Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2022/2023-as tanév

Kezdők és Haladók
I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

A verseny a Kulturális és Innovációs Minisztérium, a Nemzeti Tehetség Program
és az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával
az NTP-TMV-M-22-B-0009 azonosító számú pályázat alapján valósul meg.

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Három különböző számjegyből elkészítjük a lehető legnagyobb és a legkisebb háromjegyű számot, majd azokat összeadjuk. Eredményül 1453-at kapunk. Melyek voltak a számjegyek? **6 pont**

2. Az $ABCD$ paralelogramma B csúcsából az AB oldalra állított merőleges az AC átlót egy E belső pontban metszi. Milyen arányban osztja az AC átló a BAD szöget, ha $AE = 2BC$? **6 pont**

3. Melyik az a legnagyobb n egész szám, amelyre $n^2 + 2022$ osztható $(n+10)$-zel? **6 pont**

4. Egy 3×3-as táblázat mindegyik mezőjébe 0-t, 1-et vagy 2-t írunk, majd összeadjuk az egy-egy sorban, illetve egy-egy oszlopban szereplő számokat. Lehetséges-e, hogy az így kapott hat szám mindegyike különböző? **6 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Három különböző számjegyből elkészítjük a lehető legnagyobb és a legkisebb háromjegyű számot, majd azokat összeadjuk. Eredményül 1453-at kapunk. Melyek voltak a számjegyek? **6 pont**

1. megoldás. 3 végű két egyjegyű szám összege, amelyek egyike sem 0 így lehet:

$1+2$, $9+4$, $8+5$, $6+7$. 2 pont

Mivel a három számjegy különböző, ezért a két összeadandó között nem lehet 1 a különbség, mert akkor a középső számjegyet nem tudjuk a feltételeknek megfelelően választani. 1 pont

Ha az egyik szám alakja 9_4, a másik pedig 4_9, akkor a középső számjegy a 7. 1 pont

Ha az egyik szám alakja 8_5, a másik pedig 5_8, akkor is a középső számjegy a 7. 1 pont

Tehát a keresett számjegyek: 4, 7, 9 vagy 5, 7, 8. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás. Legyen a három számjegy $0 < a < b < c < 10$. Akkor a két szám $100a + 10b + c$, illetve $100c + 10b + a$. 2 pont

Ezek összege $101(a+c) + 20b = 1453$. 1 pont

b lehetséges értékei 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, vagyis $20b$ lehet 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160. Eszerint $101(a+c)$ lehetséges értékei 1413, 1393, 1373, 1353, 1333, 1313, 1293. 1 pont

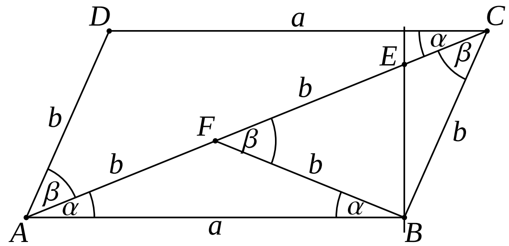
Ezek közül csak az 1313 osztható 101-gyel, ezért $20b = 140$, $b = 7$, illetve $a + b = 13$, ahonnan a és c lehet 4 és 9, illetve 5 és 8. 1 pont

Tehát a keresett számjegyek: 4, 7, 9 vagy 5, 7, 8. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Az $ABCD$ paralelogramma B csúcsából az AB oldalra állított merőleges az AC átlót egy E belső pontban metszi. Milyen arányban osztja az AC átló a BAD szöget, ha $AE = 2BC$? **6 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát! Jelöljük a paralelogramma AB oldalát a-val, BC oldalát b-vel. A BAC szög legyen α, a CAD szög pedig β.



A BCA szög és a CAD szög váltószögek, azaz BCA szög is β nagyságú. 1 pont

$AE = 2BC = 2b$. Legyen az AE szakasz felezőpontja F. Ekkor $AF = FE = b$.

Az ABE derékszögű háromszögben F az átfogó felezőpontja. Mivel F a háromszög köré írt körének középpontja, ezért $FB = b$ is teljesül. 1 pont

Az FBC háromszög egyenlő szárú, mert $FB = BC = b$, így a BFC szög is β nagyságú. 1 pont

Az AFB háromszög egyenlő szárú, mert $AF = FB = b$, így az FBA szög is α nagyságú. 1 pont

A BFC szög AFB háromszög F-nél lévő külső szöge, nagysága a vele nem szomszédos két belső szög összegével egyenlő, azaz 2α. 1 pont

Összegezve a fentieket: $BFC\sphericalangle = \beta = 2\alpha$, azaz az AC átló két olyan szögre osztja a BAD szöget, amelyek aránya 1 : 2. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Melyik az a legnagyobb n egész szám, amelyre $n^2 + 2022$ osztható $(n+10)$-zel? **6 pont**

Megoldás. Tudjuk, hogy $n^2 - 100 = (n-10)(n+10)$. 1 pont

Ebből következik, hogy $n+10 \mid n^2 - 100$. 1 pont

Ha $n+10 \mid n^2 + 2022$ is teljesül, akkor $n+10 \mid (n^2+2022) - (n^2-100) = 2122$. 2 pont

Tehát $n+10 \leq 2122$, és $n \leq 2112$. 1 pont

Az $n = 2112$-t behelyettesítve, az oszthatóság valóban fennáll. 1 pont

Összesen: **6 pont**

4. Egy 3×3-as táblázat mindegyik mezőjébe 0-t, 1-et vagy 2-t írunk, majd összeadjuk az egy-egy sorban, illetve egy-egy oszlopban szereplő számokat. Lehetséges-e, hogy az így kapott hat szám mindegyike különböző? **6 pont**

Megoldás. Tegyük fel, hogy a kapott összegek lehetnek különbözők.

A legkisebb összeg $0+0+0=0$, a legnagyobb $2+2+2=6$. Ez összesen hétféle lehetőség. 1 pont

Először megmutatjuk, hogy a legkisebb és a legnagyobb összeg nem szerepelhet egyszerre a táblázatban. Ha mindkettő szerepelne benne, akkor mindkettőnek sorösszegnek vagy mindkettőnek oszlopösszegnek kellene lennie, hiszen nem lehet közös mezőjük. Tegyük fel, hogy mindegyik sorösszeg. Ekkor ahhoz, hogy az oszlopok összegei mind különbözzenek, a harmadik sorba csupa különböző számot kell írnunk. Ekkor azonban ennek a sornak és az 1-est tartalmazó oszlopnak egyaránt 3 az összege. 2 pont

Ha a legnagyobb és legkisebb összeg nem szerepelhet együtt, akkor az 1, 2, 3, 4 és 5 összegek mindegyikének szerepelnie kell ahhoz, hogy minden sor-, illetve oszlopösszeg különböző legyen.

Ekkor a hat szám összege $0+1+2+3+4+5=15$ vagy $1+2+3+4+5+6=21$, azaz biztosan páratlan szám. 1 pont

A hat szám összege a táblázatban szereplő összes szám összegének kétszerese, mivel minden szám két összegben (egy sor- és egy oszlopösszegben) szerepel. Azaz a hat szám összegének párosnak kellene lennie. 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, ezért nem lehet, hogy a hat szám mindegyike különböző. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Kezdők I–II. kategória 2. forduló
Kezdők III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyeket tartalmazza, ezek mindegyike előfordul benne legalább egyszer, és teljesül rá, hogy bármely két szomszédos számjegye közül az egyik osztója a másiknak? **6 pont**

2. Mely x, y valós számokra teljesül, hogy $\left(x^2+6x+10\right)\left(4y^2-4y+5\right)=4$? **6 pont**

3. Adott a síkon 65 pont. Ha ezeket páronként összekötjük, akkor 2023 különböző egyenest kapunk. Bizonyítsuk be, hogy az egyenesek között biztosan lesz olyan, amelyre legalább 4 pont illeszkedik. **8 pont**

4. Az $ABCD$ trapéz szárainak hossza $AD=4$ és $BC=5$ egység. DC a rövidebb alap, és 1 egység hosszú. A B csúcsnál lévő belső szög szögfelezője az AD szárat a felezőpontjában metszi. Mekkora a trapéz területe? **10 pont**

5. Egy 6×6-os tábla mindegyik mezőjét a piros, kék és zöld színek valamelyikével kiszíneztük. Két mezőt *fánkszomszédosnak* nevezünk, ha van közös oldalélük, vagy pedig egy sor vagy oszlop két átellenes végén helyezkednek el. A mezőkre egy-egy számot írunk az alábbi szabályok szerint:

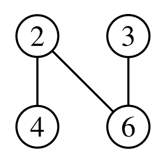
- Ha a mező piros, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező kék fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező zöld fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.
- Ha a mező kék, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező zöld fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező piros fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.
- Ha a mező zöld, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező piros fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező kék fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.

Mi a táblára felírt számok összegének lehetséges maximuma? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyeket tartalmazza, ezek mindegyike előfordul benne legalább egyszer, és teljesül rá, hogy bármely két szomszédos számjegye közül az egyik osztója a másiknak? **6 pont**

Megoldás. A keresett legkisebb számban biztosan nem állnak egymás mellett azonos számjegyek, mert ezeket le lehet cserélni egyetlen számjegyre (arra, ami ismétlődik), így egy kisebb, a feltételeknek szintén megfelelő számot kapunk. Az 5, illetve a 7 mellé emiatt csak az 1 (önmaga az ismétlődés elkerülése miatt nem) kerülhet, ezért ez a szám nem lehet 7-jegyű, mert az 1-esből legalább kettőnek kell lennie. 1 pont
Keressünk alkalmas számot azon 8-jegyű számok között, amelyek az 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből állnak. Ha találunk ilyet, akkor közülük a legkisebb a megoldás, és készen vagyunk.
Mivel csak két 1-es van, ezért az 5-ösnek és a 7-esnek a szám elején vagy végén kell állnia vagy együtt ($****1517$ vagy $****1715$ vagy $5171****$ vagy $7151****$ elrendezésben), vagy külön-külön ($51****17$ vagy $71****15$ elrendezésben). 1 pont
A $****$ helyére kell berakni a 2, 3, 4 és 6 számjegyeket.
Vizsgáljuk meg, hogy ezen négy számnak a többi közül melyik lehet a szomszédja. Ha egy gráf csúcsaira írjuk ezeket a számokat, és akkor kötjük össze éllel őket, ha az egyik osztója a másiknak, akkor a mellékelt ábrát kapjuk. Ebből leolvasható, hogy a számjegyek 4263 vagy fordított, 3624 sorrendben követhetik egymást. (Természetesen bármilyen más indoklás elfogadható.) 1 pont



Ha az 5 és a 7 a szám különböző szélén van, abból az 5-össel kezdődő a kisebb: $51****17$. Az ezzel kapható legkisebb szám az 51362417. 1 pont
Ha az 5 és a 7 a szám ugyanazon szélén van, akkor úgy kapjuk a lehető legkisebbet, ha a végén áll 1517 sorrendben: $****1517$. Az ezzel kapható legkisebb szám a 36241517. 1 pont
A talált számok közül ez utóbbi a kisebb, tehát a keresett szám a 36241517. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Nem csak akkor adható meg egy adott eset vizsgálatáért a pont, ha a diák leírja az adott esethez tartozó lehetséges számot (számokat), hanem akkor is, ha az adott esetet megvizsgálja, és helyesen és megindokolva kizárja, hogy ez adja a legkisebb megfelelő számot. (Például ha először a 36241517 számot adó esetet vizsgálja, akkor a többi eset lezárható azzal, hogy az 5-tel vagy 7-tel kezdődő számok ennél biztosan nagyobbak lesznek.)

2. Mely x, y valós számokra teljesül, hogy $\left(x^2+6x+10\right)\left(4y^2-4y+5\right)=4$? **6 pont**

Megoldás. Az egyenlet átírva: $\left(x^2+6x+10\right)\left(4y^2-4y+5\right)=[(x+3)^2+1][(2y-1)^2+4]=4.$ 1 pont

Mivel $(x+3)^2+1\geqslant 1$; $(2y-1)^2+4\geqslant 4$, 1 pont

ezért $\left[(x+3)^2+1\right]\left[(2y-1)^2+4\right]\geqslant 4$. 1 pont

Ha $\left[(x+3)^2+1\right]\left[(2y-1)^2+4\right]=4$, akkor $(x+3)^2+1=1$ és $(2y-1)^2+4=4$, ami $x=-3$ és $y=\frac{1}{2}$ esetén lehetséges. 1 pont

Ezek kielégítik az eredeti egyenletet. 1 pont

Tehát $x=-3$ és $y=\frac{1}{2}$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Az eredmény puszta közlése 1 pont.

3. Adott a síkon 65 pont. Ha ezeket páronként összekötjük, akkor 2023 különböző egyenest kapunk. Bizonyítsuk be, hogy az egyenesek között biztosan lesz olyan, amelyre legalább 4 pont illeszkedik. **8 pont**

Megoldás. Ha a kijelölt pontok közül semelyik 3 nem esik egy egyenesre, akkor azok

$$\frac{65\cdot 64}{2}=2080$$

egyenest határoznak meg. 2 pont

Mivel a feladat feltétele alapján a kapott egyenesek száma ennél kevesebb, ezért az egyenesek között biztosan van olyan is, amely legalább 3 pontot tartalmaz. 2 pont

Ha a pontok között nincs egy egyenesre illeszkedő pontnégyes, és a 3 pontot tartalmazó egyenesek száma k $(k\in\mathbb{N}^+)$, akkor az egymástól különböző egyenesek száma $2080-2k=2(1040-k)$, mivel a kollineáris ponthármasok 2-2-vel csökkentik a maximumhoz képest az egyenesek számát. 2 pont

$2(1040-k)$ páros szám, így nem lehet 2023-mal egyenlő. 1 pont

Ez viszont azt jelenti, hogy az egyenesek között van olyan is, amelyre legalább 4 pont illeszkedik. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: **8 pont**

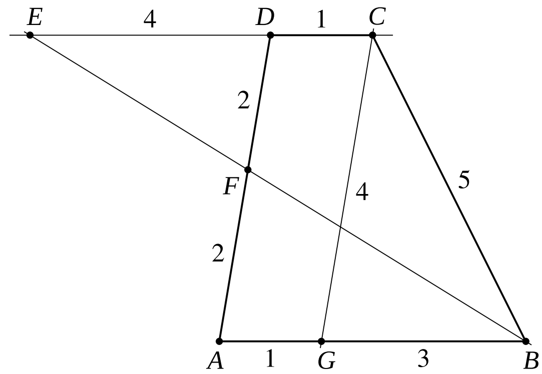
4. Az $ABCD$ trapéz szárainak hossza $AD=4$ és $BC=5$ egység. DC a rövidebb alap, és 1 egység hosszú. A B csúcsnál lévő belső szög szögfelezője az AD szárat a felezőpontjában metszi. Mekkora a trapéz területe? **10 pont**

Megoldás. Hosszabbítsuk meg az ABC szög szögfelezőjét a CD egyeneséig, amellyel vett metszéspontját nevezzük E-nek. 1 pont

Az ECB háromszög EB-n fekvő két szöge egyenlő, mivel mindkettő egyenlő az ABE szöggel; EBC a szögfelezés miatt, BEC pedig a váltószöge, 1 pont

ezért $EC=BC=5$ egység. 1 pont

Ebből adódik, hogy $ED=EC-DC=5-1=4$. (Mivel E a CD félegyenesen van.) 1 pont



Az EDF és az ABF háromszögek egybevágók, mert szögeik egyenlők és $DF = AF$, ezért $AB = 4$ egység. 1 pont

Húzzunk párhuzamost C-n keresztül AD-vel, amely G-ben metszi az AB oldalt. 1 pont

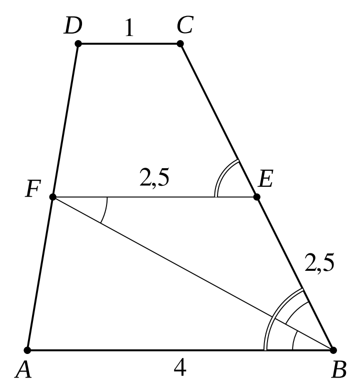
$AG = 1$, $GB = 3$ egység, 1 pont

tehát a BCG háromszög oldalai 3, 4, és 5 egység, tehát derékszögű, ezért CG és AD egyben a trapéz magassága. 2 pont

A trapéz területe: $\dfrac{(4+1)\cdot 4}{2} = 10$ területegység. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzés az első 5 ponthoz: Az $AB = 4$ egység másképpen is megkapható. Rajzoljuk be a trapéz FE középvonalát. Innen $ABF\sphericalangle = BFE\sphericalangle$, mert váltószögek, $ABF\sphericalangle = FBE\sphericalangle$, mert BF szögfelező, ezért $BFE\sphericalangle = FBE\sphericalangle$. Az FBE háromszög tehát egyenlő szárú, így $FE = EB = 2{,}5$ egység. Innen $AB = 4$ egység adódik (4 és 1 számtani közepe 2,5).



5. Egy 6×6-os tábla mindegyik mezőjét a piros, kék és zöld színek valamelyikével kiszíneztük. Két mezőt *fánkszomszédosnak* nevezünk, ha van közös oldalélük, vagy pedig egy sor vagy oszlop két átellenes végén helyezkednek el. A mezőkre egy-egy számot írunk az alábbi szabályok szerint:

- Ha a mező piros, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező kék fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező zöld fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.
- Ha a mező kék, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező zöld fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező piros fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.
- Ha a mező zöld, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező piros fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező kék fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.

Mi a táblára felírt számok összegének lehetséges maximuma? **10 pont**

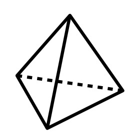
Megoldás. Nem fánkszomszédos mezők színe nem befolyásolja a táblára írt számokat. 1 pont
Egy mező vele azonos színű fánkszomszédai száma nem járul hozzá a mezőre írt szám növeléséhez. Vagyis két azonos színű fánkszomszédos mező nem növeli a táblára írt számok összegét. 1 pont
Ha viszont két fánkszomszédos mező különböző színű, akkor – a leírt szabályok alapján – az egyiknél kétszer, a másiknál pedig háromszor kell számítani őket. 1 pont
Ezért a táblára felírt számok összege a *különböző* színű fánkszomszédos mezőpárok számának ötszöröse. 2 pont
Mivel mindegyik mezőnek négy fánkszomszédja van, ezért az ilyen párok száma $\frac{6^2 \cdot 4}{2} = 72$, 2 pont
tehát az összeg nem lehet több, mint $5 \cdot 72 = 360$. 1 pont
Létezik olyan konstrukció, amikor az összes fánkszomszédos kapcsolatban álló mezőpár különböző színű: például ha sakktáblaszerűen, váltott színnel színezzük a szomszédos mezőket. Tehát a keresett maximum 360.
(Bármely egyéb, a feltételnek megfelelő konstrukció elfogadható. Hibás konstrukcióért azonban nem jár pont.) 2 pont
Összesen: **10 pont**

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Hány olyan 2023-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy a szám tizenötszörösének pontosan négyszer annyi (pozitív) osztója van, mint az eredeti számnak? **10 pont**

2. Egy játékban egységoldalú szabályos háromszög alakú lapokból lehet egységnyi élhosszúságú szabályos tetraédereket építeni. Minden háromszög piros, kék, sárga vagy zöld színű. A háromszögekből egy-egy tetraéderhez négyet-négyet felhasználva éppen meg lehet építeni az összes különböző szabályos tetraédert. Két tetraédert akkor tekintünk különbözőnek, ha azok forgatással nem vihetők egymásba. Hány háromszögből áll a készlet? **10 pont**



3. Az $ABCD$ négyszögben az A csúcsnál lévő belső szög 30°, a B, illetve D csúcsnál derékszög van, továbbá $AB = 13$ cm, és $CD = 2$ cm.

a) Határozzuk meg a hiányzó két oldal hosszának pontos értékét!
b) Igazoljuk, hogy a négyszög köré írt körének (a négyszög minden csúcsára illeszkedő kör) sugara centiméterben mérve egész szám! **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan 2023-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy a szám tizenötszörösének pontosan négyszer annyi (pozitív) osztója van, mint az eredeti számnak? **10 pont**

Megoldás. Az 1 megoldás, hiszen az 1-nek egy, a 15-nek négy darab (1, 3, 5, 15) osztója van. 1 pont

Tegyük fel, hogy egy 1-nél nagyobb pozitív egész N számnak k darab osztója van, ezek legyenek nagyság szerinti sorrendben: $a_1 = 1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k = N$.

