Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2020/2021-es tanév

Kezdők és Haladók
I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

A verseny a Nemzeti Tehetség Program, az Emberi Erőforrások Minisztériuma és
az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával
az NTP-TMV-M-20-B-0009 azonosító számú pályázat alapján valósul meg.

MINISZTERELNÖKSÉG

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Hányféle olyan háromjegyű szám létezik, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyenlő? **6 pont**

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre igaz, hogy n darab számot kiválasztva az első 2020 pozitív egész szám közül, biztosan lesz köztük kettő, amelyek különbsége 4? **6 pont**

3. Egy szög csúcsa az A pont, szárai s_1 és s_2. Felvesszük a szög s_1 szárán a B, C, az s_2 szárán a D, E pontokat úgy, hogy $AB = BD = DC = CE = EA$. Hány fokos a szög? **6 pont**

4. Adjuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy ha az n, $n+4$ és $n+8$ számok pozitív osztóinak számát összeadjuk, hatot kapunk eredményül. (Például $n = 10$ esetén a 10; 14; 18 számhármasnál az osztók számának összege $4+4+6 = 14$.) **6 pont**

5. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írtunk. Elérhető-e, hogy a táblázat minden eleme 0 legyen, ha csak az alábbi lépések megengedettek?

- Egy tetszőleges sor minden elemét megszorozzuk 2-vel.
- Egy tetszőleges oszlop minden eleméből kivonunk 1-et. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Hányféle olyan háromjegyű szám létezik, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyenlő? **6 pont**

Megoldás. A számban nem szerepelhet a 0, hiszen akkor a számjegyek szorzata 0 lenne. 1 pont
Legyen a számban szereplő legnagyobb számjegy x.
Ekkor a számjegyek összege legfeljebb $3x$, így szorzata is legfeljebb $3x$, tehát a másik két számjegy szorzata legfeljebb 3. Tehát a másik két számjegy az 1, 1; 1, 2; 1, 3 lehetőségek közül választható ki. 2 pont
x, 1, 1 számjegyek esetén $x+1+1 = x \cdot 1 \cdot 1$; $x+2 = x$, ez lehetetlen.
x, 1, 2 számjegyek esetén $x+1+2 = x \cdot 1 \cdot 2$; $x+3 = 2x$; $x = 3$, ez jó megoldás.
x, 1, 3 számjegyek esetén $x+1+3 = x \cdot 1 \cdot 3$; $x+4 = 3x$; $x = 2$, ez ellentmond annak, hogy x a legnagyobb számjegy. 1 pont
Tehát a számban szereplő számjegyek az 1, 2, 3, 1 pont
belőlük 6 háromjegyű szám készíthető, azaz 6 olyan háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyenlő. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Ha a tanuló megtalálja az 1, 2, 3 számjegyeket és a belőlük képezhető hat számot, de nem indokolja, hogy nincs több megoldás, akkor összesen 2 pontot kaphat.

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre igaz, hogy n darab számot kiválasztva az első 2020 pozitív egész szám közül, biztosan lesz köztük kettő, amelyek különbsége 4? **6 pont**

Megoldás. A számhalmaz, amiből a számokat kiválasztjuk: $A = \{1;2;3;\ldots;2020\}$.

Ha két egész szám különbsége 4, akkor megegyezik a 4-es maradékuk, ezért érdemes a 4-es maradékokat vizsgálni. Mivel 2020 osztható 4-gyel, ezért 505-505 darab 4-gyel osztva 0, 1 , 2, illetve 3 maradékot adó pozitív egész van 2020-ig. 1 pont

Ha a halmaz 1013 elemét választjuk ki, akkor (a skatulyaelv alapján) biztosan lesz olyan 4-es maradék, amiből legalább 254 fordul elő. 1 pont

Ekkor viszont biztosan lesz két olyan szám, amelyek különbsége 4, hiszen ellenkező esetben legalább 8 lenne köztük a különbség, és emiatt a legkisebb és legnagyobb között legalább $253 \cdot 8 = 2024$ lenne a különbség, ami nem lehet. 1 pont

Az A halmazból kiválasztható 1012 elem úgy, hogy ne legyen köztük két olyan, amelyek különbsége 4. 1 pont

Vegyük a $8k+m$ alakú számokat, ahol $k = 0,1,2,\ldots,252$, illetve $m = 1,2,3,4$. Könnyen belátható, hogy ez a konstrukció megfelelő. 1 pont

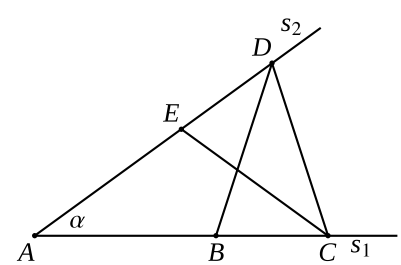
Tehát a legkisebb megfelelő n érték az 1013. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Egy szög csúcsa az A pont, szárai s_1 és s_2. Felvesszük a szög s_1 szárán a B, C, az s_2 szárán a D, E pontokat úgy, hogy $AB = BD = DC = CE = EA$. Hány fokos a szög? **6 pont**

Megoldás.

