Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2021/2022-es tanév

Kezdők és Haladók I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

A verseny a Miniszterelnökség, a Nemzeti Tehetség Program és az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával az NTP-TMV-M-21-B-0009 azonosító számú pályázat alapján valósul meg.

MINISZTERELNÖKSÉG

Nemzeti Tehetség Program

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy téglalap oldalai 17 és 32 cm hosszúak. Két szemközti oldalát négyszer annyival változtattuk meg, mint a másik kettőt, s így négyzetet kaptunk. Milyen hosszú a négyzet oldala? **6 pont**

2. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely csak 2-es és 3-as számjegyeket tartalmaz, és osztható 132-vel! **6 pont**

3. Egy kalapba tíz cédulát teszünk, amelyeken az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 számok szerepelnek. Egyszerre két cédulát húzunk ki.

– Béla nyer, ha a két szám szorzata nagyobb, mint 30.
– Dezső nyer, ha a nagyobb számot a kisebbel osztva az eredmény egész.
– Frigyes nyer, ha a két szám összege prím.

a) Kinek van nagyobb esélye nyerni?
b) Nyerhetnek-e egyszerre mind a hárman?
c) Hányféle esetben nyernek pontosan ketten?
d) Hányféle esetben nem nyer senki? **6 pont**

4. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalain rendre kijelölünk olyan E és F pontokat, amelyekre $AB+BE=AD+DF$. Igazoljuk, hogy a $DAB\sphericalangle$ szögfelezője merőleges az EF egyenesre. **6 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy téglalap oldalai 17 és 32 cm hosszúak. Két szemközti oldalát négyszer annyival változtattuk meg, mint a másik kettőt, s így négyzetet kaptunk. Milyen hosszú a négyzet oldala? **6 pont**

Megoldás. Egyik oldalát x-szel, a másikat $4x$-szel változtatjuk.

Ha mindkettőt növeljük, akkor $32+x=17+4x$, ahonnan $x=5$. Ekkor a négyzet oldala 37 cm. 2 pont

Ha mindkettőt csökkentjük, akkor $32-4x=17-x$, azaz $x=5$. Ekkor a négyzet oldala 12 cm. 2 pont

Ha az egyiket csökkentjük, a másikat növeljük, akkor két eset van:

$32-x=17+4x$, ahonnan $x=3$. Ekkor a négyzet oldala 29 cm. 1 pont

Illetve $32-4x=17+x$, ahonnan $x=3$. Ekkor a négyzet oldala 20 cm. 1 pont

Tehát a négyzet oldala négyféle lehet, 12, 20, 29 vagy 37 cm.

Összesen: **6 pont**

2. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely csak 2-es és 3-as számjegyeket tartalmaz, és osztható 132-vel! **6 pont**

Megoldás. $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, ezért a számnak oszthatónak kell lennie 4-gyel, 3-mal és 11-gyel.

I. osztható 4-gyel, tehát a szám 32-re végződik.

II. osztható 3-mal, tehát akárhány 3-as és $3k$ darab (3-mal osztható darabszámú) 2-es szerepel a keresett számban.

III. osztható 11-gyel, elosztjuk 11-gyel, vagy a váltakozó előjelű összeget vizsgáljuk. 2 pont

A keresett szám sem kétjegyű, sem háromjegyű nem lehet, mert az I. és a II. feltétel egyszerre nem teljesíthető. 1 pont

Ha négyjegyű, akkor az I. és a II. feltételt a 2232 teljesíti, de ez nem osztható 11-gyel. 1 pont

Az I. és a II. feltételt teljesítő ötjegyű számok: 22 332; 23 232, 32 232, de ezek közül 11-gyel csak a 23 232 osztható. 1 pont

Tehát a keresett legkisebb pozitív egész szám a 23 232. 1 pont

Összesen: 6 pont

3. Egy kalapba tíz cédulát teszünk, amelyeken az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 számok szerepelnek. Egyszerre két cédulát húzunk ki.

– Béla nyer, ha a két szám szorzata nagyobb, mint 30.

– Dezső nyer, ha a nagyobb számot a kisebbel osztva az eredmény egész.

– Frigyes nyer, ha a két szám összege prím.

a) Kinek van nagyobb esélye nyerni?
b) Nyerhetnek-e egyszerre mind a hárman?
c) Hányféle esetben nyernek pontosan ketten?
d) Hányféle esetben nem nyer senki? **6 pont**

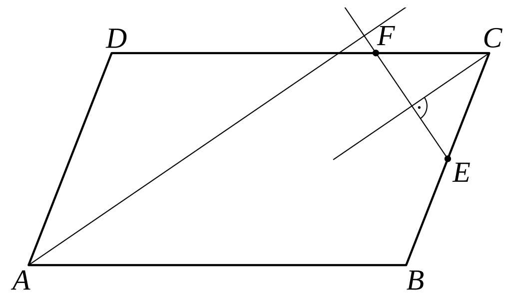
Megoldás. *a)* Béla nyer
4-8, 4-9, 4-10, 5-7, 5-8, 5-9, 5-10, 6-7, 6-8, 6-9, 6-10, 7-8, 7-9, 7-10, 8-9, 8-10, 9-10 esetén, azaz 17-féle esetben. 1 pont
Dezső nyer
1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8, 1-9, 1-10, 2-4, 2-6, 2-8, 2-10, 3-6, 3-9, 4-8, 5-10 esetén, azaz 17-féle esetben.
Frigyes nyer
1-2, 1-4, 1-6, 1-10, 2-3, 2-5, 2-9, 3-4, 3-8, 3-10, 4-7, 4-9 5-6, 5-8, 6-7 7-10, 8-9, 9-10 esetén, azaz 18-féle esetben. 1 pont
Tehát Frigyes nyerési esélye a legnagyobb. 1 pont
b) Egyszerre mindhárman nem nyerhetnek. 1 pont
c) B és D nyer: 4-8, 5-10 esetén
B és F nyer: 4-9, 5-8, 6-7, 7-10, 8-9, 9-10 esetén
D és F nyer: 1-2, 1-4, 1-6, 1-10 esetén.
Tehát 12-féle esetben nyernek pontosan ketten. 1 pont
d) Az összes esetek száma $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$.
A logikai szitát alkalmazva: $45 - (17 + 17 + 18) + 12 = 5$.
5-féle esetben nem nyer senki. 1 pont

2. megoldás a *d)* részre. Nem nyer senki 2-7, 3-5, 3-7, 4-5, 4-6 esetben, azaz 5-féle esetben.

Összesen: **6 pont**

4. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalain rendre kijelölünk olyan E és F pontokat, amelyekre $AB+BE=AD+DF$. Igazoljuk, hogy a $DAB\sphericalangle$ szögfelezője merőleges az EF egyenesre. **6 pont**

Megoldás. $AB+BC=AD+DC$;



$AB+BE+EC=AD+DF+FC$. 1 pont

Így a feladat feltétele alapján $EC=FC$. 1 pont

Az FEC egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője egyben az $ABCD$ paralelogramma C csúcsbeli szögfelezője is, 1 pont

amely merőleges az EF alapra. 1 pont

A paralelogramma szemközti szögfelezői párhuzamosak egymással. 1 pont

Így ha az EF egyenes merőleges közülük az egyikre, akkor merőleges a másikra is. 1 pont

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Összesen: **6 pont**

Kezdők I–II. kategória 2. és III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Négyzetszám-e a $2^{222}+3^{333}+4^{444}+5^{555}$? Válaszodat indokold! **6 pont**

2. *a)* Egy 3×3-as négyzet mezőit kiszínezzük a piros, kék, zöld színek valamelyikével az alábbi feltételek szerint:

– az egyik sor mezői egyszínűek,

– egy másik sor kis négyzetei kétféle színnel vannak színezve,

– a harmadikféle sor mezői páronként különböző színűek.

Hányféleképpen valósítható meg a feltételeknek megfelelő színezés?

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat beírjuk egy 3×3-as négyzet egy-egy mezőjébe úgy, hogy bármely két szomszédos szám szomszédos (közös éllel rendelkező) négyzetbe kerüljön. A négy sarokmezőbe kerülő számok összege 18. Melyik szám kerül középre? **8 pont**

3. Megrajzoljuk egy a, b oldalú paralelogramma minden külső szögfelezőjét.

Milyen sokszöget zárnak közre? Határozzuk meg a keletkezett sokszög átlóinak hosszát! **8 pont**

4. Egy konvex $(2n+2)$-szögben berajzolunk n^2 darab átlót. Bizonyítsuk be, hogy a behúzott átlók között lesz olyan, amelyik két páratlan oldalszámú sokszögre vágja szét az eredeti sokszöget. **8 pont**

5. Mi az a racionális szám, amely egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{3}{2^{2020}}+\frac{2}{2^{2021}}$$ **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Négyzetszám-e a $2^{222}+3^{333}+4^{444}+5^{555}$? Válaszodat indokold! **6 pont**

Megoldás.

A 2 hatványainak végződései rendre 2; 4; 8; 6, ez a négy számjegy ismétlődik. 222 4-gyel osztva 2-t ad maradékul, így a 222. hatvány végződése megegyezik a 2. hatvány végződésével, azaz 4. 1 pont

A 3 hatványainak végződései rendre 3; 9; 7; 1, itt is négy számjegy ismétlődik. 333 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, így a 333. hatvány végződése megegyezik az 1. hatvány végződésével, azaz 3. 1 pont

A 4 hatványainak végződései felváltva 4 és 6, mivel a 444 páros szám, ezért a 444. hatvány végződése 6. 1 pont

Az 5 minden hatványa 5-re végződik. 1 pont

$4+3+6+5=18$, tehát a feladatban szereplő összeg 8-ra végződik. 1 pont

A négyzetszámok végződése csak 0; 1; 4; 9; 6; 5 lehet, így $2^{222}+3^{333}+4^{444}+5^{555}$ biztosan nem négyzetszám. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. *a)* Egy 3×3-as négyzet mezőit kiszínezzük a piros, kék, zöld színek valamelyikével az alábbi feltételek szerint:

– az egyik sor mezői egyszínűek,

– egy másik sor kis négyzetei kétféle színnel vannak színezve,

– a harmadikféle sor mezői páronként különböző színűek.

Hányféleképpen valósítható meg a feltételeknek megfelelő színezés?

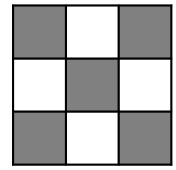
b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat beírjuk egy 3×3-as négyzet egy-egy mezőjébe úgy, hogy bármely két szomszédos szám szomszédos (közös éllel rendelkező) négyzetbe kerüljön. A négy sarokmezőbe kerülő számok összege 18. Melyik szám kerül középre? **8 pont**

Megoldás.

a) Az egyszínű sor mezőinek színezése 3-féleképpen, a kétszínűé $3\cdot2\cdot3=18$-féleképpen, a háromszínűé 6-féleképpen történhet. 1 pont

A kiszínezett sorok 6-féleképpen rendezhetők a táblán sorba. 1 pont

Így a feltételeknek megfelelő esetek száma: $3\cdot18\cdot6\cdot6=1944$. 1 pont *b)* Színezzük ki a 3×3-as négyzet mezőit az ábra szerint.



Mivel bármely két szomszédos szám szomszédos (közös éllel rendelkező) négyzetbe kerül, és a táblára kerülő számok között 5 páratlan és 4 páros van, ezért a páratlan számok kerülnek a fekete, a páros számok pedig a fehér kis négyzetekbe. 2 pont

A páratlan számok összege: $1+3+5+7+9=25$. 1 pont

Ha a négy sötét sarokmezőbe kerülő számok összege 18, akkor középen csak a 7-es állhat. 1 pont

A mellékelt alábbi ábra egy lehetséges kitöltést mutat be. 1 pont

1	2	3
8	7	4
9	6	5

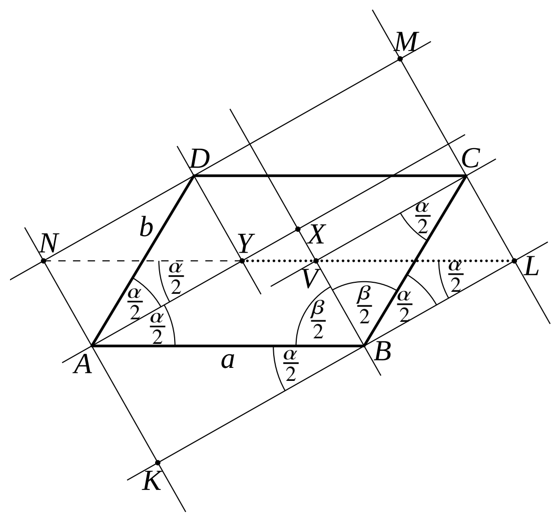
Összesen: **8 pont**

3. Megrajzoljuk egy a, b oldalú paralelogramma minden külső szögfelezőjét.

Milyen sokszöget zárnak közre? Határozzuk meg a keletkezett sokszög átlóinak hosszát! **8 pont**

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit: $a=AB=CD$, $b=BC=DA$. $DAB\sphericalangle=\alpha$, $ABC\sphericalangle=\beta$.

Húzzuk be a paralelogramma összes belső és külső szögfelezőjét.



A négy külső szögfelező négyszöget zár közre. Ennek csúcsait K, L, M és N jelöli.

Mivel $\alpha+\beta=180°$, $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=90°$, ezért bármely két szomszédos csúcsból induló belső szögfelező derékszöget zár be. 1 pont

A külső szögfelezők viszont merőlegesek az ugyanahhoz a csúcshoz tartozó belső szögfelezőre, amiből következik, hogy a paralelogramma tetszőleges belső/külső szögfelezőpárja merőleges vagy párhuzamos. 1 pont

Tehát a $KLMN$ négyszögnek négy derékszöge van, vagyis téglalap; az átlói egyenlő hosszúak. 1 pont

Tegyük fel, hogy az A-ból és D-ből húzott belső szögfelezők metszéspontja (Y) illeszkedik a $KLMN$ téglalap NL átlójára. Ezt majd később igazoljuk.

$NY=AD=b$, mert NY és AD az $AYDN$ téglalap átlója. 1 pont

Az ábra középpontos szimmetriája folytán $ND \#\, BL$ (párhuzamos és egyenlő), viszont az $AYDN$ téglalapban $AY \#\, ND$, vagyis $AY \#\, BL$, ezért az $ABLY$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Tehát $AB \#\, YL$, azaz $YL=a$, vagyis a téglalap átlói hossza $NY+YL=b+a$. 1 pont

Be kell még látnunk, hogy N, Y és L valóban egy egyenesbe esnek. Mivel az NAY és az AKB derékszögű háromszögek szögei egyenlőek, két oldalpárjuk (NA és AK, illetve AY és KB) párhuzamos, azaz ugyanolyan állású, a háromszögek ugyanolyan körüljárásúak, ezért a harmadik oldaluk, NY, illetve AB is párhuzamos. Ez azt jelenti, hogy NY és YL is párhuzamos AB-vel, így a közös végpont miatt Y illeszkedik az NL átlóra. 2 pont

Összesen: **8 pont**

4. Egy konvex $(2n+2)$-szögben berajzolunk n^2 darab átlót. Bizonyítsuk be, hogy a behúzott átlók között lesz olyan, amelyik két páratlan oldalszámú sokszögre vágja szét az eredeti sokszöget. **8 pont**

Megoldás. Jelöljük az eredeti konvex sokszög csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+2}$-vel.

Határozzuk meg azon berajzolható átlók számát, amelyek a sokszöget nem két páratlan oldalszámú részsokszögre osztják fel. Az ilyen átlók két nem szomszédos páros és páratlan sorszámú csúcsot kötnek össze. 2 pont

Az ilyen típusú átlók páratlan sorszámú végpontjai $(n+1)$-féleképpen jelölhetők ki. 1 pont

Ezzel a ponttal két páros sorszámú csúcsa szomszédos az eredeti sokszögnek, így az átló másik végpontja $(n-1)$-féleképpen adható meg. 2 pont

Így a feladat feltételének nem megfelelő átlók száma $(n+1)(n-1) = n^2-1$. 1 pont

Mivel $n^2-1 < n^2$, ezért a berajzolt átlók között biztosan lesz olyan is, amely két páros vagy két páratlan indexű csúcsot köt össze, és így két páratlan oldalszámú sokszögre bontja az eredeti sokszöget. 2 pont

Összesen: **8 pont**

5. Mi az a racionális szám, amely egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{3}{2^{2020}}+\frac{2}{2^{2021}}$$ **10 pont**

1. megoldás.

$$\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots\frac{5}{2^{2018}}+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{3}{2^{2020}}+\frac{2}{2^{2021}}=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{4}{2^{2019}}+\left(\frac{3}{2^{2020}}+\frac{1}{2^{2020}}\right)=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{4}{2^{2019}}+\frac{4}{2^{2020}}=$$ 2 pont

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\left(\frac{4}{2^{2019}}+\frac{2}{2^{2019}}\right)=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{6}{2^{2019}}=$$ 2 pont

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2^{2018}}+\frac{3}{2^{2018}}=\ldots=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{k}{2^{2023-k}}+\frac{k-2}{2^{2023-k}}=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\left(\frac{k}{2^{2023-k}}+\frac{k-2}{2^{2023-k}}\right)=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{2k-2}{2^{2023-k}}=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{k-1}{2^{2022-k}}=$$

$$=\frac{2022}{2}+\frac{2021}{2^2}+\frac{2020}{2^3}+\ldots+\frac{k-1}{2^{2023-(k-1)}}=\ldots=$$ 3* pont

$$= \frac{2022}{2} + \frac{2021}{2^2} + \left(\frac{2020}{2^3} + \frac{2018}{2^3}\right) = \frac{2022}{2} + \frac{2021}{2^2} + \frac{4038}{2^3} =$$ 1 pont

$$= \frac{2022}{2} + \left(\frac{2021}{2^2} + \frac{2019}{2^2}\right) = \frac{2022}{2} + \frac{4040}{2^2} = \frac{2022}{2} + \frac{2020}{2} = \frac{4042}{2} = 2021$$

Tehát a kifejezés értéke 2021. 2 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzés. A * rész valamilyen indoklása szükséges.