Ezek a számok mind osztói $15N$-nek is, és ezeken kívül $15N$ osztható az alábbiakkal is:

$$3a_1, 3a_2, 3a_3, \ldots, 3a_k$$
$$5a_1, 5a_2, 5a_3, \ldots, 5a_k$$
$$15a_1, 15a_2, 15a_3, \ldots, 15a_k$$

1 pont

A felsoroltaktól eltérő számmal $15N$ nem lehet osztható, hiszen prímtényezős felbontásában egy 3-as és egy 5-ös tényezővel van több, mint N prímtényezős felbontásában. 1 pont

Ez összesen négyszer annyi szám, mint N osztóinak száma, a $15N$-nek tehát pontosan akkor van négyszer annyi osztója, mint N-nek, ha a felsorolt számok mind különbözőek. 1 pont

Mivel $a_1 = 1$, így $3a_1 = 3$ és $5a_1 = 5$, és ezek nem lehetnek felsorolva N osztói között, így szükséges feltétel, hogy N ne legyen osztható sem 3-mal, sem 5-tel. 1 pont

Ha N nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, akkor a felsorolt osztók valóban mind különbözőek, hiszen az első sor elemei sem 5-tel, sem 3-mal nem oszthatóak, a második sor elemei 3-mal igen, de 5-tel nem, a harmadik sorban felsorolt számok 5-tel igen, de 3-mal nem, míg a negyedik sor elemei mindkét számmal oszthatóak. 1 pont

Azt kell tehát megállapítanunk, hogy hány olyan 2023-nál nem nagyobb pozitív szám van, amely sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható. 1 pont

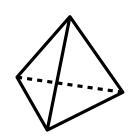
A 2023-nál nem nagyobb pozitív egészek közül: 3-mal osztható: 674 darab, 5-tel osztható: 404 darab, 15-tel osztható: 134 darab. 1 pont

Tehát a 2023-nál nem nagyobb pozitív egészek közül azok darabszáma, amelyek 3-mal vagy 5-tel oszthatóak: $674 + 404 - 134 = 944$. 1 pont

A többi 2023-nál nem nagyobb pozitív egész az, ami sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható, tehát összesen $2023 - 944 = 1079$ keresett tulajdonságú szám van. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Egy játékban egységoldalú szabályos háromszög alakú lapokból lehet egységnyi élhosszúságú szabályos tetraédereket építeni. Minden háromszög piros, kék, sárga vagy zöld színű. A háromszögekből egy-egy tetraéderhez négyet-négyet felhasználva éppen meg lehet építeni az összes különböző szabályos tetraédert. Két tetraédert akkor tekintünk különbözőnek, ha azok forgatással nem vihetők egymásba. Hány háromszögből áll a készlet? **10 pont**



1. megoldás. Minden színből ugyanannyira lesz szükség, ezért számoljuk meg, hogy hány piros háromszög van a készletben! 1 pont

Ehhez vegyük sorra, hogy hány piros lapja lehet egy tetraédernek:

Egyféle olyan tetraéder építhető, amelynek minden lapja piros, ehhez 4 háromszög kell. 1 pont

Három olyan tetraéder van, amelynek három lapja piros, egy pedig pirostól eltérő színű. Ezek megépítéséhez $3 \cdot 3 = 9$ háromszög kell. 1 pont

Két piros lapja kétféle módon lehet egy tetraédernek: vagy a másik két lap is egyező színű vagy azok különbözőek. Háromféle olyan van, ahol a másik két lap is egyező, ezekhez $3 \cdot 2 = 6$ piros háromszög kell. 1 pont

Háromféle olyan van, ahol a másik két lap különböző színű, ez $3 \cdot 2 = 6$ piros háromszöget jelent. (Egy színt nem használunk a piroson kívüli háromból.) 1 pont

Egy piros lapja háromféle módon lehet egy tetraédernek:

Lehet a másik három lap egyforma: ilyenből 3 van, ezekhez 3 piros háromszög kell. 1 pont

Lehet a másik három lap kétféle színű: ilyenből 6 van ($3 \cdot 2$), ezekhez 6 piros háromszög kell. 1 pont

Lehet a másik három lap csupa különböző színű, ilyenből kettő van, mert ezek forgatással nem vihetők egymásba. Ezek megépítéséhez 2 piros háromszög kell. 1 pont

Azaz összesen $4 + 9 + 6 + 6 + 3 + 6 + 2 = 36$ piros háromszög kell, 1 pont

azaz $4 \cdot 36 = 144$ elemből áll a készlet. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Számoljuk össze, hogy hányféle tetraédert lehet építeni! A háromszögek száma ennek négyszerese. 1 pont

Vegyük sorra, hogy hányféle színű lapból építhetjük a tetraédert:

Egyféle színű lapokból 4 különböző tetraédert építhetünk (pirosat, kéket, sárgát, zöldet). 1 pont

Kétféle színű lapból kétféle tetraédert építhetünk:

Egy színből 3 lap és egy másikból 1 lap: ilyenből $4 \cdot 3 = 12$ van. 1 pont

Mindkét színből 2-2 lap: ilyenből $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ van. 1 pont

Ha háromféle színű lapból építjük a tetraédert, akkor egy szín kétszer fog szerepelni, ezt 4-féleképpen választhatjuk ki, mellé a másik két lapot $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$-féleképpen. Azaz ilyen tetraéderből $4 \cdot 3 = 12$ különböző van. 2 pont

Végül négyféle színből 2-féle tetraédert építhetünk, amelyek forgatással nem vihetők egymásba. 1 pont

Azaz összesen $4 + 12 + 6 + 12 + 2 = 36$ különböző tetraédert építhetünk. 1 pont

Ezek megépítéséhez pedig $36 \cdot 4 = 144$ háromszögre van szükség. 1 pont

Megjegyzés. Az utolsó pont csak akkor jár, ha helyes a végeredmény.

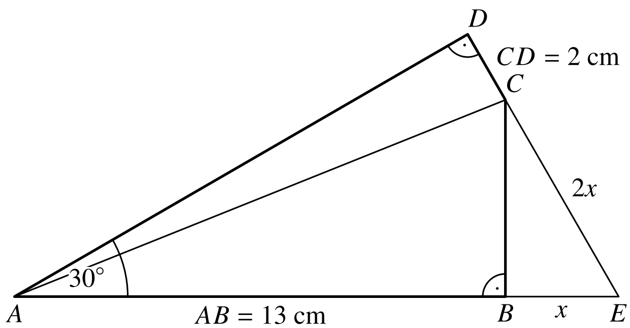
Összesen: **10 pont**

3. Az $ABCD$ négyszögben az A csúcsnál lévő belső szög $30°$, a B, illetve D csúcsnál derékszög van, továbbá $AB = 13$ cm, és $CD = 2$ cm.

a) Határozzuk meg a hiányzó két oldal hosszának pontos értékét!

b) Igazoljuk, hogy a négyszög köré írt körének (a négyszög minden csúcsára illeszkedő kör) sugara centiméterben mérve egész szám! **10 pont**

Megoldás. Az adatoknak megfelelő ábra. 1 pont



Az AB és a DC szakaszok meghosszabbításának metszéspontja legyen az E pont.	1 pont
A BCE háromszög félszabályos, ezért ha $BE = x$, akkor $CE = 2x$,	1 pont
Az ADE háromszög is félszabályos, ezért $2 \cdot (2 + 2x) = 13 + x$,	1 pont
ebből $x = 3$ cm.	1 pont
Pitagorasz-tételt alkalmazva a BCE, illetve az ADE háromszögekben, $BC = \sqrt{27}$ cm,	1 pont
illetve $AD = \sqrt{192}$ cm adódik.	1 pont
A Thalesz-tétel megfordítása miatt, a B és a D pont is illeszkedik az AC átmérőjű körre.	1 pont
$AC = 14$ cm a Pitagorasz-tételből következően,	1 pont
így a négyszög köré írható kör sugara 7 cm, ami valóban egész szám.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az (a_n) sorozat tagjait a $\{0; 1; 2\}$ halmazból választjuk ki az alábbi szabály szerint: ha $a_k = j$, akkor $a_{k+j} = 0$ ($k \in \mathbb{N}^+$).

Jelölje S a sorozat első 2023 tagjának összegét! Határozzuk meg S lehetséges legnagyobb értékét. **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CD - AB = BC$. A négyszög B-ből induló külső, és C-ből induló belső szögfelező egyenese M-ben metszi egymást. Igazoljuk, hogy $MA = MD$! **10 pont**

3. 100 kavicsot szeretnénk felosztani kisebb kupacokra. Egy k kupacra történő felosztást jónak nevezünk, ha

- bármely két kupac mérete különböző, és
- akárhogyan is osztjuk szét az egyik kupacot két nála kisebb kupacra, a keletkező $k + 1$ kupac között lesz két azonos méretű.

Határozzuk meg k lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét! **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az (a_n) sorozat tagjait a $\{0;1;2\}$ halmazból választjuk ki az alábbi szabály szerint: ha $a_k = j$, akkor $a_{k+j} = 0$ ($k \in \mathbb{N}^+$).

Jelölje S a sorozat első 2023 tagjának összegét! Határozzuk meg S lehetséges legnagyobb értékét. **10 pont**

Megoldás. Legyen a sorozat első 2023 tagja között előforduló kettesek száma a, az egyeseké b, a nulláké c. Ekkor $a+b+c = 2023$ és $S = 2a+b$. 2 pont

Tetszőleges $1 \leq k \leq 2021$, $a_k = 2$ esetén $a_{k+2} = 0$. Ha tehát 1-től 2023-ig a darab 2-es van, akkor 1-től 2025-ig legalább a darab 0 van, ami azt jelenti, hogy 1-től 2023-ig a 0-k száma legalább $a-2$. Így $c \geq a-2$, azaz $a \leq c+2$. 1 pont

Ennek figyelembe vételével:

$$S = 2a+b \leq a+b+c+2 = 2023+2 = 2025.$$ 3 pont

A maximális összeg megvalósítható például az alábbi sorozattal:

$$\underbrace{\overbrace{2,1,0},\overbrace{2,1,0},\overbrace{2,1,0}}_{\text{3-szor}},\underbrace{\overbrace{2,2,0,0},\overbrace{2,2,0,0},\ldots,\overbrace{2,2,0,0}}_{\text{503-szor}},2,2,$$

ahol a sorozat elején a 2, 1, 0 részlet 3-szor szerepel, utána a 2, 2, 0, 0 részlet jön 503-szor, majd ezt követően két 2-es következik. 3 pont

Ekkor

$$S = 3 \cdot 3 + 503 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 2025.$$

Tehát S maximális értéke 2025. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Konstruáljunk ilyen sorozatot! Minden 1-est 0 követ, minden 2-es után következhet 2 és utána 0, 0 vagy 1 és 0, illetve 0 és 0. A sorozat tehát „1, 0”, „2, 0, 0”, „2, 1, 0” vagy „2, 2, 0, 0” blokkokból és elő nem írt 0-kból állhat. 2 pont

Akkor érhető el a legnagyobb összeg, ha a számok átlaga a lehető legnagyobb. ez pedig akkor következik be, ha kizárjuk a nem előírt 0-kat, és mivel az „1, 0” és „2, 0, 0” blokkban az átlag 1-nél kisebb, míg a „2, 1, 0” és a „2, 2, 0, 0” blokkokban 1, így csak a két utóbbit használjuk. 2 pont

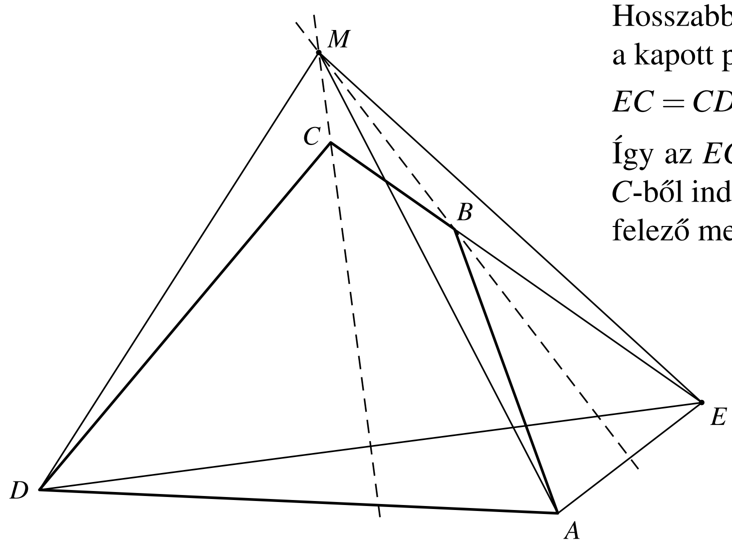
Az átlag így legalább 1. Ezt akkor tudjuk növelni, ha a sorozat 2023. tagja után a lehető legtöbb előírt 0-t hagyhatjuk el, vagyis a 2024. és 2025. helyeken előírt 0-k állnak. 2 pont

Eszerint a 2022., és 2023. tag 2, 2, az azt megelőző tagokat pedig a „2, 1, 0” és „2, 2, 0, 0” blokkokkal töltjük fel (például az első megoldásban látott módon). 3 pont

A számok összege ekkor a lehető legnagyobb, és ez $2021+2+2 = 2025$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CD - AB = BC$. A négyszög B-ből induló külső, és C-ből induló belső szögfelező egyenese M-ben metszi egymást. Igazoljuk, hogy $MA = MD$! **10 pont**



Hosszabbítsuk meg a BC oldalt B felé AB-vel, a kapott pontot jelöljük E-vel! 3 pont

$EC = CD$. 1 pont

Így az ECD háromszög egyenlő szárú, tehát a C-ből induló szögfelező egyben az ED szakasz felező merőlegese, amiből $ME = MD$. 2 pont

$EB = BA$, így az EBA háromszög egyenlő szárú, tehát a B-ből induló belső szögfelező (ami az $ABCD$ négyszög B-ből induló külső szögfelezője) egyben az EA szakasz felező merőlegese, amiből $ME = MA$. 2 pont

A két egyenlőséget egybevetve adódik, hogy $MA = MD$. 2 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzések a pontozáshoz.

- Amennyiben a tanuló nem a BC oldalt hosszabbítja meg AB-vel, hanem az AB-t BC-vel, 2 pont adható.
- Ha nincs oldalmeghosszabbítás, de a CD oldalt osztja fel AB és BC hosszúságú szakaszokra, 1 pont adható.
- Ha megjelenik az a gondolat, hogy egy egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezőjének minden pontja egyenlő messze van az alap két végpontjától, további 1 pont adható.

3. 100 kavicsot szeretnénk felosztani kisebb kupacokra. Egy k kupacra történő felosztást jónak nevezünk, ha

- bármely két kupac mérete különböző, és
- akárhogyan is osztjuk szét az egyik kupacot két nála kisebb kupacra, a keletkező $k+1$ kupac között lesz két azonos méretű.

Határozzuk meg k lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét! **10 pont**

Megoldás. Ha $k \geq 14$, akkor a kupacokban legalább $1+2+\cdots+14 = 105$ kavics lenne, ami ellentmondás, tehát $k \leq 13$. $k = 13$-ra a $\{1,2,3,\ldots,11,12,22\}$ felosztás jó: akármelyik kupacot is osztjuk ketté, a két keletkezett kupac mérete közül a kisebb már előfordult. Tehát k lehetséges maximuma 13. Megmutatjuk, hogy a minimum 10. A $\{1,3,5,\ldots,17,19\}$ felosztás jó, hiszen minden kupac kettéosztásakor egy páratlan kupacot osztunk fel egy páros, és egy nála kisebb méretű páratlan méretű kupacra, és minden kisebb páratlan szám már előfordul egy másik kupac méreteként.

Tegyük fel, hogy nincs 1 méretű kupac! Mivel $n = (n-1)+1$, ezért ha van n méretű kupac, akkor $n-1$ méretű is van. Ezt megismételve adódik, hogy van $n-2$, $n-3, \ldots$ méretű kupac is, ami ellentmondás. Tehát egy jó felosztásban biztosan van 1 méretű kupac.

$(*)$: Ha a legnagyobb kupac mérete $2m+1$, akkor van 1 vagy $2m$, 2 vagy $2m-1$, $\ldots m$ vagy $m+1$ méretű kupac, tehát a kupacok száma legalább m.

Ha a legnagyobb kupac mérete $2m$, akkor van 1 vagy $2m-1$, 2 vagy $2m-2$, $\ldots$, $m-1$ vagy $m+1$ méretű kupac, tehát a kupacok száma legalább m.

Ha $k \leq 8$, akkor a legnagyobb kupac mérete a $(*)$ megállapítás miatt legfeljebb 16. Ekkor a kupacokban együtt legfeljebb $1+16+15+14+\cdots+10 = 92 < 100$ kavics van, ami ellentmondás.

Ha $k = 9$, akkor a legnagyobb kupacban legfeljebb 18 kavics van. Vegyük a legkisebb 10-nél nagyobb méretű kupacot!

Erre alkalmazva a $(*)$ megállapítást adódik, hogy legalább 5 olyan kupac van, aminek a mérete legfeljebb 10. Továbbá a legkisebb 1-nél nagyobb méretű kupac legfeljebb 4 kavicsot tartalmazhat, így a kavicsok száma legfeljebb $1+4+8+9+10+15+16+17+18 = 98 < 100$, ami ellentmondás.

Pontozási útmutató.

- $k \leq 13$ indoklással együtt: 1 pont, indoklás nélkül nem jár pont.
- Konstrukció $k = 13$-ra, és ennek indoklása: $1+1$ pont.
- Konstrukció $k = 10$-re, és ennek indoklása: $1+1$ pont.
- $k \geq 10$ bizonyítása: 5 pont, az alábbi részpontszámok adhatók:
  - Nincs 1 méretű kupac: 1 pont
  - Ha a $(*)$ állítás megjelenik általános formában: 2 pont. Ha a gondolat megjelenik konkrét számra használva, akkor 1 pont adható.
  - A $k \leq 8$ eset tisztázása összesen 3 pontot ér. Ha ez nincs jól megindokolva, akkor az 5-ből legfeljebb 2 pontot kaphat a tanuló a részgondolatokra, akkor is, ha mindkét előző gondolat rendben van.
  - Az utolsó 2 pont a $k = 9$ eset kizárásáért jár, ezt nem osztjuk fel további részpontokra.

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg az

$$\{x+y\} = \{x\} \cdot \{y\}$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli, vagyis $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb. **10 pont**

2. Adottak a síkon az F_1, F_2, F_3 és T pontok. Szerkesztendő egy $ABCD$ konvex négyszög, amelynek AB, BC és CD oldalainak felezőpontjai rendre F_1, F_2 és F_3, valamint ATD az AD oldal mint átfogó fölé kifelé emelt derékszögű, egyenlő szárú háromszög. Adjuk meg a szerkesztés lépéseit, illetve hogy mikor létezik ilyen konvex négyszög! **10 pont**

3. Legyen $n \geq 4$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$ halmazhoz található olyan $B \subseteq \{n+1,\ldots,2n\}$ halmaz, amelyre az $A \cup B$ halmaz elemeinek szorzata négyzetszám. (Az üres halmaz elemeinek szorzata definíció szerint 1.) **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az

$$\{x+y\} = \{x\} \cdot \{y\}$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli, vagyis $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb. **10 pont**

Megoldás. Egy szám törtrésze mindig a $[0,1)$ intervallumba esik. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\{x\}+\{y\}$ értéke 1-nél kisebb vagy legalább 1. 1 pont

1. eset: $\{x\}+\{y\} < 1$.