Ábra: 1 pont



Az ABD és az AEC háromszögek egybevágó egyenlő szárú háromszögek, mert a száraik egyenlő hosszúak, és az egyik alapon nyugvó szögük (α) egyenlő. Ebből következik, hogy a szögeik

$$BAD\sphericalangle = BDA\sphericalangle = EAC\sphericalangle = ECA\sphericalangle = \alpha,$$

valamint $AEC\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$. 2 pont

Ez utóbbi két szög kiegészítő szöge, $DEC\sphericalangle$ és $CBD\sphericalangle = 2\alpha$. ECD és BDC egybevágó egyenlő szárú háromszögek, így a szögeik $DEC\sphericalangle = EDC\sphericalangle = CBD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 2\alpha$. 2 pont

Az ACD háromszögben $ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 2\alpha$, és mivel $CAD\sphericalangle = \alpha$, így a háromszögben a belső szögek összege $5\alpha = 180^\circ$, azaz $\alpha = 36^\circ$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

4. Adjuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy ha az n, $n+4$ és $n+8$ számok pozitív osztóinak számát összeadjuk, hatot kapunk eredményül. (Például $n = 10$ esetén a 10; 14; 18 számhármasnál az osztók számának összege $4+4+6 = 14$.) **6 pont**

Megoldás. Megmutatjuk, hogy összesen két ilyen pozitív egész van: $n = 1$, valamint $n = 3$.

$n = 1$ megoldás, mert az 1; 5; 9 számhármast tekintve az osztók számának összege $1+2+3=6$. 1 pont

Ha $n > 1$, akkor osztóinak száma legalább kettő, és pontosan akkor kettő, ha n prím. 1 pont

Ha $n > 1$ esetén teljesül, hogy az n, $n+4$ és $n+8$ számok pozitív osztóinak összege 6, akkor n, $n+4$ és $n+8$ mind prímek. 1 pont

Az n, $n+4$ és $n+8$ számok csak akkor lehetnek mind prímek, ha $n = 3$, hiszen bármilyen n pozitív egész szám esetén a három szám 3-mal vett osztási maradékai 0; 1; 2 vagy 1; 2; 0 vagy 2; 0; 1, azaz közülük pontosan egy szám osztható 3-mal. Ez a 3-mal osztható szám csak akkor lehet prím, ha maga a 3. Mivel n pozitív, így az $n+4$ és $n+8$ nagyobb, mint 3. 1 pont

$n = 3$ valóban megoldás, hiszen a 3; 7; 11 számhármas minden tagja prím, tehát az osztók számának összege valóban $2+2+2=6$. 1 pont

Tehát két megoldás van: $n = 1$, valamint $n = 3$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

5. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írtunk. Elérhető-e, hogy a táblázat minden eleme 0 legyen, ha csak az alábbi lépések megengedettek?

- Egy tetszőleges sor minden elemét megszorozzuk 2-vel.
- Egy tetszőleges oszlop minden eleméből kivonunk 1-et. **10 pont**

Megoldás. Igen, a táblázat elemei nullázhatók, például a következő stratégiát követve: 1 pont

A táblázat elemeit oszloponként, tetszőleges sorrendben (például az első oszloptól indulva, balról jobbra) haladva változtatjuk nullára. Egy oszlop beállítása során másik oszlophoz nem nyúlunk, és csak akkor lépünk tovább a következőre, ha a jelenlegi oszlopnak már minden eleme nulla. A csupa 0 oszlop elemei sorműveletek hatására nem változnak meg. Tehát elég azt megmutatnunk, hogyan változtassuk nullára az első oszlop elemeit – a módszer működni fog a többire is. 2 pont

Kezdjük el csökkenteni az első oszlop elemeit mindaddig, míg valamelyik elem 1 nem lesz! 1 pont

Ha mindegyik elem 1, akkor még egy csökkentéssel nullázhatjuk az oszlopot. 1 pont

Ha vannak az oszlopban 1-es, illetve 1-estől különböző számok is, akkor duplázzuk meg az 1-esek sorát, majd csökkentsük az oszlopunk minden számát 1-gyel! 2 pont

Ezzel az oszlopban található 1-esesek továbbra is 1-esek maradnak, az összes többi szám viszont 1-gyel csökken. 2 pont

Mivel pozitív egész számok alkotják a táblázatot, ezért véges sok lépés után biztosan elérjük azt az állapotot, amikor az oszlop minden eleme 1 lesz. 1 pont

Ezután az oszlop elemeit eggyel csökkentve elértük, hogy minden elem nulla legyen.