2. megoldás.

Segédállítás: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Bizonyítása például teljes indukcióval vagy 2-es számrendszerbeli felírással vagy számegyenesen történő ábrázolással történhet. 3 pont

$$\frac{2022}{2} + \frac{2021}{2^2} + \frac{2020}{2^3} + \ldots + \frac{4}{2^{2019}} + \frac{3}{2^{2020}} + \frac{2}{2^{2021}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2021}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2021}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2020}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2019}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right) =$$ 3 pont

a segédállítás alapján a zárójelek a következő alakban is írhatóak:

$$= 1 - \frac{1}{2^{2021}} + 1 - \frac{1}{2^{2021}} + 1 - \frac{1}{2^{2020}} + 1 - \frac{1}{2^{2019}} + \ldots 1 - \frac{1}{2} =$$

$$= 2022 \cdot 1 - \frac{1}{2^{2021}} - \left(\frac{1}{2^{2021}} + \frac{1}{2^{2020}} + \frac{1}{2^{2019}} - \ldots \frac{1}{2}\right) =$$ 2 pont

ismét a segédtétel alapján:

$$= 2022 - \frac{1}{2^{2021}} - \left(1 - \frac{1}{2^{2021}}\right) = 2021.$$

Tehát a kifejezés értéke 2021. 2 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adjuk meg azokat a p, q pozitív prímszámokat és n pozitív egészt, amelyekre

$$n^2 + 1 = (p^2 + 1)(q^2 + 1).$$ **10 pont**

2. Egy vacsorán a házigazdán kívül $2n$ személy vesz részt (n pozitív egész szám). A házigazda a vacsora végén megkérdezi minden vendégtől, hogy hány emberrel koccintott a jelenlévők közül. Mindenki különböző választ ad. Hány vendéggel koccintott a házigazda? **10 pont**

3. A hegyesszögű ABC háromszögben a BC oldal felezőpontja F, a B csúcshoz tartozó belső szögfelező az E pontban metszi a CA oldalt, a C csúcshoz tartozó magasság talppontja D. Az így kapott DEF háromszög minden oldala 5 egység hosszúságú. Mekkora az ABC háromszög területének pontos értéke? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Adjuk meg azokat a p, q pozitív prímszámokat és n pozitív egészt, amelyekre

$$n^2+1=(p^2+1)(q^2+1).$$

10 pont

Megoldás. Ha p és q is páratlan prímek, akkor p^2+1 és q^2+1 is páros, ezért a szorzatuk 4-gyel osztható. 1 pont

Ahhoz, hogy az egyenlőség valamilyen n pozitív egészre fennálljon, n szükségképpen páratlan kell, hogy legyen. Ha $n=2k-1$ alakú valamilyen k pozitív egész számra, akkor $n^2+1= =4k^2-4k+2$, vagyis az n^2+1 alakú szám 4-gyel osztva 2 maradékot ad, azaz nem lehet 4-gyel osztható. 1 pont

A p és q prímek közül tehát legalább az egyik páros.

Ha $p=q=2$, akkor $n^2+1=25$, amiből n értéke nem egész szám, hiszen a 24 nem négyzetszám. 1 pont

Tehát a p és q prímek közül pontosan az egyik páros, az egyenlet szimmetriája miatt feltehető, hogy $p=2$, így $q\geqslant 3$. 1 pont

Ebből következik, hogy $n^2+1\geqslant 50$, tehát $n\geqslant 7$. 1 pont

Az $n^2+1=5(q^2+1)$ egyenletet rendezve $n^2-4=5q^2$, vagyis $(n-2)(n+2)=5q^2$. 1 pont

Az $n-2$ és $n+2$ tényezők lehetséges értékeit az $5q^2$ szorzat összes lehetséges felbontása (az egészek körében) adja. Figyelembe véve, hogy $5\leqslant n-2<n+2$, az $n-2$ kifejezésre a következő lehetőségek adódnak: $n-2=5$, illetve $n-2=q$. 1 pont

Ha $n-2=5$, akkor $n+2=9$, a $45=5q^2$ egyenletből $q=3$ páratlan prím, ez megoldása a feladatnak. 1 pont

Ha $n-2=q$, akkor az $n+2=q+4=5q$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Tehát a $p=2$, $q=3$, $n=7$ számhármas, valamint a p és q értékének felcserélésével nyert $p=3$, $q=2$, $n=7$ számhármas adják az egyenlet összes megoldását: $7^2+1=50=5\cdot 10$ valóban fennáll. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Az utolsó 8 pontra:

A p és q prímek közül tehát legalább az egyik páros.

Ekkor $n^2+1=5(q^2+1)$, ahonnan $n^2-4=5q^2$, vagyis $(n-2)(n+2)=5q^2$. 1 pont

Az $n-2$ és $n+2$ tényezők lehetséges értékeit az $5q^2$ szorzat összes lehetséges felbontása (az egészek körében) adja. Figyelembe véve, hogy $-1 \leqslant n-2 < n+2$, az $n-2$ kifejezésre a következő lehetőségek adódnak: $n-2=-1$; 1; 5; q; q^2. 1 pont

Ha $n-2=-1$, akkor $n+2=3$, a $3=-5q^2$ egyenletből q nem valós. 1 pont

Ha $n-2=1$, akkor $n+2=5$, az $5=5q^2$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Ha $n-2=5$, akkor $n+2=9$, a $9=q^2$ egyenletből $q=3$ prím, ez megoldása a feladatnak. 1 pont

Ha $n-2=q$, akkor $n+2=q+4$, a $q+4=5q$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Végül ha $n-2=q^2$, akkor $n+2=q^2+4$, a $q^2+4=5$ egyenletből $q=1$ nem prím. 1 pont

Tehát a $p=2$, $q=3$, $n=7$ számhármas, valamint a p és q értékének felcserélésével nyert $p=3$, $q=2$, $n=7$ számhármas adják az egyenlet összes megoldását: $7^2+1=50=5\cdot 10$ valóban fennáll. 1 pont

2. Egy vacsorán a házigazdán kívül $2n$ személy vesz részt (n pozitív egész szám). A házigazda a vacsora végén megkérdezi minden vendégtől, hogy hány emberrel koccintott a jelenlévők közül. Mindenki különböző választ ad. Hány vendéggel koccintott a házigazda? **10 pont**

Megoldás. A lehetséges válaszok, amit a házigazda kaphatott: 0, 1, 2, 3, …, $2n$. 1 pont

Ezek közül a 0 és $2n$ nem szerepelhet egyszerre, hiszen ha volt valaki, aki senkivel sem koccintott, akkor nem lehetett olyan személy, aki mindenkivel koccintott. 1 pont

Így tehát a $2n$ különböző válasz 0, 1, 2, 3,…, $2n-1$ vagy 1, 2, 3, 4,…, $2n$ lehetett. Vizsgáljuk meg mindkét esetet! 1 pont

1. eset: A válaszok 0, 1, 2, 3,…, $2n-1$. Legyenek a válaszadók rendre $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}$.

A_0 senkivel sem koccintott. A_{2n-1} A_0-n kívül mindenkivel koccintott. „Vegyük ki” A_0-t, A_{2n-1}-et és a már ismert koccintásokat: ekkor az marad, hogy A_1 0, A_2 1, …, A_{2n-2} $2n-3$ emberrel koccintott. Most pontosan ugyanazt mondhatjuk el A_1-ről és A_{2n-2}-ről, mint az előbb A_0-ról és A_{2n-1}-ről, azaz, hogy A_{2n-2} mindenkivel koccintott A_1-en (és A_0-n kívül) és A_1 (A_{2n-1}-en kívül) senkivel sem koccintott. Eljárásunkat folytatva eljutunk oda, hogy már csak A_{n-1} és A_n koccintásait kell vizsgálnunk: A_{n-1} 0, A_n 1 személlyel koccintott a megmaradó emberek közül. Ez utóbbi csak a házigazda lehetett, azaz ő összesen n személlyel koccintott: A_n, A_{n+1}, …, A_{2n-1}-gyel. 3 pont

2. eset: A válaszok 1, 2, 3,…, $2n$. Legyenek a válaszadók rendre $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$.

A_{2n} mindenkivel koccintott. A_1 egyetlen koccintása tehát vele történt. „Vegyük ki” A_1-t, A_{2n}-et, és a már ismert koccintásokat: ekkor az marad, hogy A_2 1, A_2 2, …, A_{2n-1} $2n-1$ emberrel koccintott. Most pontosan ugyanazt mondhatjuk el A_2-ről és A_{2n-1}-ről, mint az előbb A_1-ről és A_{2n}-ről, azaz, hogy A_{2n-1} mindenkivel koccintott (A_1-en kívül) és A_2 csak A_{2n-1}-gyel (és A_{2n}-nel) koccintott. Eljárásunkat folytatva eljutunk oda, hogy már csak A_n és A_{n+1} koccintásait kell vizsgálnunk: A_n 1, A_{n+1} 2 személlyel koccintott a megmaradó emberek közül. Ez csak úgy lehet, hogy A_n csak A_{n+1}-gyel, A_{n+1} vele és a házigazdával koccintott. A házigazda így összesen összesen n személlyel koccintott: $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$-nel. 3 pont

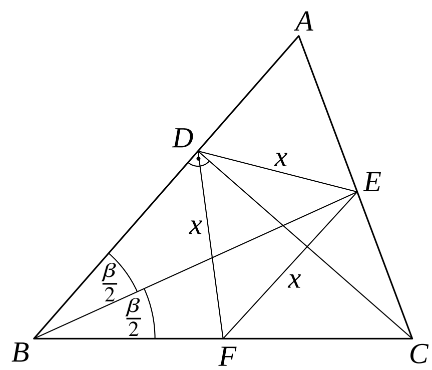
Mindkét esetben ugyanazt kaptuk, tehát a házigazda biztosan n emberrel koccintott. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzések. 1. Az utolsó pont csak akkor jár, ha mindkét esetet vizsgálta. 2. Ha a versenyző egy konkrét n érték esetén helyesen leírja a fenti gondolatmenetet, de nem általánosít, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

3. A hegyesszögű ABC háromszögben a BC oldal felezőpontja F, a B csúcshoz tartozó belső szögfelező az E pontban metszi a CA oldalt, a C csúcshoz tartozó magasság talppontja D. Az így kapott DEF háromszög minden oldala 5 egység hosszúságú. Mekkora az ABC háromszög területének pontos értéke? **10 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát! Jelöljük a DEF szabályos háromszög oldalait x-szel, az $ABC\sphericalangle$-et β-val. 1 pont



Belátjuk, hogy ha a DEF háromszög szabályos, akkor az ABC háromszög is szabályos. 1 pont

A BCD derékszögű háromszögben a Thalész-tétel megfordítása alapján a körülírt kör középpontja a BC oldal F felezőpontja, $FB = FC = DF = x$, azaz $BC = 2x$. 1 pont

Mivel $FE = x$, F a BCE háromszög körülírt körének is a középpontja. Tehát ez a háromszög a Thalész-tétel értelmében derékszögű, azaz $CEB\sphericalangle = 90^\circ$. 1 pont

Mivel BE felezi az $ABC\sphericalangle$-et, ezért $CEB\triangle \cong AEB\triangle$ (a BE oldal közös, és a rajta fekvő két szög – $\frac{\beta}{2}$, 90° – nagysága is megegyezik). 1 pont

Az egybevágóság alapján E felezőpontja a CA oldalnak és $BA = BC = 2x$. 1 pont

A CAD derékszögű háromszögben a Thalész-tétel megfordítása alapján a körülírt kör középpontja a CA oldal E felezőpontja, $EC = EA = ED = x$, azaz $CA = 2x$. 1 pont

Összegezve korábbi megállapításainkat $AB = BC = CA = 2x$, azaz az ABC háromszög szabályos. 1 pont

Az ABC szabályos háromszög oldala tehát $2x = 10$ egység, így területe: $T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^2 = 25\sqrt{3}$ területegység. 2 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. H olyan pozitív egész számokból álló halmaz, amelynek az elemeire érvényesek az alábbi feltételek:

(1) $2021 \in H$,

(2) ha $n \in H$, akkor n összes pozitív osztója is eleme H-nak,

(3) bármely $k, m \in H$, $1 < k < m$ esetén $km + 1 \in H$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \subseteq H$.

b) Adjuk meg a $H \cap \mathbf{N}^+$ halmazt. **10 pont**

2. A huszárok díszszemléjén m sorban és n oszlopban vonulnak a katonák. Tudjuk, hogy minden sor és oszlop teljes, valamint hogy m és n is legalább 3. Parancsra a huszárok megállnak, és kardjuk összeérintésével üdvözlik a velük oldalról vagy átlósan szomszédos huszártársaikat. Hány huszár vonult fel a díszszemlén, ha így összesen 789 kardcsörrenést lehetett hallani? **10 pont**

3. Az $ABCDEF$ konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsd be, hogy az ACE és BDF háromszögek területe egyenlő. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. H olyan pozitív egész számokból álló halmaz, amelynek az elemeire érvényesek az alábbi feltételek:

(1) $2021 \in H$,

(2) ha $n \in H$, akkor n összes pozitív osztója is eleme H-nak,

(3) bármely $k, m \in H$, $1 < k < m$ esetén $km + 1 \in H$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \subseteq H$.

b) Adjuk meg a $H \cap \mathbf{N}^+$ halmazt. **10 pont**

Megoldás.

a)	(1)	$\Rightarrow$	$2021 \in H$
$2021 = 1 \cdot 43 \cdot 47$	(2)	$\Rightarrow$	$1, 43, 47 \in H$
$1 \cdot 43 \cdot 47 + 1 = 2022$	(3)	$\Rightarrow$	$2022 \in H$
$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$	(2)	$\Rightarrow$	$2, 3, 6 \in H$
$2 \cdot 3 + 1 = 7$	(3)	$\Rightarrow$	$7 \in H$
$2 \cdot 7 + 1 = 15$	(3)	$\Rightarrow$	$15 \in H$
$15 = 3 \cdot 5$	(2)	$\Rightarrow$	$5 \in H$
$3 \cdot 5 + 1 = 16$	(3)	$\Rightarrow$	$16 \in H$
$16 = 2^4$	(2)	$\Rightarrow$	$4, 8 \in H$
$2 \cdot 4 + 1 = 9$	(3)	$\Rightarrow$	$9 \in H$
$3 \cdot 43 + 1 = 130$	(3)	$\Rightarrow$	$130 \in H$
$130 = 10 \cdot 13$	(2)	$\Rightarrow$	$10 \in H$

Ezzel beláttuk, hogy $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \subseteq H$. $10 \times 0{,}5$ pont $=$ 5 pont

b) Ezután igazolni fogjuk, hogy $H \cap \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^+$

Az *a)* eset vizsgálata alapján tegyük fel, hogy $\{1;2;3;\ldots;2k-1\} \subseteq H$ $(k \in \mathbf{N}^+)$

$2, k \in H$	(3)	$\Rightarrow$	$2 \cdot k + 1 \in H$	1 pont
$2k-1,\ 2k+1 \in H$	(3)	$\Rightarrow$	$(2k-1)(2k+1)+1 = 4k^2 \in H$	2 pont
$4k^2 = 2k \cdot 2k \in H$	(2)	$\Rightarrow$	$2k \in H$	1 pont

A megadott konstrukcióval folyamatosan a H halmaz elemeit kihagyás nélkül 2-2 újabb pozitív egész számmal bővíthetjük. Ez igazolja, hogy $H \cap \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^+$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. A huszárok díszszemléjén m sorban és n oszlopban vonulnak a katonák. Tudjuk, hogy minden sor és oszlop teljes, valamint hogy m és n is legalább 3. Parancsra a huszárok megállnak, és kardjuk összeérintésével üdvözlik a velük oldalról vagy átlósan szomszédos huszártársaikat. Hány huszár vonult fel a díszszemlén, ha így összesen 789 kardcsörrenést lehetett hallani? **10 pont**

Megoldás. A huszárokat három csoportba sorolhatjuk elhelyezkedésük szerint. Azok a huszárok, akik soruknak és oszlopuknak is a szélén (sarkon) helyezkednek el, 3 társukat üdvözlik, ez összesen 12 kardcsörrenés. 1 pont

Azok a huszárok, akik vagy a soruknak, vagy az oszlopuknak a szélén helyezkednek el, 5 társukat üdvözlik. Ilyen huszárból $2(m-2)+2(n-2)$ van, így ez összesen $10 \cdot (m+n-4)$ kardcsörrenés. 1,5 pont

A többi huszár 8 társát udvözlni, és belőlük $(m-2)\cdot(n-2)$ található, ez összesen

$$8(m-2)\cdot(n-2)$$

kardcsörrenés. 1,5 pont

Mivel minden üdvözlést kétszer számoltunk meg, ezért a díszszemlén összesen

$$\frac{1}{2}\cdot\left(12+10(m+n-4)+8(m-2)\cdot(n-2)\right) = 4mn-3m-3n+2.$$

kardcsörrenést lehetett hallani. 1 pont

Tehát

$$\begin{aligned} 4mn-3m-3n+2 &= 789 \\ 16mn-12m-12n+8 &= 3156 \\ (4m-3)\cdot(4n-3) &= 3157. \end{aligned}$$

Vagy másképpen:

$$\begin{aligned} 4mn-3m-3n+2 &= 789 \\ \left(2m-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(2n-\frac{3}{2}\right) &= 789\frac{1}{4} \\ (4m-3)\cdot(4n-3) &= 3157. \end{aligned}$$

2 pont

Mivel $3157 = 7 \cdot 11 \cdot 41$, ezért csak úgy bontható fel két 4-gyel osztva 1 maradékot adó, 1-nél nagyobb szám szorzatára, hogy $3157 = 41 \cdot 77$. Ekkor m és n értéke 11 és 20. 2 pont

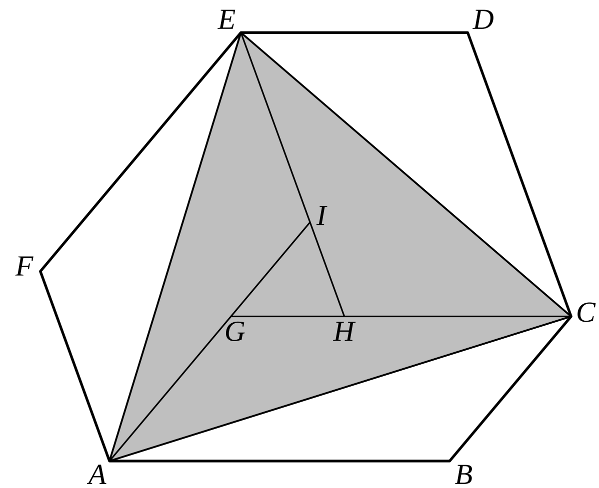
Tehát összesen 220 huszár vonult fel a díszszemlén. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Az $ABCDEF$ konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsd be, hogy az ACE és BDF háromszögek területe egyenlő. **10 pont**

Megoldás.

