, c és d természetes számok.

Ha $a \neq 0$, akkor az első kérdésre $a + c$, 1 pont

a másodikra $a + b + c$ igen választ kaptunk, 1 pont

ami ellentmondás, mert $20 < 31$. Ez azt jelenti, hogy $a = 0$ kell legyen. 1 pont

Ha b is 0 lenne, akkor az első és harmadik kérdésre is d igen választ kapnánk, 1 pont

ami ellentmondás, mert $31 \neq 13$, így $b \neq 0$. 1 pont

Ebben az esetben az első 3 kérdésre adott válaszok alapján a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$b + d = 31 \quad 1 \text{ pont}$$

$$b + c = 20 \quad 1 \text{ pont}$$

$$c = 13 \quad 1 \text{ pont}$$

Ebből $b = 7$ és $d = 24$. 1 pont

Mivel az utolsó kérdésre d számú igen választ fogunk kapni, ezért a válasz 24.

1 pont

Összesen:

10 pont

2. Az $ABCD$ trapéz alapjai az AB és CD oldalak, az AC átló felezőpontja F . Bizonyítsuk be, hogy ha az ABF és az ACD háromszögek területe egyenlő, akkor a $BCDF$ négyszög is trapéz. **10 pont**

1. megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy FD és BC is párhuzamos.

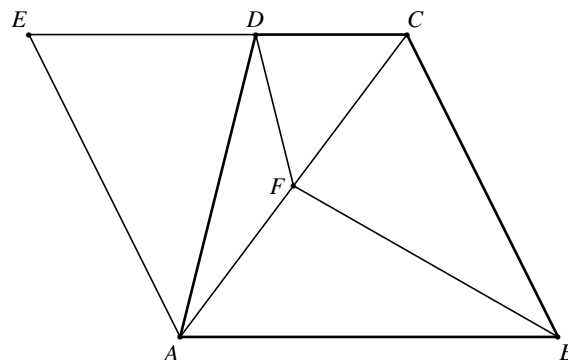
Vegyük fel az $ABCD$ trapézt, majd a CD félegyenesen azt az E pontot, amelyre $EC = AB$.

1 pont

Az ABC háromszögben FB súlyvonal, ami két egyenlő területű részre osztja a háromszöget:
 $T_{ABC} = 2T_{ABF}$.

A feladat feltétele szerint $T_{ABF} = T_{ACD}$, ezért
 $T_{ABC} = 2T_{ACD}$.

Mivel az ABC és ACD háromszögeknek az AB illetve CD oldalhoz tartozó magassága azonos hosszúságú (hiszen ez az $ABCD$ trapéz alapokhoz tartozó magassága), valamint $T_{ABC} = 2T_{ACD}$, ebből $AB = 2CD$.



1 pont

1 pont

2 pont

Vegyük fel E pontot a CD félegyenesen úgy, hogy EC és AB egyenlő hosszú legyen. Mivel EC és AB párhuzamos is, ezért az $ABCE$ négyszög paralelogramma.

1 pont

Mivel az $ABCE$ négyszög paralelogramma, másik oldalpárja is párhuzamos és egyenlő, azaz AE és BC is párhuzamos.

1 pont

Az ACE háromszögben FD középvonal, hiszen éppen az oldalfelezési pontokra illeszkedik.

1 pont

Mivel egy háromszög valamely középvonala párhuzamos a harmadik oldallal, FD és AE párhuzamos.

1 pont

Tehát FD és AE párhuzamos, valamint AE és BC is párhuzamos, ebből az következik, hogy FD és BC is párhuzamos, ezzel az állítást beláttuk.

1 pont

Összesen:

10 pont

2. megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy FD és BC is párhuzamos.

Vegyük fel az ABC háromszögben az AB oldallal párhuzamos F pontra illeszkedő középvonalat, legyen ez FG .

1 pont

Az ABC háromszögben az FB szakasz súlyvonal, ami az ABC háromszög területét felezi, ezért az ABF háromszögben az AB oldalhoz tartozó magasság fele akkora, mint az ABC háromszögben az AB oldalhoz tartozó magasság (ami a trapéz alapokhoz tartozó magassága, tehát egyben az ACD háromszögben a CD oldalhoz tartozó magasság is).

2 pont*

A feladat feltétele szerint $T_{ABF} = T_{ACD}$, ezért $\frac{a \cdot \frac{m}{2}}{2} = \frac{c \cdot m}{2}$, ahol m a trapéz alapokhoz tartozó magasságát jelöli.

1 pont

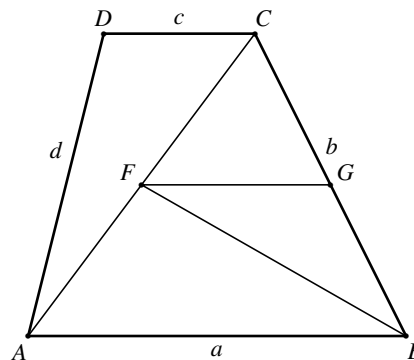
Az egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a = 2c$.

1 pont

Az ABC háromszögben felvett FG középvonal párhuzamos az AB oldallal, ebből következően CD -vel is, másrészt fele akkora, mint az $AB = a$ oldal, tehát $FG = c$.

Tehát az $FGCD$ négyszögben van egy párhuzamos és egyenlő oldalpár: $FG = CD$ és $FG \parallel CD$, ezért az $FGCD$ négyszög egy paralelogramma.

Mivel az $FGCD$ négyszög paralelogramma, másik oldalpárja is párhuzamos és egyenlő, azaz FD és GC is párhuzamos, ezzel az állítást beláttuk, hiszen G illeszkedik a BC oldalra.



2 pont

2 pont

1 pont

10 pont

Összesen:

Megjegyzés. A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatért is megkaphatja a versenyző:

Az ABC háromszög hasonló az FGC háromszöghöz, hiszen szögeik egyenlők, a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$. Ebből következően az ABF háromszögben az AB oldalhoz tartozó magasság a trapéz alapokhoz tartozó magasságának fele.

3. Egy táblára felírjuk az 1, 2, 3, ..., 15 számokat. Ezután minden lépésben kiválasztunk a számok közül két olyat, amelyek közül az egyik osztója a másiknak. A számokat töröljük, és felírjuk helyettük az egész hányadosukat. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a táblán már egyetlen olyan szám sem marad, amelyik osztója lenne egy másiknak.

Legkevesebb hány szám maradhat a táblán?

10 pont

Megoldás. A 11 és 13 prímszámok soha nem kerülhetnek törlésre, mivel egyetlen osztójuk az 1, és a számok között nem szerepel egyetlen többszörösük sem.

1 pont

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a táblán levő számok szorzata az egyes lépésekben!

A kezdeti szorzat prímtényezős felbontásában a 2 kitevője: $7 + 3 + 1 = 11$, mert 7 páros, 3 néggyel osztható és 1 nyolccal osztható szám van a számok között.

1 pont

A 3 kitevője hasonlóan gondolkodva: $5 + 1 = 6$, az 5 kitevője 3, a 7-é pedig 2.

Tehát kezdetben a számok szorzata: $2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

1 pont

Minden lépés során kiválasztunk egy a és $a \cdot k$ számot $a, k \in \mathbb{N}^+$, amelyeket aztán kicseréljük a k számra. Azaz a szorzatuk $a^2 \cdot k$ -ről k -ra változik.

Ez alapján a számok szorzatában a prímosztók kitevőinek paritása nem változik meg.

1 pont

Így a számok szorzata végig osztható lesz $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ -mal.

1 pont

Így a 11 és 13 mellett mindenképpen szerepelnie kell legalább még egy számnak, a $2 \cdot 5 = 10$ -nek.

1 pont

Példa megfelelő eljárásra:

Számok	Törölt számok	Helyettük felírt szám
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	5, 15	3
1, 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14	7, 14	2
1, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13	4, 12	3
1, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13	3, 9	3
1, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 8, 10, 11, 13	2, 8	4
1, 2, 3, 3, 3, 4, 6, 10, 11, 13	3, 6	2
1, 2, 2, 3, 3, 4, 10, 11, 13	2, 4	2
1, 2, 2, 3, 3, 10, 11, 13	3, 3	1
1, 1, 2, 2, 10, 11, 13	2, 2	1
1, 1, 1, 10, 11, 13		

Innen az 1-esek további 3 lépésben (bármivel párosítva) törölhetők.

3 pont

Tehát legkevesebb 3 szám szerepelhet a táblán az eljárás végén.

1 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - yz = |y - z| + 1$$

$$y^2 - zx = |z - x| + 1$$

$$z^2 - xy = |x - y| + 1$$

egyenletrendszert.

10 pont

2. Egy 10×10 -es tábla minden mezőjébe beírtuk az 1, 2, ..., 10 számok valamelyikét úgy, hogy bármely két közös éllel vagy csúccsal rendelkező mezőbe írt szám relatív prím egymással. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, amelyet legalább 17-szer írtunk le!

10 pont

3. Adott egy $ABCD$ rombusz és a beírt köre. A PQ szakaszt úgy vesszük fel, hogy P az AB oldal, Q pedig az AD oldal egy-egy belső pontja legyen, és PQ érintse a rombusz beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy CPQ háromszög területe nem függ PQ helyzetétől, vagyis bármely, a feltételeknek megfelelő PQ választása esetén ugyanakkora (állandó).

10 pont

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - yz = |y - z| + 1 \quad (1)$$

$$y^2 - zx = |z - x| + 1 \quad (2)$$

$$z^2 - xy = |x - y| + 1 \quad (3)$$

egyenletrendszert.

10 pont

Megoldás. Az egyenletrendszer az x, y, z ismeretlenekre nézve szimmetrikus, ezért először azon megoldásait fogjuk megkeresni, ahol $x \geq y \geq z$, és ezekből fogjuk a többit előállítani.

1 pont

Ha $x \geq y \geq z$, akkor az abszolút érték elhagyásával kapjuk, hogy

$$x^2 - yz = y - z + 1 \quad (1)$$

$$y^2 - zx = x - z + 1 \quad (2)$$

$$z^2 - xy = x - y + 1 \quad (3) \quad 1 \text{ pont}$$

Kivonva a (2)-es egyenletet a (1)-esből, illetve a (3)-as egyenletet a (2)-esből és szorzattá bontva:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - yz + zx &= y - x & \Rightarrow & (x - y)(x + y + z + 1) = 0 \\ y^2 - z^2 - zx + xy &= -z + y & \Rightarrow & (y - z)(x + y + z - 1) = 0 \end{aligned} \quad 2 \text{ pont}$$

A kapott egyenletekből következik, hogy x, y, z nem lehetnek páronként különböző valós számok.

Az $x = y = z$ eset nem lehetséges, mivel ekkor az eredeti egyenletekből a $0 = 1$ ellentmondáshoz jutunk.

2 pont

Így két esetet vizsgálhatunk:

a) $x = y > z$ esetén $x + y + z = 1$, $z = 1 - 2x$ és az (1)-es egyenlet alapján $x(3x - 4) = 0$, amiből $x = 0$ vagy $x = \frac{4}{3}$.

$(x; y; z) = (0; 0; 1)$ vagy $(x; y; z) = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$, amelyek közül a $(0; 0; 1)$ számhármass nem teljesíti az $x = y > z$ feltételt.

2 pont

b) $x > y = z$ esetén $x + y + z = 1$, $x = -1 - 2z$ és a (3)-as egyenlet alapján $z(3z + 4) = 0$, amiből $z = 0$ vagy $z = -\frac{4}{3}$.

$(x; y; z) = (-1; 0; 0)$ vagy $(x; y; z) = \left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$, amelyek közül a $(-1; 0; 0)$ számhármass nem teljesíti az $x > y = z$ feltételt.

1 pont

Így a szimmetriát figyelembe véve az egyenletrendszer megoldásai:

$$M = \left\{ \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right), \left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right), \left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right) \right\}. \quad 1 \text{ pont}$$

A kapott számhármassok teljesítik a feladat feltételeit.

Összesen:

10 pont

2. Egy 10×10 -es tábla minden mezőjébe beírtuk az $1, 2, \dots, 10$ számok valamelyikét úgy, hogy bármely két közös éllel vagy csúccsal rendelkező mezőbe írt szám relatív prím egymással. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, amelyet legalább 17-szer írtunk le!

10 pont

Megoldás. Osszuk fel a 10×10 -es táblát 25 darab egymástól diszjunkt 2×2 -es csoportra.

1 pont

Egy ilyen csoporton belül bármely két mező szomszédos egymással,

1 pont

ezért minden csoportban legfeljebb egy mező tartalmazhat páros számot.

2 pont

Ugyanezen okból minden csoportban legfeljebb az egyik mezőben szerepelhet 3-as, 6-os vagy 9-es.

2 pont

Tehát minden csoportban van legalább két olyan mező, amelybe az $1, 5, 7$ számok valamelyike került.

2 pont

Ez 50 mező, így a skatulya-elv miatt az $1, 5, 7$ számok között biztosan van legalább egy olyan, amelyet legalább 17 mezőbe írtunk bele.

2 pont

Összesen:

10 pont

3. Adott egy $ABCD$ rombusz és a beírt köre. A PQ szakaszt úgy vesszük fel, hogy P az AB oldal, Q pedig az AD oldal egy-egy belső pontja legyen, és PQ érintse a rombusz beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy CPQ háromszög területe nem függ PQ helyzetétől, vagyis bármely, a feltételeknek megfelelő PQ választása esetén ugyanakkora (állandó).

10 pont

Megoldás. Bontsuk fel PQC háromszöget három részre az E pontból a csúcsokba húzott szakaszokkal: az ECP , EPQ , illetve EQC háromszögekre.