Megjegyzés: Ha a tanuló csak konkrét példákon mutatja be a megoldást, általános elv leírása nélkül, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: **10 pont**

Kezdők I–II. kategória 2. és III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az összes pozitív egész n számot, amely esetén $4n^2+3n+7$ négyzetszám. **6 pont**

2. Az ABC háromszögben $AB=3\cdot BC$. P és Q az AB oldal azon pontjai, amelyekre $AP=PQ=QB$. Legyen F az AC oldal felezőpontja. Határozzuk meg a $QFP\sphericalangle$ nagyságát. **8 pont**

3. A tic-tac-toe (vagy ix-ox) játékban két játékos felváltva tesz $\times$, illetve $\bigcirc$ jelet egy 3×3-as táblára. Az nyer, akinek sikerül egy vonalban három azonos jelet elhelyeznie, vízszintes, függőleges vagy átlós irányban. Hány különböző olyan játékmenet létezik, amelyben $\times$ kezd, és a játszma döntetlennel végződik? (Két játékmenetet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik lépésben máshova kerül jel a két játékban.) **8 pont**

4. Egy teniszversenyen vegyesen junior és felnőtt korú versenyzők is indultak. Minden résztvevő a többi játékos mindegyikével pontosan egy mérkőzést játszott. A torna végén kiderült, hogy mindenki elveszítette legalább egyik mérkőzését, és minden felnőtt eredménylistájában különböző számú vereség szerepelt. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan junior korú versenyző, aki felnőtt ellen is szerzett győzelmet. **8 pont**

5. Egy $n\times n$-es táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írtunk. A táblán az alábbi változtatások hajthatók végre:

- egy tetszőleges sor minden elemét megszorozzuk 2-vel,
- egy tetszőleges oszlop minden eleméből kivonunk 1-et.

Az engedélyezett lépések tetszőleges számú alkalmazásával elérhető-e, hogy a táblázat minden mezőjébe 0 kerüljön? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az összes pozitív egész n számot, amely esetén $4n^2+3n+7$ négyzetszám. **6 pont**

1. megoldás. Nyilvánvaló, hogy minden n pozitív egész szám esetén:

$$(2n)^2=4n^2<4n^2+3n+7.$$ 1 pont

Továbbá minden n pozitív egész szám esetén $4n^2+3n+7<4n^2+8n+4=(2n+2)^2$, 1 pont

hiszen az egyenlőtlenséget ekvivalens módon átrendezve a $3<5n$ egyenlőtlenséget kapunk, ami minden pozitív egész n-re igaz. 1 pont

Ezért, mivel a $(2n)^2<4n^2+3n+7<(2n+2)^2$ fennáll minden pozitív egész n esetén, 1 pont így a kifejezés csak úgy lehet négyzetszám, ha $4n^2+3n+7=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$. 1 pont

Ezt az egyenletet rendezve és megoldva kapjuk hogy $n=6$. Ekkor $4\cdot 36+3\cdot 6+7=169=13^2$, valóban négyzetszám. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás. Tegyük fel, hogy van olyan k egész szám, amelyre $4n^2+3n+7=k^2$. 1 pont

Rendezve a kifejezést $3n+7=k^2-4n^2=(k-2n)(k+2n)$, vagyis $(3n+7)$-et két természetes szám szorzataként kell felírni. 1 pont

Mivel $k-2n<k+2n$, vizsgáljuk, milyen lehetséges értékek jönnek szóba $(k-2n)$-re.

Ha $k-2n=1$, azaz $k+2n=(k-2n)+4n=1+4n$, akkor $3n+7=(k-2n)(k+2n)=4n+1$, ami csak akkor teljesül, ha $n=6$, és ez valóban megoldása a feladatnak. 1 pont

Tovább vizsgálódva nem találunk több megoldást, ezért felírjuk általánosan:

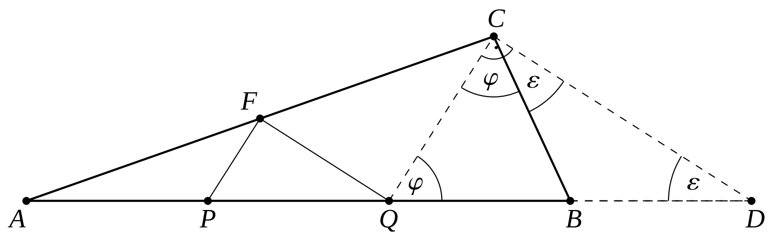
Ha $k-2n\geq 2$, akkor $k+2n=(k-2n)+4n\geq 2+4n$, ezért a szorzatuk legalább $4+8n$. Ezek szerint annak kellene teljesülnie, hogy $3n+7\geq 4+8n$, azaz hogy $3\geq 5n$. 2 pont