Ekkor $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}$, tehát az egyenlet

$$\{x\}+\{y\} = \{x\} \cdot \{y\}$$

alakban is írható. 1 pont

Mindkét oldalhoz 1-et adva, az egyenletet rendezve és szorzattá alakítva:

$$(1-\{x\})(1-\{y\}) = 1.$$ 2 pont

A bal oldalon mindkét tényező pozitív és legfeljebb 1, így a szorzat pontosan akkor 1, ha mindegyikük 1-gyel egyenlő, azaz, ha $\{x\} = \{y\} = 0$. Ebben az esetben tehát pontosan akkor teljesül az egyenlet, ha x és y egészek. 2 pont

2. eset: $\{x\}+\{y\} \geq 1$.

Ekkor $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}-1$, tehát az egyenlet

$$\{x\}+\{y\}-1 = \{x\} \cdot \{y\}$$

alakban is írható. 1 pont

Az egyenletet rendezve és szorzattá alakítva:

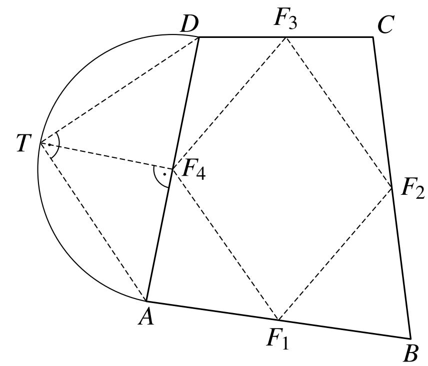
$$(1-\{x\})(1-\{y\}) = 0.$$

Mivel a bal oldalon mindkét tényező pozitív, nem kapunk megoldást. 2 pont

Tehát az egyenlet megoldásai az egész x, y számpárok. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Adottak a síkon az F_1, F_2, F_3 és T pontok. Szerkesztendő egy $ABCD$ konvex négyszög, amelynek AB, BC és CD oldalainak felezőpontjai rendre F_1, F_2 és F_3, valamint ATD az AD oldal mint átfogó fölé kifelé emelt derékszögű, egyenlő szárú háromszög. Adjuk meg a szerkesztés lépéseit, illetve hogy mikor létezik ilyen konvex négyszög! **10 pont**



Megoldás. Az ábrán F_4 az AD oldal felezőpontját jelöli. Vegyük észre, hogy az F_1-re, F_2-re és F_3-ra vonatkozó középpontos tükrözés, majd a T pont körüli $-90°$-os forgatás egymás után történő elvégzésével az A pont képe önmaga lesz. 1 pont

Az A pont az egyetlen fixpont. 1 pont

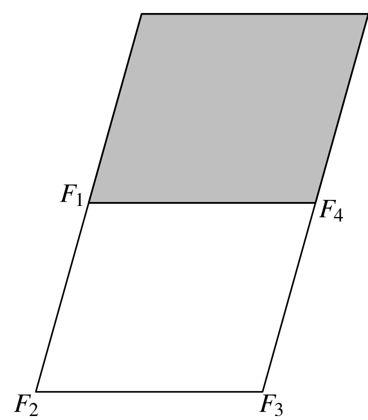
Mivel három középpontos tükrözés szorzata középpontos tükrözés és az új középpont F_4, így $F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma. 1 pont

Az F_4 középpontú tükrözés felbontható két egymásra merőleges tengelyes tükrözés szorzatára. 1 pont

Legyen az egyik tengely a TF_4 egyenes. Ekkor a másik tengely az erre merőleges AD egyenes. A T középpontú $-90°$-os forgatás is felbontható két tengelyes tükrözés szorzatára. Legyen az egyik tengely a TF_4 egyenes, ekkor a másik a TA egyenes kell legyen. 1 pont

Így megkapjuk az A pontot az AD és a TA egyenes metszeteként, amelyből a többi pont már tükrözéssel könnyen megkapható. 1 pont

Diszkusszió. Az $F_1F_2F_3F_4$ paralelogrammával egybevágó satírozott paralelogramma $-90°$-kal F_4 körül elforgatva adja azon T pont helyét, amikor egy megoldás van. Ha T nincsen benne az elforgatott, satírozott területben, akkor nem létezik a feladatbeli négyszög. 4 pont



Összesen: **10 pont**

3. Legyen $n \geq 4$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ halmazhoz található olyan $B \subseteq \{n+1, \dots, 2n\}$ halmaz, amelyre az $A \cup B$ halmaz elemeinek szorzata négyzetszám. (Az üres halmaz elemeinek szorzata definíció szerint 1.) **10 pont**

Megoldás. Konstruktívan állítjuk elő a B halmazt. Ehhez megadunk először egy általános eljárást, amelyről bebizonyítjuk, hogy az $n \neq 8$ esetben működik. Aztán az $n = 8$ esetet elintézzük külön.

Legyen az A halmaz elemei szorzatának prímtényezős felbontása

$$M = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \ldots \cdot q^{\alpha_q},$$

ahol az α_p-k nemnegatív egész számok, q pedig a legnagyobb, n-et nem meghaladó prím. 1 pont

Minden olyan $3 \leq p \leq q$ prímhez, amelyre α_p páratlan, írjuk elő, hogy a B halmaznak eleme az egyetlen $n < 2^k p \leq 2n$ alakú szám. Ezek nyilván mind különbözők, és ezekkel a szorzatban minden páratlan prím kitevője páros lesz. 2 pont

Ha a 2 így előálló kitevője páros, akkor készen vagyunk, a szorzat négyzetszám. Ha nem páros, akkor írjuk elő, hogy B-nek eleme valamelyik $n < 2m^2 \leq 2n$ alakú szám (ha létezik ilyen, erre alább visszatérünk). Ez nyilván különbözik a korábbiaktól (hiszen $2m^2$ prímtényzetős felbontásában minden páratlan prím páros kitevővel szerepel, míg a korábban B-be választott számok prímtényezős felbontásában van egy-egy páratlan prím, amely páratlan kitevővel szerepel), és a szorzatot nyilván négyzetszámmá teszi (hiszen $2m^2$ prímtényeztős felbontásában a 2 páratlan, minden más prím páros kitevővel szerepel). 2 pont

Az egyetlen kérdés tehát, hogy van-e ilyen $n < 2m^2 \leq 2n$ szám.

A $2m^2$ alakú számok sorozata a 18-tól kezdve olyan, hogy minden eleme kisebb, mint az előző kétszerese. Valóban: $2(m+1)^2 = 2m^2+4m+2 < 4m^2 = 2\cdot 2m^2$, ha $m \geq 3$ (a $2m^2+4m+2 < 4m^2$ azzal ekvivalens, hogy $m^2 > 2m+1$, ami azzal, hogy $(m-1)^2 > 2$, ami $m \geq 3$-ra nyilvánvaló). Következésképp, ha $n \geq 9$, akkor a legkisebb, n-et meghaladó $2m^2$ alakú szám legfeljebb $2n$, tehát létezik az előírt tulajdonsággal. Ha $4 \leq n \leq 7$, akkor a $2m^2 = 8$ megfelelő választás. 2 pont

Egyetlen szálat kell még elvarrnunk, ez az $n = 8$ eset. Legyen $14 \in B$ akkor és csak akkor, ha $7 \in A$. Ezzel a 7 kitevője rendben lesz. A többi prím, ami az A-beli számok szorzatának prímtényezőiként szerepelhet, a 2, a 3 és az 5. Könnyű kézzel ellenőrizni, hogy a $\{10, 12, 15\}$ halmaz alkalmas részhalmazainak prímtényezős felbontása a

$$2^{\text{páros vagy páratlan}} \cdot 3^{\text{páros vagy páratlan}} \cdot 5^{\text{páros vagy páratlan}}$$

minden lehetőségét kimerítik, tehát a már megkapott (és a 7 prímet páros hatványon tartalmazó) M vagy $M \cdot 14$ szorzat négyzetszámmá szorozható a $\{10, 12, 15\}$ alkalmas részhalmazával. 3 pont

Összesen: **10 pont**

Haladók I. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza a másik befogó és az átfogó hosszának átlaga (számtani közepe). A háromszög kerületének és területének mérőszáma egyenlő. Mekkorák a háromszög oldalai? **7 pont**

2. Legyenek $a = 60$ és $b = 2022$. Az $\{a; 2a; 3a; \ldots; b \cdot a\}$ halmaz elemi közül hány darab osztható b-vel? **7 pont**

3. Kilenc kártyára felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat úgy, hogy minden lapra pontosan egy számjegy kerüljön. Az összes kártya felhasználásával számokat képezünk. Például egy ilyen lehetőség a 8, 21, 394, 65 és 7 számok kialakítása. A képzett számokat összeadva mikor kapjuk a legkisebb összeget,

a) ha a kialakított összes szám prím,
b) illetve akkor, ha közülük mindegyik összetett? **7 pont**

4. Egy háromszög három csúcsának koordinátái: $A(1; -2)$, $B(3; 4)$, $C\left(3^{2022}; 3^{2023}\right)$. Mekkora a háromszög területe? **7 pont**

5. Egy 3×3-as táblázat minden egyes mezőjébe egy egyjegyű pozitív egész számot írunk. A sorokat balról jobbra és az oszlopokat felülről lefelé összeolvasva hat darab nem feltétlenül különböző háromjegyű számot kapunk. Töltsük ki a táblázatot olyan módon, hogy a kapott hat szám között szerepeljen egész szám négyzete, harmadik hatványa és ötödik hatványa **is,** és minél kevesebb legyen az olyan szám ezen hat szám között, amely nem egész szám négyzete, harmadik hatványa vagy ötödik hatványa. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza a másik befogó és az átfogó hosszának átlaga (számtani közepe). A háromszög kerületének és területének mérőszáma egyenlő. Mekkorák a háromszög oldalai? **7 pont**

Megoldás. A feltételek szerint $a = \dfrac{b+c}{2}$, azaz $2a = b + c$, a háromszög kerülete így $a + 2a = 3a$. 1 pont

Így $T = K$ miatt $\dfrac{ab}{2} = 3a$, és mivel a a geometriai tartalom miatt nem lehet 0, az egyenlőség csak $b = 6$ esetén teljesül. 2 pont

Mivel a háromszög derékszögű, felírható rá a Pitagorasz-tétel: $a^2 + 36 = c^2$, az előzőek alapján $c = 2a - 6$, és így az $a^2 + 36 = 4a^2 - 24a + 36$ egyenlethez jutunk. 2 pont

Ennek megoldása rendezés után és az a nem lehet 0 feltétel ismételt felhasználásával $a = 8$, c-re pedig $c = 10$ adódik. 1 pont

A 6, 8, 10 egységű oldalakra a feladat feltételeinek ellenőrzése. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Legyenek $a = 60$ és $b = 2022$. Az $\{a; 2a; 3a; \ldots; b \cdot a\}$ halmaz elemi közül hány darab osztható b-vel? **7 pont**

Megoldás. A számok prímtényezős felbontása: $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad b = 2 \cdot 3 \cdot 337$. 2 pont

Egy szám csak akkor osztható b-vel, ha oszható b minden prímtényzőjével. 1 pont

Mivel a prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és a 3, de nem szerepel a 337, ezért a halmaz azon elemei oszthatók b-vel, amelyekben a együtthatója osztható 337-tel. 1 pont

A halmazban az első ilyen elem a $337a$, az utolsó ilyen elem a $2022a$. 1 pont

337 és 2022 között összesen 6 darab szám osztható 337-tel, tehát a halmaz elemei közül 6 darab osztható 337-tel. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A feladat általánosítható, a b-vel osztható halmazelemek száma egyenlő a és b legnagyobb közös osztójával.

3. Kilenc kártyára felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat úgy, hogy minden lapra pontosan egy számjegy kerüljön. Az összes kártya felhasználásával számokat képezünk. Például egy ilyen lehetőség a 8, 21, 394, 65 és 7 számok kialakítása. A képzett számokat összeadva mikor kapjuk a legkisebb összeget,

a) ha a kialakított összes szám prím,
b) illetve akkor, ha közülük mindegyik összetett? **7 pont**

Megoldás. A minimum eléréséhez arra kell törekedni, hogy a számok között csak egy- és kétjegyűek legyenek, és közöttük minél több legyen az egyjegyű. 1 pont

a) A prímszámok utolsó számjegye nem lehet 4, 6, 8, mivel akkor a képzett szám 2-vel osztható összetett szám lenne. Így a felsorolt számjegyek legalább a tízes helyiértéken fordulhatnak csak elő. Emiatt a kirakott számok összege nem lehet kevesebb, mint $(4+6+8) \cdot 10 + (1+2+3+ +5+7+9) = 207$. 2 pont

Ez az érték megvalósítható pl. a $2+3+5+41+67+89 = 207$ számokkal. Tehát a legkisebb megvalósítható összeg a 207. 1 pont

b) Az egyjegyű összetett számok a 4, 6, 8, 9. Az 1, 2, 3, 5, 7 számjegyekkel nem képezhetők egyjegyű összetett számok, ezért közülük legalább háromnak tízes helyiértékre kell kerülnie. A minimális összeg kialakításához a legkedvezőbb, ha ezek az 1, 2, 3. Így a képzett összeg nem lehet kevesebb, mint $(1+2+3) \cdot 10 + (4+5+6+7+8+9) = 99$. 2 pont

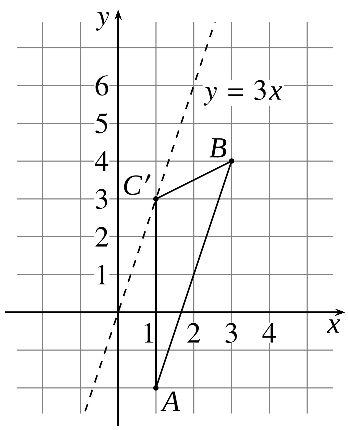
Ez az érték megvalósítható pl. a $6+8+9+15+27+34 = 99$ számokkal. Tehát a legkisebb megvalósítható összeg a 99. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A képzett számok indoklás nélküli felsorolásáért maximum 2-2 pont, azaz összesen 4 pont adható.

4. Egy háromszög három csúcsának koordinátái: $A(1; -2)$, $B(3; 4)$, $C\left(3^{2022}; 3^{2023}\right)$. Mekkora a háromszög területe? **7 pont**

1. megoldás.



Mivel $3^{2023} = 3 \cdot 3^{2022}$, a háromszög C csúcsa illeszkedik az $y = 3x$ függvény grafikonjára (az ábrán a szaggatott vonal), 2 pont

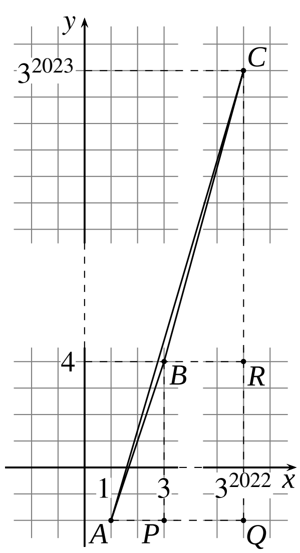
amivel párhuzamos a háromszög AB oldala. 1 pont

Ezért az ABC háromszög területe megegyezik minden olyan ABC' háromszög területével, amelynek C' csúcsa az $y = 3x$ függvény grafikonjára esik, hiszen ekkor az AB oldaluk és az ehhez tartozó magasságuk is megegyezik. 2 pont

Érdemes olyan C' pontot választani, hogy az ABC' háromszög területe könnyen számítható legyen – ilyen pl. a $C'(1;3)$ pont, ekkor az ABC' háromszög területe (és így az ABC háromszög területe is): $\dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5$ területegység. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.



Készítsünk ábrát! (Nyilván ez csak úgy lehetséges, ha az x és az y tengelyt „megszakítjuk”, azaz az ábra torzítani fog.) Helyes ábra rajzolása. 2* pont

Vezessük be a $P(3;-2)$, $Q\left(3^{2022};-2\right)$, $R\left(3^{2022};4\right)$ pontokat! 1 pont

Az ABC háromszög területe megkapható úgy, hogy az AQC háromszög területéből kivonjuk a $PQRB$ téglalap, az APB és a BRC háromszögek területét. 1 pont

Vezessük be a $k = 3^{2022}$ jelölést! (Egyszerűbbé teszi a számolást, de nem feltétlenül szükséges.)

Ekkor $T_{AQC} = \dfrac{(k-1)(3k+2)}{2}$, $T_{PQRB} = 6(k-3)$, $T_{APB} = \dfrac{2 \cdot 6}{2} = 6$, $T_{BRC} = \dfrac{(k-3)(3k-4)}{2}$. 2 pont

Ebből $T_{ABC} = T_{AQC} - T_{PQRB} - T_{APB} - T_{BRC} = 5$ (mivel a k kiesik). 1 pont

Összesen: **7 pont**

* Ez a 2 pont levonandó az összpontszámból, ha a versenyző nem indokolja meg, hogy a C csúcs miért így, az AB oldalegyenes „fölött” helyezkedik el. Ezt ugyanis kihasználja a megoldás. Az indoklás lehet pl.: a C csúcs az $y = 3x$, az A, B csúcsok az $y = 3x - 5$ egyenesre esnek.

5. Egy 3×3-as táblázat minden egyes mezőjébe egy egyjegyű pozitív egész számot írunk. A sorokat balról jobbra és az oszlopokat felülről lefelé összeolvasva hat darab nem feltétlenül különböző háromjegyű számot kapunk. Töltsük ki a táblázatot olyan módon, hogy a kapott hat szám között szerepeljen egész szám négyzete, harmadik hatványa és ötödik hatványa **is,** és minél kevesebb legyen az olyan szám ezen hat szám között, amely nem egész szám négyzete, harmadik hatványa vagy ötödik hatványa. **7 pont**

Megoldás. A táblázatot ki lehet tölteni olyan módon, hogy az első feltétel teljesüljön, és ne legyen olyan szám, amely nem egész szám négyzete, harmadik hatványa vagy ötödik hatványa.

A lehetséges számok:

négyzetszámok: 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961

köbszámok: 125; 216; 343; 512; 729

Egyetlen háromjegyű ötödik hatvány van, a $243(=3^5)$, ennek kell tehát valahol szerepelnie. Mivel az átlóra való tükrözéssel a sorok és az oszlopok felcserélhetők, feltehető, hogy egy sorban szerepel.

Tegyük fel, hogy az utolsó sorban szerepel a 243. Mivel 2-re és 3-ra végződő négyzetszám nincs, ezért az első és a harmadik oszlopban harmadik vagy ötödik hatványnak kell szerepelnie. A háromjegyű harmadik hatványok a $125(=5^3)$, a $216(=6^3)$, a $343(=7^3)$, az $512(=8^3)$ és a $729(=9^3)$, így az első oszlopban az 512-nek, a harmadikban a 243-nak vagy a 343-nak kell szerepelnie. Ha a 343 szerepel a harmadik oszlopban, akkor az első sorban nem lehet sem négyzetszám, sem köbszám, sem ötödik hatvány. Ha a harmadik oszlopban a 243 szerepel, akkor az első sorban az egyetlen szóba jövő hatvány az 512. Ekkor a második sorban az egyetlen szóba jövő hatvány a 144, és ez egy jó megoldást ad.

Ha a középső sorban szerepel a 243, akkor a harmadik oszlopban csak négyzetszám, köbszám vagy ötödik hatvány szerepelhet, amelynek középső számjegye 3, ilyen szám viszont nincs. Tehát ebben az esetben nem sikerült úgy kitölteni a táblázatot, hogy csak négyzetszám, harmadik hatvány és ötödik hatvány szerepeljen benne.