Az ACE háromszög területének vizsgálatához először húzzunk párhuzamosokat A-n keresztül BC-vel, C-n keresztül ED-vel és E-n keresztül FA-val. 2 pont

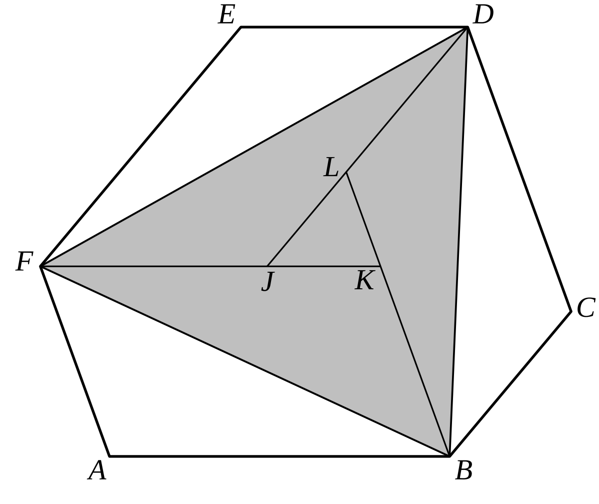


Legyenek ezen párhuzamosok páronként vett metszéspontjai az ábra szerint: G, H és I.

Ezek a metszéspontok a hatszög belsejében vannak, mivel például az A-ból induló BC-vel húzott párhuzamos csak a CD vagy ED oldalon „léphet ki” a hatszögből (mivel FE-vel és BC-vel párhuzamos) és az E-ből CD-vel (és FA-val) húzott párhuzamos (E-n kívüli) második metszéspontja a hatszöggel a BC vagy AB oldalon kell, hogy legyen. Ha ezeket a második metszéspontokat P-nek, illetve Q-nak nevezzük, akkor $AQPE$ egy konvex négyszög, aminek a csúcsai a hatszög kerületén vannak, ezért az átlói a hatszög belsejében metszik egymást (I-ben). 1 pont

Ha G, H és I nem esik egybe, akkor a hatszöget az ábra szerint 3 paralelogrammára ($ABCG$, $CDEH$, $EFAI$) és egy háromszögre (GHI) oszthatjuk. Ebből az ACE háromszög területét a három paralelogramma fele és a GHI háromszög alkotja. 1 pont

A BDF háromszög területének vizsgálatához ehhez hasonlóan húzzunk párhuzamosakat B-n keresztül CD-vel, D-n keresztül EF-fel és F-en keresztül AB-vel, amik az ábra szerint J, K és L pontokban metszik egymást.



Ha J, K és L nem esik egybe, akkor a hatszöget az ábra szerint 3 paralelogrammára ($FABK$, $BCDL$ és $DEFJ$) és egy háromszögre (JKL) oszthatjuk. Ebből a BDF háromszöget a három paralelogramma fele és JKL háromszög alkotja. 1 pont

A fenti két felosztásból következik, hogy elegendő belátni, hogy GHI és JKL egyenlő területű. 1 pont

Ennél több is teljesül: egybevágóak. Mivel az oldalaik párhuzamosak, ezért elég belátni, hogy például $GH = JK$. 1 pont

Az alábbiakban feltételezzük, hogy $AB > DE$. (Az $AB = DE$ esetet a végén vizsgáljuk.)
Mindkét szakasz hossza $AB - ED$, mivel:
Az 1. ábrán: $GH = GC - CG$.
$AB = GC$, illetve $HC = ED$, mert egy-egy paralelogramma szemközti oldalai.
Tehát $GH = AB - ED$.
A 2. ábrán: $JK = FK - FJ$.
$FK = AB$, illetve $FJ = ED$, mert egy-egy paralelogramma szemközti oldalai.
Tehát $JK = AB - ED$. 2 pont

Ha a hatszög szemközti oldalai egyenlők, akkor (és csak akkor) a G, H és I, illetve J, K és L metszéspontok egybeesnek, és ekkor az ACE és BDF háromszögek területe egyarán a hatszög területének a fele, mivel a paralelogrammákra való felosztás során mindkét háromszögbe a paralelogrammák fele esik. 1 pont

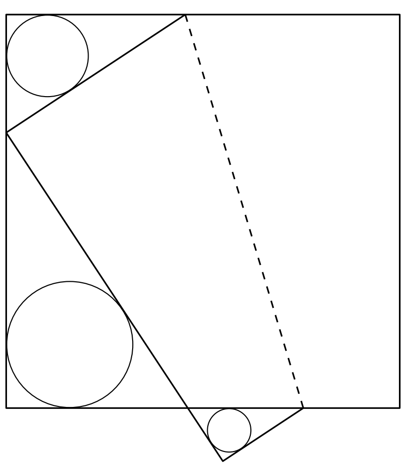
Összesen: **10 pont**

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyen H azon r $(0 < r < 1)$ racionális számok halmaza, amelyek végtelen periodikus tizedes tört alakja $0{,}abcabcabc\ldots = 0{,}\dot{a}b\dot{c}$, ahol a, b, c, nem feltétlenül különböző számjegyek. Felírva H elemeinek redukált tört alakját, hányféle számlálót kapunk? **10 pont**

2.



Egy négyzet alakú papírlapot úgy hajtunk meg, hogy a hajtásvonal a négyzet két szemköztes oldalát metssze, de ne menjen át a négyzet csúcsain. Ezután a keletkező háromszögekbe az alábbi ábra szerint egy-egy kört írunk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három kör egyikének sugara megegyezik a másik két kör sugarának összegével! **10 pont**

3. A 900 számnak legfeljebb hány osztója választható ki úgy, hogy egyik se ossza egyik másikat se? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen H azon r $(0 < r < 1)$ racionális számok halmaza, amelyek végtelen periodikus tizedes tört alakja $0{,}abcabcabc\ldots = 0{,}\dot{a}b\dot{c}$, ahol a, b, c, nem feltétlenül különböző számjegyek. Felírva H elemeinek redukált tört alakját, hányféle számlálót kapunk? **10 pont**

Megoldás. $x = \overline{0{,}\dot{a}b\dot{c}} \Rightarrow 1000x = \overline{abc{,}\dot{a}b\dot{c}} \Rightarrow 999x = \overline{abc} \Rightarrow x = \dfrac{\overline{abc}}{999} = \dfrac{\overline{abc}}{3^3 \cdot 37}$.

Ha $3 \nmid \overline{abc}$ és $37 \nmid \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc}$ a redukált tört számlálója.

1-től 999-ig 333 db 3-mal osztható, 27 db 37-tel osztható, 9 db $3 \cdot 37$-tel osztható szám van. A logikai szita formulát használva: $999 - (333 + 27) + 9 = 648$ db ilyen számláló van.

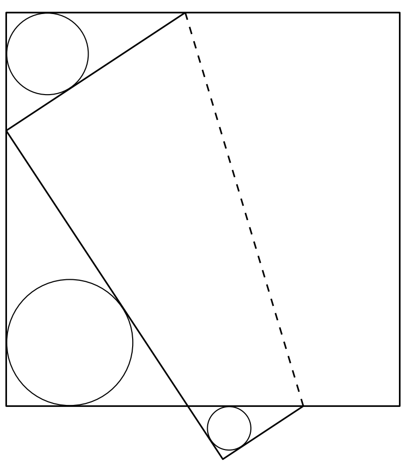
Ha x egyszerűsíthető, de a redukált tört számlálója nem osztható sem 3-mal sem 37-tel, akkor a számláló az előbbi 648-féle szám egyike.

Ha a redukált tört számlálója osztható 3-mal, akkor $81 \mid \overline{abc}$. Ekkor 12 db újabb lehetőség adódik.

A redukált tört számlálója nem lehet osztható 37-tel, mivel 37^2 négyjegyű szám. Tehát összesen $648 + 12 = 660$-féle lehet a redukált tört számlálója.

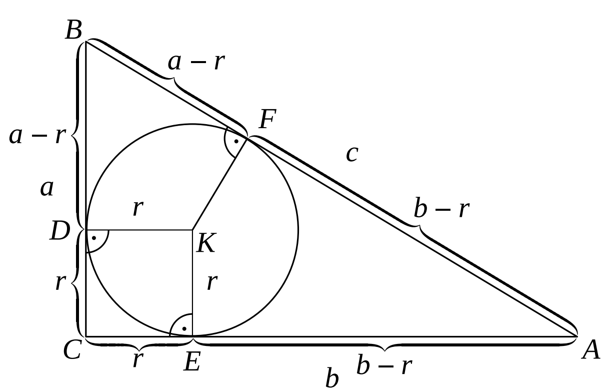
Összesen: **10 pont**

2.



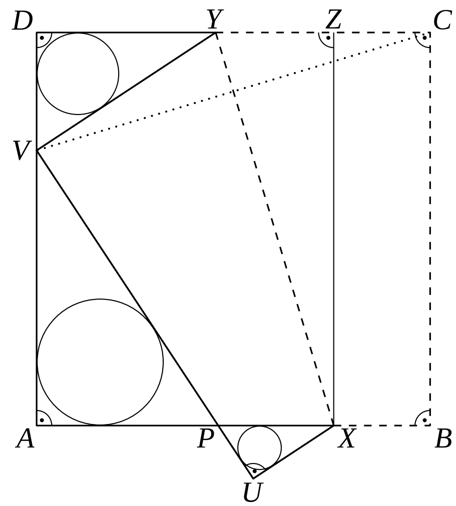
Egy négyzet alakú papírlapot úgy hajtunk meg, hogy a hajtásvonal a négyzet két szemköztes oldalát metssze, de ne menjen át a négyzet csúcsain. Ezután a keletkező háromszögekbe az alábbi ábra szerint egy-egy kört írunk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három kör egyikének sugara megegyezik a másik két kör sugarának összegével! **10 pont**

Megoldás. Először fejezzük ki a derékszögű háromszög beírt körének sugarát az oldalak segítségével.



Jelöljük az ábra szerint az ABC derékszögű háromszög oldalait a, b, c-vel, k beírt körének középpontját K-val, sugarát r-rel, a BC, CA és AB oldalakkal alkotott érintési pontjait rendre D, E, F-fel. Ekkor mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért a $KDCE$ négyszög négyzet és $CD = CE$. Másrészt a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AF = a - r$ és $BD = BF = b - r$. Így az átfogóra felírható $c = a - r + b - r$ alapján $2r = a + b - c$. 3 pont

Ezután térjünk át a feladat állításának igazolására. Jelöljük a négyzet csúcsait A, B, C, D-vel, a törésvonal két végpontját X, Y-nal $(X \in AB,\ Y \in CD)$, a B és C csúcsok XY egyenesre vonatkozó tükörképét rendre U, V-vel, az AB és UV szakaszok metszéspontját P-vel.



Legyen a VYD, PVA és XPU derékszögű háromszögek beírt körének átmérője és sugara rendre d_1, d_2, d_3, illetve r_1, r_2, r_3. Ekkor a korábbi összefüggés alapján:

$$d_1 = YD + DV - VY$$
$$d_2 = VA + AP - PV$$
$$d_3 = PU + UX - XP$$

1 pont

Bevezetve az $AB = a$ jelölést, a $VY = CY$ és $UX = BX$ egyenlőségek figyelembevételével:

$$d_1 + d_3 - d_2 = (a - CY) + DV - CY + PU + BX - XP - (a - DV) - (a - BX - XP) + (a - PU) =$$
$$= 2(DV + BX - CY)$$

3 pont

Legyen az X pont CD oldalra való merőleges vetülete Z. A C és V pontok egymás tükörképei az XY egyenesre vonatkozóan, így $CV \perp XY$. Másrészt $CD \perp XZ$ alapján $VCD\sphericalangle = YXZ\sphericalangle$ (merőleges szárú hegyesszögek). 2 pont

$CD = XZ = a$ figyelembevételével $CDV\triangle \cong XZY\triangle$, és emiatt:

$$DV = ZY = CY - CZ = CY - BX.$$

Ezt felhasználva $d_1 + d_3 - d_2 = 0$, amiből a 2-vel való leosztás és rendezés után az $r_2 = r_1 + r_3$ egyenlőség adódik. 1 pont

Ezzel az állítást beláttuk.

Összesen: **10 pont**

3. A 900 számnak legfeljebb hány osztója választható ki úgy, hogy egyik se ossza egyik másikat se? **10 pont**

Megoldás. A 900 prímtényezős felbontása $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, négyzetgyöke a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Jegyezzük fel, hogy előbbi azt jelenti, hogy a 900-nak 27 osztója van. 1 pont

Vegyük észre, hogy ha kiválasztjuk a 30-at, melynek 3 prímosztója van, és hozzávesszük a 900 összes többi olyan osztóját, melynek szintén 3 prímosztója van (multiplicitással számolva), azaz a $2^2 \cdot 3 = 12$-t, a $2^2 \cdot 5 = 20$-at, a $2 \cdot 3^2 = 18$-at, a $2 \cdot 5^2 = 50$-et, a $3^2 \cdot 5 = 45$-öt és a $3 \cdot 5^2 = 75$-öt, akkor ez összesen 7 szám, és egyik sem osztja semely másikat sem, hiszen bármelyik két különbözőhöz van egy olyan prím, amelyik az egyikben, és egy olyan prím, amelyik a másikban szerepel nagyobb kitevővel. 2 pont

Most bebizonyítjuk, hogy ennél többet nem lehet kiválasztani. Tekintsük ugyanis a következő osztóláncokat:

$$1 \mid 3 \mid 9 \mid 45 \mid 225;$$
$$2 \mid 6 \mid 18 \mid 90 \mid 450;$$
$$4 \mid 12 \mid 36 \mid 180 \mid 900;$$
$$5 \mid 25 \mid 75;$$
$$10 \mid 50 \mid 150;$$
$$20 \mid 100 \mid 300;$$
$$15 \mid 30 \mid 60.$$

Ezek valóban a 900 mind a 27 osztóját felsorolják. (Amit egyébként könnyű egy $3 \times 3 \times 3$ kockában vizualizálni, melynek bal alsó csúcsában áll az 1, a jobb felsőben maga a 900, felfelé lépve minden felett a 2-szerese, jobbra lépve mindennek a 3-szorosa, hátrafelé lépve pedig mindennek az 5-szöröse áll – ebből az ábrából egyébként a megnevezett láncokat sem nehéz megtalálni.) 4 pont

Világos, hogy minden láncból legfeljebb egy számot választhatunk ki, hiszen egy lánc két száma között van oszthatósági reláció. Tehát 7-nél több szám nem választható ki a kívánt módon. 2 pont

Így a válasz 7. 1 pont

Összesen: 10 pont

Haladók I. kategória 1. forduló

Feladatok

1. *a)* Hány olyan háromjegyű szám van, amelyből ha levonjuk a számjegyei összegét, akkor olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll?

b) Van-e ezek között olyan, amelyhez hozzáadva a számjegyei összegét szintén olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll? **7 pont**

2. Egy megbeszélésen üzletemberek vettek részt. Amikor üdvözölték egymást, kiderült, hogy már mindegyiküknek volt legalább egy ismerőse a többiek között, olyan viszont nem volt, aki mindenkit ismert volna. Sőt, az is kiderült, hogy volt olyan, aki a többiek közül pontosan egyet ismert, de olyan nem volt, akinek pontosan kettő vagy pontosan három ismerőse lett volna. Olyan viszont volt, aki a társaságnak több mint három tagját ismerte. Az ismeretség kölcsönös. Legalább hányan voltak jelen a megbeszélésen? **7 pont**

3. Melyik nagyobb az alábbi két tört közül?

$$A=\frac{\overbrace{333\ldots331}^{2021\text{ db}}}{\underbrace{333\ldots334}_{2021\text{ db}}}\qquad B=\frac{\overbrace{222\ldots221}^{2021\text{ db}}}{\underbrace{222\ldots223}_{2021\text{ db}}}$$

7 pont

4. Legyenek a, b, c valós számok! Igazoljuk, hogy az

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0$$
$$x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$
$$x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

másodfokú egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke! **7 pont**

5. A C-nél derékszögű ABC háromszög $CAB\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ belső szögfelezői a BC, illetve a CA oldalakat rendre a P és a Q pontokban metszik. M és N pontok pedig a P-ből és a Q-ból az AB átmérőre állított merőlegesek talppontjai.