Mivel azonban $n\geq 1$, ez semmilyen n-re sem teljesülhet. Tehát az egyetlen megoldás az $n=6$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Az ABC háromszögben $AB=3\cdot BC$. P és Q az AB oldal azon pontjai, amelyekre $AP=PQ=QB$. Legyen F az AC oldal felezőpontja. Határozzuk meg a $QFP\sphericalangle$ nagyságát. **8 pont**

Megoldás.



Hosszabbítsuk meg a háromszög AB oldalát a B csúcson túl a BC oldal hosszával, és a kapott pontot jelöljük D-vel. 2 pont

Ekkor a feladat feltételei alapján:

$$AP=PQ=QB=BD=BC.$$

A QBC és CBD egyenlő szárú háromszögek alapján:

$$BCQ\sphericalangle=CQB\sphericalangle=\varphi \qquad \text{és} \qquad DCB\sphericalangle=BDC\sphericalangle=\varepsilon.$$

Ezt figyelembe véve a QDC háromszögben:

$$180^\circ=BDC\sphericalangle+DCB\sphericalangle+BCQ\sphericalangle+CQB\sphericalangle=2(DCB\sphericalangle+BCQ\sphericalangle)=2DCQ\sphericalangle,$$

amiből $DCQ\sphericalangle=90^\circ$. 3 pont

(Ugyanehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha észrevesszük, hogy $BQ=BD=BC$ alapján B a QDC háromszög körülírt körének középpontja. Ekkor a Thálesz-tétel megfordítása alapján adódik, hogy a QDC háromszög derékszögű.)

Az AQC háromszögben PF középvonal, ezért $PF \parallel QC$. Hasonlóképpen az ADC háromszögben QF középvonal, emiatt $QF \parallel DC$. 2 pont

A megállapított párhuzamosságok figyelembevételével $QFP\sphericalangle = DCQ\sphericalangle = 90^\circ$ (egyállású szögek). Tehát a keresett szög nagysága 90°. 1 pont

Összesen: **8 pont**

3. A tic-tac-toe (vagy ix-ox) játékban két játékos felváltva tesz $\times$, illetve $\bigcirc$ jelet egy 3×3-as táblára. Az nyer, akinek sikerül egy vonalban három azonos jelet elhelyeznie, vízszintes, függőleges vagy átlós irányban. Hány különböző olyan játékmenet létezik, amelyben $\times$ kezd, és a játszma döntetlennel végződik? (Két játékmenetet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik lépésben máshova kerül jel a két játékban.) **8 pont**

Megoldás. Először számoljuk össze, hogy hányféle döntetlen „végállás” van!

Ekkor a játék során összesen 5 darab $\times$ és 4 darab $\bigcirc$ jel kerül a táblára.

$\times$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
$\bigcirc$	$\times$	$\times$
$\times$	$\times$	$\bigcirc$

1. ábra

$\times$	$\bigcirc$	$\times$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\times$
$\times$	$\times$	$\bigcirc$

2. ábra

$\times$	$\times$	$\bigcirc$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\times$
$\times$	$\times$	$\bigcirc$

3. ábra

Ha $\times$ van középen, akkor a maradék négy $\times$ jel közül csak pontosan kettő kerülhet sarokra és pontosan kettő oldalra, hiszen ellenkező esetben lenne két „szemközti” (a középpontra szimmetrikusan elhelyezkedő) $\times$. Sem a két sarokban, sem a két oldalon elhelyezkedő $\times$ nem lehet egymással szemközti. Továbbá az oldalakon elhelyezkedő $\times$ jelek közül egyik sem kerülhet a sarkokon elhelyezkedő $\times$ jelek közé. Ezek alapján csak az 1. ábrán látható, vagy az abból egybevágósági transzformációval megkapható elrendezés lehetséges. A sarkokba négyféleképpen kerülhet a két $\times$, a maradék két $\times$ helyét ezután még kétféleképpen választhatjuk ki. Ez eddig tehát $4 \cdot 2 = 8$ lehetséges végállás. 2 pont