2 pont

Mivel a rombuszban az AC és BD átló egyben szögfelező is, ezért a köré írt kör középpontja (E) az átlók metszéspontja, így A, E és C egy egyenesen vannak, továbbá $AE = EC$

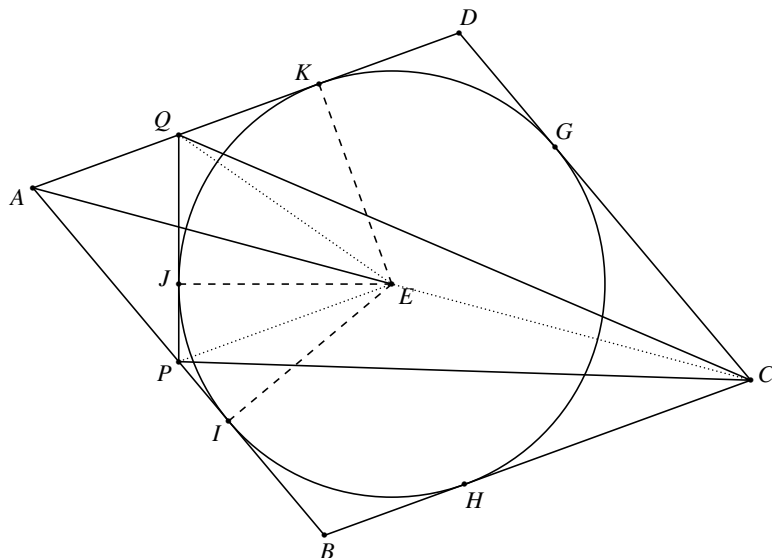
ECP háromszög területe egyenlő AEP háromszög területével, mert $AE = EC$ és a P -ből induló magasságuk közös

hasonlóan QEC háromszög területe egyenlő AEQ háromszög területével, hiszen $AE = EC$ és Q -ből induló magasságuk közös

az EPQ háromszöget bontsuk további két részre: a PJE és QJE háromszögekre

PJE és PIE háromszögek oldalai páronként egyenlőek (hiszen JE és IE a kör sugarai, PJ és PI pedig külső pontból húzott érintő szakaszok), ezért egybevágók és a területük megegyezik

1 pont



1 pont

1 pont

hasonlóan: QJE és QKE háromszögek oldalai páronként egyenlőek, (hiszen JE és KE a kör sugarai, QJ és QK pedig külső pontból húzott érintő szakaszok), ezért egybevágók és a területük megegyezik

1 pont

Ezzel a vizsgált háromszöget átdaraboltuk az $AIEK$ négyszögbe, így területük megegyezik

1 pont

Az $AEIK$ négyszög helyzete független PQ helyzetétől, ezért a PQC háromszög területe is független tőle, és ezzel az állítást beláttuk.

1 pont

Összesen:

10 pont

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Beni és Lili egyszerre indulva 10-10 kört futnak az atlétikai pályán. Domi mindig felírja annak a nevét, aki épp befejez egy kört, így végül egy 20 hosszú listát kap.

a) Hányféle lehet ez a lista, ha egyszer sem fejezik be a körüket éppen egyszerre?

2 pont

b) Hányféle lehet ez a lista, ha azt is feltesszük, hogy mindketten végig egyenletes sebességgel futnak?

8 pont

2. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M , a körülírt körének középpontja O . Jelöljük F -fel a CM szakasz felezőpontját! Az O -n keresztül AB oldallal húzott párhuzamos egyenes BC -t D -ben metszi. Igazoljuk, hogy DF merőleges FA -ra!

10 pont

3. Egy asztalitenisz-versenyen (amelyen legalább ketten indultak) bármelyik két résztvevő pontosan egyszer játszott egymással. A verseny végeztével észrevették, hogy bármelyik két versenyzőhöz található olyan, aki mindkettejüket legyőzte, olyan, aki mindkettejüktől kikapott, olyan, aki egyiket legyőzte, a másiktól kikapott, és olyan is, aki egyiktől kikapott, a másikat legyőzte. Legalább hányan vettek részt a versenyen?

10 pont

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Beni és Lili egyszerre indulva 10-10 kört futnak az atlétikai pályán. Domi mindig felírja annak a nevét, aki épp befejez egy kört, így végül egy 20 hosszú listát kap.

a) Hányféle lehet ez a lista, ha egyszer sem fejezik be a körüket éppen egyszerre?

2 pont

b) Hányféle lehet ez a lista, ha azt is feltesszük, hogy mindketten végig egyenletes sebességgel futnak?

8 pont

Megoldás. a) A listán 20 név szerepel: Beni 10-szer és Lili is 10-szer. Ilyen lista $\binom{20}{10}$ féle van, megmutatjuk, hogy mindegyik elő is fordulhat. Például fussanak el együtt 200m-ig (fél kört), ott

álljanak meg, és csinálják azt, hogy mindig az fut egy teljes kört, akinek a neve a listán következik (közben a másik pihen), mindkettejük esetében a 10. alkalomnál természetesen csak a fennmaradó 200 métert (fél kört) futja le, aki következik. Tehát valóban mindegyik elő is fordulhat, így a lehetséges listák száma valóban $\binom{20}{10}$.

2 pont

b) Jelölje a , illetve b , hogy Beninek, illetve Lilinek mennyi idő szükséges egy kör teljesítéséhez. Ekkor a feltétel szerint az $a, 2a, \dots, 10a$ és $b, 2b, \dots, 10b$ értékek mind különbözők, a leírt sorrendet pedig ennek a 20 számnak a nagyságrendje határozza meg.

2 pont

Azt, hogy ia és jb (ahol $1 \leq i, j \leq 10$) közül melyik a kisebb, az határozza meg, hogy a/b értéke j/i -nél kisebb vagy nagyobb. Ha a számegyenesen ábrázoljuk az összes j/i értéket ($1 \leq i, j \leq 10$), akkor a sorrendek száma éppen annyi, ahány részre ezek a számegyenesest felosztják, vagyis 1-gyel több, mint a számuk.

2 pont

Azt kell tehát meghatároznunk, hány ilyen szám van, vagyis hány olyan pozitív racionális szám van, amelynek számlálója és nevezője is legfeljebb 10. Elég az egyszerűsített alakban lévőket (vagyis amikor $(i, j) = 1$) megszámlálnunk. Számoljuk meg először az 1-nél kisebbeket. Ekkor a nevező a 2, 3, ..., 10 számok valamelyike lehet. A megfelelő törtek:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}.$$

Ezek száma 31. Az 1-nél nagyobbak ezek reciprokai, számuk szintén 31, és van még az 1, tehát összesen 63 ilyen tört van.

3 pont

Így a lehetséges áthaladási sorrendek száma 64.

1 pont

Összesen:

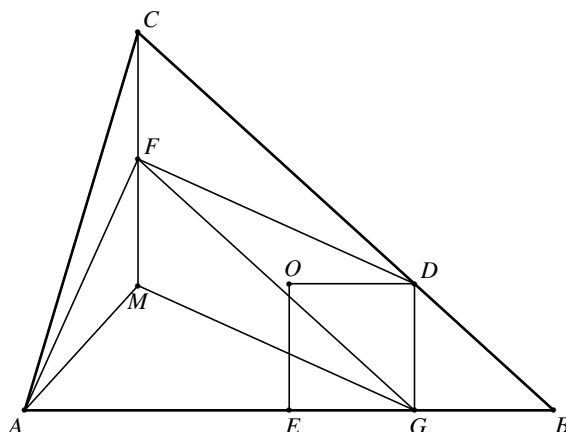
10 pont

2. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M , a körülírt körének középpontja O . Jelöljük F -fel a CM szakasz felezőpontját! Az O -n keresztül AB oldallal húzott párhuzamos egyenes BC -t D -ben metszi. Igazoljuk, hogy DF merőleges FA -ra!

10 pont

Megoldás. Jelöljük az O és D pontok AB -re eső merőleges vetületét E -vel (ez AB felezőpontja), illetve G -vel!

1 pont



Az $ABC \triangle$ Euler-egyenesé tartalmazza az M és az O pontot, valamint a háromszög S súlypontját,

továbbá tudjuk, hogy CE súlyvonal. Így belátható, hogy a $CMS\triangle \cong EOS\triangle$, és $OE = \frac{CM}{2}$. Ez az egyenlőség vektorokkal is könnyen igazolható.

4 pont

Ebből következik, hogy $CF = FM = OE = DG$, vagyis $FMGD$ és $CFGD$ paralelogrammák.

2 pont

$AM \perp BC$ miatt tehát $AM \perp FG$ is teljesül, így M magasságpontja $AGF\triangle$ -nek,

2 pont

amiből következik, hogy $AF \perp MG \parallel FD$.

1 pont

Összesen:

10 pont

3. Egy asztalitenisz-versenyen (amelyen legalább ketten indultak) bármelyik két résztvevő pontosan egyszer játszott egymással. A verseny végeztével észrevették, hogy bármelyik két versenyzőhöz található olyan, aki mindkettejüket legyőzte, olyan, aki mindkettejüktől kikapott, olyan, aki egyiket legyőzte, a másiktól kikapott, és olyan is, aki egyiktől kikapott, a másikat legyőzte. Legalább hányan vettek részt a versenyen?

10 pont

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy 7 versenyzőre lehet ilyen verseny, 6-ra (és kevesebbre) pedig nem.

Konstrukció 7 versenyzőre: jelöljük a versenyzőket a modulo 7 vett maradékosztályok, és az (X, Y) meccs győztese legyen Y pontosan akkor, ha $Y - X \in \{1, 2, 4\}$. Ez jóldefiniált, mert $Y - X \in \{1, 2, 4\}$ pontosan akkor, ha $X - Y \in \{3, 5, 6\}$, vagyis minden mérkőzésnél pontosan az egyik játékost definiáltuk győztesnek. Most ellenőrizzük, hogy ez megfelel a feltételeknek. Legyen A és B két játékos (és jelöljük a hozzájuk tartozó modulo 7 maradékosztályokat szintén A -val és B -vel). Mivel a meccsek győztesének definíciója invariáns a modulo 7 vett eltolásra, feltehető, hogy $A = 0$. Ha $B \in \{1, 2, 4\}$, akkor vegyük észre, hogy $2B$ legyőzte A -t és B -t is, hiszen $2B - B = B \in \{1, 2, 4\}$ és $2B - A = 2B = 2 \cdot \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 4\}$. Továbbá $3B - B = 2B \in \{1, 2, 4\}$, és $3B - A = 3B \in \{3, 5, 6\}$, tehát $3B$ legyőzte B -t és kikapott A -tól. Valamint $4B - B = 3B \in \{3, 5, 6\}$ és $4B - A = 4B \in \{1, 2, 4\}$, tehát $4B$ legyőzte A -t és kikapott B -től. Végül $6B - B = 5B \in \{3, 5, 6\}$ és $6B - A = 6B \in \{3, 5, 6\}$, tehát $6B$ kikapott A -tól és B -től is. Amikor pedig $B \in \{3, 5, 6\}$, akkor $2B, 3B, 4B, 6B$ rendre ellentétes eredményt értek el mind A , mind B ellen, mint a $B \in \{1, 2, 4\}$ esetekre kiszámolt (hiszen minden számolás végeredménye egy B -többszörös), tehát ebben az esetben is megtaláltuk mind a négyféle ellenfelet.

5 pont

Értelemszerűen minden más jó konstrukció is ennyit ér, ha megfelelően meg van indokolva, miért helyes.

Nyilván 6-nál kevesebb versenyzőre nincs ilyen verseny, hiszen 6 versenyzőt pusztán abból kapunk, hogy vesszük bármelyik kettőt, és a feltétel ad hozzá további négyet.

1 pont

Hat versenyzőre pedig a következő miatt nincs ilyen verseny. Indirekte mindenkinek legalább két győzelme és legalább két veresége volna a végén (a feltétel mindenkinek garantál két győzelmet és két vereséget). Mivel hatan vannak, és a győzelmek és a vereségek össz-száma azonos, ez csak úgy lehet, hogy három embernek is csak két-két győzelme van (és a maradék háromnak három-három). Válasszunk két ilyet, legyenek A és B . A feltétel szerint A és B is aratott két-két győzelmet összességében a többiek ellen. Viszont az (A, B) meccs győztesének kettejük meccse egy harmadik győzelmet jelent, ami ellentmond a választásuknak.

4 pont

Összesen:

10 pont

Haladók I. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg azokat az a, b, c pozitív prímszámokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség.

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + 3 \quad 7 \text{ pont}$$

2. Egy egyenlő oldalú $ABCDE$ ötszögben $AD = AC = BE$. Szabályos-e az ötszög? 7 pont

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^4 - 11x^2 + 25 = -6x + 9 \quad 7 \text{ pont}$$

4. A síkon három kör páronként kívülről érinti egymást. Sugaruk 1, 2, illetve 3 egységnyi. Milyen messze van a három kör középpontja által meghatározott háromszögbe írt kör középpontja a háromszög csúcsaitól? 7 pont

5. Az $\{1; 2; 3; \dots; 100\}$ halmaznak hány olyan háromelemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege 100? 7 pont

Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg azokat az a, b, c pozitív prímszámokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség.

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + 3 \quad 7 \text{ pont}$$

Megoldás. Ha $c = 2$, akkor $a^2 + ab + b^2 = 7$. Mivel $a, b \geq 2$, ezért $a^2 + ab + b^2 \geq 4 + 4 + 4 = 12$, azaz $c = 2$ esetén nem kapunk megoldást. 2 pont

Ha $c > 2$ és c prímszám, akkor c páratlan, és így $c^2 + 3$ páros szám. 1 pont

a) Ha a és b is páratlan prímszám, akkor a^2, ab, b^2 és így $a^2 + ab + b^2$ is páratlan szám, tehát nem kapunk megoldást. 1 pont

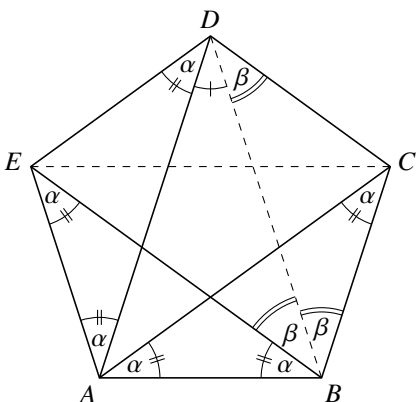
b) Ha a és b közül az egyik páros, a másik páratlan szám, akkor az a^2, ab, b^2 számok közül kettő páros, egy páratlan, így $a^2 + ab + b^2$ összegük ismét páratlan szám. Így most sem adódik megoldás. 2 pont

c) Ha a és b is páros prímszám, akkor csak $a = b = 2$ lehet. Ekkor $c^2 + 3 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2 = 12$ és így $c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$. Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $a = b = 2; c = 3$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy egyenlő oldalú $ABCDE$ ötszögben $AD = AC = BE$. Szabályos-e az ötszög?

7 pont



1. megoldás. Használjuk az ábrát és a jelöléseit. Ahhoz, hogy az ötszög szabályosságát igazoljuk, elegendő megmutatni, hogy egyenlők a szögei.

Mivel megfelelő oldalaik egyenlő hosszúak, ezért az ABC , a DEA és az EAB háromszögek egybevágó egyenlő szárú háromszögek. A háromszögek alapon fekvő szögei mind egyenlők, ezt a hat szöget ($BAC\angle = BCA\angle = \dots = EAD\angle$) a továbbiakban α -val jelöljük.

1 pont

Továbbá az előzőek miatt az ötszög csúcsainál

$$A\angle (= BAE\angle) = B\angle (= ABC\angle) = E\angle (= DEA\angle)$$

is teljesül.

1 pont

Másfelől $AD = AC$ miatt ADC is egyenlő szárú háromszög, azaz $ADC\angle = ACD\angle$, valamint $ADE\angle = ACB\angle = \alpha$ miatt az ötszög csúcsainál $C\angle (= BCD\angle) = D\angle (= CDE\angle)$.

1 pont

A $BCDE$ négyszög szimmetrikus trapéz (alapjai CD , illetve BE), mivel a megfelelő csúcsnál lévő szögei $B\angle$ -nél és $E\angle$ -nél α -val kisebbek, $C\angle$ -nél és $D\angle$ -nél pedig egyenlők az ötszög ezeknél a csúcsoknál lévő szögeivel, és így $CBE\angle = BED\angle$ és $BCD\angle = CDE\angle$.