Ha a 243 az első sorban szerepel, akkor a középső oszlopban négyzetszámnak kell szerepelnie, mert nincs néggyel kezdődő háromjegyű harmadik (és ötödik) hatvány. Ez csak a $441(=21^2)$ vagy $484(=22^2)$ lehet. Ha a 441 lenne, akkor az utolsó sorban nem szerepelhet négyzetszám, mert nincs olyan háromjegyű négyzetszám, amelynek középső számjegye 1. Így az utolsó sorban csak harmadik hatvány szerepelhet, amelyek közül a 216 vagy az 512 jön szóba. A 216-ot választva az első oszlopot, 512-t választva az utolsó oszlopot nem tudjuk jól kitölteni.

Írjuk be végül a 484-et a második oszlopba. Ekkor végignézve a lehetőségeket a második sorban 289, 484 vagy a 784 szerepelhetne (nincs más, a feltételeknek megfelelő háromjegyű négyzetszám, harmadik hatvány vagy ötödik hatvány, amelynek a középső jegye 8). 289 esetén a harmadik oszlopot nem tudjuk kitölteni, mert nincs 39-cel kezdődő megfelelő szám. 784 esetén pedig az első oszloppal akadunk el, mert 27-tel kezdődő megfelelő szám nincs. Ha pedig a 484-et próbáljuk ki, akkor az első oszlopban 24-gyel kezdődő megfelelő szám csak a 243, az utolsó oszlopban 34-gyel kezdődő megfelelő szám csak a 343, és ez egy megfelelő kitöltés (az utolsó sorban ekkor 343 szerepel).

Pontozás:

A 243 megtalálásáért, szükségességéért és helyének indoklásáért:	3 pont
A négyzetszámok és köbszámok megtalálásáért:	2 pont
A két teljes helyes kitöltésért:	2 pont
Összesen:	**7 pont**

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot „párosíthatónak” nevezzük, ha $a \geqslant b$ és $\overline{ab} - \overline{cd} = \overline{cd} - \overline{ba}$.

Például a 2011 „párosítható” szám, mivel $20 - 11 = 11 - 02$.

Határozzuk meg, hogy hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik. **7 pont**

2. A páros és páratlan számokat két külön háromszögbe írjuk a következő módon:

i)					*ii)*			
0					1			
2	4				3	5		
6	8	10			7	9	11	
12	14	16	18		13	15	17	19
⋮					⋮			

Mutassuk meg, hogy az első esetben a sorok összege 6-tal osztható szám lesz, míg a második esetben köbszám. **7 pont**

3. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2 - (a+d) \cdot x + ad - bc = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $x^2 - \left(a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd\right) \cdot x + (ad - bc)^3 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai x_1^3 és x_2^3. **7 pont**

4. Az $ABCDE$ konvex ötszögben AC párhuzamos DE-vel és BE párhuzamos DC-vel. Bizonyítsuk be, hogy az AED és a BCD háromszög területe egyenlő! **7 pont**

5. Tekintsük azokat a tízes számrendszerbeli számokat, amelyeknek minden számjegye különböző, bármely két szomszédos számjegyük legnagyobb közös osztója legalább 2, és az előző két feltétel teljesülése mellett a lehető legtöbb számjegyből állnak.

Egy n pozitív természetes szám és a nulla legnagyobb közös osztója az n szám.

Hány ilyen szám van? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot „párosíthatónak” nevezzük, ha $a \geqslant b$ és $\overline{ab} - \overline{cd} = \overline{cd} - \overline{ba}$.

Például a 2011 „párosítható” szám, mivel $20 - 11 = 11 - 02$.

Határozzuk meg, hogy hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik. **7 pont**

Megoldás. A második feltétel alapján:

$$(10a+b)-(10c+d)=(10c+d)-(10(b+a)$$
$$11(a+b)=20c+2d=22c+2(d-c)$$

Felhasználva, hogy a 11 prímszám, valamint $(2;11)=1$, adódik, hogy $11 \mid d-c$. 2 pont

Ebből a $-9 \leqslant d-c \leqslant 9$ nagyságrend alapján $d-c=0$, azaz $c=d$ adódik. 1 pont

Ezt a feltételt is felhasználva a korábbiak alapján az $a+b=2c$ egyenlőséget kapjuk.

c értékét 1-től 9-ig növelve, az $a \geqslant b$ feltételt is figyelembe véve az alábbi megoldások adódnak:

$c=1$ esetén 2011, 1111

$c=2$ esetén 4022, 3122, 2222

$c=3$ esetén 6033, 5133, 4233, 3333

$c=4$ esetén 8044, 7144, 6244, 5344, 4444

$c=5$ esetén 9155, 8255, 7355, 6455, 5555

$c=6$ esetén 9366, 8466, 7566, 6666

$c=7$ esetén 9577, 8677, 7777

$c=8$ esetén 9788, 8888

$c=9$ esetén 9999 3 pont

Így $2+3+4+5+5+4+3+2+1=29$ „párosítható” négyjegyű szám létezik. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. A páros és páratlan számokat két külön háromszögbe írjuk a következő módon:

i)				*ii)*			
0				1			
2	4			3	5		
6	8	10		7	9	11	
12	14	16	18	13	15	17	19
$\vdots$				$\vdots$			

Mutassuk meg, hogy az első esetben a sorok összege 6-tal osztható szám lesz, míg a második esetben köbszám. **7 pont**

Megoldás. Mindkét háromszögben az n-edik sor felírásával összesen $\frac{n(n+1)}{2}$ számot írtunk le, és az $(n+1)$-edik sorban éppen $(n+1)$ darab szám van. 1 pont

Az első esetben az $(n+1)$-edik sor első száma $0+\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2=n^2+n$, 1 pont

míg a második esetben az $(n+1)$-edik sor első száma $1+\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2=n^2+n+1$. 1 pont

Az első esetben az $(n+1)$-edik sorban $(n+1)$ darab (n^2+n)-hez minden esetben 2-vel nagyobb számot adunk n-szer, így a sor értéke:

$$(n+1)(n^2+n)+2(1+2+3+\ldots+n)=(n+1)(n^2+n)+2\frac{n(n+1)}{2}=$$
$$=n(n+1)(n+2).$$ 1 pont

Mivel ez három egymást követő szám szorzata, ez minden esetben osztható hattal. 1 pont

A második esetben az $(n+1)$-edik sorban éppen $(n+1)$ darab (n^2+n+1)-hez minden esetben 2-vel nagyobb számot adunk n-szer, így a sor értéke:

$$(n+1)(n^2+n+1)+2(1+2+3+\ldots+n)=(n+1)(n^2+n+1)+2\frac{n(n+1)}{2}=$$ 1 pont
$$=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2-(a+d)\cdot x+ad-bc=0$ másodfokú egyenlet megoldásai.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $x^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)\cdot x+(ad-bc)^3=0$ másodfokú egyenlet megoldásai x_1^3 és x_2^3. **7 pont**

Megoldás. A gyökök és együtthatók összefüggései alapján:

$$x_1+x_2=(a+d) \quad \text{és} \quad x_1\cdot x_2=ad-bc.$$ 1 pont

Mivel: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$, 1 pont

ezért: $x_1^3+x_2^3=(a+d)^3-3(ad-bc)(a+d)$. 1 pont

Így $x_1^3+x_2^3=a^3+3a^2d+3ad^2+d^3-3a^2d-3ad^2+3abc+3bcd=a^3+d^3+3abc+3bcd$. 2 pont

Ekkor az $x^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)\cdot x+(ad-bc)^3=0$ egyenlet így is írható:

$$x^2-\left(x_1^3+x_2^3\right)\cdot x+x_1^3\cdot x_2^3=0.$$ 1 pont

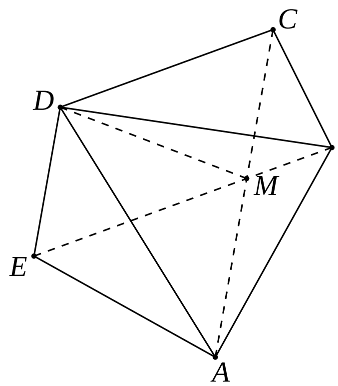
Tényezőkre bontva:

$$(x-x_1^3)\cdot(x-x_2^3)=0.$$

Tehát a második egyenlet megoldásai x_1^3 és x_2^3. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Az $ABCDE$ konvex ötszögben AC párhuzamos DE-vel és BE párhuzamos DC-vel. Bizonyítsuk be, hogy az AED és a BCD háromszög területe egyenlő! **7 pont**



1. megoldás. Az AC és a BE átló metszéspontja legyen M. Az ADE háromszög területe egyenlő az MDE háromszög területével, ugyanis a DE szakasz mindkettőnek az egyik oldala, és az ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk is egyenlő, ugyanis az A pont és az M pont a DE egyenestől egyenlő távol van, mivel az AM és a DE egyenes párhuzamos. 2 pont

Hasonlóan adódik, hogy a BCD háromszög és az MCD háromszög területe is egyenlő, mert a BM és a DC egyenesek párhuzamossága miatt a B pont és az M pont egyenlő távol van a közös CD oldal egyenesétől. 2 pont

Az $DEMC$ négyszög paralelogramma, amit az MD átló két egybevágó háromszögre oszt, ezért az MDE és az MCD háromszög területe is egyenlő. 2 pont

Tehát $T_{ADE} = T_{MDE} = T_{MCD} = T_{BCD}$, ezt kellett belátni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Az ADE háromszög területe egyenlő a CDE háromszög területével, mert DE oldaluk közös, és a DE és az AC szakaszok párhuzamossága miatt A és C egyenlő távol van a DE egyenestől, ezért a két háromszögnek a DE oldalhoz tartozó magassága egyenlő. 3 pont

A BCD háromszög területe szintén egyenlő a CDE háromszög területével, mert CD oldaluk közös, és a DC és az BE szakaszok párhuzamossága miatt B és E egyenlő távol van a CD egyenestől, ezért a két háromszögnek a CD oldalhoz tartozó magassága egyenlő. 3 pont

Tehát $T_{ADE} = T_{CDE} = T_{BCD}$, és ezt kellet belátni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Tekintsük azokat a tízes számrendszerbeli számokat, amelyeknek minden számjegye különböző, bármely két szomszédos számjegyük legnagyobb közös osztója legalább 2, és az előző két feltétel teljesülése mellett a lehető legtöbb számjegyből állnak.

Egy n pozitív természetes szám és a nulla legnagyobb közös osztója az n szám.

Hány ilyen szám van? **7 pont**

Megoldás. Az 1 nem szerepelhet a szám számjegyei között, ezért a szám legfeljebb kilencjegyű lehet.

Ha az 5 és a 7 is benne van a számban, akkor mindkettő csak a nulla mellett lehet, hiszen ezek az összes többi számjegyhez relatív prímek, így ekkor két szám jöhet szóba: 507 és 705, de ezeknél nyilván van hosszabb szám is. 1 pont

Tehát az 5 és a 7 közül legfeljebb az egyik szerepelhet, és az is csak a nulla mellett, a szám valamelyik végén, ezért a számnak legfeljebb nyolc számjegye lehet, továbbá ezek a számok négyféle alakúak lehetnek: $50\ldots$, $70\ldots$, $\ldots 05$ és $\ldots 07$. 1 pont

Könnyű belátni, hogy mind a négyféle számból ugyanannyi van, hiszen az 5 és a 7 szerepe felcserélhető, mivel a számjegyek közül pontosan ugyanazokhoz relatív prím az 5, mint a 7.

Továbbá egy szám pontosan akkor megfelelő, ha a számjegyek sorrendjének megfordításával kapott szám is megfelelő.

Ezért elég az 50... típusú számok számát meghatározni. 1 pont

A számban az 5 és a 0 számjegyeken kívül még a 2, 4, 6, 8, 3 és 9 számjegyek szerepelhetnek.

Soroljuk három halmazba a hat számjegyet: $K = \{2;4;8\}$, $S = \{6\}$ és $H = \{3;9\}$.

Olyan 50...-val kezdődő nyolcjegyű számokat kell készíteni, amelyekben K-beli számjegy nem kerülhet H-beli számjegy mellé. 1 pont

Ez úgy lehetséges, hogy a szám $50k_1k_2k_36h_1h_2$ vagy $50h_1h_26k_1k_2k_3$ alakú, ahol $\{k_1;k_2;k_3\} = K$ és $\{h_1;h_2\} = H$, és minden ilyen alakú szám megfelelő. 1 pont

Mindkét fajtából $2 \cdot 3! \cdot 2! = 24$ darab van. 1 pont

Tehát 50... típusú számból összesen 24 darab van, és ugyancsak 24-24 darab van a másik három alaptípusból is, ezért összesen 96 megfelelő szám van. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Legyen n 3-mal osztható pozitív egész szám. Az $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 számsorozatból elhagyjuk a 3-mal osztható számokat, majd az első két számot pozitív előjellel, a következő kettőt negatív előjellel, az azután következő kettőt megint pozitív előjellel látjuk el. A kettesével változó előjelezést addig folytatjuk, amíg a számsorozat végére érünk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott számok összege mindig n-nel lesz egyenlő! **7 pont**

2. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{\left(x^2+2021\right)^2}{x^2} + 2022$ függvény minimumértékét és helyét. **7 pont**

3. Anna és Balázs a 10×10-es szorzótáblán a következő „játékot” játsszák:

- Anna kiválaszt egy függőleges sávot (néhány szomszédos oszlopot) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza (-1)-gyel, majd
- Balázs kiválaszt egy vízszintes sávot (néhány szomszédos sort) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza (-1)-gyel. (Így bizonyos számok akár kétszer is szorzódnak (-1)-gyel.)

Ha például Anna az első három oszlopot, míg Balázs a negyedik sortól a hetedik sorig „választ”, akkor a módosított táblázat számai:

−1	−2	−3	4	5	6	7	8	9	10
−2	−4	−6	8	10	12	14	16	18	20
−3	−6	−9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	−16	−20	−24	−28	−32	−36	−40
5	10	15	−20	−25	−30	−35	−40	−45	−50
6	12	18	−24	−30	−36	−42	−48	−54	−60
7	14	21	−28	−35	−42	−49	−56	−63	−70
−8	−16	−24	32	40	48	56	64	72	80
−9	−18	−27	36	45	54	63	72	81	90
−10	−20	−30	40	50	60	70	80	90	100

(Anna és Balázs is csak egyszer választanak sávot a „játék” során.)

a) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 0?
b) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 1?

Amennyiben a megoldás lehetséges, írjuk le a játék lépéseit is! **7 pont**

4. Legyen O az $ABCD$ négyzet CD oldalának D-hez közelebbi olyan belső pontja, amelyre teljesül, hogy az O középpontú OD sugarú kör, valamint a B középpontú $2 \cdot OD$ sugarú kör érinti egymást. Az érintési pontban a két körhöz közös érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintő négyzetbe eső szakaszának a négyzet oldalához viszonyított arányát! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen n 3-mal osztható pozitív egész szám. Az $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ számsorozatból elhagyjuk a 3-mal osztható számokat, majd az első két számot pozitív előjellel, a következő kettőt negatív előjellel, az azután következő kettőt megint pozitív előjellel látjuk el. A kettesével változó előjelezést addig folytatjuk, amíg a számsorozat végére érünk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott számok összege mindig n-nel lesz egyenlő! **7 pont**

Megoldás. Válasszuk szét az eseteket aszerint, hogy n páros vagy páratlan. 1 pont

Ha n páros, akkor 6-tal is osztható, ezért felírható $n = 6k$ alakban, ahol k pozitív egész szám. 1 pont

Ekkor $6k-1$-ig összesen $2k-1$ darab lesz 3-mal osztható, azaz a 3-mal osztható számok kihagyása után összesen $6k-1-(2k-1) = 4k$ darab szám marad. 1 pont

Ezeket lehet négyesével csoportosítani, egy csoporton belül a számok összege

$$(6l-1)+(6l-2)-(6l-4)-(6l-5) = 6,$$

és mivel k db csoport van, a teljes összeg $6k = n$. 1 pont

Ha n páratlan, akkor felírható $6k+3$ alakban, ahol k nem negatív egész szám.

Ekkor az összeg: $(6k+2)+(6k+1)-(6k-1)-(6k-2)+(6k-4)+(6k-5)\ldots$. 1 pont

Az összegben a harmadik tagtól kezdve ugyanazok a tagok szerepelnek, mint a páros esetben, csak ellenkező előjellel. 1 pont

Ezek összegéről tudjuk, hogy $6k$, így a teljes összeg: $6k+2+6k+1-6k = 6k+3 = n$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{\left(x^2+2021\right)^2}{x^2}+2022$ függvény minimumértékét és helyét. **7 pont**

Megoldás. Mivel a függvény páros, ezért elegendő $x>0$ esetben keresni a megoldást. 1 pont

$$f(x)=\frac{(x^2+2021)^2}{x^2}+2022=\left(\frac{x^2+2021}{x}\right)^2+2022= \qquad \text{1 pont}$$

$$=\left(2\cdot\frac{x+\frac{2021}{x}}{2}\right)^2+2022\geq \qquad \text{1 pont}$$

a számtani és mértani közép közötti összefüggést alkalmazva

$$\geq\left(2\cdot\sqrt{x\cdot\frac{2021}{x}}\right)^2+2022= \qquad \text{1 pont}$$

$$=4\cdot 2021+2022=10\,106. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=\dfrac{2021}{x}$, amiből $x=\pm\sqrt{2021}$ következik. 1 pont

Tehát a függvény lokális minimum helye $x_1=-\sqrt{2021}$, ill. $x_2=\sqrt{2021}$-nél van, s mindkét helyen az értéke 10 106. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A versenyző vizsgálhatja a függvényt például az alábbi módon is.

$$f(x)=\frac{(x+2001)^2}{x^2}+2022=\frac{x^4+2\cdot 2021x^2+2021^2}{x^2}+2022=$$

$$=x^2+\frac{2021^2}{x^2}+6064\geq 2\sqrt{2021^2}+6064=10\,106.$$

Ekkor a megoldás első mondata szükségtelen, az érte járó 1 pont a kétféle minimumhely megállapításához adandó.

3. Anna és Balázs a 10×10-es szorzótáblán a következő „játékot" játsszák:

- Anna kiválaszt egy függőleges sávot (néhány szomszédos oszlopot) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza (-1)-gyel, majd
- Balázs kiválaszt egy vízszintes sávot (néhány szomszédos sort) a táblázatban, és a benne szereplő számokat megszorozza (-1)-gyel. (Így bizonyos számok akár kétszer is szorzódnak (-1)-gyel.)

Ha például Anna az első három oszlopot, míg Balázs a negyedik sortól a hetedik sorig „választ", akkor a módosított táblázat számai:

−1	−2	−3	4	5	6	7	8	9	10
−2	−4	−6	8	10	12	14	16	18	20
−3	−6	−9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	−16	−20	−24	−28	−32	−36	−40
5	10	15	−20	−25	−30	−35	−40	−45	−50
6	12	18	−24	−30	−36	−42	−48	−54	−60
7	14	21	−28	−35	−42	−49	−56	−63	−70
−8	−16	−24	32	40	48	56	64	72	80
−9	−18	−27	36	45	54	63	72	81	90
−10	−20	−30	40	50	60	70	80	90	100

(Anna és Balázs is csak egyszer választanak sávot a „játék” során.)

a) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 0?
b) Lehetséges-e, hogy a kapott táblázat 100 darab számát összeadva az összeg 1?