Ha $\bigcirc$ van középen, akkor a maradék három $\bigcirc$ jelből egy vagy kettő kerülhet a sarokba. Az előbbi esetben csak a 2. ábrán látható, illetve azzal egybevágó elrendezések lehetségesek. Ilyenből is 4 van, hiszen a $\bigcirc$ jelet tartalmazó sarokkal nem érintkező oldalakra mindenképpen kell kerülnie egy-egy $\bigcirc$ jelnek ahhoz, hogy ne legyen három $\times$ egy vonalban. Ilyen elrendezésből összesen 4 van. A fentiekhez hasonlóan gondolkodva látható, hogy amikor kettő $\bigcirc$ jel van a sarokban, akkor pedig csak a 3. ábrán látható, illetve azzal egybevágó elrendezések lehetségesek, ilyenből is 4 van. 2 pont

Így összesen $8 + 4 + 4 = 16$ lehetséges végállás van. 1 pont

Adott végállásba $5! \cdot 4! = 2880$-féleképpen lehet eljutni (csak a két játékos lépéseinek sorrendjét változtathatjuk meg). 2 pont

Összesen tehát a $16 \cdot 2880 = 46\,080$ döntetlennel végződő játékmenet létezik. 1 pont

Összesen: **8 pont**

4. Egy teniszversenyen vegyesen junior és felnőtt korú versenyzők is indultak. Minden résztvevő a többi játékos mindegyikével pontosan egy mérkőzést játszott. A torna végén kiderült, hogy mindenki elveszítette legalább egyik mérkőzését, és minden felnőtt eredménylistájában különböző számú vereség szerepelt. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan junior korú versenyző, aki felnőtt ellen is szerzett győzelmet. **8 pont**

Megoldás. Legyenek a versenyen résztvevő juniorok $j_1, j_2, \ldots, j_n$ ($n \in \mathbb{N}^+$), a felnőttek pedig $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ($m \in \mathbb{N}^+$), és a feladat állításával ellentétesen tegyük fel, hogy a juniorok egyike sem nyert a felnőttek ellen mérkőzést 1 pont

Ekkor a felnőttek mindegyike a vereségeit csak azonos korosztályhoz tartozó társai ellen szerezhette. 1 pont

Minden felnőtt $m-1$ esetben játszott felnőtt vetélytársaival, ezért ezeken a mérkőzéseken 0, 1, 2, $\ldots$, $m-1$ számú vereséget gyűjthetett össze. 2 pont

Mivel a feladat egyik feltétele kizárja azt az esetet, hogy valaki veretlenül zárja a tornát, ezért a felnőttek által szerzett vereségek száma csak az 1, 2, $\ldots$, $m-1$ értékek közül kerülhetett ki. 2 pont

Mivel a vereségekre felsorolt értékek száma kisebb, mint a versenyen induló felnőttek száma, ezért a skatulya-elv értelmében kellett lennie legalább két olyan felnőttnek, akik azonos számú vereséget gyűjtöttek össze. Ellentmondáshoz jutottunk, így feltevésünkkel ellentétben volt olyan junior korú versenyző, aki a torna során felnőttet győzött le. 2 pont

Összesen: **8 pont**

5. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írtunk. A táblán az alábbi változtatások hajthatók végre:

- egy tetszőleges sor minden elemét megszorozzuk 2-vel,
- egy tetszőleges oszlop minden eleméből kivonunk 1-et.

Az engedélyezett lépések tetszőleges számú alkalmazásával elérhető-e, hogy a táblázat minden mezőjébe 0 kerüljön? **10 pont**

Megoldás. Igen, a táblázat elemei nullázhatók, például a következő stratégiát követve: 1 pont

A táblázat elemeit oszloponként, tetszőleges sorrendben (például az első oszloptól indulva, balról jobbra) haladva változtatjuk nullára. Egy oszlop beállítása során másik oszlophoz nem nyúlunk, és csak akkor lépünk tovább a következőre, ha a jelenlegi oszlopnak már minden eleme nulla. A csupa 0 oszlop elemei sorműveletek hatására nem változnak meg. Tehát elég azt megmutatnunk, hogyan változtassuk nullára az első oszlop elemeit – a módszer működni fog a többire is. 2 pont

Kezdjük el csökkenteni az első oszlop elemeit mindaddig, míg valamelyik elem 1 nem lesz! 1 pont

Ha mindegyik elem 1, akkor még egy csökkentéssel nullázhatjuk az oszlopot. 1 pont

Ha vannak az oszlopban 1-es, illetve 1-estől különböző számok is, akkor duplázzuk meg az 1-esek sorát, majd csökkentsük az oszlopunk minden számát 1-gyel! 2 pont

Ezzel az oszlopban található 1-esek továbbra is 1-esek maradnak, az összes többi szám viszont 1-gyel csökken. 2 pont

Mivel pozitív egész számok alkotják a táblázatot, ezért véges sok lépés után biztosan elérjük azt az állapotot, amikor az oszlop minden eleme 1 lesz. 1 pont

Ezután az oszlop elemeit eggyel csökkentve elértük, hogy minden elem nulla legyen.