1 pont

Mivel $CD \parallel BE$, ezért $CDB\angle = DBE\angle$, hiszen váltószögek. Jelöljük ezt a szöget a továbbiakban β -val. Mivel $BC = CD$, ezért a BCD egyenlő szárú háromszögben is $CBD\angle = CDB\angle = \beta$.

1 pont

Másfelől, mivel megfelelő oldalaik ($AB = DE$; $BD = BD$ és $AD = BE$) megegyeznek, ezért ABD és EDB háromszögek egybevágóak, és így $EDB\angle = ABD\angle = \alpha + \beta$.

De akkor az ötszögben: $B\angle (= ABC\angle) = ABD\angle + CBD\angle = (\alpha + \beta) + \beta = \alpha + 2\beta$ és $D\angle (= CDE\angle) = CDB\angle + BDE\angle = \beta + (\alpha + \beta) = \alpha + 2\beta$. Azaz az ötszögben $B\angle = D\angle$, és így a korábbiak miatt az ötszög valamennyi szöge ugyanakkora.

2 pont

Azaz az $ABCDE$ ötszög valóban szabályos.

Összesen:

7 pont

2. megoldás. Jelöljük az ismeretlen $AC = AD = BE$ hosszúságot x -szel, az ugyancsak ismeretlen $AB = BC = CD = DE = EA$ hosszúságot y -nal.

1 pont

Ha x és y egy létező ötszög oldal- és átlóhossza, akkor létezik olyan háromszög, amelynek oldalai x , y és y hosszúságúak.

1 pont

Az x és y egyértelműen meghatározza az ABC egyenlő szárú háromszöget,

1 pont

ugyancsak egyértelműen megkapható az ABE egyenlő szárú háromszög, vagyis az E csúcs,

1 pont

továbbá a szintén egyértelműen kapható AED egyenlő szárú háromszög alapján a D csúcs is.

1 pont

Ezért az x és az y ismeretében az ötszög egyértelműen meghatározott.

1 pont

Tekintettel arra, hogy az adott tulajdonságokkal ($AC = AD = BE$ és $AB = BC = CD = DE = EA$) a szabályos ötszög rendelkezik, ezért az (x és y által egyértelműen meghatározott) $ABCDE$ ötszög csakis az x oldalhosszúságú szabályos ötszög lehet.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^4 - 11x^2 + 25 = -6x + 9$$

7 pont

Adjunk mindkét oldalhoz x^2 -et. Adódik $x^4 - 10x^2 + 25 = x^2 - 6x + 9$.

2 pont

Teljes négyzeteket kialakítva kapjuk: $(x^2 - 5)^2 = (x - 3)^2$.

1 pont

Két eset lehetséges: $x^2 - 5 = x - 3$ vagy $x^2 - 5 = -x + 3$.

1 pont

– Ha $x^2 - 5 = x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$, ennek gyökei $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

1 pont

– Ha pedig $x^2 - 5 = -x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 8 = 0$, ennek gyökei $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$ és $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}$.

1 pont

Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, mind a négy gyök kielégíti az egyenletet. (Az ekvivalens átalakításokra való hivatkozás kiváltható a megoldások leellenőrzésével.)

1 pont

Összesen:

7 pont

4. A síkon három kör páronként kívülről érinti egymást. Sugaruk 1, 2, illetve 3 egységnyi. Milyen messze van a három kör középpontja által meghatározott háromszögbe írt kör középpontja a háromszög csúcsaitól?

7 pont

Megoldás. Használjuk mellékelt ábrát.

Legyen a 3 egység sugarú kör középpontja A , a 2 egység sugarúé B és az 1 egység sugarúé C , míg A' , B' és C' a körök páronként vett érintkezési pontjai, amelyek egyúttal az ABC háromszögbe írt körnek a háromszög oldalaival vett közös pontjai. Ekkor $AB = (c =) 3 + 2 = 5$, $AC = (b =) 3 + 1 = 4$ és $BC = (a =) 2 + 1 = 3$.

Mivel a 3, 4, 5 pitagoraszai számhármass, ezért az ABC háromszög (C -nél) derékszögű.

Az ismert képlet alapján (vagy az $A'CB'O$ négyzetet észrevéve) a derékszögű ABC háromszögbe írható kör sugara

$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1$. (Ez a kétféleképpen felírt $2t = a \cdot b = r \cdot (a + b + c)$ alapján is megkapható.)

1 pont

Azaz a beírt kör O középpontja 1 távol van valamennyi oldaltól.

1 pont

Mivel a beírt kör valamely oldallal vett érintési pontjába húzott sugár merőleges az oldalra, a hat darab $OB'A$, OAC' , ..., OCB' háromszög mind olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik befogója egységnyi (mivel $r = 1$), míg a másik befogó valamelyik eredeti kör sugara,

1 pont

a beírt kör O középpontjának a csúcsoktól vett távolsága pedig éppen az átfogó. Így Pitagorasz tételét háromszor alkalmazva a megfelelő derékszögű háromszögekre adódik, hogy $OA = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{5}$ és $OC = \sqrt{2}$ hosszú.

Azaz a beírt kör középpontja rendre $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ és $\sqrt{2}$ távol van az A , B és C csúcsoktól.

2 pont

Összesen:

7 pont

5. Az $\{1; 2; 3; \dots; 100\}$ halmaznak hány olyan háromelemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege 100?

7 pont

- 1. megoldás.** – Ha a legkisebb kiválasztott szám az 1, a másik kettő összege 99, azaz a további két számra a lehetőségek a 2; 97, a 3; 96, ... és a 49; 50 lehet, ami 48 lehetőség. 1 pont
- Ha a legkisebb kiválasztott szám a 2, akkor a másik kettő összege 98, azaz a további két számra a lehetőségek a 3; 95, a 4; 94, ... és a 48; 50 lehet, ami 46 lehetőség. 1 pont
- Ha a legkisebb kiválasztott szám a 3, akkor a másik kettő összege 97, azaz a további két számra a lehetőségek a 4; 93, az 5; 92, ... és a 48; 49, ami 45 lehetőség. 1 pont
- Látható, hogy a paritástól függően az esetek száma kettővel, illetve eggyel csökken, amikor a legkisebb kiválasztott számot eggyel növeljük. 2 pont
- Az utolsó lehetőség a 32; 33; 35. 1 pont
- Tehát a válasz a feladat kérdésére

$$(48 + 46) + (45 + 43) + \dots + (3 + 1) = 94 + 88 + \dots + 4 = \frac{16 \cdot 98}{2} = 784. \quad 1 \text{ pont}$$

Összesen: 7 pont

2. megoldás. (Lehetséges a következő, kissé formálisabb érvelés is.)

Legyenek k és m olyan pozitív egészek, amelyekre $k < k + m < 100 - (2k + m)$. Ekkor a $\{k; k + m; 100 - (2k + m)\}$ egy megfelelő háromelemű részhalmaz, és minden megfelelő részhalmaz elő is áll ilyen alakban (ahol k a legkisebb elem, míg m a két kisebb elem különbsége). 1 pont

A $k < 100 - (2k + m)$ feltételt k -ra rendezve azt kapjuk, hogy $k < \frac{100 - m}{3}$, azaz $m \geq 1$ miatt $k \leq 32$. 1 pont

A $k + m < 100 - (2k + m)$ feltételt pedig m -re rendezve $m < 50 - 1,5k$ adódik. 1 pont

Vizsgáljunk meg néhány esetet:

Ha $k = 1 \Rightarrow m < 50 - 1,5 \Rightarrow m \leq 48$. Ezzel a következő halmazokat kapjuk: $\{1; 49; 50\}$, $\{1; 48; 51\}$, $\{1; 47; 52\}$, ..., $\{1; 2; 97\}$, ez 48 db megfelelő halmaz, mivel m ennyi különböző értéket vehet fel.

Ha $k = 2 \Rightarrow m < 50 - 1,5 \cdot 2 \Rightarrow m \leq 46$. Ezzel a $\{2; 48; 50\}$, $\{2; 47; 51\}$, ..., $\{2; 3; 95\}$ megfelelő halmazokat kapjuk, ez 46 db.

Ha $k = 3 \Rightarrow m < 50 - 1,5 \cdot 3 \Rightarrow m \leq 45$, innen a $\{3; 48; 49\}$, $\{3; 47; 50\}$, ..., $\{3; 4; 93\}$, halmazok adódnak, ez 45 db.

Ezt tovább folytatva legutoljára azt az esetet kapjuk, amikor $k = 32 \Rightarrow m < 50 - 1,5 \cdot 32 \Rightarrow m \leq 1$, ekkor az egyetlen megfelelő halmaz a $\{32; 33; 35\}$. 2 pont

A nagyságrendi megkötések miatt a fenti halmazok mind különbözőek.

Ahogy k -t növeljük egyesével, úgy a lehetséges m -ek száma (a becslésben szereplő $-1,5 \cdot k$ miatt) felváltva 1-gyel, illetve 2-vel csökken a megelőző esethez képest, vagyis a megfelelő

halmazok száma $48 + 46 + 45 + 43 + 42 + 40 + 39 + \dots + 4 + 3 + 1 = \frac{32 \cdot 49}{2} = 784$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás. Jól ismert, és nem is nehéz belátni, hogy ha a sorrend is számít, akkor $\binom{99}{2}$ -féle

módon lehet a 100-at három pozitív egész szám összegére bontani. 2 pont

Mivel a 100-at három egyforma számra nem lehet bontani, így ebből azokat az eseteket kell

kivonni, amelyekben két egyforma szám van:

1 pont

ez $49 \cdot 3$ -féle lehetőség (mert a két egyforma szám 49-féle lehet, és a lehetséges sorrendek száma 3).

1 pont

A megmaradó eseteket 6-szor számoltuk, hiszen három különböző számnak hatféle sorrendje lehetséges.

1 pont

Így a válasz:

$$\frac{\binom{99}{2} - 49 \cdot 3}{6} = \frac{\frac{99 \cdot 98}{2} - 49 \cdot 3}{6} = \frac{99 \cdot 49 - 49 \cdot 3}{6} = \frac{96 \cdot 49}{6} = 16 \cdot 49 = 784.$$

2 pont

Összesen:

7 pont

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Négyzetszám-e az alábbi összeg értéke?

$$1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$$

(Definíció szerint $1! = 1$, továbbá $n \geq 2$ pozitív egész esetén $n!$ az $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ szorzatot jelenti.) **7 pont**

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 - z^2 = 1 \\ y + z - x = -3 \end{array} \right\}$$

7 pont

3. Az ABC háromszögben a BC oldalhoz tartozó súlyvonal másfélszerese a BC oldalnak. Jelölje A_1 , B_1 és C_1 rendre a BC , AC és AB oldalak felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögben

$$AA_1^2 = BB_1^2 + CC_1^2.$$

7 pont

4. Egy konvex 2023-szögben behúztunk 20 átlót, amelyek páronként nem metszik egymást. Vágjuk szét a sokszöget az átlók mentén. Bizonyítsuk be, hogy a kapott sokszögek között van olyan, amelynek legalább 99 csúcsa van.

7 pont

5. Legyen $p(x)$ olyan másodfokú polinom, amelynek főegyütthatója 1. Tudjuk, hogy a $p(x)$, illetve a $p(p(x))$ polinomoknak van közös valós gyöke. Bizonyítsuk be, hogy

$$p(0) \cdot p(1) = 0.$$

7 pont

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Négyzetszám-e az alábbi összeg értéke?

$$1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$$

(Definíció szerint $1! = 1$, továbbá $n \geq 2$ pozitív egész esetén $n!$ az $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ szorzatot jelenti.) **7 pont**

Megoldás. Az $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$, azaz 3-ra végződik. **1 pont**

Ha $n \geq 5$, akkor az $n!$ osztható 10-zel (mivel $n!$ tartalmaz 5-tel és 2-vel osztható tényezőket is), azaz 0-ra végződik. **2 pont**

Mindezek alapján az $1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$ összeg utolsó számjegye $3 + 0 = 3$ lesz. **1 pont**

Egy négyzetszám nem végződikhet 3-ra (ahogy 2-re, 7-re vagy 8-ra sem). **2 pont**

Tehát az $1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$ összeg nem négyzetszám. **1 pont**

Összesen: **7 pont**

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számok halmazán.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 - z^2 = 1 \\ y + z - x = -3 \end{array} \right\} \quad \mathbf{7 \text{ pont}}$$

1. megoldás. A második egyenletből x -et kifejezve $x = y + z + 3$, és behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $(3 + z + y)^2 - y^2 - z^2 = 1$, majd innen az egyenletet rendezve adódik $2zy + 6y + 6z + 9 = 1$. **2 pont**

Miután az egyenlet mindkét oldalához 9-et adunk és kiemelésekkel szorzattá alakítunk, azt kapjuk, hogy $2(z + 3)(y + 3) = 10 \Rightarrow (z + 3)(y + 3) = 5$. **2 pont**

Az 5 lehetséges osztópárjai: $5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$, emiatt ez a 4 lehetséges számpár adja meg $(z + 3)$ és $(y + 3)$ lehetséges értékeit. **1 pont**

Innen rendre hármat-hármat kivonva az osztópárokból, illetve az $x = y + z + 3$ műveletet elvégezve adódik a négy megoldás (számhármasként felírva):

$$(x; y; z) = (-9; -8; -4), (-9; -4; -8), (3; 2; -2), (3; -2; 2). \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan dolgozunk, és mivel az egyenletrendszerben y és z szerepe szimmetrikus, mindegy, melyiket fejezzük ki.

A második egyenletből y -t kifejezve $y = x - z - 3$; ezt behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $x^2 - (x - z - 3)^2 - z^2 = 1$, innen az egyenletet rendezve adódik $-2z^2 + 2xz + 6x - 6z - 9 = 1$. **2 pont**

Miután az egyenlet mindkét oldalához 9-et adunk és kiemelésekkel szorzattá alakítunk, azt kapjuk, hogy $2(z + 3)(x - z) = 10 \Rightarrow (z + 3)(x - z) = 5$. **2 pont**

Az 5 lehetséges osztópárjai: $5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$, emiatt ez a 4 lehetséges számpár adja meg $(z + 3)$ és $(x - z)$ lehetséges értékeit. **1 pont**

Innen rendre 3-at kivonva az osztópárok első számából adódik z , ezt felhasználva az osztópárok második tényezőjéből megkapjuk x -et, és végül az $y = x - z - 3$ helyettesítéssel adódik a négy

megoldás (számhármasként felírva, mint az előző megoldásnál):

$$(x; y; z) = (-9; -8; -4), (-9; -4; -8), (3; 2; -2), (3; -2; 2).$$

2 pont

Összesen:

7 pont

3. Az ABC háromszögben a BC oldalhoz tartozó súlyvonal másfélszerese a BC oldalnak. Jelölje A_1 , B_1 és C_1 rendre a BC , AC és AB oldalak felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögben

$$AA_1^2 = BB_1^2 + CC_1^2.$$

7 pont

Megoldás. Használjuk az ábrát.