Mekkora $MCN\sphericalangle$ pontos értéke? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. *a)* Hány olyan háromjegyű szám van, amelyből ha levonjuk a számjegyei összegét, akkor olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll?

b) Van-e ezek között olyan, amelyhez hozzáadva a számjegyei összegét szintén olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll? **7 pont**

Megoldás. *a)* Legyen a keresett szám $\overline{abc}$ alakú.

$$\overline{abc}-a-b-c=100a+10b+c-a-b-c=9(11a+b).$$ 1 pont

Az azonos számjegyekből álló szám 9-cel osztható, és legfeljebb háromjegyű, így a lehetőségek: 666, 333, 99. 1 pont

Ha $9(11a+b)=666$, akkor $11a+b=74$, így $a=6$, $b=8$.

Ekkor c bármilyen számjegy lehet, tehát ez 10 lehetőség. 1 pont

Ha $9(11a+b)=333$, akkor $11a+b=37$, így $a=3$, $b=4$

Ebben az esetben is 10 lehetőség van. 1 pont

Ha $9(11a+b)=99$, akkor $11a+b=11$, így $a=1$, $b=0$.

Ebben az esetben is 10 lehetőség van, tehát összesen 30 ilyen szám van. 1 pont

b) Mivel két egymást követő, azonos számjegyekből álló háromjegyű szám különbsége 111, ezért ez csak az utolsó esetben fordulhat elő. 1 pont

Ekkor $c=5$, tehát a keresett szám a 105. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy megbeszélésen üzletemberek vettek részt. Amikor üdvözölték egymást, kiderült, hogy már mindegyiküknek volt legalább egy ismerőse a többiek között, olyan viszont nem volt, aki mindenkit ismert volna. Sőt, az is kiderült, hogy volt olyan, aki a többiek közül pontosan egyet ismert, de olyan nem volt, akinek pontosan kettő vagy pontosan három ismerőse lett volna. Olyan viszont volt, aki a társaságnak több mint három tagját ismerte. Az ismeretség kölcsönös. Legalább hányan voltak jelen a megbeszélésen? **7 pont**

Megoldás. Az nyilvánvaló, hogy öten eleve vannak, mert valakinek (A-nak) legalább négy ismerőse van (B, C, D, E). 1 pont

De ő nem ismer mindenkit, így kell legyen még legalább egy hatodik (F) ember is, akit A nem ismer.

Mivel F-nek is van legalább egy ismerőse, feltehetjük, hogy F ismeri E-t.

Tegyük fel, hogy A, B, C, D, E és F alkotják a társaságot, azaz a társaság hattagú. 1 pont

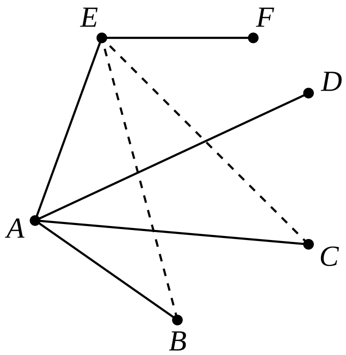
Így E-nek már két ismerőse is van (A és F), de akkor kell legyen legalább még kettő. Feltehetjük, hogy ezek B és C. 1 pont

Eddig tehát A-nak 4, E-nek 4, B-nek és C-nek 2-2, D-nek és F-nek 1-1 ismerőse van. (Az 1. ábrán látható, hogy A és E, illetve D és F szerepe felcserélhető.)

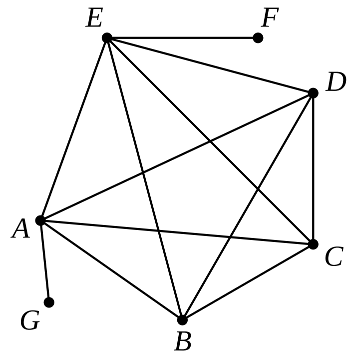
Pontosan egy ismerőse D-nek vagy F-nek van.

Mindkettőjüknek nem lehet pontosan egy ismerőse, mert akkor B és C az A-n és E-n kívül csak egymást ismerhetné, így mindkettőnek három ismerőse lenne, ami nem lehet. Tehát D és F közül csak az egyiknek van pontosan egy ismerőse van. 1 pont

Tegyük fel, hogy F-nek van pontosan egy ismerőse.



1. ábra



2. ábra

Ekkor viszont D-nek A-n kívül még három ismerőse kell legyen. F-et nem ismerheti, mert F csak E-t ismeri, tehát D három további ismerőse csak B, C és E lehet. Ekkor viszont E mindenkit ismer, ami ellentmond annak, hogy nincs olyan, aki mindenki mást ismer.

Tehát a társaság nem lehet hattagú. 1 pont

Héttagú viszont lehet, amint a 2. ábra mutatja. 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. Melyik nagyobb az alábbi két tört közül?

$$A = \frac{\overbrace{333\ldots331}^{2021\text{ db}}}{\underbrace{333\ldots334}_{2021\text{ db}}} \qquad B = \frac{\overbrace{222\ldots221}^{2021\text{ db}}}{\underbrace{222\ldots223}_{2021\text{ db}}}$$ **7 pont**

Megoldás. Legyen $x = \overbrace{111\ldots111}^{2021\text{ db}}$. 1 pont

Ekkor

$$A = \frac{3x-2}{3x+1} \qquad \text{és} \qquad B = \frac{2x-1}{2x+1}.$$ 2 pont

$$B - A = \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{3x-2}{3x+1} = \frac{(2x-1)(3x+1)-(3x-2)(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)} =$$ 2 pont

$$= \frac{6x^2-x-1-(6x^2-x-2)}{(2x+1)(3x+1)} = \frac{1}{(2x+1)(3x+1)}.$$ 1 pont

Mivel $B - A > 0$, ezért a B szám nagyobb. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Ha a versenyző kipróbál néhány értéket és ez alapján állapítja meg, melyik a nagyobb, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.

4. Legyenek a, b, c valós számok! Igazoljuk, hogy az

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0$$
$$x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$
$$x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

másodfokú egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke! **7 pont**

Megoldás. Legyen a három egyenlet diszkriminánsa rendre D_1, D_2, D_3. Ekkor

$$D_1=(a-b)^2-4(b-c),$$
$$D_2=(b-c)^2-4(c-a),$$
$$D_3=(c-a)^2-4(a-b).$$ 2 pont

A három egyenlőség megfelelő oldalait összeadva:

$$D_1+D_2+D_3=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-4(b-c)-4(c-a)-4(a-b)=$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$ 2 pont

Mivel három négyzetszám összege nem lehet negatív, 1 pont

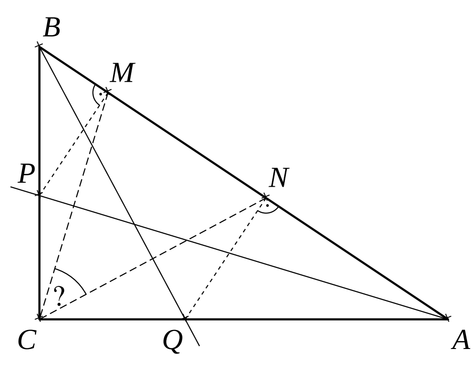
ezért D_1, D_2, D_3 közül legalább az egyik nemnegatív, és ez azt jelenti, hogy az ahhoz tartozó másodfokú egyenletnek van valós megoldása. Ezzel az állítást igazoltuk. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. A C-nél derékszögű ABC háromszög $CAB\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ belső szögfelezői a BC, illetve a CA oldalakat rendre a P és a Q pontokban metszik. M és N pontok pedig a P-ből és a Q-ból az AB átmérőre állított merőlegesek talppontjai.

Mekkora $MCN\sphericalangle$ pontos értéke? **7 pont**

Megoldás. Rajzoljunk ábrát, és használjuk a jelöléseit. A szokásos módon legyen az A-nál lévő $CAB\sphericalangle=\alpha$, és a B-nél lévő $ABC\sphericalangle=\beta=90^\circ-\alpha$.



1 pont

Mivel AP és BQ szögfelező, ezért $CAP\sphericalangle=PAM\sphericalangle$, továbbá $AMP\sphericalangle=PCA\sphericalangle=90^\circ$, emiatt az APC háromszög egybevágó APM háromszöggel, hiszen megfelelő szögeik egyenlőek, és a legnagyobb szögükkel szemközti oldaluk közös. Teljesen ugyanígy adódik, hogy $BCQ\triangle\cong BNQ\triangle$. 2 pont

A fenti egybevágóságok miatt $PM = PC$, illetve $QC = QN$, azaz $PCM\triangle$ és $QNC\triangle$ egyenlő szárú. 1 pont

Szögszámolással adódik a megfelelő háromszögekben, hogy $QAN\sphericalangle = \alpha$ és $QNA\sphericalangle = 90^\circ$ miatt $NQA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, innen $CQN\sphericalangle = 90^\circ + \alpha$, és innen az egyenlő szárú CQN háromszögben $NCQ\sphericalangle = QNC\sphericalangle = \dfrac{90^\circ - \alpha}{2} = \dfrac{\beta}{2}$.

Hasonlóan, $MBP\sphericalangle = \beta$ és $PMB\sphericalangle = 90^\circ$ miatt $BPM\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, innen $MPC\sphericalangle = 90^\circ + \beta$, és innen az egyenlő szárú CMP háromszögben $CMP\sphericalangle = PCM\sphericalangle = \dfrac{90^\circ - \beta}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$. 2 pont

Innen adódik, hogy $MCN\sphericalangle = 90^\circ - (PCM\sphericalangle + NCQ\sphericalangle)$, és így $MCN\sphericalangle = 90^\circ - \dfrac{\alpha + \beta}{2} = 45^\circ$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Melyik az az ötjegyű négyzetszám, amelynek (balról jobbra olvasva) első számjegye 2, negyedik számjegye pedig 5? **7 pont**

2. Az r_1 sugarú, K_1 középpontú kör és az r_2 sugarú, K_2 középpontú kör kívülről érintik egymást a P pontban. Legyen e a két kör közös külső érintője, azaz e egy olyan egyenes, amely mindkét kört érinti, és nem megy át a P ponton. Igaz-e, hogy a K_1K_2 átmérőjű kör érinti az e egyenest? **7 pont**

3. Az 1, 2, 3, …, 36, 37 számok közül kiválasztunk két különböző számot, amelyek szorzata megegyezik a ki nem jelölt 35 szám összegével. Melyik lehetett a két kiválasztott szám? **7 pont**

4. Az x, y, z valós számok teljesítik az alábbi egyenlőséget:

$$|x - y| = 2|y - z| = 3|z - x|.$$

Igazoljuk, hogy $x = y = z$. **7 pont**

5. Szétbontható-e a $H = \{1;2;3;\ldots;2021\}$ halmaz olyan részhalmazokra, amelyek mindegyikében a legnagyobb elem az adott részhalmaz többi elemének összegével egyenlő? (A szétbontás úgy értendő, hogy a részhalmazoknak nincs közös elemük, és az uniójuk kiadja a H halmazt.) **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az az ötjegyű négyzetszám, amelynek (balról jobbra olvasva) első számjegye 2, negyedik számjegye pedig 5? **7 pont**

Megoldás. Legyen a keresett szám A. Mivel

$$20\,000 \leq A < 30\,000$$

Ebből

$$142 \leq \sqrt{A} \leq 173$$

Tehát a keresett szám az $\overline{1xy}$ szám négyzete. 1 pont

$(\overline{1xy})^2 = (100 + 10x + y)^2 = 10000 + 2000x + 100x^2 + 200y + 20xy + y^2$. 1 pont

A negyedik számjegyet csak az ötödik és a hatodik tag befolyásolja. 1 pont

Mivel $20xy$-ban a tízesek helyi értékén álló számjegy páros, a keresett számban pedig 5, ami páratlan, ezért y^2 első számjegyének páratlannak kell lennie. 1 pont

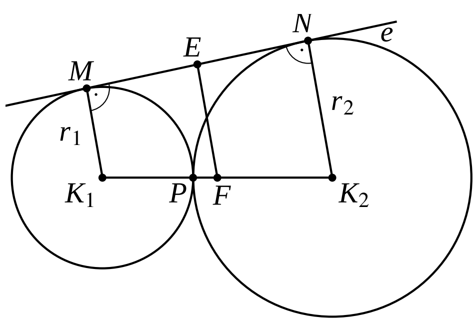
$y = 4$ esetén az ötödik tag $80x$. Ennek 40-re kell végződnie, tehát $x = 3$ vagy $x = 8$. Az így kapott számok, a 134 és a 184, nem felelnek meg a feltételnek. 1 pont

$y = 6$ esetén az ötödik tag $120x$. Ennek 20-ra kell végződnie, tehát $x = 1$ vagy $x = 6$. Az így kapott számok a 116 és a 166, közülük a 166 felel meg a feltételnek. 1 pont

Tehát a keresett szám $166^2 = 27\,556$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az r_1 sugarú, K_1 középpontú kör és az r_2 sugarú, K_2 középpontú kör kívülről érintik egymást a P pontban. Legyen e a két kör közös külső érintője, azaz e egy olyan egyenes, amely mindkét kört érinti, és nem megy át a P ponton. Igaz-e, hogy a K_1K_2 átmérőjű kör érinti az e egyenest? **7 pont**



Megoldás. Egy kör akkor és csak akkor érint egy egyenest, ha középpontja az egyenestől éppen akkora távolságra van, mint a kör sugara. 1 pont

Az e egyenes a két kört az M és az N pontban érinti, a K_1K_2 szakasz felezőpontja F, az MN szakasz felezőpontja E.

Az érintési pontokba húzott K_1M és K_2N sugarak merőlegesek az e egyenesre, ezért egymással párhuzamosak, így a K_2NMK_1 négyszög egy derékszögű trapéz, alapjainak hossza r_1 és r_2. 2 pont

E trapéz szárainak felezőpontjait összekötő középvonal éppen az FE szakasz. 1 pont

Ezért egyrészt FE párhuzamos a trapéz K_1M és K_2N alapjaival, ezért FE merőleges az e egyenesre, ami azt jelenti, hogy az F pontnak, vagyis a K_1K_2 átmérőjű kör középpontjának a távolsága az e egyenestől éppen az FE szakasz hosszával egyenlő. 1 pont

Másrészt az FE középvonal hossza a két alap számtani közepével, azaz $\frac{r_1 + r_2}{2}$-vel egyenlő. Mivel az r_1 sugarú és az r_2 sugarú kör érinti egymást, a középpontjaik távolsága a két sugár összege, azaz $K_1K_2 = r_1 + r_2$. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy a K_1K_2 átmérőjű kör F középpontja az e egyenestől $FE = \frac{K_1K_2}{2}$ távolságra van, azaz éppen olyan távol, mint amekkora a K_1K_2 átmérőjű kör sugara, ezért ez a kör érinti az e egyenest. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az 1, 2, 3, ..., 36, 37 számok közül kiválasztunk két különböző számot, amelyek szorzata megegyezik a ki nem jelölt 35 szám összegével. Melyik lehetett a két kiválasztott szám? **7 pont**

Megoldás. A megadott számok összege $1+2+\ldots+37 = \frac{37(37+1)}{2} = 703.$ 1 pont

Legyen a két kiválasztott szám x és y ($x < y$). Ekkor a feladat feltétele alapján:

$$\begin{aligned} xy &= 703 - x - y \\ xy + x + y &= 703 \\ (x+1)(y+1) &= 704 \end{aligned}$$

3 pont

A $704 = 2^6 \cdot 11$ felbontás alapján a 704 osztópárjait sorban megvizsgálva a megadott $x < y$ alapján csak az $(x+1; y+1) = (22; 32)$ eset lehetséges, amiből $x = 21$ és $y = 31$ adódik.
Tehát a kiválasztott két szám a 21 és a 31. 3 pont

Összesen: **7 pont**

4. Az x, y, z valós számok teljesítik az alábbi egyenlőséget:

$$|x-y| = 2|y-z| = 3|z-x|.$$

Igazoljuk, hogy $x = y = z$. **7 pont**

1. megoldás. Bontsuk fel az abszolút értékeket!
1. eset: $x \le y \le z$.

$$\left.\begin{aligned} y-x &= 2z-2y \\ y-x &= 3z-3x \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} 3y &= 2z+x \\ 3y &= 9z-6x \end{aligned}\right\}, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} 2z+x &= 9z-6x, \\ x &= z. \end{aligned}$$

Így $x = y = z$. 1 pont
2. eset: $x \le z \le y$.

$$\left.\begin{aligned} y-x &= 2y-2z \\ y-x &= 3z-3x \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y &= 2z-x \\ y &= 3z-2x \end{aligned}\right\}, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} 2z-x &= 3z-2x, \\ x &= z. \end{aligned}$$

Így $x = y = z$. 1 pont
3. eset: $y \le x \le z$.

$$\left.\begin{aligned} x-y &= 2z-2y \\ x-y &= 3z-3x \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y &= 2z-x \\ y &= 4x-3z \end{aligned}\right\}, \quad \text{ebből} \quad \begin{aligned} 2z-x &= 4x-3z, \\ x &= z. \end{aligned}$$

Így $x=y=z$. 1 pont

4. eset: $y\le z\le x$.

$$\left.\begin{aligned} x-y&=2z-2y\\ x-y&=3x-3z \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y&=2z-x\\ y&=3z-2x \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} 2z-x=3z-2x,\\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x=y=z$. 1 pont

5. eset: $z\le x\le y$.

$$\left.\begin{aligned} y-x&=2y-2z\\ y-x&=3x-3z \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} y&=2z-x\\ y&=4x-3z \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} 2z-x=4x-3z,\\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x=y=z$. 1 pont

6. eset: $z\le y\le x$.

$$\left.\begin{aligned} x-y&=2y-2z\\ x-y&=3x-3z \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} 3y&=x+2z\\ 3y&=9z-6x \end{aligned}\right\}, \qquad \text{ebből} \qquad \begin{gathered} x+2z=9z-6x,\\ x=z. \end{gathered}$$

Így $x=y=z$. 1 pont

Tehát x, y, z bármely nagyság szerinti sorrendje esetén igaz az állítás, így az állítás minden valós számhármasra igaz. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó 1 pont jár, ha a versenyző legalább három esetet kipróbált.