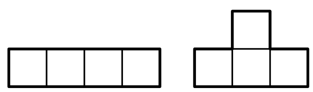
Megjegyzés: Ha a tanuló csak konkrét példákon mutatja be a megoldást, általános elv leírása nélkül, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: **10 pont**

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. A Tetris nevű játék elemei olyan alakzatok, amelyeket négy darab egység oldalú négyzet összeillesztésével kaphatunk. A négy négyzet csak teljes oldal mentén kapcsolódhat egymáshoz, és közülük egyik sem fedhet egy másikat. Két elemet különbözőnek tekintünk, ha síkban nem forgathatók egymásba. Például a játék két különböző eleme az alábbi két alakzat:



a) Hány különböző elem van a Tetris játékban? **3 pont**

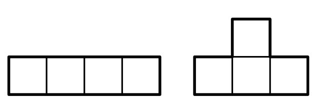
b) Alfonz Tetris elemekből hézag- és átfedésmentesen egy téglalapot rakott ki. Megállapította, hogy a kirakott téglalapban az összes különböző elem szerepel. Legalább hány elemet használt fel a téglalap megépítéséhez? **7 pont**

2. Bármely 1-nél nagyobb egész számra képezzük a következő összeget: a számhoz hozzáadjuk a nála kisebb pozitív osztói közül a legnagyobbat. (Például: a 15-re ez az összeg $15+5=20$ lesz.) Mutassuk meg, hogy az így kapott összeg értéke egyetlen esetben lesz a 10-nek pozitív egész kitevőjű hatványa! **10 pont**

3. Az $ABCD$ négyzet belsejében felvesszük a P pontot úgy, hogy az ABP háromszög olyan egyenlő szárú háromszög legyen, amelynek alapon fekvő szögei 15°-osak. Mekkora a CPD szög? **10 pont**

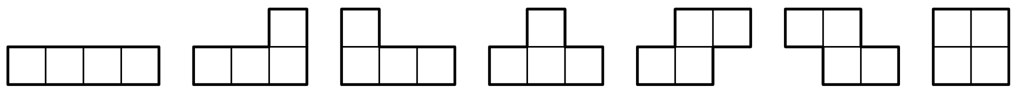
Megoldások és javítási útmutató

1. A Tetris nevű játék elemei olyan alakzatok, amelyeket négy darab egység oldalú négyzet összeillesztésével kaphatunk. A négy négyzet csak teljes oldal mentén kapcsolódhat egymáshoz, és közülük egyik sem fedhet egy másikat. Két elemet különbözőnek tekintünk, ha síkban nem forgathatók egymásba. Például a játék két különböző eleme az alábbi két alakzat:



a) Hány különböző elem van a Tetris játékban? **3 pont** *b)* Alfonz Tetris elemekből hézag- és átfedésmentesen egy téglalapot rakott ki. Megállapította, hogy a kirakott téglalapban az összes különböző elem szerepel. Legalább hány elemet használt fel a téglalap megépítéséhez? **7 pont**

Megoldás. *a)* Tetris elemek:



Összesen 7-féle elem van a játékban. 3 pont

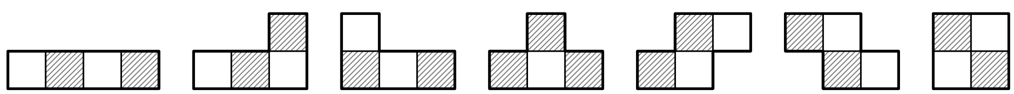
Megjegyzés. A megadott elemeken kívül 1 vagy 2 elem megtalálása 1 pont; 3 vagy 4 elem megtalálása 2 pont; 5 elem megtalálása 3 pont.

b) Megmutatjuk, hogy a hét különböző elem felhasználásával nem építhető téglalap.

A téglalap $7 \times 4 = 28$ egységnégyzetből állna. 1 pont

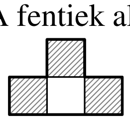
Ha egy ilyen téglalapot sakktáblaszerűen színezünk ki, akkor ugyanannyi mező lesz fehér, mint fekete. 1 pont

A hét elemből hat olyan, hogy a téglalapra bárhogyan helyezve mindenképpen 2 fekete és 2 fehér mezőt fed le. Az egyik elem (az ábrán a középső) azonban nem ilyen:

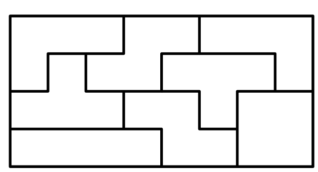


Emiatt az összes elem együtt nem egyenlő számú fekete, illetve fehér mezőt fed le. 1 pont

Ezért ebből a hét elemből hézag- és átfedésmentesen nem illeszthető össze téglalap. 1 pont

A fentiek alapján 8 elemből is csak akkor lehet hézag- és átfedésmentesen téglalapot kirakni, ha a  elemet kétszer használjuk.