Az ABC háromszög súlypontja legyen S , az S pont a súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja.

Legyen $A_1S = x$, $B_1S = y$ és $C_1S = z$, ekkor $BS = 2y$, $CS = 2z$, $BB_1 = 3y$ és $CC_1 = 3z$. Továbbá $AA_1 = 3x$, és a feladat feltétele miatt $BC = 2x$.

A_1 a BC oldal felezőpontja, ezért $BA_1 = CA_1 = x = A_1S$, így a B , a C és az S pont egyenlő távol van az A_1 ponttól, azaz S rajta van a BC szakasz

Thalész-körén. Ezért a BCS háromszög derékszögű, befogói $BS = 2y$, $CS = 2z$, átfogója pedig $BC = 2x$.

Pitagorasz tétele alapján ekkor $(2y)^2 + (2z)^2 = (2x)^2$.

Ha mindkét oldalt osztjuk 4-gyel, majd szorozzuk 9-cel, akkor a $(3y)^2 + (3z)^2 = (3x)^2$, azaz a $BB_1^2 + CC_1^2 = AA_1^2$ összefüggést kapjuk, és éppen ezt kellett belátni.

Összesen:

1 pont

7 pont

Megjegyzés. A fenti ábrát használva (a pontok és a szakaszok bevezetését és leírását követően) a feladat indokolható az alábbi módon is.

Az S pontnak az A_1 pontra való tükörképe legyen P . Ekkor, mivel A_1 a BC oldal felezőpontja az $SBPC$ négyszög középpontosan szimmetrikus, ezért paralelogramma.

A paralelogramma átlói $BC = 2x$ és $SP = 2x$ (így az téglalap is), az oldalai pedig $BS = PC = 2y$ és $CS = AP = 2z$. A paralelogramma-tétel alapján a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, ezért $2 \cdot (2y)^2 + 2 \cdot (2z)^2 = (2x)^2 + (2x)^2$.

Ha mindkét oldalt osztjuk 8-cal, majd szorozzuk 9-cel, akkor a $(3y)^2 + (3z)^2 = (3x)^2$, azaz a $BB_1^2 + CC_1^2 = AA_1^2$ összefüggést kapjuk, és éppen ezt kellett belátni.

4. Egy konvex 2023-szögben behúztunk 20 átlót, amelyek páronként nem metszik egymást. Vágjuk szét a sokszöget az átlók mentén. Bizonyítsuk be, hogy a kapott sokszögek között van olyan, amelynek legalább 99 csúcsa van.

7 pont

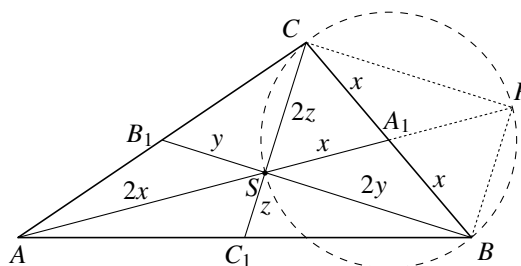
Megoldás. Mivel az átlók nem metszik egymást, minden vágással egy új sokszög keletkezik, tehát a kisebb sokszögek száma 21 lesz.

1 pont

Számoljuk meg ezen kisebb sokszögek oldalait!

Mivel az eredeti sokszög oldalaiba nem vághattunk bele, a 2023 eredeti oldal pontosan egy-egy kis sokszögnek az oldala.

1 pont



2 pont

3 pont

1 pont

Mivel az átlókba sem vághattunk bele, minden vágás mentén 2 kis sokszög keletkezett. A 20 vágás $20 \cdot 2 = 40$ további oldalt jelent.

1 pont

Ez összesen 2063 oldal.

1 pont

A skatulyaelv miatt így lesz olyan kis sokszög, amely oldalainak és így csúcsainak a száma is legalább $\frac{2063}{21}$ felső egész része, azaz 99. Ezzel az állításunkat igazoltuk.

3 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Az utolsó 3 pont a következőképpen is indokolható:

Indirekt módon tegyük fel, hogy minden kis sokszögnek legfeljebb 98 csúcsa, illetve oldala van. Ekkor az oldalak száma legfeljebb $21 \cdot 98 = 2058$ lenne, ami ellentmond annak a ténynek, hogy 2063 darab oldal van. Azaz az állításunkat igazoltuk.

5. Legyen $p(x)$ olyan másodfokú polinom, amelynek főegyütthatója 1. Tudjuk, hogy a $p(x)$, illetve a $p(p(p(x)))$ polinomoknak van közös valós gyöke. Bizonyítsuk be, hogy

$$p(0) \cdot p(1) = 0.$$

7 pont

Megoldás. Legyen $p(x)$ szokásos (kanonikus) alakja: $p(x) = x^2 + ax + b$, továbbá legyen a $p(x)$ és a $p(p(p(x)))$ polinomok közös valós gyöke r .

1 pont

Ekkor felhasználva, hogy $p(r) = 0$ és $p(0) = b$, továbbá az $x = r$ értéket behelyettesítve a $p(p(p(x)))$ polinomba: $p(p(p(r))) = 0$, innen $p(p(0)) = 0$, majd $p(b) = 0$,

2 pont

azaz $p(b) = b^2 + ab + b = 0$, és innen (szorzattá alakítva) $b(b + a + 1) = 0$ adódik.

2 pont

Mivel $p(1) = 1^2 + a \cdot 1 + b = b + a + 1$ (és $p(0) = b$, amint azt már korábban láttuk),

1 pont

$b(b + a + 1) = 0$ miatt $p(0) \cdot p(1) = 0$. Ezzel az állítást igazoltuk.

1 pont

Összesen:

7 pont

Haladók I. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Milyen pozitív egész a, b, c értékekre teljesülnek a $\frac{2a}{2+a} = \frac{3b}{3+b} = \frac{4c}{4+c}$ egyenlőségek? 7 pont

2. Négy jóbarát észrevette, hogy ha elosztják a könyveik számát a könyvek számában a számjegyek összegével, akkor eredményül mind a négyen ugyanazt az egész számot, 13-at kapják. Bizonyítsuk be, hogy legalább kettejüknek ugyanannyi könyve van.

(Ha valamelyik barátnak például 63 könyve lenne, akkor ő eredményül $63 : (6 + 3) = 7$ -et kapna.) 7 pont

3. Egy trapéz átlói 5 és 12, két alapjának összege pedig 13 egység hosszú.

a) Mekkora a trapéz területe?

b) Lehet-e a trapéz minden oldalának hossza egész szám?

7 pont

4. Leteszünk az asztalra egymás mellé egy sorba 20 pénzérmét úgy, hogy 10-nél a Fej, 10-nél az Írás legyen felül. Igazoljuk, hogy biztosan lesz egymás mellett 10 olyan érme, amelyből 5-nél Fej, 5-nél Írás van felül.

7 pont

Haladók I. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Milyen pozitív egész a, b, c értékekre teljesülnek a $\frac{2a}{2+a} = \frac{3b}{3+b} = \frac{4c}{4+c}$ egyenlőségek? 7 pont

1. megoldás. $\frac{2a}{2+a} < 2$, mert a pozitív nevezővel szorozva, majd $2a$ -t kivonva (amelyek ekvivalens lépések) $0 < 4$ adódik. 1 pont

Az előző egyenlőtlenség teljesülése miatt az $\frac{4c}{4+c} < 2$ egyenlőtlenségből szintén (az előzőhöz hasonló) ekvivalens lépésekkel kijön, hogy $c < 4$. Tehát csak $c = 1, 2$ vagy 3 lehet. 2 pont

Oldjuk meg a $\frac{2a}{2+a} = \frac{4c}{4+c}$ egyenletet $c = 1, c = 2, c = 3$ esetekben.

$c = 1$ esetén $\frac{2a}{2+a} = \frac{4}{5}$ megoldása $a = \frac{4}{3}$ nem egész. 1 pont

$c = 2$ esetén $\frac{2a}{2+a} = \frac{8}{6}$ megoldása $a = 4$, de $\frac{3b}{3+b} = \frac{8}{6}$ megoldása $b = \frac{12}{5}$ nem egész. 1 pont

$c = 3$ esetén $\frac{2a}{2+a} = \frac{12}{7}$ megoldása $a = 12$, és $\frac{3b}{3+b} = \frac{12}{7}$ megoldása $b = 4$. 1 pont

Azaz az egyenlet egyetlen megoldása: $a = 12, b = 4, c = 3$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. $\frac{2a}{2+a} = \frac{4c}{4+c}$ egyenlőségből átrendezés után $ac - 4a + 4c = 0$ adódik. 1 pont

Mindkét oldalból 16-ot kivonva a bal oldal szorzattá alakítható: $(a+4)(c-4) = -16$. 1 pont

Mivel $a+4$ biztosan pozitív, ezért $c-4$ negatív kell legyen, ezért csak $c = 1, 2$ vagy 3 lehet. 1 pont

Innen hasonlóan az 1. megoldáshoz végignézzük 1-1-1 pontért a három esetet. 3 pont

Azaz az egyenlet egyetlen megoldása: $a = 12, b = 4, c = 3$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Négy jóbarát észrevette, hogy ha elosztják a könyveik számát a könyvek számában a számjegyek összegével, akkor eredményül mind a négyen ugyanazt az egész számot, 13-at kapják. Bizonyítsuk be, hogy legalább kettejüknek ugyanannyi könyve van.

(Ha valamelyik barátnak például 63 könyve lenne, akkor ő eredményül $63 : (6+3) = 7$ -et kapna.) 7 pont

Megoldás. Legyen Kálmánnak (az egyik jóbarátnak) k darab könyve. A feladat állítása alapján 13 osztója k -nak. Ha Kálmán eredményül 13-at kapott, akkor k nyilván nem lehet egyjegyű szám. Másfelől 13 kétjegyű többszöröseiben, azaz a 13, 26, 39, 52, 65, 78 és 91 számokban a számjegyösszeg rendre 4, 8, 12, 7, 11, 15 és 10, és ezek egyike sem osztható 13-mal, azaz k kétjegyű szám sem lehet.

1 pont

Ha k négyjegyű szám, azaz $k = \overline{abcd}$ alkalmas a, b, c, d számjegyekkel, akkor $a + b + c + d \leq 36$ miatt $k = \overline{abcd} \leq 13 \cdot 36 = 468$ lenne, ami ellentmondásban áll azzal, hogy k négyjegyű szám.

1 pont

Ha k több mint négyjegyű szám lenne, akkor hasonló ellentmondást kapnánk mint az imént, azaz $k = \overline{abc}$ alakú háromjegyű szám lehet csak (ahol a, b, c számjegyek, és $a > 0$).

Az eddigiek alapján a $100a + 10b + c = 13a + 13b + 13c$ összefüggésnek kell teljesülnie,

1 pont

vonjunk ki $(13a + 10b + c)$ -t mindkét oldalból: $87a = 3b + 12c$ adódik, majd 3-mal osztva azt kapjuk, hogy $29a = b + 4c$.

1 pont

Mivel a, b és c számjegyek $29a = b + 4c \leq 5 \cdot 9 = 45$, így $a = 1$ lehet csak. Ekkor $29 = b + 4c$. Mivel a bal oldalon 4-gyel osztva 1 maradékot adó szám szerepel, így b is ilyen, azaz $b = 1, 5$ vagy 9 lehet csak. Ezeket az értékeket beírva b helyére a $29 = b + 4c$ egyenletbe rendre $c = 7, 6$ és 5 adódik.

1 pont

Azaz a könyvek k számára három megoldás 195; 156 és 117 kapható.

1 pont

(Ellenőrzés: $\frac{195}{1+9+5} = \frac{195}{15} = 13$, $\frac{156}{1+5+6} = \frac{156}{12} = 13$ és $\frac{117}{1+1+7} = \frac{117}{9} = 13$.)

Mivel 4 barát van és 3 különböző könyvszám lehet csak, így a skatulyaelv miatt biztosan van legalább 2 barát, akinek ugyanannyi könyve van, és éppen ezt akartuk megmutatni.

1 pont

Összesen:

7 pont

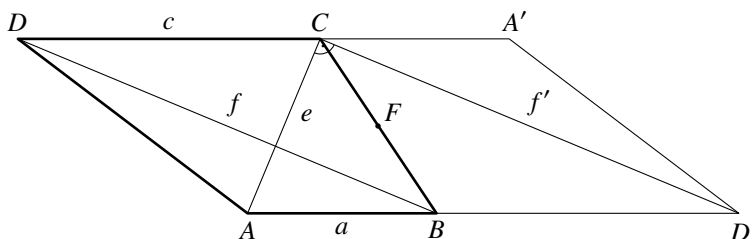
3. Egy trapéz átlói 5 és 12, két alapjának összege pedig 13 egység hosszú.

a) Mekkora a trapéz területe?

b) Lehet-e a trapéz minden oldalának hossza egész szám?

7 pont

1. megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit! Legyen $AB = a$, $CD = c$, $AC = e$ és $BD = f$.



Tükrözzük az $ABCD$ trapézt például a BC szár F felezőpontjára.

1 pont

Ekkor az $AD'A'D$ paralelogrammához jutunk, amelyben az e, f' , valamint az $AD' = a + c = 13$ szakaszok hosszai pitagoraszai számhármast alkotnak. Tehát az ACD' háromszög derékszögű.

1 pont

Mivel a trapéz területe azonos az ACD' derékszögű háromszög területével ($T_{\text{trapéz}} = \frac{a+c}{2} \cdot m =$

$= \frac{e \cdot f}{2} = T_{\text{háromszög}}$), így a keresett terület $T_{\text{trapéz}} = \frac{e \cdot f}{2} = 30$.

1 pont

A feladat második részéhez válasszuk az átlók metszéspontját M -nek.

A megfelelő szögek egyenlősége miatt $AMB\triangle \sim CMD\triangle$, így a megfelelő oldalaik aránya azonos.

1 pont

Feltételezve, hogy $AB \leq CD$, a rövidebb oldal $AB = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ lehet. Felhasználva az $AMB\triangle \sim CMD\triangle$ hasonlóságot, könnyen számolható a trapéz szárának hossza. A BC és AD az AB alap egyetlen egész értéke esetén sem ad egész hosszt. (Pl. $AB = 1$ esetén $MA = \frac{5}{13}$, $MD = \frac{144}{13}$. Ekkor az AMD (az átlók merőlegessége miatt) derékszögű háromszögre Pitagorasz

tétele alapján $AD^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{144}{13}\right)^2$ nem ad egész megoldást.)

A 3 pont az összes eset megvizsgálására adható.

3 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. A feladat második részére, azaz a javítókulcs utolsó négy pontjára a következő indoklás is elképzelhető:

Az esetvizsgálat helyett általánosan is felírhatjuk a BC szárra a Pitagorasz-tételt.