2. megoldás. Legyen $|x-y|=6a$ ($a\ge 0$)!

$a=0$ esetén $|x-y|=|y-z|=|z-x|=0$, ahonnan $x=y=z$. 2 pont

$a>0$ esetén $|x-y|=6a$, ahonnan $|y-z|=3a$, $|z-x|=2a$. 2 pont

Ekkor

$$6a=|x-y|=|x-z+z-y|\le|x-z|+|z-y|=|z-x|+|y-z|=2a+3a=5a,$$

amiből $a\le 0$ adódik, ami ellentmond az $a>0$ feltételnek. Így ez az eset nem valósulhat meg. Ezzel az állítást igazoltuk. 3 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. Az egyenlőség első és a harmadik tagjából $y-x=3(z-x)$ vagy $y-x=-3(z-x)$. 2 pont

A második tag: $2|y-z|=2\big|(y-x)-(z-x)\big|$, 2 pont

ami tehát vagy $2\big|(3-1)(z-x)\big|=4\big|(z-x)\big|$, vagy $2\big|(-3-1)(z-x)\big|=8\big|z-x\big|$, 1 pont

de mindkettő csak $|z-x|=0$ esetén lehet egyenlő $3|z-x|$-szel, 1 pont

azaz $z=x$, amiből következik, hogy $x=y=z$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Szétbontható-e a $H = \{1;2;3;\ldots;2021\}$ halmaz olyan részhalmazokra, amelyek mindegyikében a legnagyobb elem az adott részhalmaz többi elemének összegével egyenlő? (A szétbontás úgy értendő, hogy a részhalmazoknak nincs közös elemük, és az uniójuk kiadja a H halmazt.) **7 pont**

Megoldás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen szétbontás, jelöljük H_1, H_2, $\ldots$, H_n-nel a megfelelő részhalmazokat! Vizsgáljuk meg például H_1 elemeinek összegét! Ha H_1 legnagyobb eleme a_1, akkor a feltétel szerint H_1 többi elemének összege is a_1, azaz a H_1-beli elemek összege $2a_1$, 1 pont

tehát H_1 elemeinek összege páros szám. 1 pont

Hasonló igaz minden részhalmazra, tehát mindegyik részhalmazban az elemek összege páros szám, 1 pont

és mivel az n db részhalmaz közös elem nélküli, uniójuk pedig H, ezért H elemeinek összege n db páros szám összege, vagyis szintén páros szám kell legyen. 1 pont

De H elemeinek összege valójában páratlan, hiszen a páros számokon kívül 1011 darab páratlan szám van benne (vagy számszerűen az összeg $\dfrac{2021 \cdot 2022}{2} = 2\,043\,231$), 2 pont

azaz ellentmondásra jutottunk, a szétbontás tehát nem lehetséges. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Anikó és Bea felírták a táblára a pozitív egészeket 1-től 2022-ig. Ezután a következő szabályokat követik:

– kiválasztanak a számok közül tetszőleges számút;
– összeadják a kiválasztott számokat;
– kiszámolják az összeg 7-tel való osztási maradékát, ezt a számot felírják a táblára;
– a kiválasztott számokat letörlik a tábláról.

Ezeket a lépéseket egészen addig folytatják, amíg már csak két szám marad a táblán. Ha az egyik a 2022, mi lehet a másik szám? **7 pont**

2. A sík 6 adott pontja közül semelyik három nincs egy egyenesen. A pontpárokat összekötő szakaszok közül hányat kell meghúzni ahhoz, hogy biztosan legyen olyan háromszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók? **7 pont**

3. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának E belső pontját a D csúccsal összekötő szakasz az AC átlót az M pontban metszi. Az AMD háromszög területe 2 cm^2. Az $EBCM$ négyszög területe pedig 5 cm^2. Mekkora az $ABCD$ négyzet területe? **7 pont**

4. Hány pozitív egész számokból álló rendezett $(b;c)$ számpár létezik, amelyekre az

$$x^2+bx+c=0 \quad \text{és} \quad x^2+cx+b=0$$

egyenletek egyikének sincs két különböző valós megoldása? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Anikó és Bea felírták a táblára a pozitív egészeket 1-től 2022-ig. Ezután a következő szabályokat követik:

– kiválasztanak a számok közül tetszőleges számút;
– összeadják a kiválasztott számokat;
– kiszámolják az összeg 7-tel való osztási maradékát, ezt a számot felírják a táblára;
– a kiválasztott számokat letörlik a tábláról.

Ezeket a lépéseket egészen addig folytatják, amíg már csak két szám marad a táblán. Ha az egyik a 2022, mi lehet a másik szám? **7 pont**

Megoldás. Mivel minden lépésben felírnak a táblára egy 7-tel való osztási maradékot, a keresett szám csak a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 számok közül kerülhet ki. 1 pont

Nézzük meg, egy lépésben mennyivel változik a táblán levő számok összege. (Egy lépésnek most a négy művelet egymás utáni elvégzését nevezzük.) Ha S a kiválasztott számok összege, M pedig az S szám 7-tel való osztási maradéka, akkor az összeg $(S-M)$-mel csökken, 1 pont

ami nyilván 7-tel osztható szám. 1 pont

Azaz a táblán levő számok összege minden lépés után ugyanannyi maradékot ad 7-tel osztva. 1 pont

Kezdetben az összeg $\dfrac{2022\cdot 2023}{2}$, ami 7-tel osztható, 1 pont

tehát a táblán maradt két szám összege is 7-tel osztható. Mivel 2022 7–tel való osztási maradéka 6, 1 pont

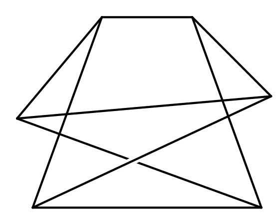
a másik szám csak az 1 lehet. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. A sík 6 adott pontja közül semelyik három nincs egy egyenesen. A pontpárokat összekötő szakaszok közül hányat kell meghúzni ahhoz, hogy biztosan legyen olyan háromszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók? **7 pont**

Megoldás. 9 szakasz még nem elég. 1 pont

Például (természetesen minden jó ábra 2 pontot ér, ábra nélkül nem jár pont): 2 pont



10 szakasz viszont már elég. 1 pont

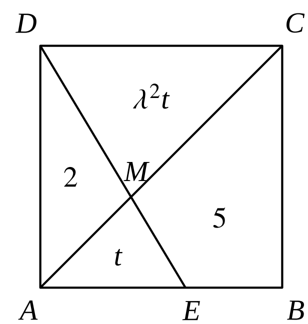
A 10 szakasznak 20 végpontja van, ezért kell lenni olyan pontnak, amely 4 szakasznak is végpontja. (Különben csak $6\cdot 3=18$ végpont lenne.) 1 pont

Legyen ez a pont A, a belőle induló szakaszok AB, AC, AD és AE. Ha ezek a pontok nem határoznak meg háromszöget, akkor a B, C, D és E pontok között nem lehet összekötő szakasz. Azaz az összes lehetséges szakaszból $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ hiányzik. 1 pont

Viszont már 10 szakaszt behúztunk, az összes lehetséges szakasz száma $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, ezért a B, C, D, E pontok által meghatározott szakaszok közül legalább 1-nek kell még szerepelnie. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának E belső pontját a D csúccsal összekötő szakasz az AC átlót az M pontban metszi. Az AMD háromszög területe 2 cm^2. Az $EBCM$ négyszög területe pedig 5 cm^2. Mekkora az $ABCD$ négyzet területe? **7 pont**



Megoldás. Az AEM háromszög hasonló a CDM háromszöghöz, mert szögeik csúcs-, illetve váltószögek. 1 pont

Legyen a hasonlóság aránya λ, és jelölje t az AEM háromszög területét. Ekkor a CDM háromszög területe $T_{CDM} = \lambda^2 \cdot t$. 1 pont

Mivel az AMD és MCD háromszögeknek közös a D csúcshoz tartozó magassága, ezért területeik aránya megegyezik AM és MC szakaszok arányával, azaz $\frac{T_{CDM}}{T_{AMD}} = \frac{MC}{AM} = \lambda$. 1 pont

Mivel az AC átló felezi a négyzet területét, ezért $T_{AMD} + T_{MCD} = T_{AEM} + T_{EBCM}$. 1 pont

A fenti két összefüggésből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda^2 \cdot t}{2} &= \lambda \\ \lambda^2 \cdot t + 2 &= t + 5 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer két megoldása közül csak a $\lambda = 2$, $t = 1$ megoldása a feladatnak, tehát a négyzet területe 12 cm^2. 3 pont

Összesen: **7 pont**

4. Hány pozitív egész számokból álló rendezett $(b;c)$ számpár létezik, amelyekre az

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{és} \quad x^2 + cx + b = 0$$

egyenletek egyikének sincs két különböző valós megoldása? **7 pont**

Megoldás. Egy másodfokú egyenletnek nincs két különböző valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nem pozitív. (Tudjuk, hogy b és c pozitív.) Ezt a feltételt a két egyenletre érvényesítve:

$$b^2 \leq 4c \quad \text{és} \quad c^2 \leq 4b.$$ 1 pont

Az első egyenlőtlenséget négyzetre emelve, a másodikat pedig 16-tal beszorozva:

$$b^4 \leq 16c^2 \leq 64b.$$ 1 pont

Az egyenlőtlenségláncot b-re megoldva:

$$b^4 - 64b = b(b^3 - 64) \leq 0,$$

amiből a $b \in \mathbb{N}^+$ feltételt figyelembe véve

$$b^3 \leq 64,$$

$$b \leq 4,$$

$b \in \{1;2;3;4\}$ adódik. 2 pont

Figyelembe véve, hogy $c \in \mathbb{N}^+$:

Ha $b = 1$, akkor $1 \leq 16c^2 \leq 64$, amiből $c = 1$ vagy $c = 2$ adódik. 1 pont

Ha $b = 2$, akkor $16 \leq 16c^2 \leq 128$, amiből $c = 1$ vagy $c = 2$ adódik. 1 pont

Ha $b = 3$, akkor $81 \leq 16c^2 \leq 192$, amiből $c = 3$ adódik.

Ha $b = 4$, akkor $256 \leq 16c^2 \leq 256$, amiből $c = 4$ adódik. 1 pont

Tehát a megfelelő $(b;c)$ rendezett számpárok a következők:

$$(1;1), \quad (1;2), \quad (2;1), \quad (2;2), \quad (3;3) \quad \text{és} \quad (4;4).$$

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Ha a versenyző próbálgatással kap eredményeket, akkor az összes eredményért 2, kevesebb eredményért 1 pont jár.

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Egy sorozat első tagja egy 1-nél nagyobb a_1 pozitív egész szám. Ha $n > 1$, akkor a sorozat n-edik a_n tagját a következőképpen kapjuk: ha az a_{n-1} legnagyobb prímosztója p, akkor $a_n = a_{n-1} + p$. Határozzuk meg az összes olyan a_1 kezdőértéket, amelyre a sorozat valamelyik tagja 2022! **7 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$ **7 pont**

3. Egy H halmaz elemei pozitív egész számok. Teljesül továbbá, hogy $1 \in H$ és $2 \in H$, valamint bármely két H-beli elem összege nem eleme H-nak. Bizonyítsuk be, hogy a H halmaz k-nál kisebb elemeinek száma kisebb, mint $\frac{k}{3} + 2$. **7 pont**

4. Az ABC egyenlő oldalú háromszög két oldalát is meghosszabbítjuk: BC oldalát C irányában D-ig, BA oldalát pedig A irányában E-ig úgy, hogy $BD = AE$ teljesüljön. Igazoljuk, hogy az ECD háromszög egyenlő szárú! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sorozat első tagja egy 1-nél nagyobb a_1 pozitív egész szám. Ha $n > 1$, akkor a sorozat n-edik a_n tagját a következőképpen kapjuk: ha az a_{n-1} legnagyobb prímosztója p, akkor $a_n = a_{n-1} + p$. Határozzuk meg az összes olyan a_1 kezdőértéket, amelyre a sorozat valamelyik tagja 2022! **7 pont**

Megoldás. Nyilván lehet $a_1 = 2022$.

Legyen a_{n-1} legnagyobb prímosztója p, ekkor $a_{n-1} = p \cdot k$ és $a_n = p \cdot k + p = p(k+1)$, tehát p osztója a_n-nek. Tehát egy tetszőleges tag előtt álló tag legnagyobb prímosztója csak olyan prímszám lehet, amely osztója az adott tagnak. Az is látszik, hogy ha $n > 1$, akkor a_n nem lehet prímszám, hiszen p és $k+1$ mindegyike legalább 2. Továbbá egy adott tag előtt álló tagot úgy kapunk, hogy az adott tagból kivonjuk annak egyik prímosztóját, hiszen $a_{n-1} = a_n - p$, és az előbb láttuk, hogy p osztója az a_n-nek. 1 pont

Tegyük fel, hogy $a_n = 2022$ ($n > 1$). Mi állhat a 2022 előtt a sorozatban?

2022 prímosztói 2, 3 és 337, egyben ezek a p lehetséges értékei. Mivel $a_{n-1} = a_n - p = 2022 - p$, az a_{n-1} lehetséges érétkei: $2022-2 = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, $2022-3 = 2019 = 3 \cdot 673$ és $2022 - 337 = 1685 = 5 \cdot 337$. A 2020 legnagyobb prímosztója 101, azaz $p \neq 2$, 2019 legnagyobb prímosztója pedig 673, azaz $p \neq 3$, ezért a_{n-1} csak 1685 lehet. 1 pont

Mi állhat az 1685 előtt, ha nem az az első?

Az $1685 = 5 \cdot 337$ előtt álló tag lehetséges értékei: $1685 - 5 = 1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1685 - 337 = 1348 = 2^2 \cdot 337$. Ezek közül az elsőt kizárhatjuk, mert 1680 legnagyobb prímosztója nem 5, tehát az 1685 előtt csak 1348 állhat. 1 pont

Az 1348 – ha nem az van az elején – előtt álló szám lehet $1348 - 2 = 1346 = 2 \cdot 673$ vagy $1348 - 337 = 1011 = 3 \cdot 337$. Mivel 1346 legnagyobb prímosztója nem 2, ezért az 1348 előtt csak $1011 = 3 \cdot 337$ állhat. 1 pont

Az 1011 – ha nem az van az elején – előtt álló szám lehet $1011 - 3 = 1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ vagy $1011 - 337 = 674 = 2 \cdot 337$. Mivel 1008 legnagyobb prímosztója nem 3, ezért az 1011 előtt csak $674 = 2 \cdot 337$ állhat. 1 pont

A 674 – ha nem az van az elején – előtt álló szám lehet $674-2=672=2^5 \cdot 3 \cdot 7$ vagy $674-337=337$. Mivel 674 legnagyobb prímosztója nem 2, ezért a 674 előtt csak 337 állhat. 1 pont

Mivel 337 prímszám, ezért ha szerepel a sorozatban, akkor csak a sorozat első tagja lehet.