Ez megvalósítható, például az alábbi módon:



2 pont

Tehát Alfonz legalább 8 elemet használt fel. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Bármely 1-nél nagyobb egész számra képezzük a következő összeget: a számhoz hozzáadjuk a nála kisebb pozitív osztói közül a legnagyobbat. (Például: a 15-re ez az összeg $15+5=20$ lesz.) Mutassuk meg, hogy az így kapott összeg értéke egyetlen esetben lesz a 10-nek pozitív egész kitevőjű hatványa! **10 pont**

Megoldás. Ha $n > 1$ páros szám, akkor a legnagyobb, n-nél kisebb osztója $\dfrac{n}{2}$, így ennek és a számnak az összege: $\dfrac{3n}{2}$, ami nem lehet a 10-nek a hatványa, hiszen osztható 3-mal. 1 pont

Ha $n > 1$ páratlan szám, akkor jelöljük n legnagyobb, n-nél kisebb osztóját m-mel. Azt kell igazolnunk, hogy az alábbi egyenletnek egyetlen megoldása létezik n-ben (k pozitív egész):

$$n + m = 10^k$$ 1 pont

Az $n+m$ összeg m többszöröse, hiszen n maga is osztható m-mel. 1 pont

Mivel n páratlan, így m páratlan osztója a jobb oldalon szereplő 10-hatványnak: $m = 1$ vagy $m = 5^\alpha$ valamilyen α pozitív egészre. 1 pont

Az előbbi eset nem lehetséges, mert ha $m = 1$, akkor n prím, de egy prím nem lehet $10^k - 1$ alakú, hiszen $10^k - 1$ bármely k pozitív egészre osztható 9-cel. 1 pont

Ha $m = 5^\alpha$ valamilyen α pozitív egészre, akkor írjuk a keresett számot $n = s \cdot 5^\alpha$ alakban, ahol s az n 1-nél nagyobb osztói közül a legkisebbet jelöli. Az 5 osztója n-nek, így $s \leq 5$. Mivel s páratlan, így két esetet kell megvizsgálnunk: $s = 3$ vagy $s = 5$. 2 pont

Ha $s = 3$, azaz $n = 3 \cdot 5^\alpha$, akkor $n + m = 4 \cdot 5^\alpha = 10^k$, amiből $k = \alpha = 2$, tehát $n = 3 \cdot 5^2 = 75$. 1 pont

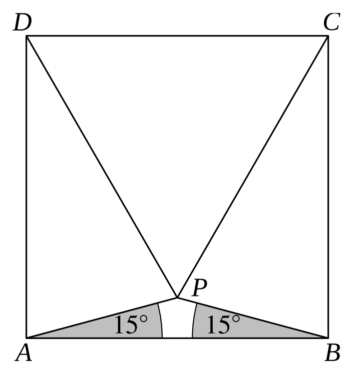
Ha $s = 5$, azaz $n = 5^{\alpha+1}$, akkor $n + m = 6 \cdot 5^\alpha = 10^k$, ami ellentmondás, hiszen egy 10-hatvány nem lehet osztható 3-mal. 1 pont

Tehát valóban egyetlen megoldás van: $n = 75$, amelyre a kérdezett összeg: $75 + 25 = 100 = 10^2$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Az $ABCD$ négyzet belsejében felvesszük a P pontot úgy, hogy az ABP háromszög olyan egyenlő szárú háromszög legyen, amelynek alapon fekvő szögei 15°-osak. Mekkora a CPD szög? **10 pont**

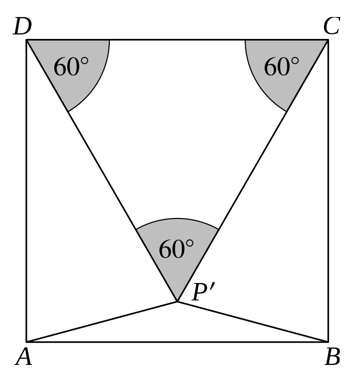
1. megoldás. Készítsünk ábrát! 1 pont



Sejtés: a keresett szög 60°-os.