Vezessük be a következő jelöléseket: $MC = x$; $MD = y$. Ekkor a korábbi hasonlóságot felhasználva ($AMB\triangle \sim CMD\triangle$) a következőket kapjuk:

$$\frac{x}{5-x} = \frac{y}{12-y} = \frac{c}{13-c}.$$

1 pont

Az x és y értékeket kifejezve:

$$\frac{x}{5-x} = \frac{c}{13-c} \quad \frac{y}{12-y} = \frac{c}{13-c}$$

$$13x = 5c \quad 13y = 12c$$

$$x = \frac{5}{13}c \quad y = \frac{12}{13}c$$

1 pont

$$BC^2 = x^2 + (12-y)^2 = \left(\frac{5}{13}c\right)^2 + \left(12 - \frac{12}{13}c\right)^2 =$$

1 pont

$$= \underbrace{\frac{25}{169}c^2 + 144 + \frac{144}{169}c^2 - \frac{288c}{13}}_{= c^2 + 144 \in \mathbb{Z}}$$

Mivel $0 < c < 13$, és a 13 nem osztója a 288-nak, ezért $\frac{288}{13}c$ értéke nem lehet egész. Tehát nem lehet a trapéz minden oldala egész.

1 pont

4. Leteszünk az asztalra egymás mellé egy sorba 20 pénzérmét úgy, hogy 10-nél a Fej, 10-nél az Írás legyen felül. Igazoljuk, hogy biztosan lesz egymás mellett 10 olyan érme, amelyből 5-nél Fej, 5-nél Írás van felül.

7 pont

Megoldás. Számozzuk meg a húsz letett érmét sorban 1-20-ig, és nevezzünk „blokknak” tíz szomszédos érmét. Tehát az első blokk az 1.-10. érme, a második a 2.-11. érme, ..., az utolsó a 11.-20. érme.

Nézzük meg, hány Fej van az első blokkban (az első 10 érme között). Ha pontosan 5, akkor készen vagyunk.

1 pont

Ha 5-nél kevesebb, akkor az utolsó 10 érme között nyilván 5-nél több Fej van.

1 pont

Haladjunk az első blokk felől az utolsó blokkig egyesével. Amikor egy ilyen blokkról a szomszédosra lépünk, a korábbi blokk első érméje kicserélődik a következő blokk utolsó érméjére.

1 pont

A Fejek száma tehát a következőképpen változhat:

- ha Fejet cseréltünk Fejre, akkor nem változik,
- ha Írást cseréltünk Írásra, akkor sem változik,
- ha Fejet cseréltünk Írásra, 1-gyel csökken,
- ha Írást cseréltünk Fejre, akkor 1-gyel nő.

1 pont

Tehát a Fejek száma a szomszédos blokkra áttérve vagy nem változik, vagy 1-gyel változik.

1 pont

Emiatt, mivel az első blokkban 5-nél kisebb, az utolsóban 5-nél nagyobb a Fejek száma, kell hogy legyen egy olyan blokk, amelyben 5 Fej és 5 Írás van.

1 pont

Ha pedig az első blokkban 5-nél több Fej van, akkor az utolsóban 5-nél kevesebb, és a fenti indoklás pontosan ugyanúgy működik.

1 pont

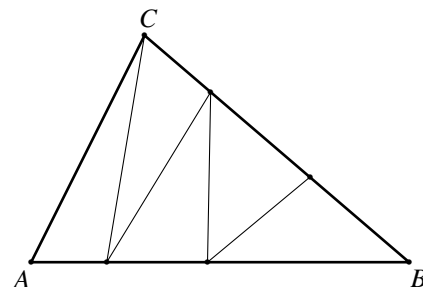
Összesen:

7 pont

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszöget az ábra szerint feldaraboljuk öt egyenlő területű háromszögre. A keletkezett öt kis háromszög azon oldalainak hossza, amelyek az ABC háromszög oldalaira esnek, egész számok. Legalább mekkora az ABC háromszög kerülete?



7 pont

2. Egy matematika szakkörre hatan járnak. Karácsony előtt elhatározzák, hogy megajándékozzák egymást oly módon, hogy mindegyikük nevét felírják egy cédulára, a neveket egy dobozba teszik, majd sorban kihúznak egy-egy nevet. Ha valaki a saját nevét húzza, akkor a sorsolást megismétlik.

Végül mind a hatan kihúznak egy nevet, és senki nem a sajátját. Az ajándékozást úgy bonyolítják le, hogy először egyikük odaadja az ajándékát annak, akit húzott, ezután az, aki kapta, szintén odaadja az ajándékát annak, akit húzott, és így tovább. Ekkor két eset lehetséges:

(1) Az ajándékozást kezdő diák lesz a hatodik, aki megkapja a neki szánt ajándékot, ekkor az ajándékozási lánc végigér, mindenki átadta az ajándékát.

(2) Amikor az ajándékozást kezdő diák megkapja az ajándékot, akkor lesz olyan, aki még nem adott és nem is kapott ajándékot. Ezért az ajándékozás folyamatát valaki, aki még nem adott át ajándékot, újra kezdi.

Az (1) vagy a (2) esemény bekövetkezésének nagyobb az esélye?

7 pont

3. Mely valós a számok esetén van három különböző valós gyöke az $x^3 + a(1 - a)x - a^2 = 0$ egyenletnek?

7 pont

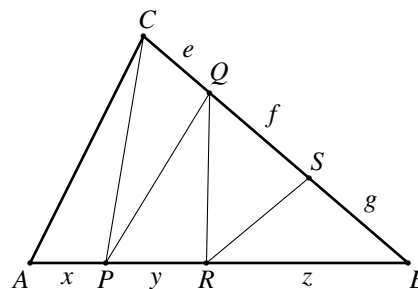
4. Legyen $k \geq 3$ tetszőleges páratlan szám. Igazoljuk, hogy végtelen sokféleképpen jelölhető ki k darab egymást követő pozitív egész szám oly módon, hogy ezek köbeinek összege osztható legyen 2024-gyel.

7 pont

Haladók II. kategória 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszöget az ábra szerint feldaraboljuk öt egyenlő területű háromszögre. A keletkezett öt kis háromszög azon oldalainak hossza, amelyek az ABC háromszög oldalaira esnek, egész számok. Legalább mekkora az ABC háromszög kerülete?



7 pont

Megoldás. A feladat ábráját kiegészítettük további jelölésekkel – használjuk ezeket.

A háromszög megfelelő oldalait a, b, c -vel jelölve a kis háromszögek területének egyenlősége miatt, és mivel a CAP és CAB háromszögek AP -hez, illetve AB -hez tartozó magassága megegyezik, ezért $x = c/5$.

1 pont

Hasonlóan a CPQ és a CPB háromszögekből $e = a/4$.

A QPR és a QPB háromszögekből $y = \frac{4c}{15}$, így $z = \frac{8c}{15}$, és végül a QRB és az SRB háromszögekből $f = g = \frac{3a}{8}$.

2 pont

Mivel minden, betűvel jelölt hosszúság egész szám, ezért c -nek 15-tel, a -nak 8-cal oszthatónak kell lennie.

1 pont

Ha $c = 15$ és $a = 8$, akkor $b \geq 8$ (a háromszög-egyenlőtlenség miatt). $b = 8$ esetén $k = 31$. 1 pont

Ez a minimum, mert

– ha $c > 15$, akkor $c \geq 30$ és így $k > 31$, 1 pont

– ha pedig $a > 8$, akkor $a \geq 2 \cdot 8$ és így $k > 15 + 16 = 31$. 1 pont

Azaz a terület minimuma 31, és ekkor a megfelelő (kis háromszög) oldalak hossza: $x = 3$, $y = 4$, $z = 8$, $e = 2$, $f = g = 3$ és $b = 8$ valóban egészek.

Összesen: 7 pont

2. Egy matematika szakkörre hatan járnak. Karácsony előtt elhatározzák, hogy megajándékozzák egymást oly módon, hogy mindegyikük nevét felírják egy cédulára, a neveket egy dobozba teszik, majd sorban kihúznak egy-egy nevet. Ha valaki a saját nevét húzza, akkor a sorsolást megismétlik. Végül mind a hatan kihúznak egy nevet, és senki nem a sajátját. Az ajándékozást úgy bonyolítják le, hogy először egyikük odaadja az ajándékát annak, akit húzott, ezután az, aki kapta, szintén odaadja az ajándékát annak, akit húzott, és így tovább. Ekkor két eset lehetséges:

(1) Az ajándékozást kezdő diák lesz a hatodik, aki megkapja a neki szánt ajándékot, ekkor az ajándékozási lánc végigér, mindenki átadta az ajándékát.

(2) Amikor az ajándékozást kezdő diák megkapja az ajándékot, akkor lesz olyan, aki még nem adott és nem is kapott ajándékot. Ezért az ajándékozás folyamatát valaki, aki még nem adott át ajándékot, újra kezdi.

Az (1) vagy a (2) esemény bekövetkezésének nagyobb az esélye? 7 pont

1. megoldás. Legyenek a szakkörösök A, B, C, D, E és F . Az (1) eseményt modellezhetjük úgy, hogy a hat tanulót egy kerek asztal köré ültetjük, és mindenki a tőle jobbra ülőt ajándékozza meg. Tehát az (1) esemény annyiféleképpen valósulhat meg, ahányféle sorrendben a hat ember leülhet egy kerek asztal köré, ezeknek a sorrendeknek a száma pedig $5! = 120$. 2 pont

A (2) esemény többféleképpen megvalósulhat:

– (2a) Lehet, hogy kétszer is újraindul az ajándékozás, ez úgy lehet, hogy háromszor két lépésben lesz vége.

Ekkor a hat diák három párba osztható, úgy, hogy az egy párban lévők egymást húzták. Ez annyiféleképpen lehetséges, ahányféleképpen a hat diákot három párba lehet sorolni. Nézzük azokat az eseteket, amikor A diák B -vel van párban. Ezek: AB, CD, EF vagy AB, CE, DF vagy AB, CF, ED . Ez eddig három lehetőség. Az A diák C -vel, D -vel, E -vel, F -fel is lehet egy párban, ezért az összes lehetséges párosítások száma $5 \cdot 3 = 15$. 1 pont

Ha az ajándékozás egyszer indul újra, akkor ez két háromlépéses (2b) vagy egy négylépéses és egy kétlépéses (2c) szakaszból áll.

– (2b) Ha kétszer három lépésben valósul meg, akkor a hat diák két hármas csoportra osztható, ez tízféleképpen lehetséges. (Hatból hármat húszféleképpen választhatunk ki, de ABC kiválasztása és DEF kiválasztása ugyanazt a két csoportot eredményezi.)

Egy csoporton belül kétféleképpen alakulhat az ajándékozási lánc, ezért a (2b) esemény $10 \cdot 2 \cdot 2 = 40$ -féleképpen valósulhat meg. 2 pont

– (2c) Most a hat diák egy négyes és egy kettes csoportra van osztva, ez 15-féleképpen lehetséges. A kétfős csoportban lévő két diák egyértelmű, hogy egymást húzta, a négyfős csoportban pedig $3! = 6$ -féleképpen alakulhat az ajándékozási lánc. Így a (2c) lehetőség $15 \cdot 6 = 90$ -féleképpen valósulhat meg.

1 pont

Tehát a (2) esemény összesen $15 + 40 + 90 = 145$ -féleképpen következhet be, így ennek nagyobb a valószínűsége.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. Legyenek a szakkörösök A, B, C, D, E és F . Az (1) eseményt modellezhetjük úgy, hogy a hat tanulót egy kerek asztal köré ültetjük, és mindenki a tőle jobbra ülőt ajándékozza meg. Tehát a (1) esemény annyiféleképpen valósulhat meg, ahányféle sorrendben a hat ember leülhet egy kerek asztal köré, ezeknek a sorrendeknek a száma pedig $5! = 120$.

2 pont

A „jó” sorsolások száma, azaz amelyeknél senki nem húzza a saját nevét, szitaformulával közvetlenül kiszámítható:

Jelölje A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) azt a halmazt, amelybe azon esetek tartoznak, amikor az i -edik diák önmagát húzza. A szitaformula alapján

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = \binom{6}{1} \cdot 5! - \binom{6}{2} \cdot 4! + \binom{6}{3} \cdot 3! - \binom{6}{4} \cdot 2! + \binom{6}{5} \cdot 1! - 1 = 455.$$

Figyelembe véve, hogy a lehetséges sorsolások száma $6!$, így a „jó” sorsolások száma, azaz amelyeknél senki sem húzza a saját nevét $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 720 - 455 = 265$.

4 pont

Ebből a 265 esetből 120 az (1) esemény bekövetkezését jelenti, $265 - 120 = 145$ pedig a (2) eseményét, így ez utóbbinak nagyobb az esélye.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Mely valós a számok esetén van három különböző valós gyöke az $x^3 + a(1-a)x - a^2 = 0$ egyenletnek?

7 pont

Megoldás. Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk.

$$x^3 + a(1-a)x - a^2 = x(x^2 - a^2) + a(x-a) = (x-a)(x(x+a) + a) = (x-a)(x^2 + ax + a) \quad 2 \text{ pont}$$

Azaz az egyenletnek $x = a$ gyöke.

1 pont

Vizsgáljuk az $(x^2 + ax + a)$ tényezőt! A megfelelő $x^2 + ax + a = 0$ egyenlet megoldásait kiszámolva: $x_{1;2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

1 pont

Mivel három különböző valós gyöke van az eredeti egyenletnek, ezért az $x^2 + ax + a = 0$ egyenlet diszkriminánsa pozitív, azaz $a^2 - 4a > 0$, és innen adódik, hogy $a < 0$ vagy $a > 4$.

1 pont

Másfelől a három különböző valós gyökhöz kell még az is, hogy a másodfokú egyenlet gyökei is különbözzenek a -tól (és egymástól is). Ekkor $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \neq a$, és innen $\pm \sqrt{a^2 - 4a} \neq 3a$, majd $a^2 - 4a \neq 9a^2$, és végül $0 \neq 4a(2a+1)$, azaz $a \neq 0$, és $a \neq -\frac{1}{2}$ adódik.

1 pont

Az eredményeket összefoglalva pontosan $a \in \mathbb{R} \setminus [0; 4] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ esetén van három különböző valós gyöke az egyenletnek.

1 pont

Összesen:

7 pont

4. Legyen $k \geq 3$ tetszőleges páratlan szám. Igazoljuk, hogy végtelen sokféleképpen jelölhető ki k darab egymást követő pozitív egész szám oly módon, hogy ezek köbeinek összege osztható legyen 2024-gyel.

7 pont

Megoldás. Jelöljük a k darab szám közül a középsőt n -nel, ekkor szomszédai $n-1$ és $n+1$. Ezek köbeinek összege $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$. A két szélső tag összegét az ismert $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ azonosság alapján szorzattá alakíthatjuk úgy, hogy az egyik tényező $2n$. Emiatt a három tag összegéből n kiemelhető.