Amennyiben a megoldás lehetséges, írjuk le a játék lépéseit is! **7 pont**

Megoldás. *a)* 0 nem lehet a 100 szám összege a táblázatban, hiszen a táblázatban (előjeltől függetlenül mindig) $5 \cdot 5 = 25$, azaz páratlan darab páratlan szám van. Viszont páratlan darab páratlan szám összege mindig páratlan (és a paritáson nem változtat a többi páros szám összege). 3 pont

b) A táblázat elemeit (egyes celláit) úgy kaphatjuk, hogy az 1, 2, …, 10 elemek mindegyikét megszorozzuk az 1, 2, …, 10 elemek mindegyikével. Mivel itt ezek összegét kell képezni, ezért a táblázat elemeinek összege az $(1+2+\ldots+10)(1+2+\ldots+10)$ szorzat eredménye lesz. Anna és Balázs e két tényező tagjainak előjelét változtatják. Az 1 többféleképpen kijöhet, például

- $1 = (28-27)^2 = (1+2+3+4+5+6+7-8-9-10)^2$ miatt ha az utolsó három oszlopot és utolsó három sort szorozzuk (-1)-gyel;
- illetve $2+3+4+5+6+7 = 27$ miatt, ha az ezeknek a számoknak megfelelő oszlopokat és sorokat szorozzuk (-1)-gyel;
- illetve az előző két „ötlet keverésével”; például, ha a 8, 9, 10-es sorokat és 2, 3, 4, 5, 6, 7-es oszlopokat szorozzuk (-1)-gyel.

1	2	3	4	5	6	7	−8	−9	−10
2	4	6	8	10	12	14	−16	−18	−20
3	6	9	12	15	18	21	−24	−27	−30
4	8	12	16	20	24	28	−32	−36	−40
5	10	15	20	25	30	35	−40	−45	−50
6	12	18	24	30	36	42	−48	−54	−60
7	14	21	28	35	42	49	−56	−63	−70
−8	−16	−24	−32	−40	−48	−56	64	72	80
−9	−18	−27	−36	−45	−54	−63	72	81	90
−10	−20	−30	−40	−50	−60	−70	80	90	100

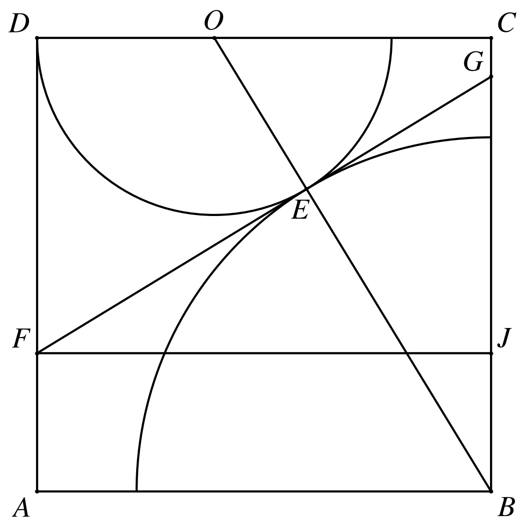
Csak az első megoldás táblázata: 4 pont

A versenyző bármilyen (akár indoklás nélküli) jól követhető helyes megoldása 4 pontot ér.

Összesen: **7 pont**

4. Legyen O az $ABCD$ négyzet CD oldalának D-hez közelebbi olyan belső pontja, amelyre teljesül, hogy az O középpontú OD sugarú kör, valamint a B középpontú $2 \cdot OD$ sugarú kör érinti egymást. Az érintési pontban a két körhöz közös érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintő négyzetbe eső szakaszának a négyzet oldalához viszonyított arányát! **7 pont**

Megoldás. Tekintsük a két kört és az érintőnek a négyzetbe eső részét, és használjuk az alábbi ábra jelöléseit. Legyen $OD = r$, a négyzet oldala pedig a. Mivel E közös érintési pontja a köröknek, ezért O, E és B pontok egy egyenesre esnek, és $OB = 3r$. 1 pont



Állítsunk F-ből merőlegest BC-re, a talppontja legyen J. $FJG\triangle \cong BCO\triangle$, mert $FJ = BC$, mindkettő derékszögű és $GFJ\sphericalangle = OBC\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek.

Ezért $FG = BO = 3r$, azaz a keresett arány $\dfrac{FG}{BC} = \dfrac{BO}{BC} = \dfrac{3r}{a}$. 2 pont

Írjuk fel a BCO derékszögű háromszög oldalaira Pitagorasz-tételt: $(a-r)^2 + a^2 = (3r)^2$. 1 pont

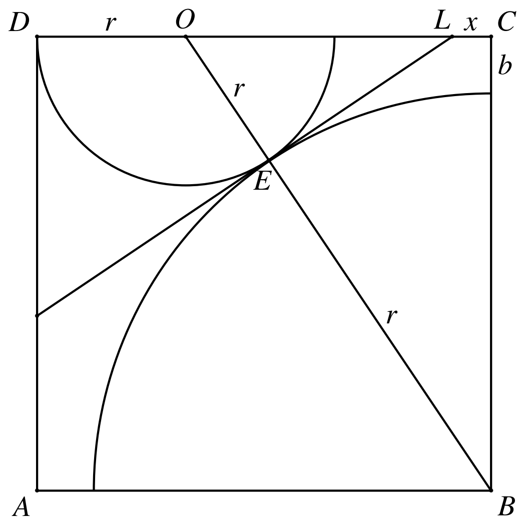
A négyzetre emelések elvégzése, nullára rendezés, majd a kettővel való osztás után a következő egyenletet kapjuk: $4r^2 + ar - a^2 = 0$. 1 pont

Az egyenletet elosztva $a^2 > 0$-val, az $\dfrac{r}{a}$-ra másodfokú $4\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 + \dfrac{r}{a} - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek a megoldása $\left(\dfrac{r}{a}\right)_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$. 1 pont

Figyelembe véve, hogy r is és a is pozitív, csak a pozitív gyök lehetséges, ahonnan a keresett arány $\dfrac{3r}{a} = \dfrac{3}{8}\left(\sqrt{17} - 1\right)$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy az érintő biztosan a BC oldalt metszi, nem lehet, hogy a CD-t. Tegyük fel ugyanis, hogy mégis a CD oldal belső L pontjában metszi az érintő a négyzet határát, és használjuk az ábra jelöléseit.



Az OCB háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva a fentiekkel azonosan ismét az $r = \frac{\sqrt{17}-1}{8} \cdot a$ összefüggést kapjuk. Mivel az OCB háromszög hasonló OEL háromszöghöz (szögeik páronként egyenlők), ezért $\frac{OE}{OL} = \frac{OC}{OB}$, azaz $\frac{r}{a-r-x} = \frac{a-r}{3r}$. Ebből rendezés után $x = \frac{2r^2+2ar-a^2}{r-a}$, amibe r-et behelyettesítve $x = \frac{3-\sqrt{17}}{8} \cdot a$ adódik, ami negatív.

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Egy sorozat első tagja $a_1 = 2$. Tudjuk, hogy a sorozat $(n+1)$-edik tagja:

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$$

Határozzuk meg a sorozat 2023-adik tagját! **7 pont**

2. Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}} = b$$

Mi lehet az a szám utolsó számjegye? **7 pont**

3. A nem egyenlő szárú ABC háromszög leghosszabb AB oldalán kijelölünk olyan D és E pontokat, amelyekre teljesül, hogy $AD = AC$ és $BE = BC$. A D ponton keresztül AC-vel és az E ponton keresztül BC-vel párhuzamosan húzott egyenesek az F pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy FC felezi az EFD szöget. **7 pont**

4. Egy tízes számrendszerben felírt hatjegyű szám számjegyei mind különbözőek és egyik sem 0, valamint a szám osztható 37-tel. Bizonyítsuk, be hogy a számjegyeknek van még legalább 7 olyan sorrendje, ahol a kapott hatjegyű szám szintén osztható 37-tel! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sorozat első tagja $a_1 = 2$. Tudjuk, hogy a sorozat $(n+1)$-edik tagja:

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$$

Határozzuk meg a sorozat 2023-adik tagját! **7 pont**

Megoldás. Határozzuk meg az első néhány tagot a rekurziós összefüggés alapján!

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = -3$, $a_5 = 2$. 2 pont

A rekurzió alapján innentől kezdve újra ugyanez a 4 szám ismétlődik: $2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -3$. 2 pont

Mivel a $2023 = 505 \cdot 4 + 3$, ezért a 2023 4-gyel osztva 3 maradékot ad, 1 pont

ezért a sorozat 2023-adik tagja megegyezik a harmadik taggal, tehát $a_{2023} = -\frac{1}{2}$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}} = b$$

Mi lehet az a szám utolsó számjegye? **7 pont**

Megoldás. Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-(a^2-1)}} - \frac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-(a^2-1)}} =$$
$$= \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} - \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}$$ 1 pont

Tehát

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} - \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}} = b.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens lépés

$$a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1}-2\sqrt{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)} = b^2.$$ 1 pont

Ebből $2a-2 = b^2$, $a = \frac{b^2}{2}+1$. Tehát a eggyel nagyobb egy négyzetszám felénél. Mivel a pozitív egész szám, ezért b páros szám kell, hogy legyen. 1 pont

Így az alábbi lehetőségeket kell figyelembe venni:

b	$10k$	$10k+2$	$10k+4$	$10k+6$	$10k+8$
$\frac{b^2}{2}+1$	$50k^2+1$	$50k^2+20k+3$	$50k^2+40k+9$	$50k^2+60k+19$	$50k^2+80k+33$

2 pont

Tehát a utolsó számjegye lehet 1, 3 vagy 9. 1 pont

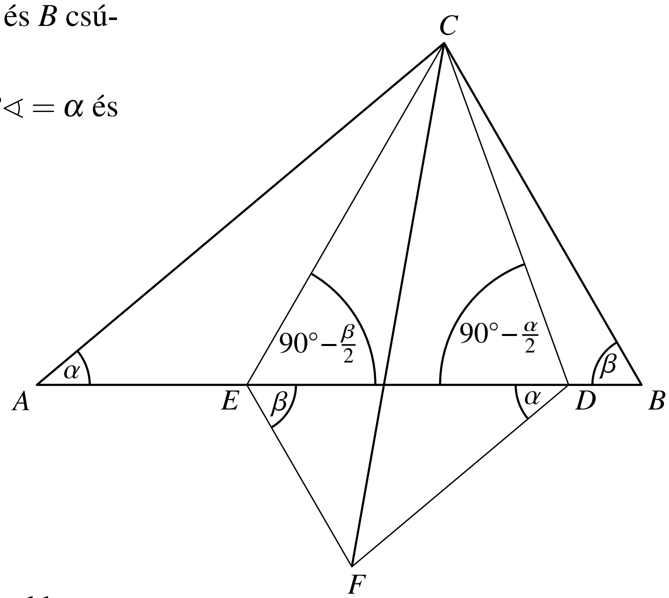
Ilyen utolsó számjegyek valóban elő is fordulhatnak. Ha pl. $b=2$, akkor $a=3$, ha $b=4$, akkor $a=9$, ha pedig $b=10$, akkor $a=51$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. A nem egyenlő szárú ABC háromszög leghosszabb AB oldalán kijelölünk olyan D és E pontokat, amelyekre teljesül, hogy $AD=AC$ és $BE=BC$. A D ponton keresztül AC-vel és az E ponton keresztül BC-vel párhuzamosan húzott egyenesek az F pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy FC felezi az EFD szöget. **7 pont**

Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög A és B csúcsánál levő szögeit rendre α-val és β-val.

$DF \parallel AC$ és $EF \parallel BC$ miatt $FDE\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$ és $DEF\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$ (váltószög-párok). 1 pont



Az ADC és BCE egyenlő szárú háromszögekben

$$ADC\sphericalangle = DCA\sphericalangle = \frac{180° - CAD\sphericalangle}{2} = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

és

$$CEB\sphericalangle = BCE\sphericalangle = \frac{180° - EBC\sphericalangle}{2} = \frac{180° - \beta}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

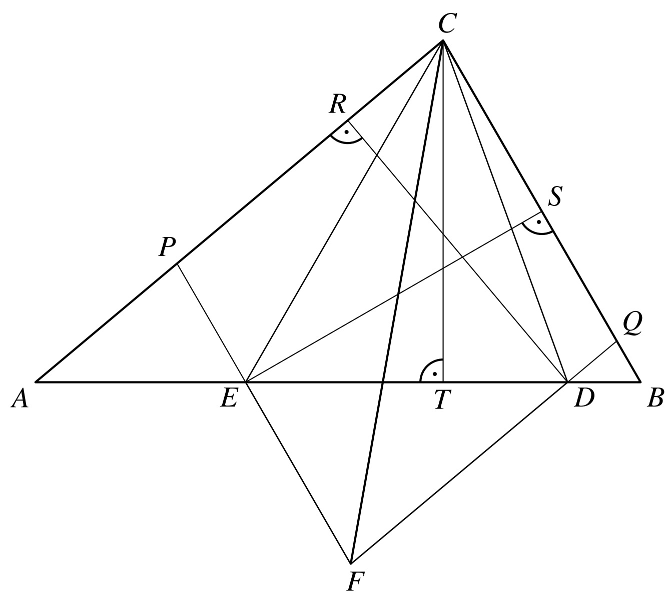
2 pont

Így DC és EC rendre a DEF háromszög D és E csúcsbéli külső szögfelezői. 2 pont

Ezek C metszéspontján áthalad a háromszög F csúcsbéli belső szögfelezője is. (C a DEF háromszög egyik hozzáírt körének középpontja.) Tehát FC valóban felezi az $EFD\sphericalangle$-et. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás – több diák megoldása alapján. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit! Az F pont származtatása miatt $PFQC$ négyszög paralelogramma. $BC = BE$ miatt a BEC egyenlő szárú háromszög szárakhoz tartozó magasságai egyenlők: $SE = TC$. Hasonlóan $AD = AC$ miatt az ADC egyenlő szárú háromszög szárakhoz tartozó magasságaira: $RD = TC$. Azaz $RD = SE$, a $PFQC$ paralelogramma szemközti oldalpárjainak távolsága megegyezik, $PFQC$ tehát rombusz. A rombusz FC átlója pedig felezi a PFQ szögét, és így a vele azonos EFD szöget is.



4. Egy tízes számrendszerben felírt hatjegyű szám számjegyei mind különbözőek és egyik sem 0, valamint a szám osztható 37-tel. Bizonyítsuk, be hogy a számjegyeknek van még legalább 7 olyan sorrendje, ahol a kapott hatjegyű szám szintén osztható 37-tel! **7 pont**

Megoldás. Vizsgáljuk a 10 hatványainak 37-tel való osztási maradékait.

Az 1 37-tel osztva 1 maradékot ad, a 10 pedig 10-et.

$100 = 2 \cdot 37 + 26$, tehát a száz 26 maradékot ad.

$1000 = 20 \cdot 37 + 260 = 20 \cdot 37 + 7 \cdot 37 + 1$, vagyis az 1000 1 maradékot ad. 2 pont

Innentől kezdve mindig csak 10-zel szorzunk, a maradék is szorzódik 10-zel, tehát újra az 1, 10, 26 maradékokat kapjuk. 1 pont

Ebből következően egy $\overline{abcdef}$ hatjegyű szám 37-tel osztva $f + 10e + 26d + c + 10b + 26a$ maradékot ad. 1 pont

Azaz ha f és c, e és b, d és a számjegyeket egymás között cserélgetjük, akkor a maradék nem változik, vagyis a szám továbbra is osztható 37-tel. 2 pont

Ez összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetőség, ebből egy sorrend az eredeti, tehát legalább 7 új sorrend van. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Jelölje a_n az $\frac{n!}{2^n}$ tört tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező értékét. Például $a_5 = 4$, mert

$$\frac{5!}{2^5} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{32} = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}.$$

Tekintsük az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}$ számokat.

a) Mennyi ezen 2022 darab szám minimuma, és ez a minimum hányszor szerepel a 2022 szám között?

b) Mennyi ezen 2022 darab szám maximuma, és ez a maximum hányszor szerepel a 2022 szám között? **7 pont**

2. Andor rendszeresen kerékpározik. Egy alkalommal, amikor hazaér a biciklizésből, testvére, Bendegúz kérdezi tőle, hogy mekkora távot tekert. Andor így felel: „Te jó vagy matekból, próbáld meg kitalálni. Azt elárulom, hogy összesen 2 óra 24 percet bicikliztem, valamekkora táv után visszafordultam, és ugyanazon az úton jöttem haza, amelyiken odafelé mentem. Lejtőn lefelé 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, emelkedőn felfelé 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtam."

Bendegúz: „Gondolom, vízszintes része is volt az útnak."

Andor: „Volt, persze."

Bendegúz: „Akkor ennyi adatból még nem tudom megmondani, hogy mekkora távot teljesítettél."

Andor erre ezt mondja: „Ha azt is megmondanám, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel haladtam, akkor már egyértelműen tudnál válaszolni, de ezt nem mondom meg."

Bendegúz némi számolás után így szólt: „Már tudom a választ." És valóban meg tudta mondani, hogy Andor hány kilométert biciklizett. Mi volt Bendegúz válasza? **7 pont**

3. Határozzuk meg azokat a nemnegatív egész számokból álló $(x;y)$ számpárokat, amelyekre

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2.$$

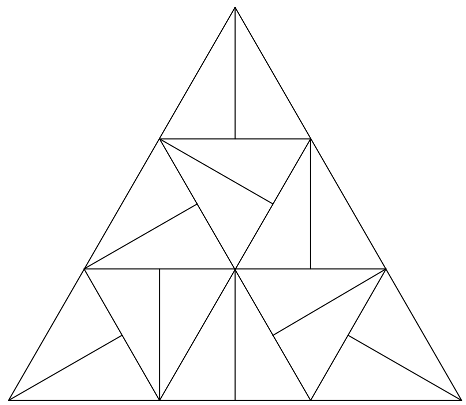
7 pont

4. Egy szabályos háromszög minden oldalát n egyenlő részre osztjuk, majd az osztáspontokon át a megfelelő oldalakkal párhuzamosakat húzva felosztjuk a háromszögünket n^2 darab kisebb szabályos háromszögre.

Ezek után a kisebb háromszögek közül néhánynak megrajzoljuk az egyik súlyvonalát arra figyelve, hogy egyetlen súlyvonalnak se legyen semelyik másik súlyvonallal közös (vég)pontja. Például az alábbi ábrán $n = 3$ esetén mind a kilenc kisebb háromszög egy-egy súlyvonalát megrajzoltuk.

Jelölje $s(n)$ azt a legnagyobb számot, amennyi súlyvonal szabályosan berajzolható adott n esetén.

(A lenti ábra alapján $s(3) = 9$ például.)



Adjuk meg $s(n)$ értékét minden n-re. **7 pont**

5. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $EAB\sphericalangle = 60^\circ$, $ABC\sphericalangle = 100^\circ$ és $BCD\sphericalangle = 140^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög lefedhető egy olyan körrel, amelynek sugara $\frac{2}{3}DA$ hosszúságú. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje a_n az $\frac{n!}{2^n}$ tört tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező értékét. Például $a_5 = 4$, mert

$$\frac{5!}{2^5} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{32} = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}.$$

Tekintsük az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}$ számokat.

a) Mennyi ezen 2022 darab szám minimuma, és ez a minimum hányszor szerepel a 2022 szám között?

b) Mennyi ezen 2022 darab szám maximuma, és ez a maximum hányszor szerepel a 2022 szám között? **7 pont**

Megoldás. Számítsuk ki az első néhány a_n-t:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	2	4	2	4	4	8	2	4	4	8

Vegyük észre, hogy $n > 1$-től kezdve a_n-re teljesül a következő rekurzív összefüggés:

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n, \\ a_{2n+1} = 2a_n. \end{cases}$$ 1 pont

Ezt fogjuk igazolni. Amint látszik a táblázatból, $a_1 = 2$-ből indulva „kicsi” n-ekre a_{2n} és a_{2n+1} értékét helyesen megadja a rekurzív képlet. Nézzük „általánosan” (a képletekben

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1) \quad \text{és} \quad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)$$

a „szemifaktorok”, és nyilván a $(2n-1)!!$ szemifaktor páratlan szám):

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}} = \frac{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1))\,(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n))}{2^n\cdot 2^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{(2n)!!}{2^n}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{2^n} = (2n-1)!! \cdot \frac{n!}{2^n} \Rightarrow a_{2n} = a_n,$$

és

$$\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} = \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1))\,(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n))}{2^{n+1} \cdot 2^n} = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n)!!}{2^n}$$
$$= \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{2^n} = (2n+1)!! \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} \Rightarrow a_{2n+1} = 2 \cdot a_n.$$

Ezzel a rekurzív képlet helyességét igazoltuk. 1 pont

Legyenek most $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ különböző nemnegatív egész kitevők, és legyen $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_k}$ (azaz írjuk fel n bináris alakját)! Az előző rekurzív összefüggés miatt ekkor nyilván $a_n = 2^k$, hiszen $a_1 = 2$, és az $[n/2]$ szám bináris alakjának a végére 0-t téve (a szám páros lesz) nem változik a_n értéke, míg az $[n/2]$ szám bináris alakjának a végére 1-t téve (a szám páratlan lesz) a_n értéke kétszereződik.