Összegezve: a sorozat első tagja lehet 337, 674, 1011, 1348, 1685 vagy 2022. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$ **7 pont**

Megoldás. A nevező miatt $x \neq 0$, és a négyzetgyök miatt $x \geq 1$, valamint x két négyzetgyök összege, ezért x mindenképpen pozitív. Mivel az egyenlet mindkét oldala pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$x^2 = x + 1 - \frac{2}{x} + 2\sqrt{\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2}} \qquad / \cdot x$$ 1 pont

mivel itt $\sqrt{x^2} = x$, ezért kapjuk, hogy:

$$x^3 = x^2 + x - 2 + 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$x^3 - x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$$ 1 pont

Vezessünk be új ismeretlent: $u = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$, ezzel az új ismeretlennel egyenletünk így írható fel:

$$u^2 + 1 = 2u$$ 1 pont

$$(u-1)^2 = 0$$

$$u = 1$$

$$\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = 1$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x\left(x^2 - x - 1\right) = 0$$ 1 pont

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$ 1 pont

$x_1 = 0$ esetén a törtek nevezője 0 lenne,

$x_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ negatív szám, ami nem lehet, mert x csak pozitív lehet. 1 pont

$x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pozitív szám, tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ami megfelel a feladatnak. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy H halmaz elemei pozitív egész számok. Teljesül továbbá, hogy $1 \in H$ és $2 \in H$, valamint bármely két H-beli elem összege nem eleme H-nak. Bizonyítsuk be, hogy a H halmaz k-nál kisebb elemeinek száma kisebb, mint $\dfrac{k}{3} + 2$. **7 pont**

Megoldás. Mivel 1 és 2 eleme a H-nak, ezért a 3 biztosan nem, tehát elegendő 4-től $(k-1)$-ig vizsgálni az elemeket. 1 pont

A 4-től $(k-1)$-ig terjedő egészeket hármas csoportokba osztjuk, $(3i+1; 3i+2; 3i+3)$. Mivel az 1 és a 2 eleme a H-nak, ezért egy ilyen csoportból csak egy elem lehet benne a H halmazban. 2 pont

Mivel 4-től $(k-1)$-ig összesen $k-4$ darab szám van, ezek összesen $\left[\frac{k-4}{3}\right]$ darab csoportot alkotnak. 1 pont

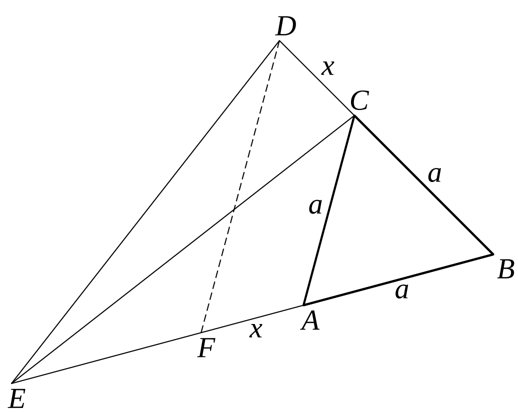
Az utolsó teljes hármas után még legfeljebb két elem lehetne, de ezek közül csak az egyik lehet a halmazban. 1 pont

Így a k-nál kisebb elemek száma legfeljebb

$$2+\left[\frac{k-4}{3}\right]+1=2+\left[\frac{k-1}{3}\right]-1+1=2+\left[\frac{k-1}{3}\right]\leq 2+\frac{k-1}{3}<2+\frac{k}{3}.$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

4. Az ABC egyenlő oldalú háromszög két oldalát is meghosszabbítjuk: BC oldalát C irányában D-ig, BA oldalát pedig A irányában E-ig úgy, hogy $BD=AE$ teljesüljön. Igazoljuk, hogy az ECD háromszög egyenlő szárú! **7 pont**



Megoldás. Készítsünk ábrát, a szabályos háromszög oldalait jelöljük a-val. Vegyünk fel az AE szakaszon úgy egy F pontot, hogy $AF=CD(=x)$ teljesüljön, ezt az F pontot kössük össze D-vel. 2 pont

Az EFD és CAE háromszögek egybevágóságát fogjuk belátni, ebből már következik az állítás.

Az FBD háromszög egyenlő oldalú, ezért

$$DF=BD=AE.$$ 1 pont

Másrészt

$$EF=AE-x=BD-x=a=AC,$$ 1 pont

az FE, FD, illetve az AE, AC két-két egyenlő oldal által közrezárt szög is egyenlő (120°). 1 pont

Két-két oldal és a közrezárt szög egyenlősége miatt az EFD és EAC háromszögek egybevágók, 1 pont

azaz harmadik oldalaik is egyenlők: $EC=ED$, vagyis az ECD háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2-x}+\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}+x^2=\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{\sqrt{2-x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}.$$ **7 pont**

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében felveszünk egy tetszőleges, de a magasságponttól különböző P pontot. P-n keresztül párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. A C-ből induló magasság és az AB-vel párhuzamos egyenes metszéspontja X, a B-ből induló magasság és az AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja Y, a harmadik párhuzamos és a harmadik magasság metszéspontja Z. Igazoljuk, hogy az XYZ háromszög hasonló ABC-hez! **7 pont**

3. Jelölje $m(n)$ az n pozitív egész számnak a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 osztókkal adott osztási maradékainak összegét. Például $m(25) = 1+1+1+0+1+4+1+7+5 = 21$.

Melyek azok az n kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre $m(n) = m(n+1)$? **7 pont**

4. A síkon felvettünk 47 különböző pontot. Mindegyik pont mindkét koordinátája egész szám, és az x és y koordinátára teljesül, hogy $1 \le x \le 20$, valamint $1 \le y \le 5$. Igazoljuk, hogy a pontok közül kiválasztható négy darab úgy, hogy ezek egy olyan téglalap csúcsai legyenek, amelynek az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel! **7 pont**

5. Jelölje $f(n)$ azt a számot, ahányféleképpen az n pozitív egész felbontható – a tagok sorrendjének figyelembe vételével – pozitív páratlan számok összegére. Adjuk meg $f(n)$-t!

(*Mivel az összegben a tagok sorrendje számít, az* 5*-nek például a* $3+1+1$ *és az* $1+3+1$ *különböző felbontásai. Az* 5 *ötféleképpen bontható fel a fenti módon, ezek:* 5; $3+1+1$; $1+3+1$; $1+1+3$; $1+1+1+1+1$, *így* $f(5) = 5$.) **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2-x} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} + x^2 = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{\sqrt{2-x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}.$$ **7 pont**

1. megoldás. Nyilván $x < 2$; $x \neq 0$. Rendezve az egyenletet kapjuk:

$$\left(\sqrt{2-x} - \frac{\sqrt{2-x}}{x^2}\right) + \left(\frac{x^2}{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

majd

$$\left(\frac{\sqrt{2-x}\cdot(x^2-1)}{x^2}\right) + \left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2-x}}\right) + \left(\frac{x^4-1}{x^2}\right) = 0.$$ 2 pont

$$\left(\frac{\sqrt{2-x}\cdot(x^2-1)}{x^2}\right) + \left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2-x}}\right) + \left(\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2}\right) = 0.$$ 1 pont

Ha $x^2 - 1 = 0$ (azaz $x = \pm 1$), akkor minden kifejezés értelmes, és a számlálók mind 0-k, azaz ez megoldás. 1 pont

Ha nem, akkor osszunk (x^2-1)-gyel:

$$\left(\frac{\sqrt{2-x}}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)+\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=0.$$

Mivel ekkor három pozitív tört összegét kaptuk, már nincs több megoldás. 2 pont

Azaz a két megoldás: $x_1=1$ és $x_2=-1$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Vezessünk be új betűket (többféle „eredményes helyettesítés” elképzelhető, mi egyet mutatunk meg); legyen $a=\sqrt{2-x}$; $b=\dfrac{1}{x^2}$; $c=\dfrac{1}{ab}=\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}$. Nyilván $abc=1$ és (a megfelelő kikötések miatt) $a, b, c>0$. 1 pont

A helyettesítések után az egyenletünk a következő alakú: $a+c+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+b$. 1 pont

Szorozzunk fel abc-vel (azaz 1-gyel, mikor melyik „kényelmesebb”), kapjuk:

$$a+c+ac=bc+ab+b$$ 1 pont

Innen ($1=abc$-t adva mindkét oldalhoz):

$$a+c+ac+1=bc+ab+b+abc,$$ 1 pont

azaz $(a+1)(c+1)=b(a+1)(c+1)$, innen (egy oldalra rendezve) $0=(b-1)(a+1)(c+1)$ adódik. 1 pont

Azaz vagy $b=\dfrac{1}{x^2}=1\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$ (és ekkor $a, c>0$ teljesül, azaz a gyökök megfelelőek),

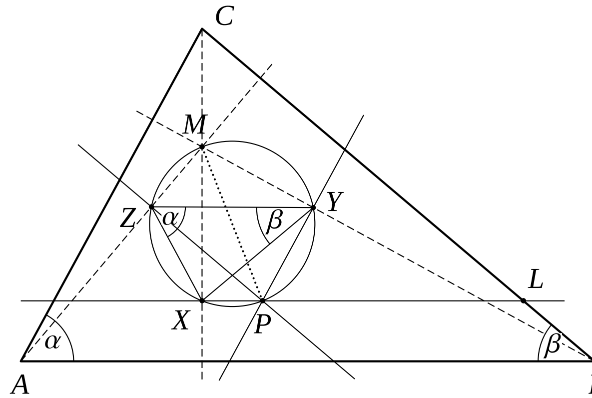
vagy $a=\sqrt{2-x}=-1$, vagy $c=\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}=-1$. 1 pont

Utóbbi két egyenlőség, viszont nem teljesülhet $a, c>0$ miatt, azaz csak két megoldás van, és a két megoldás: $x_1=1$ és $x_2=-1$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében felveszzünk egy tetszőleges, de a magasságponttól különböző P pontot. P-n keresztül párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. A C-ből induló magasság és az AB-vel párhuzamos egyenes metszéspontja X, a B-ből induló magasság és az AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja Y, a harmadik párhuzamos és a harmadik magasság metszéspontja Z. Igazoljuk, hogy az XYZ háromszög hasonló ABC-hez! **7 pont**

Megoldás. Mivel a magasság merőleges a megfelelő párhuzamosra, ezért az $MXP\sphericalangle$, az $MYP\sphericalangle$, valamint az $MZP\sphericalangle$ derékszög. 1 pont



Ezért X, Y, Z rajta van az MP mint átmérő fölé rajzolt Thalész-körön. 1 pont

$XPZ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$, mert egyállású szögek. $XPZ\sphericalangle = XYZ\sphericalangle = \beta$, mivel egy ívhez tartozó kerületi szögek. 2 pont

$YPL\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$, mert egyállású szögek. A $ZXPY$ húrnégyszög YPL külső szöge egyenlő az XZY belső szöggel, tehát $XZY\sphericalangle = \alpha$. 2 pont

A két háromszög két szöge egyenlő, tehát a két háromszög hasonló. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Jelölje $m(n)$ az n pozitív egész számnak a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 osztókkal adott osztási maradékainak összegét. Például $m(25) = 1+1+1+0+1+4+1+7+5 = 21$.

Melyek azok az n kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre $m(n) = m(n+1)$? **7 pont**

Megoldás. Ha $n+1$ a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok egyikével sem osztható, akkor $m(n+1) = m(n)+9$, mivel $n+1$ az osztók mindegyikével 1-gyel több maradékot ad, mint n. 1 pont

Ha $n+1$ a felsorolt k_i osztók közül a $2 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ ($r \in \mathbb{N}$) számok többszöröse, akkor $m(n+1) = m(n) - \left[(k_1-1)+(k_2-1)+\ldots+(k_r-1)\right] + (9-r)\cdot 1 = m(n)+9-(k_1+k_2+\ldots+k_r)$. Így $m(n+1) = m(n) \Leftrightarrow k_1+k_2+\ldots+k_r = 9$, vagyis $(n+1)$-nek a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok közül kikerülő osztói összegének 9-nek kell lennie. 2 pont

Sorrendet nem tekintve, az egytagú összeget is megengedve a 9 különböző tagok összegére bontásának lehetőségei: $9 = 2+7 = 3+6 = 4+5 = 2+3+4$. A felbontások és a korábbi megállapítások alapján ha 9 osztója $(n+1)$-nek, akkor 3 is osztója, így $m(n+1) < m(n)$;

ha 3 és 6 osztója $(n+1)$, akkor 2 is osztója, így $m(n+1) < m(n)$;

ha 4 és 5 osztója $(n+1)$-nek, akkor 2 is osztója, így $m(n+1) < m(n)$;

ha 2, 3 és 4 osztója $(n+1)$-nek, akkor 6 is osztója, így ismét $m(n+1) < m(n)$.

ha 2 és 7 osztója $(n+1)$-nek, de a 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 számok egyikével sem osztható, akkor teljesül az $m(n) = m(n+1)$ egyenlőség. 3 pont

Ez az $n+1 = 1\cdot 14 = 14$ és $n+1 = 7\cdot 14 = 98$ esetekben áll fenn, azaz $n = 13$, illetve $n = 97$ esetén teljesül a feladat feltétele. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. A síkon felvettünk 47 különböző pontot. Mindegyik pont mindkét koordinátája egész szám, és az x és y koordinátára teljesül, hogy $1 \le x \le 20$, valamint $1 \le y \le 5$. Igazoljuk, hogy a pontok közül kiválasztható négy darab úgy, hogy ezek egy olyan téglalap csúcsai legyenek, amelynek az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel! **7 pont**

Megoldás. A pontok 5 sorban és 20 oszlopban helyezkednek el. Minden sor esetén nézzük az abban a sorban lévő pontok számát; az első sorban legyen a, a másodikban b, a harmadikban c, a negyedikben d, az ötödikben e darab pont.

Minden sorban az ott levő pontok közül az összes lehetséges módon kiválasztunk két darabot, és feljegyezzük a két pont x koordinátáját mint nem rendezett számpárt.

Ekkor összesen $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}+\binom{d}{2}+\binom{e}{2}$ számpárt választottunk ki. 1 pont

Mivel ez az összeg csak véges sok különböző értéket vehet fel, ezért van minimuma. Ezt akkor éri el, ha az a, b, c, d, e számok között legfeljebb 1 az eltérés. Hiszen ha például az első sorban legalább 2-vel több pont lenne, mint a másodikban, akkor ebből egyet áttéve a másodikba, az összeg csökkeni fog. 2 pont

Vagyis az összeg akkor éri el a minimumát, ha két szám 10-zel, három szám pedig 9-cel egyenlő.

Ilyenkor az $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}+\binom{d}{2}+\binom{e}{2}$ összeg 198-cal egyenlő. 2 pont

Az $1,2,\ldots,20$ számok közül kettőt $\binom{20}{2}=190$-féleképpen lehet kiválasztani. 1 pont

Mivel az $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}+\binom{d}{2}+\binom{e}{2}$ összeg minimuma is nagyobb, mint ahányféleképpen 20 számból kiválasztható egy rendezetlen számpár, ezért bármennyi is legyen a, b, c, d és e értéke, a skatulyaelv miatt lesz két sor, ahol ugyanolyan helyzetű pontpár került kiválasztásra, ami azt jelenti, hogy keletkezik megfelelő téglalap. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Jelölje $f(n)$ azt a számot, ahányféleképpen az n pozitív egész felbontható – a tagok sorrendjének figyelembe vételével – pozitív páratlan számok összegére. Adjuk meg $f(n)$-t!

(*Mivel az összegben a tagok sorrendje számít, az* 5*-nek például a* $3+1+1$ *és az* $1+3+1$ *különböző felbontásai. Az* 5 *ötféleképpen bontható fel a fenti módon, ezek:* 5*;* $3+1+1$*;* $1+3+1$*;* $1+1+3$*;* $1+1+1+1+1$*, így* $f(5)=5$.) **7 pont**

Megoldás. Először egy lemmát bizonyítunk be (ami a későbbiekben fontos lesz).

Megjegyzés. A gyerekek jó eséllyel ezt a lemmát – ha egyáltalán bizonyítják – a későbbi bizonyításban, „mellékbizonyításként” teszik meg.

Lemma. Legyen $g(1)=g(2)=1$, és a további $n>2$ idexekre

– (ha páratlan n) $g(n+1)=g(n)+g(n-2)+g(n-4)+\ldots+g(1)$, illetve

– (ha páros n) $g(n+1) = g(n) + g(n-2) + g(n-4) + \ldots + g(2) + 1$.

Ekkor $g(n+2) = g(n+1) + g(n)$ (ha $n > 1$). (Azaz a sorozat a Fibonacci-sorozat.)

A lemma bizonyítása. Teljes indukcióval.

– Ha $n = 2$; 3;4 vagy 5, akkor $g(n+1)$-re:

$$g(2+1) = g(3) = g(2) + 1 = 1 + 1 = 2;$$
$$g(3+1) = g(4) = g(3) + g(1) = 2 + 1 = 3;$$
$$g(4+1) = g(5) = g(4) + g(2) + 1 = 3 + 1 + 1 = 5$$

és

$$g(5+1) = g(6) = g(5) + g(3) + g(1) = 5 + 2 + 1 = 8,$$

azaz teljesül a bázis állítás.

– Tegyük fel, hogy adott n-ig minden (akár páros, akár páratlan) indexű tagra igaz a fenti „összeg-rekurzió”.

– Megmutatjuk, hogy igaz $(n+1)$-re is.

– Ha $(n+1)$ páratlan, akkor

$$\begin{aligned} g(n+2) &= g(n+1+1) = g(n+1) + g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(1) = \\ &= g(n+1) + \underbrace{g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(1)}_{=g(n)} = \\ &= g(n+1) + g(n). \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(Az indukciós feltevés miatt).