Részletesen:

$$\begin{aligned}(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= n^3 + (n-1+n+1)((n-1)^2 - (n-1)(n+1) + (n+1)^2) = \\ &= n(n^2 + 2(n^2 + 3))\end{aligned}$$

3 pont

Ezután további párokat képzünk, az $(n-2)^3 + (n+2)^3$, a $(n-3)^3 + (n+3)^3, \dots$, és általában az $(n-m)^3 + (n+m)^3$ összegekből is kiemelhető $2n$.

Részletesen:

$$(n-m)^3 + (n+m)^3 = 2n((n-m)^2 - (n-m)(n+m) + (n+m)^2) = 2n(n^2 + 3m^2).$$

1 pont

Azaz a teljes összegből kiemelhető n . A kiemelésnél a másik tényező egész szám lesz, mivel az egyes szorzattá alakításoknál kapott második tényezők egész számok. Tehát az eredeti összeg osztható n -nel.

2 pont

Így ha n -et úgy választjuk meg, hogy osztható legyen 2024-gyel, akkor a teljes köbösszeg is osztható 2024-gyel. Nyilván végtelen sok ilyen (2024-gyel osztható) szám jelölhető ki. Ezzel az állításunkat igazoltuk.

1 pont

Összesen:

7 pont

Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy kör területén kijelölünk n pontot. Azt szeretnénk elérni, hogy a pontok által meghatározott háromszögek közül pontosan 2^{2024} legyen derékszögű. Mennyi a szükséges pontok számának minimuma?
2. Legyen n pozitív egész szám, d pedig az $n^2 + 1$ és az $(n+1)^2 + 1$ számok legnagyobb közös osztója. Határozzuk meg d lehetséges értékeit.

7 pont

7 pont

3. Legyen F az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének azon pontja, amely felezi a kör C és D pontokat nem tartalmazó AB ívét. A DF és AC egyenesek a P , a CF és BD egyenesek pedig a Q pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a PQ és AB egyenesek párhuzamosak. 7 pont
4. Határozzuk meg az $xy + yz + zx$ kifejezés értékét, ha az x, y, z valós számok teljesítik az
- $$x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$$
- feltételt. 7 pont
5. Adott egy H halmaz, amelynek elemszáma 50, és mindegyik eleme egész szám. Bizonyítsuk be, hogy H -nak van olyan nem üres részhalmaza, amelyben az elemek összege 100-zal osztva 0 vagy 1 vagy 99 maradékot ad. 7 pont

Haladók III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kör kerületén kijelölünk n pontot. Azt szeretnénk elérni, hogy a pontok által meghatározott háromszögek közül pontosan 2^{2024} legyen derékszögű. Mennyi a szükséges pontok számának minimuma? 7 pont
- Megoldás.** Derékszögű háromszög pontosan oly módon keletkezik, ha a három csúcs közül kettő átellenesen helyezkedik el a kör kerületén. Ilyenkor harmadik csúcsnak a többi $n - 2$ közül bármelyik választható. Emiatt, ha k darab átmérő alakul ki, akkor a derékszögű háromszögek száma $(n - 2)k = 2^{2024}$. 1 pont
- Ezért $n - 2$ és k is 2-nek természetes kitevős hatványa, azaz $n - 2 = 2^a$ és $k = 2^b$, 1 pont
- valamint $n \geq 2k$, hiszen a k darab átmérőben lévő csúcsok száma legfeljebb a pontok száma, azaz n lehet. 1 pont
- $(n - 2)k = 2^{2024} = 2^a \cdot 2^b$, tehát $a + b = 2024$ és $n \geq 2k$ miatt $a \geq b$. 1 pont
- $a = b$ csak $n = k + 2$ esetén lehetséges, de ekkor $n \geq 2k$ miatt $k = 1, n = 3$ vagy $k = 2, n = 4$ lenne, de ekkor $a + b = 2024$ nem teljesül, tehát $a > b$. 1 pont
- Mivel a lehető legkisebb n -t keressük, ezért $a = 1013$ és $b = 1011$, így $k = 2^{1011}$, $n - 2 = 2^{1013}$. 1 pont
- Ekkor a pontok száma $n = 2^{1013} + 2$, és $k = 2^{1011}$ darab átmérő végpontjai egymással átellenesen helyezkednek el, a többi pont pedig úgy, hogy semelyik ne legyen semelyik másik ponttal szemben. 1 pont
- Válasz: a szükséges pontok számának a minimuma tehát $n = 2^{1013} + 2$.
- Összesen:** 7 pont

2. Legyen n pozitív egész szám, d pedig az $n^2 + 1$ és az $(n + 1)^2 + 1$ számok legnagyobb közös osztója. Határozzuk meg d lehetséges értékeit.

7 pont

1. megoldás. $n = 1$ esetén $(n^2 + 1; (n + 1)^2 + 1) = (2; 5) = 1$,

$n = 2$ esetén $(n^2 + 1; (n + 1)^2 + 1) = (5; 10) = 5$.

1 pont

Legyen $(n^2 + 1; (n + 1)^2 + 1) = d$. Ekkor a $d \mid (n + 1)^2 + 1$ és $d \mid n^2 + 1$ oszthatóságok miatt a különbségükre is igaz, hogy $d \mid (n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$.

1 pont

Továbbá $d \mid n^2 + 1$ következtében $d \mid 4n^2 + 4$,

1 pont

és $d \mid 2n + 1$ miatt $d \mid (2n + 1)(2n - 1) = 4n^2 - 1$,

2 pont

így $d \mid (4n^2 + 4) - (4n^2 - 1) = 5$ is igaz.

1 pont

Így d értéke csak 1 vagy 5 lehet, és amint azt korábban láttuk, mindkettő meg is valósulhat.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. megoldás. (Hasonló az előzőhöz, csak most az euklideszi algoritmussal dolgozunk.)

$$(n + 1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2.$$

Legyen $(n^2 + 1; n^2 + 2n + 2) = d$. A d -t most euklideszi-algoritmussal keressük meg:

$$n^2 + 2n + 2 = (n^2 + 1) + (2n + 1) \text{ miatt } d = (n^2 + 1; 2n + 1).$$

1 pont

$$\text{Mivel } 4 \nmid (2n + 1), \text{ ezért } d = (4n^2 + 4; 2n + 1).$$

2 pont

$$\text{Továbbá } 4n^2 + 4 = (2n + 1)(2n - 1) + 5 \text{ miatt } d = (2n + 1; 5).$$

2 pont

Figyelembe véve, hogy az 5-nek két (pozitív) osztója van az 1 és az 5, így d csak 1 vagy 5 lehet.

1 pont

Ezeket az értékeket fel is veszi, pl. ha $n = 1$, akkor $d = 1$, ha pedig $n = 2$, akkor $d = 5$.

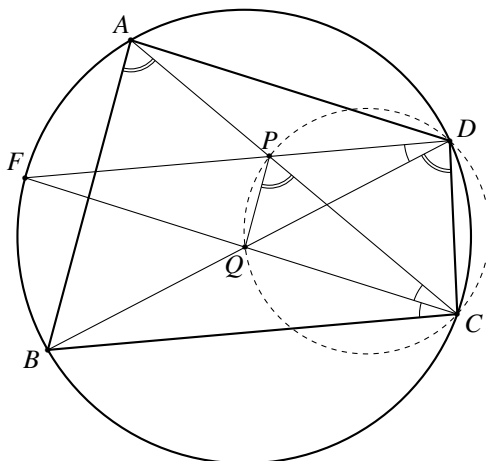
1 pont

Összesen:

7 pont

3. Legyen F az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének azon pontja, amely felezi a kör C és D pontokat nem tartalmazó AB ívét. A DF és AC egyenesek a P , a CF és BD egyenesek pedig a Q pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a PQ és AB egyenesek párhuzamosak.

7 pont



Megoldás. Használjuk az ábrát és jelöléseit!

Az AF és BF ívek hosszúságának egyenlősége miatt $\angle BCF \sphericalangle = \angle FCA \sphericalangle$.

1 pont

Figyelembe véve, hogy a $BCDF$ húrnégyszög körülírt körében az FB íven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, ezért $\angle BDF \sphericalangle = \angle BCF \sphericalangle$.

1 pont

Ezt felhasználva

$$\angle QCP \sphericalangle = \angle FCA \sphericalangle = \angle BCF \sphericalangle = \angle BDF \sphericalangle = \angle QDP \sphericalangle.$$

1 pont

Így a PQ szakasz a C és D pontokból azonos szög alatt látszik, és mivel C és D is a PQ egyenes azonos oldalán helyezkedik el, ezért a $CDPQ$ négyszög húrnégyszög.

1 pont

Az említett húrnégyszög körülírt körében $CPQ \sphericalangle = CDQ \sphericalangle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek). 1 pont

Másrészt az $ABCD$ húrnégyszög alapján $CDQ \sphericalangle = CDB \sphericalangle = CAB \sphericalangle$. 1 pont

Így $CPQ \sphericalangle = CAB \sphericalangle$, és mivel a szögek egyik szögcsúcsa azonos egyenesre esik, ezért a két szög egyállású, ami azt jelenti, hogy $PQ \parallel AB$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Határozzuk meg az $xy + yz + zx$ kifejezés értékét, ha az x, y, z valós számok teljesítik az

$$x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$$

feltételt. 7 pont

Megoldás. Mivel $x^2 - yz = y^2 - zx$, így $x^2 - y^2 + xz - yz = 0$, innen $(x - y)(x + y) + z(x - y) = 0$, vagyis

$$(x - y)(x + y + z) = 0 \quad (1) \quad 1 \text{ pont}$$

Hasonlóképpen

$$(y - z)(x + y + z) = 0 \quad (2)$$

és

$$(z - x)(x + y + z) = 0 \quad (3) \quad 1 \text{ pont}$$

– Ha $x + y + z \neq 0$, akkor az (1)–(3) alapján $x = y = z$ adódik, ami a feladat eredeti feltétele szerint nem lehetséges. 1 pont

– Ha $x + y + z = 0$, akkor pedig az $x^2 - yz = 2$, $y^2 - zx = 2$ és a $z^2 - xy = 2$ egyenlőségek összeadásával 1 pont

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 6$, majd $(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = 6$, és innen

$$xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - 6}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

adódik. 2 pont

Azaz $xy + yz + zx$ kifejezés értéke a feltételek esetén -2 .

Léteznek a feladat eredeti feltételét teljesítő számhármassok, például egy ilyen lehetőség:

$$(x; y; z) = (\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2}) \quad 1 \text{ pont}$$

Összesen: 7 pont

5. Adott egy H halmaz, amelynek elemszáma 50, és mindegyik eleme egész szám. Bizonyítsuk be, hogy H -nak van olyan nem üres részhalmaza, amelyben az elemek összege 100-zal osztva 0 vagy 1 vagy 99 maradékot ad. 7 pont

Megoldás. H elemeit jelöljük $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ -nel. Képezzük az alábbi 50 darab összeget: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\dots$, $s_{50} = a_1 + a_2 + \dots + a_{50}$. Ha valamelyik összeg a kívánt maradékok valamelyikét adja, akkor készen vagyunk. 2 pont

Ha nem, akkor az ötven összeg 97-féle maradékot adhat 100-zal osztva. 1 pont

Ha vannak egyező maradékok, akkor a több tagot tartalmazó összegből kivonva a kevesebbet tartalmazót, egy olyan összeg adódik, amely nulla maradékot ad. 1 pont

Ha nincsenek egyező maradékok, akkor mivel 50 különböző maradékunk van, és 97-féle maradék (2, 3, 4, ..., 98) lehet, ezért előfordulnak szomszédos maradékok.

2 pont

Ekkor a több tagú összegből a kevesebb tagút kivonva, olyan összeget kapunk, ami 1 vagy 99 maradékot ad. Ezzel készen vagyunk.

1 pont

Összesen:

7 pont

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adott hét különböző prímszám. Válasszunk ki közülük az összes lehetséges módon kettőt, és vegyük a kiválasztott párok különbségeinek abszolútértékeit. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett számok szorzata osztható 4320^2 -nel.

7 pont

2. Rózi unatkozik a matematika órán, ezért a 30-nál nem nagyobb pozitív prímek közül kiválaszt három egymástól nem feltétlenül különböző p , q és r számot, és kiszámítja a $px^2 + qx + r = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit. Mely $(p; q; r)$ számhármakat választhatja Rózi, ha tudjuk, hogy egyenletének legalább az egyik gyöke egész szám? Hány megfelelő számhármas van?

7 pont

3. Az AB átfogójú derékszögű háromszög harmadik csúcsa C . Az A csúcsnál lévő belső szög felezője az M , a külső szög felezője pedig az N pontban metszi az átfogóhoz tartozó magasságot, míg a B csúcsnál lévő belső szög felezője a P , a külső szög felezője pedig a Q pontban metszi az átfogóhoz tartozó magasságot. Bizonyítsuk be, hogy

$$CM \cdot CN + CP \cdot CQ = AB^2.$$

7 pont

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott hét különböző prímszám. Válasszunk ki közülük az összes lehetséges módon kettőt, és vegyük a kiválasztott párok különbségeinek abszolútértékeit. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett számok szorzata osztható 4320^2 -nel.

7 pont

Megoldás. A 4320 prímtényező felbontása: $4320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$, így $4320^2 = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2$ lesz.

A hét prímszámból legalább hat biztosan páratlan. A hat páratlan prímszámmal összesen $\binom{6}{2} = 15$ pozitív különbség képezhető. Ezek mindegyike páros szám, tehát szorzatuk osztható 2^{15} -nel, azaz 2^{10} -nel is.

2 pont

A hét prímszámból legalább hat hárommal nem osztható. Ezen hat számot két csoportba osztjuk a 3-as maradékuk szerint. Ekkor vagy van olyan csoport, amelyben legalább 4 darab azonos maradékot adó szám van, és ezek legalább $\binom{4}{2} = 6$ darab különbsége mind 3-mal osztható; vagy két darab hármas csoport alakítható ki, amelyekben az összesen $(3 + 3, \text{ azaz ismét csak})$ 6 darab különbség mind osztható 3-mal. Így a megfelelő különbségek szorzata osztható 3^6 -nal.

2 pont

A hét prímszámból legalább hat különbözik 5-től. A hat (5-től különböző) prímszám az 5-tel való osztási maradék alapján legalább egy, de legfeljebb négy halmazba rendezhető. Az így képzett halmazok közül a skatulyaelv alapján legalább egy legalább háromelemű vagy legalább kettő legalább kételemű. Az egyes halmazokban a képezhető pozitív különbségek oszthatók 5-tel. Ezen (pozitív) különbségek száma legalább $1 + 1 = 2$, így ezek szorzata osztható 5^2 -nel.

2 pont

Összefoglalva, a páronként vett pozitív különbségek szorzata osztható (az egymáshoz relatív prím) 2^{10} -nel, 3^6 -nal és 5^2 -nel is, így ezek szorzatával, azaz 4320^2 -nel is.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Rózi unatkozik a matematika órán, ezért a 30-nál nem nagyobb pozitív prímek közül kiválaszt három egymástól nem feltétlenül különböző p , q és r számot, és kiszámítja a $px^2 + qx + r = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit. Mely $(p; q; r)$ számhármakat választhatja Rózi, ha tudjuk, hogy egyenletének legalább az egyik gyöke egész szám? Hány megfelelő számhármak van?