Azaz a_n megegyezik 2^k-nal (ahol k az n szám bináris alakjában az 1-esek száma). 2 pont

Minimum: a_n kettőnél kisebb nyilván nem lehet, és $a_n = 2$ pontosan a kettő-hatványok esetén igaz (ezek bináris alakjában van egyetlen darab 1-es).

Azaz $a_n = 2$ a minimum, és ez pontosan $n = 1 = 2^0$; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512 és $n = 1024 = 2^{10}$ esetén teljesül, azaz 11 darab minimumhely van. 1 pont

Maximum: mivel 2023 binárisan 11-jegyű szám, de $2047 = 11111111111_2$ már nincs a vizsgált számok között, 1 és 2023 között legfeljebb 10 darab 1-es lehet az n egész szám bináris alakjában, azaz $a_n = 2^{10} = 1024$ a sorozat maximuma. 1 pont

Vizsgáljuk először, hogy $a_n = 1024$ (maximum) hány helyen fordul elő az 1023 és 2046 közötti számok között. Ezeket a számokat mind 11-jegyű bináris számnak tekintve (ez csak 1023 esetén „kiterjesztés” az 1023-at 01111111111_2-ként felírva) az egyetlen 0-s számjegy a bináris alakban 11 helyre tehető, ezek közül $11111111110_2 = 2046$; $11111111101_2 = 2045$; $11111111011_2 = 2043$; $11111110111_2 = 2039$; $11111101111_2 = 2031$ túl nagyok, és $11111011111_2 = 2015$ a legnagyobb megfelelő.

Azaz összesen 6 helyen veszi fel a_n a maximális 1024 értéket. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Andor rendszeresen kerékpározik. Egy alkalommal, amikor hazaér a biciklizésből, testvére, Bendegúz kérdezi tőle, hogy mekkora távot tekert. Andor így felel: „Te jó vagy matekból, próbáld meg kitalálni. Azt elárulom, hogy összesen 2 óra 24 percet bicikliztem, valamekkora táv után visszafordultam, és ugyanazon az úton jöttem haza, amelyiken odafelé mentem. Lejtőn lefelé 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, emelkedőn felfelé 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtam.”

Bendegúz: „Gondolom, vízszintes része is volt az útnak.”

Andor: „Volt, persze.”

Bendegúz: „Akkor ennyi adatból még nem tudom megmondani, hogy mekkora távot teljesítettél.”

Andor erre ezt mondja: „Ha azt is megmondanám, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel haladtam, akkor már egyértelműen tudnál válaszolni, de ezt nem mondom meg.”

Bendegúz némi számolás után így szólt: „Már tudom a választ.” És valóban meg tudta mondani, hogy Andor hány kilométert biciklizett. Mi volt Bendegúz válasza? **7 pont**

1. megoldás. Az Andor által megtett út legyen s. Jelöljük rendre x-szel, y-nal és z-vel azt, hogy hány kilométer utat tett meg odafelé lejtőn, vízszintesen, illetve emelkedőn.

Ekkor $s = 2(x+y+z) = 2x+2y+2z$.

Jelöljük v-vel azt, hogy mekkora (hány km/h) sebességgel ment vízszintesen.

Ekkor az út odafalé $\frac{x}{45}+\frac{y}{v}+\frac{z}{15}$ óráig tartott, visszafelé pedig $\frac{x}{15}+\frac{y}{v}+\frac{z}{45}$ óráig.

A kettő együtt 2,4, azaz $\frac{x}{45}+\frac{y}{v}+\frac{z}{15}+\frac{x}{15}+\frac{y}{v}+\frac{z}{45} = 2{,}4$. 1 pont

$$\frac{4x+4z}{45}+\frac{2y}{v} = 2{,}4$$
$$\frac{2x+2z}{45}+\frac{y}{v} = 1{,}2$$
$$\frac{s-2y}{45}+\frac{y}{v} = 1{,}2$$
$$\frac{s}{45}+y\left(\frac{1}{v}-\frac{2}{45}\right) = 1{,}2$$
1 pont

Innen $s = 54-\left(\frac{45}{v}-2\right)y$. 1 pont

Tehát az Andor által megtett út y-tól (ami nem 0) és v-től függ. Ha v ismeretében s értéke már egyértelműen megmondható, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy az y szorzótényezője nulla, azaz $\left(\frac{45}{v}-2\right) = 0$, 3 pont

innen $v = 22{,}5$, és $s = 54$.

Tehát 54 km-t biciklizett Andor. 1 pont

2. megoldás. A megtett út a menetidő és az átlagsebesség szorzata. A menetidő adott, ezért Bendegúznak a teljes útra vonatkozó átlagsebességet kell kitalálni. 1 pont

Ha eltekintünk a vízszintes útszakasztól, és kiszámítjuk az emelkedős és a lejtős részeken történő mozgás átlagsebességét, akkor $\frac{2x+2z}{\frac{x}{45}+\frac{z}{15}+\frac{x}{15}+\frac{z}{45}} = \frac{2x+2z}{\frac{4x+4z}{45}} = 22{,}5$-et kapunk. (15 és 45 harmonikus közepe.) 2 pont

Ha a vízszintes útszakaszon mért sebesség ettől eltérő lenne, akkor az egész távra vonatkozó átlagsebesség függene attól, hogy a teljes távnak mekkora része a vízszintes rész. Erre azonban nincs utalás a feladat szövegében. Mivel a válasz ettől az információtól függetlenül is megadható, feltéve, hogy a vízszintes útszakaszon mért sebességet ismerjük, ez csak úgy lehetséges, hogy a vízszintes útszakaszon is 22,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt a sebessége. 3 pont

Tehát a teljes táv $22{,}5 \cdot 2{,}4 = 54$ km. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Határozzuk meg azokat a nemnegatív egész számokból álló $(x;y)$ számpárokat, amelyekre

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2.$$ **7 pont**

Megoldás.

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2$$

$$x^2y^2 - 12xy + 36 + 13 = x^2 + 2xy + y^2$$ 1 pont

$$(xy-6)^2 + 13 = (x+y)^2$$ 1 pont

$$(xy-6)^2 - (x+y)^2 = -13$$

$$\big[(xy-6)-(x+y)\big]\big[(xy-6)+(x+y)\big] = -13$$ 1 pont

Figyelembe véve, hogy a bal oldali szorzat első tényezője nem nagyobb, mint a második, ezért a lehetséges esetek:

a) $(xy-6)-(x+y) = -1$ és $(xy-6)+(x+y) = 13$.

Ebből $xy-(x+y) = 5$ és $xy+(x+y) = 19$ adódik, amiből $xy = 12$ és $x+y = 7$.

A kapott megoldások: $x_1 = 4$, $y_1 = 3$ és $x_2 = 3$, $y_2 = 4$.

b) $(xy-6)-(x+y) = -13$ és $(xy-6)+(x+y) = 1$.

Ebből $xy-(x+y) = -7$ és $xy+(x+y) = 7$ adódik, amiből $xy = 0$ és $x+y = 7$.

A kapott megoldások: $x_3 = 7$, $y_3 = 0$ és $x_4 = 0$, $y_4 = 7$. 3 pont

A kapott $(x;y)$ számpárok kielégítik az egyenletet, így a megoldások:

$$M = \big\{(x;y) \mid (4;3),(3;4),(7;0),(0;7)\big\}.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A 3 pont elosztása: 1 pont jár a szorzattá bontás helyes eseteinek megállapításáért, további 1-1 pont ezek megoldásáért.

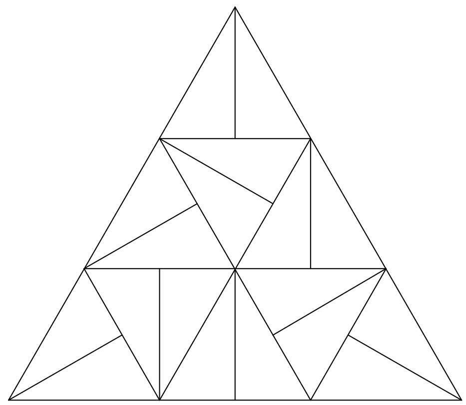
4. Egy szabályos háromszög minden oldalát n egyenlő részre osztjuk, majd az osztáspontokon át a megfelelő oldalakkal párhuzamosakat húzva felosztjuk a háromszögünket n^2 darab kisebb szabályos háromszögre.

Ezek után a kisebb háromszögek közül néhánynak megrajzoljuk az egyik súlyvonalát arra figyelve, hogy egyetlen súlyvonalnak se legyen semelyik másik súlyvonallal közös (vég)pontja.

Például az alábbi ábrán $n = 3$ esetén mind a kilenc kisebb háromszög egy-egy súlyvonalát megrajzoltuk.

Jelölje $s(n)$ azt a legnagyobb számot, amennyi súlyvonal szabályosan berajzolható adott n esetén.

(A lenti ábra alapján $s(3) = 9$ például.)



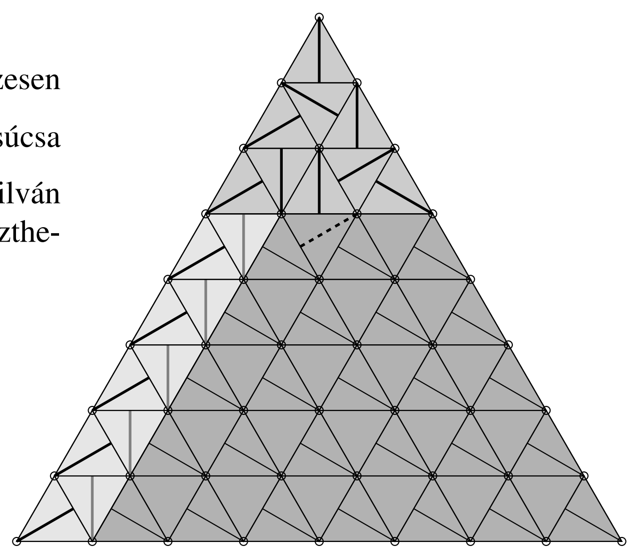
Adjuk meg $s(n)$ értékét minden n-re. **7 pont**

Megoldás. A válasz: $n = 1$; 2; 3 esetén nyilván rendre 1, 4 és 9, azaz $s(n) = n^2$. (Ekkor a „megoldások” a fenti ábráról leolvashatóak.) 1 pont

Azt fogjuk megmutatni, hogy $s_n \leq \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

(Ez csak $n \geq 4$ esetén „korlátoz”, mivel $n = 1, 2, 3$ esetén n^2, azaz rendre $1, 4$ és 9 kisebb, mint $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, azaz rendre $3, 6$ és 10.)

Tekintsük a mellékelt ábrát!



Adott n esetén az n^2 kis háromszögnek összesen $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ – az ábrán karikával jelölt – csúcsa van (ez $n = 1$; 2; 3 esetén több, mint n^2), és nyilván minden csúcsra legfeljebb egy súlyvonal illeszthető. Emiatt

$$s(n) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

valóban.

Másfelől a fenti, „triviálisan folytatható” ábra mutatja, hogy $n > 3$ esetén megadhatóak úgy a súlyvonalak, hogy bármely csúcsra pontosan egy súlyvonal illeszkedjen. Minden lépésben az előző n-re adott megoldást bővítjük tovább úgy, hogy alulra felveszünk egy új sort, és az alább megadott módon az itt keletkezett új háromszögek közül a megfelelőekbe behúzunk új súlyvonalakat.

A 4. sorba bekerül egy, az ábrán szaggatottan jelölt súlyvonal is, amelynek megfelelő súlyvonal nagyobb n-ek esetén nem lesz, ez itt azért van, hogy a felette lévő sor egyetlen szabad csúcsára is illeszkedjen súlyvonal.

A továbbiakban a következő, $n+1$-edik sorban pedig a következőképpen járunk el:

– a balról nézve első kisebb háromszög bal alsó csúcsát a jobb oldal felezőpontjával kötjük össze,

– a balról második kisebb háromszög alsó csúcsát a felső oldal felezőpontjával kötjük össze (ez az egyetlen olyan háromszög, amely olyan csúccsal/oldalfelező ponttal van összekötve, amely a korábbi n^2 háromszög valamely csúcsa/oldalfelező pontja, de a felhasznált oldalfelező pont a konstrukcióból következően szabad),

– a balról 3-adik, 5-ödik, 7-edik, $\ldots$, $(2n+1)$-edik (összesen n darab) kisebb háromszögnek pedig a jobb alsó csúcsát a bal oldalának a felezőpontjával kötjük össze.

Így a legalsó, $(n+1)$-edik szinten minden újabb csúcsra (a számuk pontosan $(n+2)$) egy-egy szabályosan behúzott súlyvonalat rajzoltunk, és mivel az új ábrán is igaz az, hogy minden csúcsra pontosan egy súlyvonal illeszkedik, ezzel igazoltuk, hogy az $s(n) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ súlyvonal megrajzolása elérhető, azaz $s(n) \geq \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Többféle „jó konstrukció” elképzelhető, ennek a résznek a kifejtését – mivel meglehetősen „triviális” – nem szükséges ennyire precízen leírni. 2 pont

Az eddigieket összevetve adódik a válasz: $s(n)$ valóban

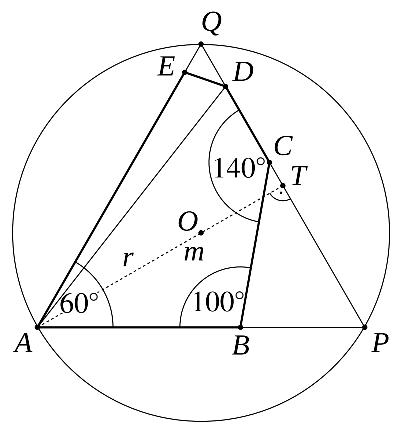
$$s(n) = \min\left(n^2; \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) \text{ vagy } s(n) = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n < 4 \\ \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}, & \text{ha } n \geq 4 \end{cases}$$

A válasz valamilyen formában (esetszétválasztással) 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $EAB\sphericalangle = 60^\circ$, $ABC\sphericalangle = 100^\circ$ és $BCD\sphericalangle = 140^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög lefedhető egy olyan körrel, amelynek sugara $\dfrac{2}{3}DA$ hosszúságú. **7 pont**

Megoldás. Az $ABCDE$ konvex ötszög B és C csúcsánál levő külső szöge rendre 80° és 40°. Ezek összege kisebb 180°-nál, így az AB és CD oldalegyenesek metszik egymást. Jelöljük a metszéspontjukat P-vel. 1 pont



Ekkor

$$BPC\sphericalangle = 180^\circ - CBP\sphericalangle - PCB\sphericalangle = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel az $EAB\sphericalangle$ és az $APD\sphericalangle$ összege kisebb 180°-nál, ezért az ötszög CD és EA oldalegyenesei is metszik egymást. Legyen ezek metszéspontja Q. Az APQ háromszögben az A és P csúcsoknál levő szögek 60°-osak, ezért a háromszög szabályos. 1 pont

Ez a háromszög tartalmazza az $ABCDE$ ötszöget, így a háromszög körülírt köre lefedi az ötszöget is. 2 pont

Jelöljük az APQ háromszög körülírt körének a sugarát r-rel, a magasságát m-mel, az A csúcshoz tartozó magasság talppontját T-vel. Ekkor

$$r = \frac{2m}{3} = \frac{2}{3}AT \leqslant \frac{2}{3}AD.$$

Ezzel az állítást beláttuk. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám darabszámú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány pontot jelöltünk meg az egyeneseken? **7 pont**

2. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x;y;z;u)$ számnégyes van, amelyre teljesül az alábbi egyenlőség?

$$2^x + 2^y + 2^z + 2^u = 2^{2023}$$

7 pont

3. A 4 egység oldalú $ABCD$ négyzet K középpontja köré egy 1 egység sugarú kört írunk. Az A csúcsból a körhöz húzott egyik érintő a BC oldalt az M pontban metszi, az AD oldal F felezőpontjából a körhöz húzott egyik érintő pedig a DC oldalt az N pontban metszi. Az ABM vagy a DFN háromszög területe a nagyobb? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám darabszámú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány pontot jelöltünk meg az egyeneseken? **7 pont**

Megoldás. Legyen az egyik egyenesen megjelölt pontok száma p, a másikon megjelölteké pedig q.

A négyszögek esetén 2-2 pontot kell mindkét egyenesről választani, ezt $\binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2}$-féleképpen tehetjük meg. 1 pont

Háromszögek esetén 2 pontot kell az egyik és 1 pontot a másik egyenesről választani, ezt összesen $\binom{p}{2} \cdot q + \binom{q}{2} \cdot p$-féleképpen tehetjük meg. 1 pont

A feladat feltétele szerint

$$2\cdot\left(\binom{p}{2}\cdot q+\binom{q}{2}\cdot p\right) = \binom{p}{2}\cdot\binom{q}{2}, \quad \text{azaz} \quad 2\cdot\frac{p(p-1)q}{2}+2\cdot\frac{q(q-1)p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{2}.$$ 1 pont

pq-val osztva, majd rendezve a $(p-1)(q-1)-4(p-1)-4(q-1)=0$ alakhoz jutunk, ami rendezés után: $pq-5p-5q+9=0$. A bal oldalt szorzattá alakítva $(p-5)(q-5)=16$ adódik. 2 pont

Mivel p és q pozitív egészek, ezért $p-5$, illetve $q-5$ osztói 16-nak. A lehetőségek:

$p-5$	$q-5$	p	q
16	1	21	6
8	2	13	7
4	4	9	9
-4	-4	1	1

(természetesen p és q szerepe felcserélhető) 1 pont

Mivel p és q prímszámok, ezért az egyik egyenesen (mindegy, hogy melyiken) 13, a másikon pedig 7 pont lett kijelölve. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x;y;z;u)$ számnégyes van, amelyre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2^x+2^y+2^z+2^u=2^{2023}.$$ **7 pont**

1. megoldás. Mindkét oldalt 2^{2023}-nal elosztva, az $a=x-2023$, $b=y-2023$, $c=z-2023$ és $d=u-2023$ jelölésekkel az egyenlet $2^a+2^b+2^c+2^d=1$ alakra hozható (a, b, c, d egészek). 1 pont

Tegyük fel, hogy $a \le b \le c \le d$. Látható, hogy $a=b=c=d=-2$ (azaz $x=y=z=u=2021$) megoldás. 1 pont

Ha a bal oldalon nem minden tag 2^{-2}, akkor $2^d > 2^{-2}$, de ez csak úgy lehet, ha $d = -1$ (és így $u = 2022$). 1 pont

Kivonva ezt a tagot mindkét oldalból azt kapjuk, hogy $2^a + 2^b + 2^c = 2^{-1}$. Itt csak $c = -2$ (és $z = 2021$) lehet, mert $c \leq -3$ esetén a bal oldal kisebb, $c \geq -1$ esetén nagyobb, mint a jobb oldal. 1 pont

A 2^c tagot is kivonva marad $2^a + 2^b = 2^{-2}$. Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy csak $b = -3$ (és így $y = 2020$) a megfelelő, amiből $a = -3$ (és így $x = 2020$) is következik. 1 pont

Most lássuk a megoldások számát!