– Ha pedig $(n+1)$ páros, akkor

$$\begin{aligned} g(n+2) &= g(n+1+1) = g(n+1) + g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(2) + 1 = \\ &= g(n+1) + \underbrace{g(n-1) + g(n-3) + \ldots + g(2) + 1}_{=g(n)} = \\ &= g(n+1) + g(n). \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(Szintén az indukciós feltevés miatt).

Azaz valóban igaz $g(n+2) = g(n+1) + g(n)$ (ha $n > 1$); és ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Most térjünk vissza az eredeti feladatra: $f(n)$ első pár értékét felírva:

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 1; \quad f(3) = 2; \quad f(4) = 3; \quad f(5) = 5.$$

Ezek alapján azt fogjuk igazolni, hogy $f(n)$ az $F(1) = F(2) = 1$; $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ (ha $n \geq 1$) képlettel megadott Fibonacci-sorozattal egyezik meg. Ehhez (a kezdőértékeink egyenlősége miatt) csak azt kell igazolnunk, hogy teljesül a következő rekurzió:

$$f(n+2) = f(n) + f(n+1) \qquad (\text{ha } n \geq 1).$$ 2 pont

A bizonyítást teljes indukcióval fogjuk elvégezni.

$f(1) = 1$ és $f(2) = 1$ (továbbá az első 5 indexre is megvizsgáltuk már a sorozatot.) Tegyük fel, hogy adott $(n+1)$-ig minden érvényes indexre az $f(n)$ sorozatunk teljesíti a fenti rekurziót.

Nézzük hogyan kaphatjuk $f(n+1)$-et a korábbi tagokból meg: vagy 1-gyel kezdjük az összegünket, vagy 3-mal vagy 5-tel … vagy az $(n+1)$-nél nem nagyobb legnagyobb páratlan számmal. Miután az összegünket 1-gyel vagy 3-mal vagy 5-tel … kezdtük, a „maradék” összeget $f(n+1-1) = f(n)$-, illetve $f(n+1-3) = f(n-2)$-, illetve $f(n+1-5) = f(n-4)$-, … féleképpen folytathatjuk. 1 pont

Innen adódik, hogy

- (ha páratlan n) $f(n+1) = f(n) + f(n-2) + f(n-4) + \ldots + f(1)$, illetve
- (ha páros n) $f(n+1) = f(n) + f(n-2) + f(n-4) + \ldots + f(2) + 1$ (ekkor a végén a „+1” az egy tagú $(n+1) = (n+1)$ felbontást jelenti). 2 pont

A két összegzés a Fibonacci-sorozat fent bebizonyított „ismert összegzési típusú képlete”.

Ezzel a feladatot megoldottuk, $f(n)$ valóban a Fibonacci-sorozat.

Megjegyzés. Ha valaki a lemmát nem bizonyította be, de egyértelműen „jól ismert tételként” hivatkozik rá; mert például a tanórán tanulta – a lemmánál korrekt bizonyításával kapható 2 ponttal ellentétben – kapjon 1 pontot. Ha nem hivatkozik ismert tételre, csak kimondja, hogy az eredmény a Fibonacci-sorozat, akkor a lemma bizonyításával kapható 2 pont helyett erre a részre 0 pontot kapjon.

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ax^2 + bx + c$ alakban megadott $f(x)$ és $g(x)$ másodfokú függvényeknél a főegyütthatók rendre 2 és -2. Mindkét függvény grafikonja áthalad a $(16;54)$, $(20;53)$ pontokon. Mennyi az $f(0) + g(0)$ értéke? **7 pont**

2. Legyen E az $ABCD$ négyzet BD átlójának tetszőleges pontja. Az AE egyenest tükrözzük az AB egyenesre. A kapott egyenes a CE egyenest az M pontban metszi.

a) Mi lesz az M pontok halmaza a síkon, ha E befutja a BD átlót?
b) Az E pont mely helyzetében lesz minimális az $AM \cdot CM$ szorzat értéke? **7 pont**

3. Egy kört 20 pont segítségével egyenlő hosszúságú ívekre osztunk fel, majd a pontokhoz az egyiktől elindulva az óramutató járásának megfelelően haladva az 1-től 20-ig terjedő számokat rendeljük hozzá. Ezután berajzoljuk a kör azon húrjait, amelyek olyan pontokat kötnek össze, amelyeknél a hozzájuk rendelt számok különbségének abszolútértéke egy prímszámmal egyenlő. Mennyi a berajzolt szakaszok által meghatározott háromszögek száma? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ax^2+bx+c alakban megadott $f(x)$ és $g(x)$ másodfokú függvényeknél a főegyütthatók rendre 2 és -2. Mindkét függvény grafikonja áthalad a $(16;54)$, $(20;53)$ pontokon. Mennyi az $f(0)+g(0)$ értéke? **7 pont**

Megoldás. Legyen $h(x)=f(x)+g(x)$ $(x\in\mathbf{R})$. Ekkor $h(x)$ elsőfokú függvény, és 1 pont

$$h(16)=f(16)+g(16)=54+54=108$$
$$h(20)=f(20)+g(20)=53+53=106. \qquad \text{1 pont}$$

Ha $h(x)=mx+b$, akkor

$$h(16)=16m+b=108$$
$$h(20)=20m+b=106. \qquad \text{2 pont}$$

Ebből

$$m=\frac{h(20)-h(16)}{20-16}=-\frac{1}{2} \qquad \text{1 pont}$$
$$b=h(16)-16m=108-16\left(-\frac{1}{2}\right)=116 \qquad \text{1 pont}$$

Ezt felhasználva:

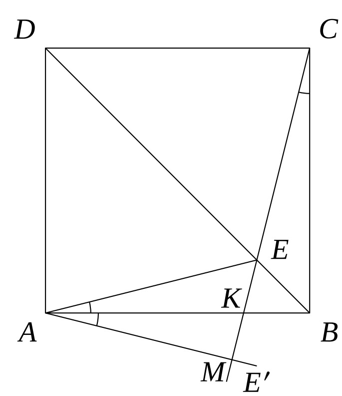
$$f(0)+g(0)=h(0)=b=116. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: **7 pont**

2. Legyen E az $ABCD$ négyzet BD átlójának tetszőleges pontja. Az AE egyenest tükrözzük az AB egyenesre. A kapott egyenes a CE egyenest az M pontban metszi.

a) Mi lesz az M pontok halmaza a síkon, ha E befutja a BD átlót?
b) Az E pont mely helyzetében lesz minimális az $AM\cdot CM$ szorzat értéke? **7 pont**

Megoldás. Jelölje K az AB és CM metszéspontját. Ha K az AB belső pontja, akkor:



A tengelyes szimmetria miatt $CBE\triangle \cong ABE\triangle$. 1 pont

Az egybevágóság, valamint az AB oldalra való tükrözés miatt

$$KCB\sphericalangle = BAE\sphericalangle = MAB\sphericalangle.$$ 1 pont

Mivel $MKA\sphericalangle = CKB\sphericalangle$ és $KAM\sphericalangle = BCK\sphericalangle$, ezért $AMK\triangle \sim CBK\triangle$, tehát

$$KBC\sphericalangle = AMK\sphericalangle = 90^\circ.$$ 1 pont

Ebből következik, hogy M illeszkedik az AC átló fölé rajzolt Thalész-körre. 1 pont

A Thalész-kör A-t tartalmazó félkör minden pontja megfelelő, beleértve a B és D végpontokat is. Ha pedig K az AD belső pontja, akkor mivel az AE egyenes tükörképe az AB-re, illetve az AD-re nézve is ugyanaz az egyenes (lévén AB és AD merőlegesek), ezért picit más betűzéssel az előző eset AC-re tengelyesen szimmetrikus ábráját kapjuk (ld. alább), tehát M ebben az esetben is illeszkedik a BD Thalész-körére. 1 pont

Mivel a szorzat egyik tényezője sem lehet negatív, ezért akkor minimális, ha valamelyik tényező nulla. Ez akkor következik be, ha az M pont egybeesik az A ponttal, azaz ha az E pont a BD és AC egyenesek metszéspontja. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy kört 20 pont segítségével egyenlő hosszúságú ívekre osztunk fel, majd a pontokhoz az egyiktől elindulva az óramutató járásának megfelelően haladva az 1-től 20-ig terjedő számokat rendeljük hozzá. Ezután berajzoljuk a kör azon húrjait, amelyek olyan pontokat kötnek össze, amelyeknél a hozzájuk rendelt számok különbségének abszolútértéke egy prímszámmal egyenlő. Mennyi a berajzolt szakaszok által meghatározott háromszögek száma? **7 pont**

Megoldás. Legyenek egy keletkező háromszög csúcsaihoz rendelt jelzőszámok a, b, c ($1 \leqslant c < b < a \leqslant 20$, $a, b, c \in \mathbf{N}^+$). Ekkor

$$a - b = p_1,$$
$$b - c = p_2,$$
$$a - c = p_3,$$

ahol p_1, p_2, p_3 prímszámok, és

$$p_3 = a - c = (a - b) + (b - c) = p_1 + p_2.$$ 1 pont

Figyelembe véve, hogy p_1, p_2, p_3 között kell lennie páros prímszámnak is, és a prímek közül egyedül a 2 páros, ezért a nagyságrend alapján p_1 vagy p_2 közül az egyik értéke 2. 1 pont

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $p_1 = 2$. Ekkor $p_3 = p_2 + 2$.

A 20-nál kisebb prímek a 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 és 19. Ezekhez 2-t hozzáadva a 3, 5, 11, 17 esetén kapunk prímet. Így $p_3 \in \{5, 7, 13, 19\}$. 2 pont

Mivel $a = c + p_3 \leqslant 20$, ezért

- $p_3 = 5$ esetén $c = 1, 2, \ldots, 15$,
- $p_3 = 7$ esetén $c = 1, 2, \ldots, 13$,

- $p_3 = 13$ esetén $c = 1, 2, \ldots, 7$,
- $p_3 = 19$ esetén $c = 1$. 2 pont

c és p_3 esetén a értéke meghatározott. Mivel p_1 és p_2 értéke felcserélhető, ezért bármely $(c;a)$ számpárhoz kétféle b érték tartozhat. Így a megfelelő háromszögek száma:

$$2(15+13+7+1) = 72.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitív számok, akkor

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(x+y)(y+z)} + \frac{z^2}{(x+z)(y+z)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Mely esetben áll fenn az egyenlőség? **7 pont**

2. Adott az O középpontú r sugarú k kör és annak egy $AB > r$ húrja. P az AB húr azon pontja, amelyre $AP = r$. A BP szakasz felezőmerőlegese a k kört a C és D pontokban metszi. A D és P pontokra illeszkedő egyenesnek és k-nak D-től különböző metszéspontja E. Bizonyítsuk be, hogy a CPE háromszög szabályos. **7 pont**

3. Egy körön kijelölünk 2022 különböző pontot, és mindegyikhez hozzárendelünk egy egész számot úgy, hogy mindegyik nagyobb, mint az óramutató járásával ellentétes irányban az őt megelőző két szám összege. Mennyi lehet a pontokhoz rendelt pozitív egészek számának maximuma? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitív számok, akkor

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(x+y)(y+z)} + \frac{z^2}{(x+z)(y+z)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Mely esetben áll fenn az egyenlőség? **7 pont**

Megoldás. A nevezők pozitívak, ha mindkét oldalt szorozzuk $4(x+y)(x+z)(y+z)$-vel, akkor a bizonyítandóval ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$4x^2(y+z) + 4y^2(x+z) + 4z^2(x+y) \geqslant 3(x+y)(x+z)(y+z)$$

1 pont

Zárójelfelbontás után:

$$4x^2y + 4x^2z + 4xy^2 + 4y^2z + 4xz^2 + 4yz^2 \geqslant 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz$$

Rendezve:

$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2 \geqslant 6xyz$$

2 pont

A pozitív xyz-vel elosztjuk mindkét oldalt, akkor megint az előzővel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x} \geqslant 6$$

$$\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) \geqslant 6$$

2 pont

Az egyes zárójelpárokban pozitív törtek, és azok reciprok értékei állnak, ezért mindegyik zárójelpárban lévő két tört összege legalább 2, ezért a bal oldalon álló kifejezés értéke legalább 6, ezt kellett belátni. 1 pont

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z$ teljesül. 1 pont

Összesen: 7 pont

Az $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2 \geqslant 6xyz$ egyenlőtlenség bizonyítása másképpen:

$$x^2y-2xyz+yz^2+xy^2-2xyz+xz^2+x^2z-2xyz+y^2z \geqslant 0$$

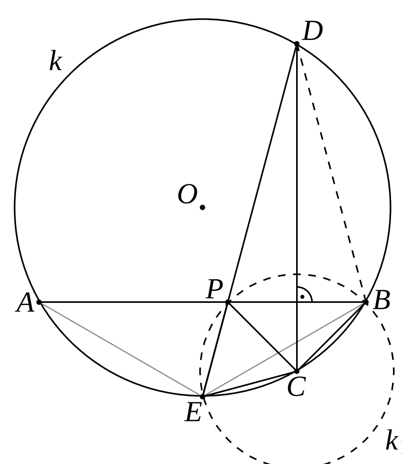
$$y(x-z)^2+x(y-z)^2+z(x-y)^2 \geqslant 0.$$

3 pont

A bal oldalon mindhárom tényező legalább nulla, az állítás igaz. 1 pont

2. Adott az O középpontú r sugarú k kör és annak egy $AB>r$ húrja. P az AB húr azon pontja, amelyre $AP=r$. A BP szakasz felezőmerőlegese a k kört a C és D pontokban metszi. A D és P pontokra illeszkedő egyenesnek és k-nak D-től különböző metszéspontja E. Bizonyítsuk be, hogy a CPE háromszög szabályos. **7 pont**

Megoldás.



A C és D pontok rajta vannak a PB szakasz felezőmerőlegesén, ezért $CP=CB$ és $CDB\sphericalangle = CDP\sphericalangle = CDE\sphericalangle$. 1 pont

Mivel a k körben az azonos nagyságú kerületi szögekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, ezért $CE=CB$. Így az E, P, B pontok rajta vannak a C középpontú CB sugarú k_1 körön. 1 pont

$APE\sphericalangle = DPB\sphericalangle$ (csúcsszögek) és $PAE\sphericalangle = BAE\sphericalangle = BDE\sphericalangle = BDP\sphericalangle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek). Ennek figyelembevételével $EPA\triangle \sim BDP\triangle$, és mivel $DP=DB$, ezért mindkét háromszög egyenlő szárú, tehát $AE=AP=r$. 1 pont

A k körben az r hosszúságú húrokhoz 60°-os középponti szög tartozik, vagyis $EOA\sphericalangle = 60^\circ$. 1 pont

A kerületi és középponti szögek tételét kétszer alkalmazva

– a k körben: $EBP\sphericalangle = EBA\sphericalangle = \frac{1}{2}EOA\sphericalangle = 30^\circ$, 1 pont

– a k_1 körben: $ECP\sphericalangle = 2EBP\sphericalangle = 60^\circ$. 1 pont

Így a CPE 60°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög, tehát szabályos. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy körön kijelölünk 2022 különböző pontot, és mindegyikhez hozzárendelünk egy egész számot úgy, hogy mindegyik nagyobb, mint az óramutató járásával ellentétes irányban az őt megelőző két szám összege. Mennyi lehet a pontokhoz rendelt pozitív egészek számának maximuma? **7 pont**

Megoldás. Legyenek a pontokhoz rendelt egész számok az egyiktől elindulva és az óramutató járása szerint haladva $a_0, a_1, {}_2, \ldots, a_{2021}$ és a ciklikus haladást figyelembe véve vezessük be az $a_{k+2022} = a_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ jelölést.

(a) Először azt fogjuk megmutatni, hogy a körön nem lehet két szomszédos nemnegatív egész szám. Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $a_{k-1} \geqslant 0$ és $a_k \geqslant 0$.

Ekkor a feladat feltételét is felhasználva $a_{k+1} > a_k + a_{k-1} \geqslant a_k$.

Így a_{k+1} is nemnegatív egész szám, és a korábbi gondolatmenetet egymás után ismételgetve $a_{k+2} > a_{k+1}$, majd $a_{k+3} > a_{k+2}$ és így haladva az $a_{k+2022} > a_{k+2021} > \ldots > a_{k+1} > a_k = a_{k+2022}$. Ellentmondáshoz jutottunk.

A kapott eredmény alapján tehát legfeljebb minden második szám lehet csak nemnegatív egész szám. 3 pont

(b) A továbbiakban – szintén indirekt bizonyítást alkalmazva – azt fogjuk megmutatni, hogy a nemnegatív egészek száma még ennyi sem lehet. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_{2k} \geqslant 0$ és $a_{2k+1} < 0$ minden $k \in \mathbf{Z}$ esetén. Ekkor a feladat feltétele és a feltevésünk alapján $a_3 > a_2 + a_1 \geqslant a_1$.

Analóg levezetéssel adódik, hogy $a_5 > a_3$, $a_7 > a_5$ és így tovább, amíg az $a_1 = a_{2023} > a_{2021} > \ldots > a_3 > a_1$. Ismét ellentmondásra jutottunk. 2 pont

Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy $\dfrac{2022}{2} = 1011$-nél több nemnegatív egész szám nem lehet a pontokhoz rendelt számok között, mivel akkor lenne közöttük szomszédos. Az *(a)* és *(b)* pontok alapján 1011 nemnegatív egésszel sem teljesíthető a feladat feltétele.