7 pont

Megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján $x_1 + x_2 = \frac{-q}{p} < 0$, illetve

$x_1 \cdot x_2 = \frac{r}{p} > 0$, így a kapott gyökök minden esetben negatívak.

1 pont

Az $x = n$ (egész) gyök esetén $pn^2 + qn + r = 0$ és így $r = n(-pn - q)$. Az n osztója r -nek, ami azt jelenti, hogy az egyenlet egész gyöke csak $x = -1$ vagy $x = -r$ lehet.

1 pont

$x = -1$ esetén $p - q + r = 0$, azaz

$$r = q - p. \quad (1) \quad 1 \text{ pont}$$

$x = -r$ esetén $pr^2 - qr + r = 0$, azaz $r(pr - q + 1) = 0$, és $r > 0$ miatt $pr - q + 1 = 0$, vagyis

$$pr = q - 1. \quad (2) \quad 1 \text{ pont}$$

Az (1), (2) egyenlőségek nem állhatnak fenn, ha a p , q , r prímek mindegyike páratlan, így a prímek között szerepelnie kell a 2-nek.

$q = 2$ esetén az $r = 2 - p$, illetve a $pr = 1$ egyenleteknek nincs megoldása a prímek körében.

1 pont

Mivel a kapott két egyenletben p és r változók szerepe szimmetrikus, ezért a továbbiakban elegendő a $p = 2$ esetet vizsgálni.

Az $r = q - 2$ vagy $2r = q - 1$ egyenleteket az alábbi $(p; q; r)$ számhármak elégítik ki:

$(2; 5; 3)$, $(2; 7; 5)$, $(2; 13; 11)$, $(2; 19; 17)$, $(2; 5; 2)$, $(2; 7; 3)$, $(2; 11; 5)$, $(2; 23; 11)$.

1 pont

A p és r értékeket felcserélve pedig a további megoldások:

$(3; 5; 2)$, $(5; 7; 2)$, $(11; 13; 2)$, $(17; 19; 2)$, $(3; 7; 2)$, $(5; 11; 2)$, $(11; 23; 2)$.

Azaz 15 megfelelő számhármak létezik.

1 pont

Összesen:

7 pont

3. Az AB átfogójú derékszögű háromszög harmadik csúcsa C . Az A csúcsnál lévő belső szög felezője az M , a külső szög felezője pedig az N pontban metszi az átfogóhoz tartozó magasságot, míg a B csúcsnál lévő belső szög felezője a P , a külső szög felezője pedig a Q pontban metszi az átfogóhoz tartozó magasságot. Bizonyítsuk be, hogy

$$CM \cdot CN + CP \cdot CQ = AB^2.$$

7 pont

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az A csúcsához tartozó külső és belső szögfelező egymásra merőleges, így az $MAB \sphericalangle$ és az $ANM \sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlők, és mivel AM szögfelező, ezáltal a három ε -nal jelölt szög megegyezik.

Az AMC háromszög és az NAC háromszögek hasonlóak, mivel mindkettőnek van egy-egy ε nagyságú szöge, a C -nél lévő szögük pedig közös.

A hasonlóság miatt $\frac{AC}{CN} = \frac{CM}{AC}$.

Innen $CM \cdot CN = AC^2$.

Ugyanígy belátható, hogy a BPC és a QBC háromszögek is hasonlóak, és $CP \cdot CQ = BC^2$.

Innen (az előző két egyenlőséget összeadva) Pitagorasz tétele alapján következik a bizonyítandó állítás: $CM \cdot CN + CP \cdot CQ = AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Összesen:

2 pont

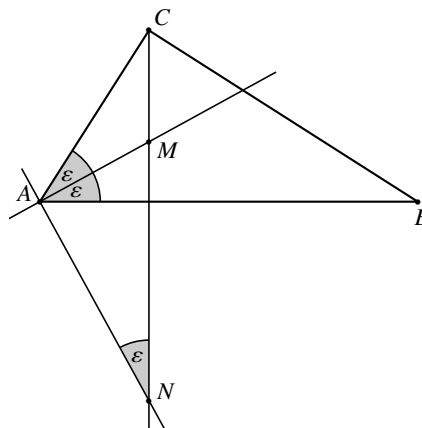
2 pont

1 pont

1 pont

1 pont

7 pont



Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Melyek azok a konvex sokszögek, amelyekben az átlók száma prímhatvány? 7 pont
2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{16}$ egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ az a tört részét, míg (a) az a egészre kerekített értékét jelöli. 7 pont
3. Legyenek A , B és C egy e egyenes pontjai úgy, hogy a B az AC szakasz belső pontja. Az AB és BC szakaszokra olyan ABD és BCE szabályos háromszögeket rajzolunk, amelyek D és E csúcsai az e egyenes által meghatározottak közül azonos félsíkba esnek. Legyen M az AE , míg N a CD szakasz felezőpontja, továbbá az AE és BD szakaszok metszéspontja G , a CD és BE szakaszok metszéspontja pedig H pont. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az MNB háromszög szabályos, és a GH szakasz párhuzamos az e egyenessel. 7 pont

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok a konvex sokszögek, amelyekben az átlók száma prímszám?

7 pont

1. megoldás. Az n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$, ahol $n \geq 4$ egész szám. Megoldandó az $\frac{n(n-3)}{2} = p^\alpha$, azaz $n(n-3) = 2 \cdot p^\alpha$ egyenlet, ahol p (pozitív) prímszám és α pozitív egész.

A következő eseteket különböztetjük meg:

I. Ha $p = 2$.

Ekkor $n(n-3) = 2^{\alpha+1}$. Az n és az $n-3$ különböző paritásúak, és egy 2-hatványnak csak egyetlen páratlan osztója van (az 1), így az $n \geq 4$ feltétel alapján, csak az $n-3 = 1$ eset lehetséges, azaz $n = 4$ (és így 2 átló van).

1 pont

II. Ha $p \geq 3$. Ezt n paritása szerint tárgyaljuk.

II. (a) Ha $n = 2k$ páros ($k \geq 2$ pozitív egész), akkor a $k(2k-3) = p^\alpha$ egyenlethez jutunk. Innen következik, hogy k és $2k-3$ a p hatványai kell legyenek, vagyis $k = p^\beta$ és $2k-3 = p^\gamma$ ($\beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $\beta + \gamma = \alpha$). Behelyettesítéssel és rendezéssel a $2 \cdot p^\beta - p^\gamma = 3$ egyenlethez jutunk.

Ha $\beta = 0$, akkor $p^\gamma = -1$, mely egyenletnek nincs valós megoldása. Tehát $\beta \geq 1$ kell legyen.

Ha $\gamma = 0$, akkor $p^\beta = 2$. A kapott egyenletnek nincs (a feltételeknek megfelelő) megoldása, mivel $p^\beta \geq 3^1 = 3$.

2 pont

Ha pedig $\beta, \gamma \geq 1$, akkor a $2 \cdot p^\beta - p^\gamma$ osztható p -vel, így $p = 3$ lesz. Ebben az esetben a megoldandó egyenlet (átrendezés után) $2 \cdot 3^\beta = 3^\gamma + 3$.

– Ha most $\beta = 1$, akkor $6 = 3^\gamma + 3$, ahonnan $\gamma = 1$. Így (visszahelyettesítve) $n = 6$ (és így $9 = 3^2$ átló) lesz.

– Ha pedig $\beta \geq 2$, akkor a $2 \cdot 3^\beta$ osztható 9-cel, míg a $3 + 3^\gamma$ nem lesz 9 többszöröse, így ebben az esetben nem kapunk megoldást.

1 pont

II. (b) Ha $n = 2k+1$ páratlan ($k \geq 2$ pozitív egész), a $(k-1)(2k+1) = p^\alpha$ egyenlethez jutunk. Innen következik, hogy $k-1$ és $2k+1$ a p hatványai kell legyenek, vagyis $k-1 = p^\beta$ és $2k+1 = p^\gamma$ ($\beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $\beta + \gamma = \alpha$). Behelyettesítéssel és rendezéssel a $p^\gamma - 2 \cdot p^\beta = 3$ egyenlethez jutunk.

Ha $\gamma = 0$, akkor $p^\beta = -1$, mely egyenletnek nincs valós megoldása. Tehát $\gamma \geq 1$ kell legyen.

Ha $\beta = 0$, akkor $p^\gamma - 2 = 3$, ahonnan $p^\gamma = 5$ és így $p = 5$ (és $\gamma = 1$). Ekkor (visszahelyettesítve) $n = 5$ (és az átlók száma is 5) lesz.

2 pont

Ha pedig $\beta, \gamma \geq 1$, akkor a $p^\gamma - 2 \cdot p^\beta$ osztható p -vel, így $p = 3$ lesz. Ebben az esetben a megoldandó egyenlet (átrendezés után) $2 \cdot 3^\beta = 3^\gamma - 3$.

– Ha most $\beta = 1$, akkor $6 = 3^\gamma - 3$, ahonnan $\gamma = 2$. Így (visszahelyettesítve) $n = 9$ (és így $27 = 3^3$ átló) lesz.

– Ha pedig $\beta \geq 2$, akkor a $2 \cdot 3^\beta$ osztható 9-cel, míg a $3^\gamma - 3$ nem lesz 9 többszöröse, így ebben az esetben nem kapunk megoldást.

1 pont

Összefoglalva, az n oldalú sokszög átlóinak száma pontosan akkor prímszám, ha $n \in \{4; 5; 6; 9\}$.

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. Aki próbálgatás útján megtalálja az összes megoldást, legfeljebb 2 pontot kapjon.

2. megoldás. Az n oldalú sokszög ($n > 2$) átlóinak a száma $\frac{n(n-3)}{2}$. A két szám közül pontosan az egyik páros, és $(n, n-3) = 1$ vagy 3 (pl. mert $(n, n-3) = (n - (n-3), n-3) = (3, n-3)$). 1 pont

Ha $(n, n-3) = 3$, akkor n is és $n-3$ is osztható 3-mal. Legyen $n = 3k$ ($k > 0$), $n-3 = 3k-3$.

Ekkor $\frac{n(n-3)}{2}$ osztható 3-mal (sőt, 9-cel), tehát az átlók száma csak 3 hatványa lehet.

$9 \cdot \frac{k(k-1)}{2}$ csak kétféleképpen lehet 3-hatvány. k és $k-1$ közül az egyik tényező vagy 2 és a másik egy 3-hatvány, vagy 1 és a másik egy 3-hatvány 2-szerese.

Ha $k-1 = 2$, akkor $k = 3$, $n = 9$, az átlók száma 27 – valóban prímszám.

Ha $k = 2$, ami megfelel a $k-1 = 1$ esetnek, akkor $n = 6$, az átlók száma 9 – valóban prímszám.

Ha $k = 1$, akkor $n = 3$, az átlók száma 0 – nem prímszám.

3 pont

Ha $(n, n-3) = 1$, azaz relatív prímek, akkor ezek szorzatának a fele csak úgy lehet prímszám, ha valamelyik tényező 1 (ez csak $n-3$ lehet) és a másik egy prímszám 2-szerese, vagy valamelyik 2 (ez is csak $n-3$ lehet), a másik pedig prímszám.

Ha $n-3 = 1$, akkor $n = 4$, az átlók száma pedig 2 – valóban prímszám;

míg ha $n-3 = 2$, akkor $n = 5$, az átlók száma pedig 5 – valóban prímszám.

2 pont

n lehetséges értékei tehát 9, 6, 4, 5.

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{16}$ egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ az a törtrészét, míg (a) az a egészre kerekített értékét jelöli. 7 pont

Megoldás. Ha $x < 0$, akkor $\{x\} > 0$ és $x + [x] + (x) < 0$ lesz, így az adott egyenletnek nincs megoldása a negatív valós számok halmazán.

Mivel $x = [x] + \{x\}$, ezért $\{x\} = \frac{[x] + \{x\} + [x] + (x)}{16}$, ahonnan

$$15 \cdot \{x\} = 2 \cdot [x] + (x).$$

(•) 1 pont

Felhasználva, hogy $0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$ esetén $(x) = [x]$, különben pedig $(x) = [x] + 1$, négy esetet vizsgálunk.

I. Ha $\{x\} = 0$, akkor $(\bullet)$ összefüggés alapján $3 \cdot [x] = 0$, és így $x = 0$ jön ki, ami megoldás. 1 pont

II. Ha $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$, akkor $(\bullet)$ összefüggés alapján $15 \cdot \{x\} = 3 \cdot [x] \Rightarrow 5 \cdot \{x\} = [x]$ adódik.

Innen $0 < \{x\} = \frac{[x]}{5} < \frac{1}{2}$, így $[x]$ csak 1 vagy 2 lehet.

Ha $[x] = 1 \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{5}$, ahonnan $x = \frac{6}{5}$, míg ha $[x] = 2 \Rightarrow \{x\} = \frac{2}{5}$, ahonnan $x = \frac{12}{5}$. 1 pont

III. Ha $\{x\} = \frac{1}{2}$, akkor $(\bullet)$ alapján $2 \cdot [x] + (x) = 3 \cdot [x] + 1 = \frac{15}{2}$, ami nem lehetséges, hiszen $3 \cdot [x] + 1$ egész szám. 1 pont

IV. Végül, ha $\frac{1}{2} < \{x\} < 1$, akkor $(\bullet)$ alapján $15 \cdot \{x\} = 3 \cdot [x] + 1$.

Innen $\frac{1}{2} < \{x\} = \frac{3 \cdot [x] + 1}{15} < 1$, így $\frac{15}{2} < 3 \cdot [x] + 1 < 15$. Figyelembe véve, hogy $3 \cdot [x] + 1$ hárommal osztva 1 maradékot adó egész szám, így csak 10 vagy 13 lehet, ahonnan adódik, hogy az $[x]$ csak a 3 vagy 4 értékeket veheti fel.

Ha $[x] = 3 \Rightarrow \{x\} = \frac{2}{3}$, ahonnan $x = \frac{11}{3}$.