$a = b = c = d = -2$, azaz $x = y = z = u = 2021$, ez 1 lehetőség,

illetve $a = b = -3$, $c = -2$, $d = -1$, azaz $x = y = 2020$, $z = 2021$, $u = 2022$ esetében valójában x, y, z, u tetszőleges sorrendben lehet, ezek száma $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Összesen tehát 13 számnégyes a megoldása az egyenletnek. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Tegyük fel, hogy $x \leq y \leq z \leq u$, ahol $u \leq 2022$. Az egyenlőségben szereplő számok 2-es számrendszerbeli alakját egy táblázatba írva:

	2^{2023}	...	2^u	...	2^z	...	2^y	...	2^x	...	2^0
2^u			1	0	0	0	0	0	0	0	0
2^z					1	0	0	0	0	0	0
2^y							1	0	0	0	0
2^x									1	0	0
2^{2023}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1 pont

Ahhoz, hogy a felső 4 szám összege az alsó szám, azaz 2^{2023} legyen, szükséges, hogy 2^x oszlopában összesen páros sok (tehát 2 vagy 4 darab) 1-es legyen, mert csak így lehet az alsó sor megfelelő oszlopában 0. 1 pont

1. eset: 2^x oszlopában 2 db 1-es van (azaz $y = x$, de $z > x$). Ekkor 2^{x+1} oszlopába átkerül egy 1-es maradék, ezért ott még egy 1-esnek kell lennie (azaz $z = y + 1$). De akkor ugyanígy ebben az oszlopban is képződik egy 1-es maradék, ezért 2^{x+2} oszlopában is kell legyen egy 1-es (azaz $u = z + 1$). Végül ennek a két 1-esnek az összegéből származó 1-es maradék kerül át 2^{2023} oszlopába, azaz $2023 = u + 1$. Összefoglalva $x = y = 2020, z = 2021, u = 2022$. 2 pont

2. eset: 2^x oszlopában 4 db 1-es van (azaz $y = x = z = u$). Ekkor $y = x = z = u = 2021$. 1 pont

Még figyelembe kell vennünk, hogy valójában x, y, z és u tetszőleges sorrendben lehet, ezért az 1. eset $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$ lehetőség, összesen tehát 13 különböző számnégyesre igaz az egyenlőség. 2 pont

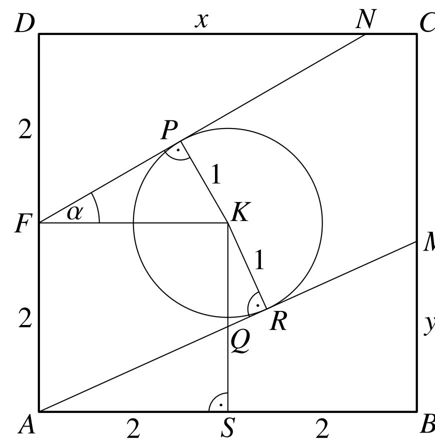
Összesen: **7 pont**

3. A 4 egység oldalú $ABCD$ négyzet K középpontja köré egy 1 egység sugarú kört írunk. Az A csúcsból a körhöz húzott egyik érintő a BC oldalt az M pontban metszi, az AD oldal F felezőpontjából a körhöz húzott egyik érintő pedig a DC oldalt az N pontban metszi. Az ABM vagy a DFN háromszög területe a nagyobb? **7 pont**

Megoldás. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!

Az AB oldal felezőpontja legyen S, a KS szakasz és az AM szakasz metszéspontja legyen Q, az érintési pontok pedig R és P. Az FKP háromszög derékszögű, az FK átfogó kétszerese a PK befogónak, ezért ez egy félszabályos háromszög, tehát $\alpha = 30°$. A DFN háromszög N csúcsnál lévő szöge az α szög váltószöge, ezért ez a szög is $\alpha = 30°$. 1 pont

Ebből következik, hogy a DFN derékszögű háromszög is félszabályos háromszög, $DN = x$ oldala a 2 egység hosszúságú FD oldal $\sqrt{3}$-szorosa, azaz $x = 2\sqrt{3}$. Azaz a DFN háromszög területe $2\sqrt{3}$. 1 pont



Az ABM háromszög területe $2y$, ezért a kérdés az, hogy az y a $\sqrt{3}$-nál kisebb vagy nagyobb.

Az ASQ háromszög és az ABM háromszög hasonlóak (megfelelő szögeik egyállásúak), a hasonlóság aránya 1 : 2, ezért $QS = \frac{y}{2}$, így $KQ = 2 - \frac{y}{2}$.

A KRQ és az ASQ háromszögek hasonlóak (mindkettő derékszögű, és a közös Q csúcsnál lévő szögeik egyenlők, mivel csúcsszögek). Ezért $\frac{KQ}{KR} = \frac{AM}{AB}$, azaz $\frac{2-\frac{y}{2}}{1} = \frac{\sqrt{y^2+16}}{4}$. 2 pont

Mindkét oldalt 4-gyel szorozva, négyzetre emelve, és 0-ra rendezve kapjuk: $3y^2 - 32y + 48 = 0$.

Az egyenlet diszkriminánsa $448 = 64 \cdot 7$, a gyökök $\frac{32+8\sqrt{7}}{6}$ és $\frac{32-8\sqrt{7}}{6}$. 1 pont

Az első gyök nagyobb, mint 4, ezért $y = \frac{32-8\sqrt{7}}{6} = \frac{16-4\sqrt{7}}{3}$.

Azt kell már csak eldönteni, hogy ez $\sqrt{3}$-nál kisebb-e vagy nagyobb. Vagy, ami ezzel egyenértékű, hogy a $3y = 16 - 4\sqrt{7}$ és a $3\sqrt{3}$ közül melyik nagyobb. Ezt eldönthetjük a 16 és a $3\sqrt{3} + 4\sqrt{7}$ összehasonlításával is (mivel mindkettő pozitív, elég a négyzetüket összehasonlítani):

$$16^2 \ ? \ (3\sqrt{3}+4\sqrt{7})^2 \iff 256 \ ? \ 139 + 24\sqrt{21} \iff 117 \ ? \ 24\sqrt{21} \iff 39 \ ? \ 8\sqrt{21}.$$

Mivel $39^2 = 1521 > 1344 = (8\sqrt{21})^2$, ezért $16 - 4\sqrt{7} = 3y > 3\sqrt{3}$, tehát $y > \sqrt{3}$.

Így az ABM háromszög területe nagyobb, mint a DFN háromszögé. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelynek létezik három olyan $a > b > c$ pozitív osztója, hogy $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $a^2 - c^2$ is osztója n-nek. **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC = BC$ és $AB < AC$. Az A csúcshoz tartozó magasság talppontját a BC oldalon jelöljük D-vel. Az AD egyenes az (A-tól különböző) E pontban metszi a háromszög körülírt körét, az AB oldal felezőmerőlegese pedig az L pontban metszi AD-t. A BL egyenes az AC oldalt az M, az ABC háromszög körülírt körét pedig az N pontban metszi. Továbbá az EN egyenesnek és az AB oldal felezőmerőlegesének metszéspontja Z. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $MZ \perp BC$. **7 pont**

3. Dániel gyümölcssalátát készít. A salátába alma, banán, citrom, dinnye és eper kerülhet.
– Az alma, banán, dinnye és eper ára darabonként 1 fabatka;
– egy darab citrom ára 2 fabatka;
– dinnyéből és eperből is csak egy-egy darab van már a zöldségesnél, míg almából, banánból és citromból „tetszőlegesen sok” kapható.

Dániel n fabatkányi (n pozitív egész) pénzét teljesen elköltve hányféleképpen vásárolhat gyümölcsöt?

(Például ha $n = 2$, akkor 9-féleképpen vásárolhat, hiszen (az egyes gyümölcsöket a kezdőbetűjükkel rövidítve) a lehetőségek: AA, AB, AD, AE, BB, BD, BE, C, és DE.) **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelynek létezik három olyan $a > b > c$ pozitív osztója, hogy $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $a^2 - c^2$ is osztója n-nek. **7 pont**

Megoldás. Tegyük fel, hogy $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, $a > b > c$, $a \mid n$, $b \mid n$ és $c \mid n$. Ekkor az a, b, c számok között van legalább két azonos paritású. Bármelyik kettő is ez (jelölje őket u és v), azok összege $(u + v)$ és különbsége ($u - v$ vagy $v - u$) is páros, amelyek szorzata – akár $u^2 - v^2$, akár $v^2 - u^2$ a feltételek szerint szintén osztója n-nek – osztható 4-gyel, tehát $4 \mid n$. 1 pont

Ha az a, b, c számok közül bármelyik osztható 3-mal, akkor n is osztható 3-mal. Ellenkező esetben a három szám között van kettő olyan, amelyek 3-mal osztva azonos maradékot adnak. Bármelyik kettő is ez, azok különbsége osztható 3-mal, és a különbségük és az összegük szorzata – szintén n osztója – osztható 3-mal, azaz $3 \mid n$. 1 pont

Ha az a, b, c számok közül bármelyik osztható 5-tel, akkor n is osztható 5-tel. Ellenkező esetben az a^2, b^2, c^2 öttel való osztási maradéka csak 1 vagy 4 lehet, vagyis lesz közöttük kettő, amelyik 5-tel osztva azonos maradékot ad.

Ezek különbsége osztható 5-tel, így a különbségük és az összegük szorzata – szintén n osztója – is osztható 5-tel, ez alapján $5 \mid n$. 2 pont

Így a korábbi megállapításaink szerint $[3;4;5] = 60 \mid n$. 1 pont

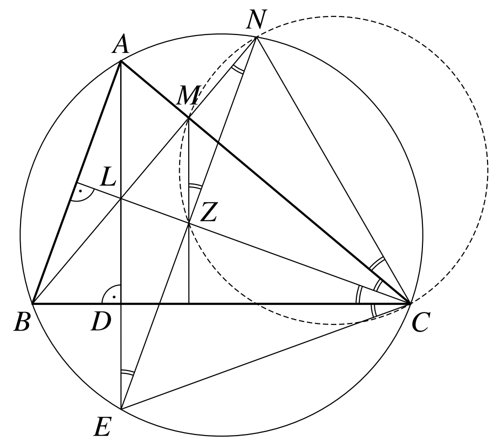
Ha $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, akkor $n = 60k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) esetén, $4 \mid n$, $2 \mid n$, $1 \mid n$, továbbá $a^2 - b^2 = 12 \mid n$, $b^2 - c^2 = 3 \mid n$ és végül $a^2 - c^2 = 15 \mid n$.

Tehát a feladat feltételeinek a 60-nal osztható pozitív egész számok felelnek meg. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC = BC$ és $AB < AC$. Az A csúcshoz tartozó magasság talppontját a BC oldalon jelöljük D-vel. Az AD egyenes az (A-tól különböző) E pontban metszi a háromszög körülírt körét, az AB oldal felezőmerőlegese pedig az L pontban metszi AD-t. A BL egyenes az AC oldalt az M, az ABC háromszög körülírt körét pedig az N pontban metszi. Továbbá az EN egyenesnek és az AB oldal felezőmerőlegesének metszéspontja Z. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $MZ \perp BC$. **7 pont**

Megoldás. Használjuk a mellékelt ábrát és jelöléseit!



$AC = BC$ esetén az AB oldal felezőmerőlegese a háromszög szimmetriatengelye és a $BCA\sphericalangle$ szögfelezője is, így L a háromszög magasságpontja, továbbá L és E egymás tükörképei a BC egyenesre vonatkozóan. 1 pont

Így $ENB\sphericalangle = ECB\sphericalangle$ (mivel azonos íven nyugvó kerületi szögek), és $ECB\sphericalangle = LCB\sphericalangle = LCA\sphericalangle$ (a tengelyes szimmetria miatt). 2 pont

Tehát az MZ szakasz a C és N pontokból egyenlő szögek alatt látszik, azaz $CNMZ$ húrnégyszög. 1 pont

Így $MZN\sphericalangle = MCN\sphericalangle = ACN\sphericalangle = AEN\sphericalangle$, az első egyenlőség $CNMZ$, az utolsó egyenlőség pedig $AECN$ négyszög húrnégyszög volta miatt igaz. 2 pont

Mivel az AEN és MZN szögek egyik szögszára egy egyenesre esik, ezért $MZ \parallel AE$ és $AE \perp BC$ miatt $MZ \perp BC$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Dániel gyümölcssalátát készít. A salátába alma, banán, citrom, dinnye és eper kerülhet.
– Az alma, banán, dinnye és eper ára darabonként 1 fabatka;
– egy darab citrom ára 2 fabatka;
– dinnyéből és eperből is csak egy-egy darab van már a zöldségesnél, míg almából, banánból és citromból „tetszőlegesen sok” kapható.

Dániel n fabatkányi (n pozitív egész) pénzét teljesen elköltve hányféleképpen vásárolhat gyümölcsöt?

(Például ha $n = 2$, akkor 9-féleképpen vásárolhat, hiszen (az egyes gyümölcsöket a kezdőbetűjükkel rövidítve) a lehetőségek: AA, AB, AD, AE, BB, BD, BE, C, és DE.) **7 pont**

Megoldás. Jelölje a_n a kívánt sorozatunkat (azaz azt, ahányféleképpen vásárolhatunk n fabatkából.) a_n első pár értékét felírva ($a_0 = 1$,) $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, $a_3 = 16$. Ez alapján a sejtésünk:

$$a_n = (n+1)^2$$ 1 pont

Jelölje most c_n azt a számot, ahányféleképpen n fabatkát elkölthetünk úgy, hogy nem veszünk citromot. c_n könnyen számolható esetszétválasztással aszerint, hogy a korlátozott mennyiségű dinnyéből és eperből hányat veszünk:

– ha dinnyéből és eperből egyet sem veszünk, akkor a maradék két gyümölcs vásárlására $(n+1)$ lehetőség van (aszerint, hogy 0, 1, 2, …, n darab almát veszünk);

– ha dinnyéből és eperből összesen egy darabot veszünk (ez eleve két lehetőség), akkor a maradék $(n-1)$ fabatkánkat n-féleképpen költhetjük el, azaz itt az esetek száma: $2n$;

– ha pedig egy-egy dinnyét és epret is veszünk, a maradék $(n-2)$ fabatkát $(n-1)$-féleképpen költhetjük el.

Ezek alapján $c_n = (n+1)+2n+(n-1) = 4n$. 1 pont

Most visszatérünk a_n-re. Aszerint, hogy n páratlan vagy páros, két eset van:

– Ha $n = 2k+1$, azaz páratlan, akkor

$$a_n = c_n + c_{n-2} + \ldots + c_3 + c_1$$

aszerint, hogy rendre 0, 1, … darab citromot veszünk. 1 pont

Ezek összege (az előző eredményeket felhasználva):

$$a_n = a_{2k+1} = 4\cdot(2k+1)+4\cdot(2k-1)+\ldots+4\cdot 3+4\cdot 1 = 4\cdot(1+3+5+\ldots+(2k+1)) =$$
$$= 4(k+1)^2 = (2k+2)^2 = (n+1)^2.$$ 1 pont

– Ha pedig $n = 2k$, azaz páros, akkor

$$a_n = c_n + c_{n-2} + \ldots + c_2 + 1$$

aszerint, hogy rendre 0, 1, … darab citromot veszünk – az „utolsó 1-es az összegben” az az egy eset, amikor minden pénzen citromot veszünk. 2 pont

Ezek összege (az előző eredményeket felhasználva):

$$a_n = a_{2k} = 4\cdot(2k)+4\cdot(2k-2)+\ldots+4\cdot 2+1 = 8\cdot(1+2+3+\ldots+k)+1 =$$
$$= 8\frac{k(k+1)}{2}+1 = 4k^2+4k+1 = (2k+1)^2 = (n+1)^2.$$ 1 pont

Ezzel beláttuk, hogy valóban $a_n = (n+1)^2$-féleképpen költheti el Dániel az n fabatkáját.

Összesen: **7 pont**

2. megoldás – több diák dolgozata alapján. Az $n = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ esetekben az összes lehetőség felsorolása után az $a_n = (n+1)^2$ sejtésünket teljes indukcióval is bizonyíthatjuk.

Tekintsük úgy, hogy Dániel bevásárlólistáján fordított ábécé sorrendben először az eper, majd a dinnye, harmadikként a citrom, utána a banán és végül az alma mennyisége van feltüntetve. Tegyük fel, hogy $n = k$-ig valóban $a_k = (k+1)^2$-féleképp költhető el k fabatka, tehát ennyiféle bevásárlólistája lehet Dánielnek.

Tekintsük a $(k+1)$ fabatkához tartozó listát, és nézzük meg, mire költhette Dániel az utolsó, $(k+1)$-edik fabatkáját.

- Ha ezt almára költötte, akkor az előtte lévő k-fabatkás lista bármi ennek megfelelő lehet, ez $(k+1)^2$ darab lehetőség az indukciós feltétel miatt.
- Ha az utolsó fabatkát banánra költötte, akkor az előtte lévő k fabatka egyikéért sem vehetett almát (a listán szereplő tételek sorrendje miatt). Az olyan k-fabatkás „rossz” listák száma, ahol az utolsó elem alma, éppen k^2 , ugyanis az előző $(k-1)$ fabatkát érő tetszőleges lista után egy almát téve kapjuk meg az ilyen listákat. A komplementer-elv miatt tehát az olyan $(k+1)$ fabatkát érő listák száma, melyben az utolsó fabatkáért banánt vett Dániel, $(k+1)^2-k^2$.

– Ha az utolsó fabatkát citromra költötte, akkor – mivel a citrom 2 fabatkába kerül, tehát a k-adik fabatka is ezen citrom árának része – azt kell megnéznünk, hogy az előző $(k-1)$ fabatkát hányféleképp költhette el Dániel. Citrom előtt a listán csak eper, dinnye és citrom szerepelhet, banán és alma nem, eperből és dinnyéből pedig csak 1-1 áll rendelkezésre. Ezért ezt a $(k-1)$ fabatkát csak kétféleképpen lehet elkölteni:

  - Ha $(k-1)$ páros, akkor vagy mind a $(k-1)$ fabatkáért citromot vett Dániel, vagy az első két fabatkán egy-egy epret és dinnyét, a maradék $(k-3)$ fabatkáért pedig csupa citromot vett.
  - Ha pedig $(k-1)$ páratlan, akkor az első fabatkáért megvette az eper és dinnye egyikét, majd a fennmaradó $(k-2)$ fabatkát csupa citromra költötte.

– Mivel $k \geq 3$ esetén nem lehet az összes fabatkát elkölteni csupán eperre és dinnyére, ezért nincs olyan eset, amikor a $(k+1)$-edik fabatkáért ezek egyikét vette volna.

Tehát $(k+1)$ fabatkát összesen $(k+1)^2+(k+1)^2-k^2+2$-féleképp lehet elkölteni, ami éppen $(k+2)^2$.

Ezzel a teljes indukciós bizonyítás módszere alapján készen vagyunk, n fabatkát Dániel valóban $(n+1)^2$-féleképp tud elkölteni.

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen olyan n pozitív egész szám van, amelyre $3n+1$ és $7n+4$ is négyzetszám, valamint $n+7$ prímszám. **7 pont**

2. Az A-nál derékszögű ABC háromszögben $AB > AC$. Legyen az A pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe P, az A-ból BP-re állított merőleges talppontja T, míg AT szakasz felezőpontját jelölje F. Az ABC háromszög köréírt k köréhez A-ban húzott érintő a BC egyenest Q-ban metszi, míg a BF egyenes és k (B-től különböző) metszéspontja U. Igazoljuk, hogy a BQ egyenes érinti az AUQ háromszög köréírt körét! **7 pont**

3. Dániel bácsinak 6 kutyája és 6 macskája van. Mivel Dániel bácsi szeret fotózni, az állatairól készített néhány fényképet. A képek előhívása után a következőket vette észre.