1010 pozitív és 1012 negatív számmal viszont megadható megfelelő elrendezés. Például az $a_0 - a_{2021}$ számok az alábbiak lehetnek:

$$-4043,\ 1,\ -4041,\ 1,\ -4039,\ 1,\ \ldots,\ -2025,\ 1,\ -2023,\ -2021.$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyen H a 2022 elemű $H = \{1;2;3;\ldots;2022\}$ halmaz. Legyen továbbá A_1, A_2, …, A_{2022} a H halmaz részhalmazainak egy olyan sorozata, hogy $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_{2021} \subseteq A_{2022} \subseteq H$.

- Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „*Róbert típusú részhalmazsorozat*”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_{2022}| < 2022$,
- Míg azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „*Gida típusú részhalmazsorozat*”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_{2022}| = 2022$.

Melyikből van több, a H halmaz Róbert típusú, vagy Gida típusú részhalmazsorozataiból? (Például az $A_1 = A_2 = \ldots = A_{2022} = \emptyset$ Róbert típusú, míg az $A_1 = A_2 = \ldots = A_{2020} = \emptyset$ és $A_{2021} = A_{2022} = \{1;2;3;\ldots;1010;1011\}$ Gida típusú részhalmazsorozat.) **7 pont**

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja O, a BC oldalhoz tartozó magasság talppontja D. A háromszög köréírt körének sugara egyenlő a BC oldalhoz hozzáírt körének sugarával. Az A-ból induló belső szögfelező a köréírt kört E-ben metszi. Igazoljuk, hogy AE és DO szakaszok metszéspontja a háromszög beírt körének középpontja! **7 pont**

3. Egy kör alakú futópályán 15 robotautó köröz állandó sebességgel egy közös irányba.

- Az első autó 1 perc alatt tesz meg egy teljes kört,
- a második autó $\frac{1}{2}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört,
- a harmadik autó $\frac{1}{3}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, …
- (általában az) i-edik autó $\frac{1}{i}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, és végül
- a 15-ödik autó $\frac{1}{15}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört.

Minden autóról minden pillanatban eldönthető, hogy melyik szektorban van.

A kör alakú pálya 17 egyenlő (azaz egyenként $\frac{360^\circ}{17}$-os középponti szögű) szektorra van felosztva.

Igazoljuk, hogy a robotautók tetszőleges kezdeti elhelyezkedése esetén van olyan időpont, amikor egyszerre hat különböző szektorban sincs egyetlen autó sem. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen H a 2022 elemű $H = \{1;2;3;\ldots;2022\}$ halmaz. Legyen továbbá A_1, A_2, …, A_{2022} a H halmaz részhalmazainak egy olyan sorozata, hogy $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_{2021} \subseteq A_{2022} \subseteq H$.

- Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „*Róbert típusú részhalmazsorozat*”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_{2022}| < 2022$,

– Míg azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ halmaz-2022-es „*Gida típusú részhalmazsorozat*”, ha $|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_{2022}| = 2022$.

Melyikből van több, a H halmaz Róbert típusú, vagy Gida típusú részhalmazsorozataiból? (Például az $A_1 = A_2 = \ldots = A_{2022} = \emptyset$ Róbert típusú, míg az $A_1 = A_2 = \ldots = A_{2020} = \emptyset$ és $A_{2021} = A_{2022} = \{1; 2; 3; \ldots; 1010; 1011\}$ Gida típusú részhalmazsorozat.) **7 pont**

1. megoldás. Általánosan n-elemű $H_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ halmazzal fogunk dolgozni.

Először számoljuk meg kicsi n-kre a H_n Gida típusú részhalmazsorozatait. Ha $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ezek száma rendre 1, 3, 10, 35 és 126, és ezek rendre megegyeznek $\binom{1}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{4}$ és $\binom{9}{5}$-tel; innen a sejtésünk, hogy n elemű halmaz esetén a Gida típusú részhalmazsorozatok száma $\binom{2n-1}{n}$. 1 pont

Ennek bizonyítása a következőképpen történhet. Jelölje b_i azt a számot, ahány A_1, A_2, ..., A_n halmazban az $i \in H_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ szám előfordul. Mivel $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n$, ezért ha $b_i \neq 0$, akkor az i szám pontosan az utolsó b_i halmazban (A_{n+1-b_i}-től A_n-ig) fordul elő. Emiatt az A_1, A_2, ..., A_n halmazrendszert egyértelműen tudom kódolni a b_1, b_2, ..., b_n számokkal. A definiáló feltételek miatt minden i-re $b_i \geq 0$ és $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = n$. 1 pont

A megfelelő b_1, b_2, ..., b_n szám-n-esek számát megkaphatom az alábbi módon is: válasszunk összesen $2n-1$ darab jelet, n darab $\bigcirc$-t és $n-1$ darab $|$-t; és írjuk fel valamilyen sorrendben a jeleket egymás után. b_1 legyen a legelső $|$ előtti $\bigcirc$ jelek száma (ez persze esetleg 0), b_n legyen a legutolsó (azaz $(n-1)$-edik) $|$ utáni $\bigcirc$ jelek száma (ez persze esetleg 0); továbbá b_i $(1 < i < n)$ legyen az $(i-1)$-edik és az i-edik $|$ közötti $\bigcirc$ jelek száma. Ez nyilván egy kölcsönösen egyértelmű leképezés a megfelelő $|$, $\bigcirc$ sorozatok és a megfelelő b_1, b_2, ..., b_n szám-n-esek között, így ezek száma $\binom{2n-1}{n}$ és ezt akartuk bizonyítani.

A $\binom{2n-1}{n}$ képlet bizonyításáért 2 pont

Ezután lássuk a Róbert típusú halmazsorozatok számát. Némi számolás után azt láthatjuk, hogy ezek száma is $\binom{2n-1}{n}$. Ezt fogjuk (az előzőhöz nagyon hasonlóan) bizonyítani.

Jelölje c_i azt a számot, ahány $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazban az $i \in H_n = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ szám előfordul. Az előző ponthoz hasonlóan az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazrendszert egyértelműen tudom kódolni a c_1, c_2, ..., c_n számokkal. A definiáló feltételek miatt minden i-re $c_i \geq 0$ és $c_1 + c_2 + \ldots + c_n \leq n - 1 < n$. Vezessük be továbbá a $c_{n+1} = n - 1 - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$ „mennyiséget”. Nyilván $0 \leq c_{n+1} < n$ szintén, és c_{n+1} adott c_1, c_2, ..., c_n esetén „egyértelműen kódolt”.

A megfelelő c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1} szám-$(n+1)$-esek számát megkaphatom az alábbi módon is: válasszunk összesen $2n-1$ darab jelet, $n-1$ darab $\bigcirc$-t és n darab $|$-t; és írjuk fel valamilyen sorrendben a jeleket egymás után. c_1 legyen a legelső $|$ előtti $\bigcirc$ jelek száma (ez persze esetleg 0), c_{n+1} legyen a legutolsó (azaz n-edik) $|$ utáni $\bigcirc$ jelek száma (ez persze esetleg 0); továbbá

c_i $(1 < i \leq n)$ legyen az $(i-1)$-edik és az i-edik $|$ közötti $\bigcirc$ jelek száma. Ez nyilván egy kölcsönösen egyértelmű leképezés a megfelelő $|$, $\bigcirc$ sorozatok és a megfelelő $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ szám-$(n+1)$-esek között, így ezek száma $\binom{2n-1}{n}$.

Egy megfelelő c_1, c_2, …, c_n, c_{n+1} szám-$(n+1)$-esből pedig úgy kapom meg a megfelelő c_1, c_2, …, c_n szám-n-est, hogy egyszerűen „elhagyom” az utolsó c_{n+1} tagot. Mivel c_{n+1} adott c_1, c_2, …, c_n esetén egyértelműen meghatározott volt, ezért itt is kölcsönösen egyértelmű leképezés van a megfelelő szám-$(n+1)$-esek és a megfelelő szám-n-esek között, azaz ezek száma is $\binom{2n-1}{n}$.

De ezzel megvagyunk, mert akkor adott n esetén H_n Róbert típusú halmazrendszereinek a száma is $\binom{2n-1}{n}$.

A Róbert részhalmazsorozatoknál a $\binom{2n-1}{n}$ képlet bizonyításáért 2 pont

Azaz a H halmaz Róbert típusú és Gida típusú részhalmazsorozatai ugyanannyian vannak. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Itt is általánosan n-elemű $H_n = \{1;2;3;\ldots;n\}$ halmazzal fogunk dolgozni, és itt is először a Gida típusú részhalmazsorozatok számát adjuk meg.

A fent leírtak alapján ez a feladat pontosan ugyanaz, mint ha az n-elemű $\{1;2;3;\ldots;n\}$ halmaz elemeiből képeznénk n-elemű multihalmazokat (azaz olyan halmazokat, amelyekben egy egy elem többször is előfordulhat), ugyanis ha b_i a multihalmazban az $1 \leq i \leq n$ elem „ismétlődésének a száma”, akkor – a fentiek szerint – éppen az utolsó b_i darab A_k halmaznak az eleme az i (A_{n+1-b_i}-től A_n-ig).

A megfelelő multihalmazok száma (n elem n-edosztályú ismétléses kombinációi – közismert képlet) pedig $\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$. 3 pont

Hasonlóan az olyan Róbert típusú halmazrendszerek száma, ahol $|A_1|+|A_2|+|A_3|+\ldots+|A_n| = k < n$ (azaz éppen k-elemű a „multihalmaz”, vagyis n elem k-adosztályú ismétléses kombinációi) pedig $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

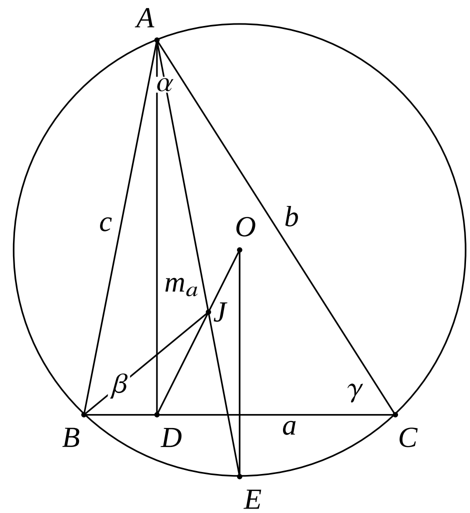
Ezeket kell összesíteni minden $0 \leq k < n$-re; az összes Róbert típusú halmazrendszerek száma tehát $\binom{n+0-1}{n-1} + \binom{n+1-1}{n-1} + \binom{n+2-1}{n-1} + \ldots + \binom{n+(n-1)-1}{n-1}$ ez pedig a binomiális együtthatók körében ismert összefüggés („zokni-szabály”) alapján éppen $\binom{2n-1}{n}$. 3 pont

Azaz a H halmaz Róbert típusú és Gida típusú részhalmazsorozatai ugyanannyian vannak. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja O, a BC oldalhoz tartozó magasság talppontja D. A háromszög köréírt körének sugara egyenlő a BC oldalhoz hozzáírt körének sugarával. Az A-ból induló belső szögfelező a köréírt kört E-ben metszi. Igazoljuk, hogy AE és DO szakaszok metszéspontja a háromszög beírt körének középpontja! **7 pont**

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit.



Mivel az A-ból induló szögfelező felezi a BC ívet, a BC oldal felezőmerőlegese az E pontban metszi a háromszög köré írható kört. 1 pont

Legyen DO és AE metszéspontja J. Bebizonyítjuk, hogy BJ a háromszög B-nél levő szögének felezője. Ezt elegendő belátni, hiszen AE a másik szögfelező, ezért J a két szögfelező metszéspontja lesz, tehát a beírt kör középpontja. 1 pont

AD és OE párhuzamos, ezért ADJ és EOJ háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{AJ}{JE} = \frac{AD}{OE} = \frac{m_a}{\frac{T}{s-a}} = \frac{b+c-a}{a},$$

ahol T a háromszög területét jelöli, s pedig a félkerületet. Itt kihasználtuk, hogy a köréírt kör sugara egyenlő a BC oldalhoz hozzáírt kör sugarával. 1 pont

Ebből $AJ \cdot a = JE \cdot b + JE \cdot c - JE \cdot a$, azaz $(AJ + JE) \cdot a = JE \cdot (b+c)$.

Írjuk fel az $ABEC$ húrnégyszögben a Ptolemaiosz-tételt, használjuk ki, hogy $BE = EC$:

$$(AJ + JE) \cdot a = BE \cdot b + EC \cdot c = BE \cdot (b+c).$$

Ezt az előzővel összehasonlítva $BE = JE$. 2 pont

A BEJ egyenlő szárú háromszögben E-nél γ van, ezért B-nél $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, valamint $CBE\sphericalangle$ szög $\frac{\alpha}{2}$ (itt kétszer használtuk, hogy ugyanolyan hosszú ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak), ahonnan $JBC\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$. Azaz BJ szögfelező, ezért J két belső szögfelező metszéspontja, tehát a beírt kör középpontja. 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy kör alakú futópályán 15 robotautó köröz állandó sebességgel egy közös irányba.

– Az első autó 1 perc alatt tesz meg egy teljes kört,

– a második autó $\frac{1}{2}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört,

– a harmadik autó $\frac{1}{3}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, ...

– (általában az) i-edik autó $\frac{1}{i}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört, és végül

– a 15-ödik autó $\frac{1}{15}$ perc alatt tesz meg egy teljes kört.

Minden autóról minden pillanatban eldönthető, hogy melyik szektorban van.

A kör alakú pálya 17 egyenlő (azaz egyenként $\frac{360^\circ}{17}$-os középponti szögű) szektorra van felosztva.

Igazoljuk, hogy a robotautók tetszőleges kezdeti elhelyezkedése esetén van olyan időpont, amikor egyszerre hat különböző szektorban sincs egyetlen autó sem. **7 pont**

Megoldás.

Legyen az első autó sebessége 1 (egység). Ekkor a feltételek alapján az i-edik autó sebessége i. Tekintsük a start (vagy „egy start”) időpontot. Jelölje a_i azt a szektort, amelyikben ebben a kezdeti időpontban tartózkodott az i-edik autó, és válasszuk t-nek azt az időt, amennyi idő alatt az első autó pontosan egy szektornyi utat megtesz (azaz $t = 1/17$ perc).

Tekintsük a $0 \cdot t$ (ez a start időpont), továbbá az $1 \cdot t, 2 \cdot t, \ldots, k \cdot t, \ldots, 16 \cdot t$ időpontokat. A feltételek (és a bevezetett változók) alapján az i-edik autó a $k \cdot t$ időpontban (a továbbiakban csak „a k-adik időpontként” hivatkozunk rá) az $a_i + i \cdot k \pmod{17}$ szektorban van. 1 pont

Jelentse azt a továbbiakban, hogy az „i-edik és a j-edik ($i \neq j$) autó *találkozik* a k-adik időpontban”, hogy az i-edik és a j-edik autó a k-adik időpontban egy szektorban van. Ez nyilván azt jelenti, hogy $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{17}$.

A kongruenciát rendezve azt kapjuk, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy $a_i - a_j \equiv k \cdot (j - i) \pmod{17}$. Mivel 17 prím, és tetszőleges $1 \leqq i \neq j \leqq 15$ i és j pár esetén a 17 és $(j - i)$ relatív prímek, ezért (k-t tekintve ismeretlennek) az $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{17}$ kongruenciának pontosan egy megoldása van a $k = 0, 1, \ldots, 16$ számok között. 2 pont

Azaz az autóknak (minden autó minden másikkal pontosan egyszer találkozik) összesen

$$\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

találkozójuk van a megfelelő 17 időpont alatt. Mivel $\frac{105}{17} \approx 6{,}18 > 6$, emiatt – a skatulyaelv szerint – van olyan k időpont, amikor legalább 7 darab találkozó van. Tekintsük az egyik ilyen k időpontot. 2 pont

Indirekt tegyük fel, hogy ebben a k időpontban legfeljebb 5 üres szektor van. Ha minden autó külön szektorban lenne (0 darab találkozóval), akkor összesen 2 üres szektor lenne; ennek feleltessük meg az $(1;1;1;\ldots;1;1;0;0)$ „rendezett szektorsorozatot”. Mivel legfeljebb 5 üres szektor van, ezért a $(1;1;1;\ldots;1;1;0;0)$ rendezett sorozatból legfeljebb az utolsó 3 darab 1-est helyezhetjük át, azaz a lehetséges pontosan 5 üres szektoros esetek „rendezett szektorsorozatai”: $(4;1;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$, $(3;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ és $(2;2;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$. Nézzük meg, hogy ezek az esetek hány találkozót jelentenek:

– A $(4;1;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ összesen $\binom{4}{2} = 6 < 7$ találkozót jelent;

– a $(3;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ összesen $\binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 3 + 1 = 4 < 7$ találkozót jelent; és

– a $(2;2;2;1;\ldots;1;1;0;0;0;0;0)$ összesen $3\cdot\binom{2}{2}=3<7$ találkozót jelent.

Ezek mindegyike kevesebb, mint 7 találkozót jelent. Nyilvánvaló módon, ha ötnél még kevesebb szektor lenne üres, akkor sem lehetne 7, vagy annál több találkozó. 1 pont

Mivel öt üres szektor esetén nem jöhet létre a megfelelő k-adik időpontban 7 darab találkozó, ezért a k-adik időpontban legalább 6 darab üres szektor van. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**