Ha pedig $[x] = 4 \Rightarrow \{x\} = \frac{13}{15}$, ahonnan $x = \frac{73}{15}$. 2 pont

Ellenőrzés útján meggyőződhetünk róla, hogy a kapott értékek megoldásai az egyenletnek. Tehát az egyenletnek öt megoldása van, ezek: $0; \frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{11}{3}; \frac{73}{15}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. $(x) = [x] + \varepsilon$ ($\varepsilon = 0$, ha $\{x\} < 0,5$, illetve 1, ha $\{x\} \geq 0,5$), így $15\{x\} = 3[x] + \varepsilon$. 1 pont

Ebből $0 \leq 15\{x\} < 15$ miatt következik, hogy $0 \leq [x] \leq 4$. $[x]$ lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3, 4. 1 pont

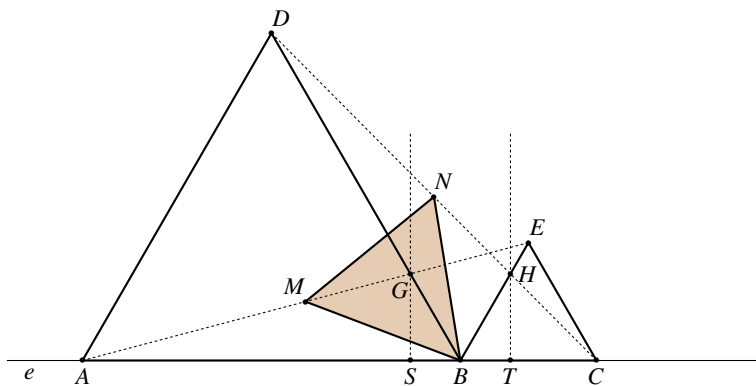
$\varepsilon = 1$, ha $\{x\} = \frac{3[x] + \varepsilon}{15} = \frac{[x]}{5} + \frac{\varepsilon}{15} \geq 0,5$, azaz ha $[x] \geq 2,5 - \frac{\varepsilon}{3} \geq 2,5$, vagyis $[x]$ legalább 3. 1 pont

Ha tehát $[x] = 0$, akkor $x = 0$; ha $[x] = 1$, akkor x vegyes tört alakja $1\frac{3}{5}$; ha $[x] = 2$, akkor

$x = 2\frac{6}{5}$; ha $[x] = 3$, akkor $x = 3\frac{10}{15}$; ha pedig $[x] = 4$, akkor $x = 4\frac{13}{15}$. 4 pont

3. Legyenek A, B és C egy e egyenes pontjai úgy, hogy a B az AC szakasz belső pontja. Az AB és BC szakaszokra olyan ABD és BCE szabályos háromszögeket rajzolunk, amelyek D és E csúcsai az e egyenes által meghatározottak közül azonos félsíkba esnek. Legyen M az AE , míg N a CD szakasz felezőpontja, továbbá az AE és BD szakaszok metszéspontja G , a CD és BE szakaszok metszéspontja pedig H pont. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az MNB háromszög szabályos, és a GH szakasz párhuzamos az e egyenessel. 7 pont

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit!



$AB = DB$, $BE = BC$ és $\angle ABE = \angle DBC = 120^\circ$ miatt $\triangle ABE \cong \triangle DBC$. 1 pont

Az egybevágóság alapján $\angle EAB = \angle CDB$ (azaz $\angle MAB = \angle NDB$) és $EA = CD$ (azaz $MA = ND$). 1 pont

Eddigi eredményeinket felhasználva $AB = DB$, $MA = ND$ és $\angle MAB = \angle NDB$ miatt

$$\triangle ABM \cong \triangle DBN.$$

1 pont

Az egybevágóság alapján $BM = BN$, $\angle ABM = \angle DBN$ és

$$\angle MBN = \angle MBD + \angle DBN = \angle MBD + \angle ABM = 60^\circ.$$

Így az MBN 60° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög, vagyis szabályos. 1 pont

Legyen S és T az e egyenes azon két pontja, amelyekre $GS \perp e$ és $HT \perp e$. Ekkor $BH \parallel AD$ és $BG \parallel CE$, mivel az egyenesek páronként 60° -os szöget zárnak be e -vel.

A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva: $BG = \frac{AB}{AC} \cdot CE$ és $BH = \frac{CB}{CA} \cdot AD$. 1 pont

Az $AB = AD$, $CE = CB$ egyenlőségeket felhasználva $BG = BH$. 1 pont

Ezt és az $\angle SBG = \angle TBH = 60^\circ$, illetve a $\angle BGS = \angle BHT = 30^\circ$ egyenlőségeket figyelembe véve $SG = TH$, ami éppen azt jelenti, hogy $GH \parallel e$. 1 pont

Összesen:

7 pont

Megjegyzés. A feladat utolsó 3 pontja másképp is megkapható:

$\angle DBE = 180^\circ - \angle ABD - \angle EBC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ (azaz $\angle DBH = 60^\circ$), $\angle MBG = 60^\circ - \angle ABM = 60^\circ - \angle DBN = \angle NBH$.

Az AGB háromszögben $\angle AGB = 180^\circ - \angle EAB - 60^\circ = 120^\circ - \angle EAB$.

A DHB háromszögben $\angle DHB = 180^\circ - \angle CDB - \angle DBH = 120^\circ - \angle CDB = 120^\circ - \angle EAB$.

$\angle AGB = \angle DHB$ (azaz $\angle MGB = \angle NHB$), $BM = BN$, $\angle MBG = \angle NBH$, így $\triangle BMG \cong \triangle BNH$.

Az egybevágóság alapján $BG = BH$, és mivel $\angle GBH = 60^\circ$, így a GBH háromszög szabályos.

Figyelembe véve, hogy ABD és GBH szabályos háromszögek, amelyeknek két-két oldala párhuzamos ($AD \parallel BH$ és $BD \parallel BG$), így $AB \parallel GH$, azaz $GH \parallel e$.

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

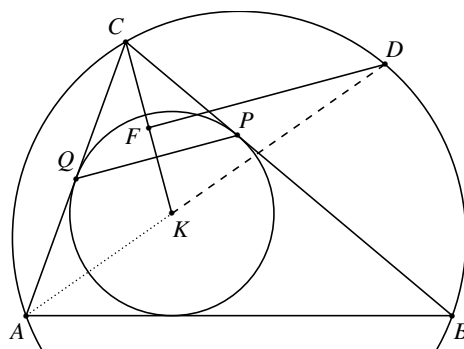
Feladatok

1. Jelölje D az ABC háromszög körülírt körén az A csúcsot nem tartalmazó BC körív felezőpontját. Az ABC háromszög beírt köre érintse a háromszög BC , illetve CA oldalát a P , illetve a Q pontban. Keressük meg annak a pontos feltételét, hogy D , P és Q egy egyenesre essen. 7 pont
2. Minden pozitív egész számot pirosra vagy kékre színezzünk az alábbiak szerint:
- Az 1 piros.
 - Legyen $k > 1$. Ha k előállítható nála kisebb, csupa különböző piros szám szorzataként, akkor k -t kékre színezzük, ha nem állítható elő ilyen módon, akkor pirosra.
- (Például a 2 és a 3 piros, de a 6 kék.)
- Melyek a piros színű számok? 7 pont
3. Megadható-e négy valós szám úgy, hogy teljesüljön a következő négy feltétel mindegyike:
- (1) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege is és a szorzata is racionális,
 - (2) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege racionális, a szorzata irracionális,
 - (3) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege irracionális, a szorzata racionális, és
 - (4) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege és a szorzata is irracionális?
- 7 pont

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje D az ABC háromszög körülírt körén az A csúcsot nem tartalmazó BC körív felezőpontját. Az ABC háromszög beírt köre érintse a háromszög BC , illetve CA oldalát a P , illetve a Q pontban. Keressük meg annak a pontos feltételét, hogy D , P és Q egy egyenesre essen. 7 pont
- Megoldás.** Jelölje K a beírt kör középpontját. Először belátjuk, hogy $DC = DK$, azaz D rajta van a CK szakasz felezőmerőlegesén. 1 pont
- Mivel a DB és DC húrok ugyanolyan hosszúak, így a kerületi szögek tétele alapján $CAD \sphericalangle = DAB \sphericalangle$, azaz D rajta van az A csúcsból induló belső szögfelezőn, akárcsak a beírt kör K középpontja.
- Ezek után egyszerű kiszámítani a CKD háromszög szögeit:
- $$CDK \sphericalangle = CDA \sphericalangle = CBA \sphericalangle = \beta.$$
- $KCD \sphericalangle = KCB \sphericalangle + BCD \sphericalangle = \gamma/2 + BAD \sphericalangle = \gamma/2 + \alpha/2$. Végül $CKD \sphericalangle$ külső szög az AKC háromszögben, így egyenlő $CAK \sphericalangle + KCA \sphericalangle = \alpha/2 + \gamma/2$ -vel, vagyis CKD valóban egyenlő szárú háromszög.



Ezután térjünk rá a feladat megoldására. Mivel PQ merőleges CK -ra, és a fentiek alapján D merőleges vetülete CK -ra a CK szakasz F felezőpontja, így a feladat feltétele pontosan akkor teljesül, ha PQ merőlegesen felezi a CK szakaszt.

1 pont

Ekkor pedig az $CPKQ$ négyszögnek CK és PQ is szimmetriatengelye, azaz a négyszög rombusz. Azonban azt is tudjuk, hogy $CPK \triangleleft$ és $CQK \triangleleft$ is derékszög, hiszen itt érinti a beírt kör az oldalakat. Tehát a C csúcsnál derékszögnek kell lennie.

1 pont

Ez elégséges feltétel is, hiszen ha $\gamma = 90^\circ$, akkor a $CPKQ$ négyszögnek három derékszöge is van, azaz téglalap. Azt is tudjuk, hogy $CP = CQ$, hiszen egy külső pontból adott körhöz egyenlő hosszú érintőszakaszok húzhatók, így $CPKQ$ négyzet, vagyis PQ valóban az CK felezőmerőlegese.

1 pont

Tehát a feladat feltétele akkor és csak akkor teljesül, ha az ABC háromszög C csúcsánál lévő szög 90° .

1 pont

Összesen:

7 pont

2. Minden pozitív egész számot pirosra vagy kékre színezzünk az alábbiak szerint:

- Az 1 piros.
- Legyen $k > 1$. Ha k előállítható nála kisebb, csupa különböző piros szám szorzataként, akkor k -t kékre színezzük, ha nem állítható elő ilyen módon, akkor pirosra.

(Például a 2 és a 3 piros, de a 6 kék.)

Melyek a piros színű számok?

7 pont

Megoldás. A megoldásunk három részre bontjuk, először a prímekek (amelyek mind pirosak), majd a prímszámhatványok (amelyek a prímszámhatvány kitevőjétől függő színűek) színét fogjuk vizsgálni, és végül megmutatjuk, hogy ha egy számot több különböző prím is oszt, akkor a színe kék.

Mivel egy pozitív prímnek a pozitív egészek között csak az 1 és önmaga az osztója, ezért bármely pozitív prím színe piros.

1 pont

Másodjára foglalkozzunk a prímszámhatványokkal. Azt fogjuk megmutatni, hogy azok a prímszámhatványok piros színűek, amelyeknek a kitevője 2-nek pozitív egész kitevős hatványa.

1 pont

Ennek a lemmának a bizonyítása következik (teljes indukcióval): Legyen p prím. p^n színét vizsgáljuk. Mivel p maga piros, p^2 piros, $p^3 = p \cdot p^2$ kék. Tehát $n = 1, 2, 3$ esetén a lemma igaz.

Tegyük fel, hogy $r < n$ esetén p^r pontosan akkor piros, ha r 2-nek hatványa, és vizsgáljuk p^n színét.

Ha az n kitevő nem hatványa a 2-nek, akkor (például n szám kettes számrendszerbeli alakját tekintve) n -et felírhatjuk a 2-hatványainak legalább kéttagú összegeként. Mivel ezeknek a 2-hatványoknak a kitevője kisebb, mint n , az indukciós feltevés szerint ezek piros számok, és így p^n felírható különböző piros számok szorzataként, azaz a színe kék.

2 pont

Ha pedig n a 2-nek hatványa, akkor az n szám nem írható fel legalább két, csupa különböző 2-hatvány összegeként. Emiatt p^n sem állítható elő nála kisebb 2-hatvány kitevőjű (és így az indukciós feltevés miatt piros) p alapú hatványok szorzataként, tehát p^n piros. Ezzel a lemmát beláttuk.

2 pont

Hátra van még azon számok vizsgálata, amelyeknek legalább két különböző prímosztója is van. Ezen számok prímfelbontásában szereplő adott prím hatványa vagy maga piros, vagy felírható néhány piros szám szorzataként; és mivel legalább két különböző prím osztja a számot, maga a szám legalább két különböző piros szám szorzata. Azaz ezek a számok valóban kék színt kapnak.

1 pont

Összegezve: tehát az 1, a prímek, és azon prímhatalványok a piros számok, amelyek kitevője kettő hatvány, a többi szám pedig kék.

Összesen:

7 pont

3. Megadható-e négy valós szám úgy, hogy teljesüljön a következő négy feltétel mindegyike:

- (1) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege is és a szorzata is racionális,
- (2) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege racionális, a szorzata irracionális,
- (3) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege irracionális, a szorzata racionális, és
- (4) legyen közöttük három olyan, amelyeknek az összege és a szorzata is irracionális?

7 pont

Megoldás. A számok legyenek a, b, c és d . Tegyük fel, hogy a, b és c összege is és szorzata is racionális, valamint a, b és d összege racionális, szorzata pedig irracionális. Ekkor

$$c - d = (a + b + c) - (a + b + d)$$

racionális.

1 pont

Tegyük fel, hogy a, c és d összege irracionális, a szorzatuk pedig racionális. Ekkor $\frac{b}{d} = \frac{abc}{acd}$ racionális.

Tehát $c - d = r$ és $\frac{b}{d} = s$, ahol r és s racionálisak, azaz $c = d + r$ és $b = s \cdot d$.

1 pont

Ekkor a számaink: $a, s \cdot d, d + r$ és d . Legyen $d = \sqrt{2}$, $c = d + r = \sqrt{2} + 1$, (és így $r = 1$) $b = 2\sqrt{2}$.

Ekkor $b + c + d$ és $b \cdot c \cdot d$ egyaránt irracionális.

1 pont

Ahhoz, hogy $a + b + c$ és $a + b + d$ racionális legyen, az kell, hogy $a = t - 3\sqrt{2}$ alakú legyen, ahol t racionális.

1 pont

Eddig a számok: $a = t - 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + 1$ és $d = \sqrt{2}$.

t értékét úgy kell megválasztani, hogy $a \cdot b \cdot c = (t - 3\sqrt{2})2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$ racionális legyen.

1 pont

Nyilván $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$. Szorozzuk ezt $3\sqrt{2}$ -vel, így

$$3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = (6 - 3\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 3\sqrt{2}.$$

Azaz $t = 6$ esetén $a = 6 - 3\sqrt{2}$, és így $a \cdot b \cdot c = (6 - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 12$. 1 pont

Ellenőrizhető, hogy mind a négy feltétel teljesül:

$$a + b + c = 7 \text{ és } abc = 12,$$

$$a + b + d = 6 \text{ és } abd = 4(6 - 3\sqrt{2}),$$

$$a + c + d = 7 - \sqrt{2} \text{ és } acd = 6,$$

$$b + c + d = 4\sqrt{2} + 1 \text{ és } bcd = 4(\sqrt{2} + 1).$$

Tehát vannak ilyen valós számok, például: $6 - 3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + 1$ és $\sqrt{2}$.

1 pont

Összesen:

7 pont