– Mind a 36 lehetséges kutya-macska párosra volt olyan kép, amelyen ez a két állat (esetleg más állatokkal együtt) egy képen szerepelt.

– Egyetlen képen sem szerepelt mindkét fajta állatból egyszerre több. (Az előfordulhatott, hogy egy képen egy kutya és több macska volt, vagy egy macska és több kutya volt.)

– Bármely állat legfeljebb négy képen szerepelt.

Hány fotót készített Dániel bácsi? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen olyan n pozitív egész szám van, amelyre $3n+1$ és $7n+4$ is négyzetszám, valamint $n+7$ prímszám. **7 pont**

Megoldás. Legyen $7n+4=a^2$ és $3n+1=b^2$ (az a és b pozitív egészekre). Az első egyenlet 4-szereséből kivonva a második 9-szeresét, azt kapjuk, hogy

$$4(7n+4)-9(3n+1)=n+7=4a^2-9b^2=(2a-3b)(2a+3b).$$ 2 pont

Mivel a és b pozitív egészek, ezért $2a+3b$ nagyobb 1-nél. Tehát $n+7$ csak akkor lehet prím, ha $2a-3b=1$. Vizsgáljuk ezt az esetet! 2 pont

$2a=3b+1$. Négyzetre emelés után $4a^2=9b^2+6b+1$, majd $4a^2-9b^2=6b+1$ adódik.

Figyelembe véve, hogy $4a^2-9b^2=n+7$, az $n+6=6b$ összefüggést kapjuk. 1 pont

Ezt négyzetre emelve és $b^2=3n+1$-et felhasználva $n^2+12n+36=36b^2=36(3n+1)$, ahonnan ($n\neq 0$ miatt) $n=96$ adódik. 1 pont

Még ellenőriznünk kell, hogy $3n+1$ és $7n+4$ valóban négyzetszám, valamint $n+7$ prímszám-e.

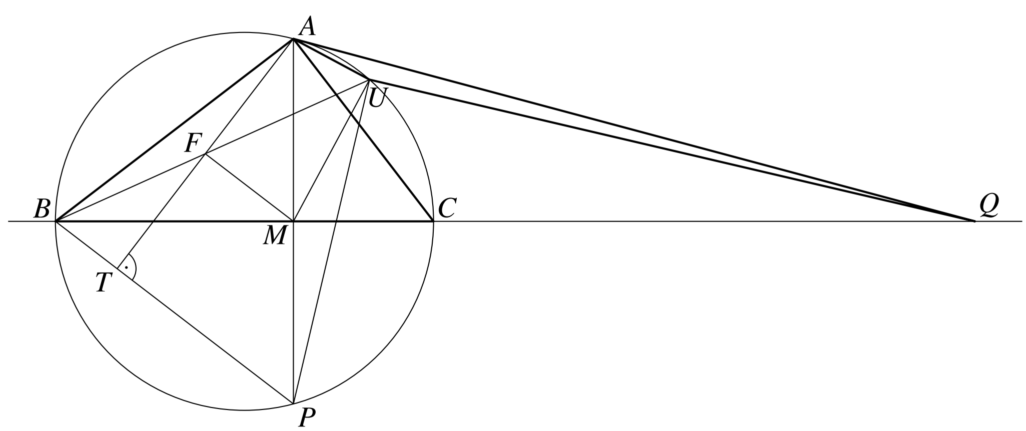
$3n+1=289=17^2$ és $7n+4=676=26^2$, továbbá $n+7=103$, ami prímszám. 1 pont

Azaz valóban $n=96$ az egyetlen megfelelő pozitív egész.

Összesen: **7 pont**

2. Az A-nál derékszögű ABC háromszögben $AB>AC$. Legyen az A pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe P, az A-ból BP-re állított merőleges talppontja T, míg AT szakasz felezőpontját jelölje F. Az ABC háromszög köréírt k köréhez A-ban húzott érintő a BC egyenest Q-ban metszi, míg a BF egyenes és k (B-től különböző) metszéspontja U. Igazoljuk, hogy a BQ egyenes érinti az AUQ háromszög köréírt körét! **7 pont**

1. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát és jelöléseit.



A tükrözéssel kapott P pont rajta van BC szakasz Thalész-körén. FM középvonal ATP háromszögben, és párhuzamos TP-vel, ezért $UFM\sphericalangle = UBP\sphericalangle = UAP\sphericalangle$ (az utóbbi két szög azért egyenlő, mert a Thalész-körben egy ívhez tartozó kerületi szögek). 1 pont

$AFMU$ húrnégyszög, hiszen A-ból és F-ből MU szakasz ugyanakkora szögben látszik.

Az $AFMU$ húrnégyszögben $FAM\sphericalangle = FUM\sphericalangle$. 1 pont

$BAT\sphericalangle = BAP\sphericalangle - TAP\sphericalangle = BUP\sphericalangle - BUM\sphericalangle = MUP\sphericalangle$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi szögek a Thalész-körben, valamint az $AFMU$ húrnégyszög köréírt körében. 1 pont

$ABP\sphericalangle = MAQ\sphericalangle$, mivel az ABC körben a PA íven nyugvó kerületi, illetve érintőszárú kerületi szögek. 1 pont

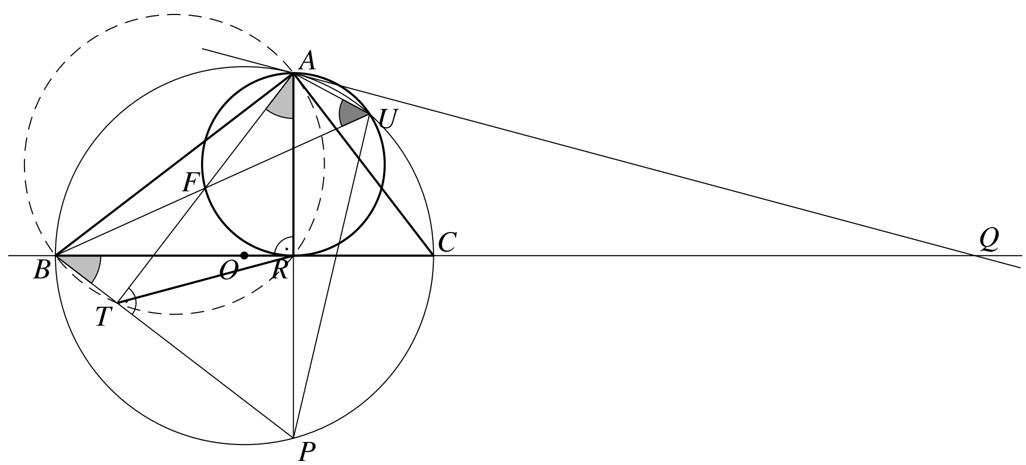
Továbbá a megfelelő derékszögű háromszögekben a szögösszeget, valamint a BQ-ra való szimmetriát felhasználva adódik: $BAT\sphericalangle = 90^\circ - ABT\sphericalangle = 90^\circ - MAQ\sphericalangle = AQM\sphericalangle = PQM\sphericalangle$. 1 pont

De $BAT\sphericalangle = MUP\sphericalangle$, tehát $MUP\sphericalangle = PQM\sphericalangle$. Ebből következően az $MPQU$ négyszög húrnégyszög, emiatt $UQM\sphericalangle = UPM\sphericalangle$, 1 pont

valamint $UPM\sphericalangle = ABU\sphericalangle = UAQ\sphericalangle$. Mivel az $UAQ\sphericalangle$ az UAQ háromszög köré írható körében az UQ ivhez tartozó kerületi szög, mely az előzőek alapján megegyezik $UQM\sphericalangle$-gel, így BQ nem lehet más, csak a AUQ köréírt körének érintője Q-ban. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát! Az új O pont az ABC kör középpontja.



Tekintsük AB Thalész-körét (szaggatott kör). Ez BC egyenesét messe a (B-től különböző) R pontban. Ekkor $BRA\sphericalangle = 90^\circ$, és A, R és P egy egyenesen vannak. $TAR\sphericalangle = TBR\sphericalangle = ABR\sphericalangle = ATR\sphericalangle$ egy húron nyugvó kerületi szögek és a tengelyes tükrözés miatt. Azaz ATR háromszög egyenlőszárú, és $AR = TR$. 2 pont

$AUB\sphericalangle = APB\sphericalangle$, hiszen egy húrhoz tartoznak ABC körén, továbbá $APB\sphericalangle = APT\sphericalangle = ARF\sphericalangle$, hiszen ARF háromszög az APT háromszöghöz hasonló – mivel RF az APT középvonala – azaz $AUF\sphericalangle = ARF\sphericalangle$. 1 pont

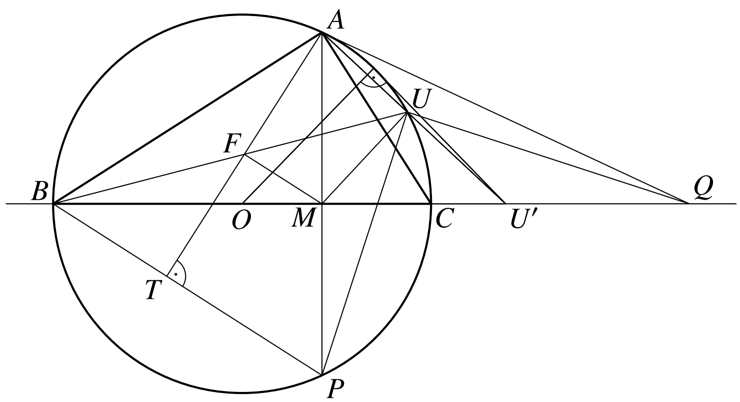
Így A, U, R, F egy körön vannak, és mivel $AFR\sphericalangle = 90^\circ$, ez AR Thalész-köre. Ez a kör BC egyenesét R pontban érinti. 1 pont

Vegyük R pont inverz képét ABC körére. Mivel $OAQ\sphericalangle = 90^\circ$ az OAQ háromszögben OA sugár, valamint AQ érintő, így a befogótétel miatt R inverz képe éppen Q. 2 pont

De akkor (az inverziónál $A' = A$, $U' = U$ és $R' = Q$) $AFRU$ körének inverz képe éppen AUQ köre, és mivel $AFRU$ köre érintette BC egyenesét, az inverze, azaz AUQ köre érinti BC inverzét, azaz BC-t. Pontosan ezt akartuk bizonyítani. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. Használjuk az alábbi ábrát! Jelölje U' a BC egyenes és az AU egyenes metszéspontját.



Belátjuk, hogy U' felezi az MQ szakaszt: ehhez először vegyük észre, hogy az MAQ és a BTA háromszög hasonló, hiszen mindkettő derékszögű, és $MAQ\sphericalangle = PAQ\sphericalangle = PBA\sphericalangle = TBA\sphericalangle$ ahol a középső egyenlőség az érintő szárú kerületi szögek tételéből következik. Ezután azt kell még észrevenni, hogy az $U'AQ\sphericalangle$ és az $FBA\sphericalangle$ szögek is egyenlők (mindkettő az AU íven nyugvó kerületi szög), így AU' is súlyvonal az MAQ háromszögben, azaz U' felezi az MQ szakaszt.

Ezek után az U' pont AUQ körre vonatkozó hatványa alapján az érintéshez elég azt belátni, hogy $U'U \cdot U'A = U'Q^2$ (hiszen ekkor $U'Q$ és így BC egyenese is érinti AUQ körét).

Vegyük fel az MQ szakasz k Thalész körét, ennek középpontja U'. A bizonyítandó állítás azt mondja, hogy az U' pontnak az eredeti körre vonatkozó hatványa megegyezik k sugarának a négyzetvével. Ez viszont ismert módon (és könnyen beláthatóan) azt jelenti, hogy k és az eredeti ABC köré írt kör merőlegesek egymásra (azaz a metszéspontjukat a középpontokkal összekötő sugarak merőlegesek egymásra). Mivel ez szimmetrikus viszony két kör között, elég belátni, hogy O-nak a k-ra vonatkozó hatványa egyenlő az eredeti kör sugarának a négyzetével, azaz $OM \cdot OQ = OA^2$.

Ez pedig azonnal következik az OAQ derékszögű háromszögre felírt befogó-tételből. Ezzel készen vagyunk.

3. Dániel bácsinak 6 kutyája és 6 macskája van. Mivel Dániel bácsi szeret fotózni, az állatairól készített néhány fényképet. A képek előhívása után a következőket vette észre.

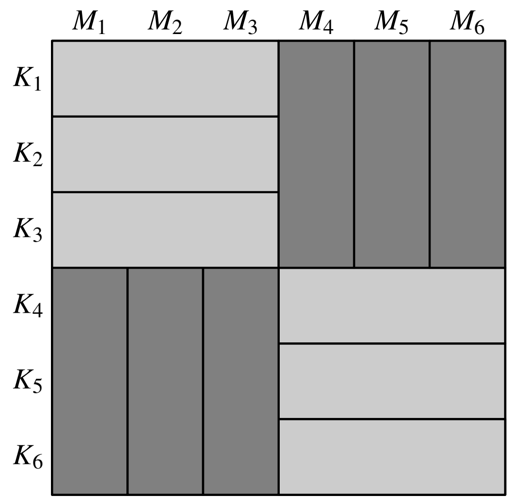
– Mind a 36 lehetséges kutya-macska párosra volt olyan kép, amelyen ez a két állat (esetleg más állatokkal együtt) egy képen szerepelt.

– Egyetlen képen sem szerepelt mindkét fajta állatból egyszerre több. (Az előfordulhatott, hogy egy képen egy kutya és több macska volt, vagy egy macska és több kutya volt.)

– Bármely állat legfeljebb négy képen szerepelt.

Hány fotót készített Dániel bácsi? **7 pont**

Megoldás. Megmutatjuk, hogy 12 fotó elkészíthető a feltételek szerint, de semmilyen más számú fotó nem. A „konstrukció” az alábbi ábrán látható:



Egy-egy téglalap „jelent” egy-egy fényképet. A téglalap sora(i) mellett lévő K_i bejegyzések jelentik, hogy mely kutyák, és az oszlopa(i) felett lévő M_i bejegyzések, mely macskák szerepelnek az adott fotón. Például a K_2 kutya mellett lévő, világosszürkével jelölt fotón a második kutyus, és az első három macska szerepel.

Megjegyzés. Valamilyen jó konstrukcióért – 2 pont

Világos, hogy a megadott konstrukció (12 fényképpel) teljesíti a feladat feltételeit. Most megmutatjuk, hogy más mennyiségű fénykép nem készülhetett (sem több, sem kevesebb).

Hasonlóan az ábránkhoz vegyünk fel egy 6×6-os táblázatot. A táblázat i-edik oszlopa az i-edik macskát, j-edik sora a j-edik kutyát fogja jelenteni. A táblázat minden mezőjét egyértelműen ki fogjuk színezni két szín (sötétszürke vagy világosszürke) valamelyikével a következő módon:

– Legyenek a fotók az állatokról f_1; f_2; $\ldots$; f_n.

– Keressük meg az első sorszámú olyan f_k fotót (lehet több fotó is, azok közül az elsőt választjuk az egyértelműség miatt), amelyiken egyszerre szerepel az i-edik macska és a j-edik kutya.

Megjegyzés. Valamilyen hasonló táblázatos vagy gráfos modellért – 1 pont

– Ha ezen a fotón több macska van, mint kutya, akkor a táblázat $t_{i,j}$ (i-edik oszlop/j-edik sor) mezőjét színezzük világos szürkére.

– Ha pedig ezen a fotón legalább annyi kutya van, mint macska, akkor a táblázat $t_{i,j}$ mezőjét színezzük sötét szürkére.

Ez a színezés egyértelmű (adott fotósorozat esetén), és minden mezőt kiszínez. 1 pont

Nézzük meg, hogy a teljes táblázat 36 mezője közül mennyi lehet világosszürke. Az i-edik oszlopban legfeljebb 3 világosszürke mező lehet, mert az ezeket jelentő fotókon megfelelő j-edik kutya „magányos” (a többi állat a fotón cica). Ha háromnál több ilyen fotó lenne, akkor egyszerre nem lehetne igaz az, hogy az i-edik macskának van mind a hat kutyával közös fotója, illetve az, hogy az i-edik macskának legfeljebb 4 fotója van. Azaz az i-edik oszlopban (bármely i-re) legfeljebb 3 világosszürke mező lehet. 1 pont

Így a teljes táblázat összesen 6 oszlopában legfeljebb 18 világosszürke mező lehet. Teljesen hasonlóan minden sorban legfeljebb 3 sötétszürke mező lehet, és így a táblázatban legfeljebb 18 sötétszürke mező lehet. Mivel a táblázat mind a 36 mezőjét kiszínezzük (egy megfelelő fotósorozat esetén) ez csak úgy lehet, hogy minden sorban/oszlopban pontosan 3 sötétszürke és 3 világosszürke mező van. 1 pont

Vizsgáljuk valamely, mondjuk az i-edik oszlopot. Mivel ebben 3 világosszürke mező van, van három olyan fénykép, ahol az i-edik macska egy-egy magányos kutyával (és néhány másik macskával van lefényképezve). Emiatt viszont – mivel minden állat legfeljebb 4 képen szerepel – a maradék három kutyával az i-edik macskának egy csoportképre kell kerülnie („magányos cicaként”).

Ez minden sor és minden oszlop esetén elmondható, azaz bármely állathoz lesz pontosan egy olyan fotó, ahol ő magányos. Rendeljük az adott állathoz ezt a fotót. (A példánknál a a K_2 címke melletti, világosszürke téglalappal jelölt fotót a 2-es kutyához rendeljük). Ezzel egy bijekciót létesítettünk az állatok és a fotók között. Így a fotók száma pontosan 12. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás – Keresztély Zsófia dolgozata alapján. Jelöljük a fotók számát n-nel, és legyen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ az egyes fotókon szereplő állatok száma. Mivel minden állat legfeljebb 4 képen szerepelt: $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq 48$.

Amennyiben az i-edik fotón kutya és macska is szerepelt, az ezen a képen szereplő kutya-macska párosok száma: $k_i - 1$, míg ha a fotón csak egyfajta állat (vagy csak kutya, vagy csak macska) szerepel a kutya-macska párosok száma 0. Ezek alapján az összes fotón szereplő kutya-macska párosok száma legfeljebb $\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - n$. (Ennyi páros pontosan akkor valósul meg, ha minden képen szerepel kutya és macska is.)

Másfelől a fotózott párok száma legalább $6 \cdot 6 = 36$ (hiszen minden kutya-macska pároshoz van közös kép). Ezek alapján

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - n \geq \text{a fotókon szereplő kutya-macska párok száma} \geq 36.$$

A korábbiak miatt $48 - n = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) - n \geq 36$ és innen $12 \geq n$ adódik. Azaz legfeljebb 12 fotó készült.

Megmutatjuk azt is, hogy legalább 12 fotó készült. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy legfeljebb 11 fotó készült. Ekkor legfeljebb 11 állatra lehet igaz, hogy van olyan fotó, ahol ő (magányos állatként) több másik fajtájú állattal együtt szerepel, azaz van legalább egy olyan állat, amely minden róla készült képen legfeljebb egy más fajtájú állattal van. Ehhez viszont az adott állatról – a feltételek alapján – legalább 6 fotónak kellene készülnie, ami ellentmondás. Azaz legalább 12 fotó készült.

A két részt összevetve pontosan 12 fotó készült. Pontosan 12 fotó viszont készülhetett, ezt az első megoldásban megmutatott konstrukció igazolja.