Az ábra tengelyesen szimmetrikus az AB oldal felezőmerőlegesére, ezért a CDP háromszög egyenlő szárú. Ha egyik szöge 60°-os, akkor a háromszög szabályos, és $CD = DP = CP$. 1 pont

Vegyük fel az $ABCD$ négyzet CD oldalára befelé a CDP' szabályos háromszöget a következő ábra szerint: 1 pont



Az $AP'D$ háromszög egyenlő szárú háromszög, hiszen

$$AD = CD = DP'.$$ 1 pont

Az $AP'D$ háromszög szárszöge $90° - 60° = 30°$. Így alapon fekvő szögei $\dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$ nagyságúak. 1 pont

Innen $P'AB$ szög $90° - 75° = 15°$ nagyságú. 1 pont

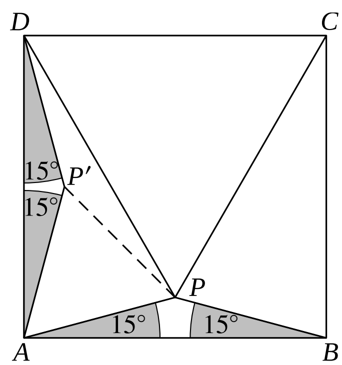
Az ábra szimmetriája miatt ugyanez igaz a $P'BA$ a szögre. 1 pont

Az ABP és az ABP' háromszögek egybevágóak, mert egy oldaluk és a rajta fekvő két szög egyenlő. Így $P = P'$. 2 pont

Tehát a keresett szög $60°$-os. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Készítsünk ábrát! 1 pont



Vegyünk fel a négyzet DA oldalára egy ABP háromszöggel egybevágó DAP' háromszöget! Először megmutatjuk, hogy P' az APD háromszög belső pontja, és az APD háromszög egyenlő szárú. 2 pont

A PAP' szög $90° - 2 \cdot 15° = 60°$ nagyságú, továbbá $AP = AP'$, így az APP' háromszög szabályos háromszög. 1 pont

Tekintsük a DPP' háromszöget! A háromszög egyenlő szárú, mivel $PP' = AP' = DP'$.

Mivel a $DP'A$ és $AP'P$ szögek összege $150° + 60° = 210°$, ezért P' valóban az APD háromszög belsejében helyezkedik el, továbbá a $DP'P$ szög $360° - 210° = 150°$ nagyságú. 1 pont

A DPP' háromszög egybevágó az DAP' háromszöggel, mivel két-két oldaluk és az általuk közrezárt szögük egyenlő. 1 pont

Innen $AD = DP$, tehát az APD háromszög valóban egyenlő szárú. 1 pont

Alapon fekvő szögei $60° + 15° = 75°$ nagyságúak, így az APD szög $75°$-os. 1 pont

Az ábra szimmetrikus az AB oldal felezőmerőlegesére, így a BPC szög is $75°$-os. 1 pont

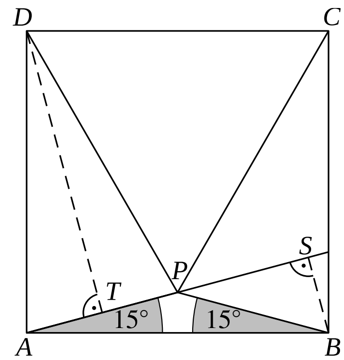
Tehát a keresett szög: $360° - 150° - 2 \cdot 75° = 60°$ nagyságú. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. megoldás. Készítsünk ábrát! 1 pont

Az APB szög $180° - 2 \cdot 15° = 150°$ nagyságú. 1 pont

Hosszabbítsuk meg az AP szakaszt, majd az így kapott egyenesre állítsunk merőlegest B-ből. A merőleges talppontja legyen S.



Az SPB szög $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ nagyságú, ezért az SPB háromszög egy fél szabályos háromszög. Ennek rövidebb befogója az átfogó fele, azaz $SB = \dfrac{PB}{2}$. 2 pont

Állítsunk merőlegest D-ből AP-re, legyen ennek talppontja T! Először megmutatjuk, hogy T az AP szakasz felezőpontja, és így az APD háromszög egyenlő szárú. A DAT háromszögben a DAT szög $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ nagyságú, és az ADT szög $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$-os. Tehát a DAT háromszög egybevágó az ASB háromszöggel, mert egy-egy oldaluk ($AD = AB$) és a rajta fekvő szögeik (15° és 75°) egyenlők. 2 pont

$AT = SB = \dfrac{PB}{2} = \dfrac{PA}{2}$, azaz T valóban felezőpontja az AP szakasznak, ebből következően az APD háromszög egyenlő szárú.

Az APD szög egyenlő a DAT szöggel, azaz 75°-os. 2 pont

Az ábra szimmetrikus az AB oldal felezőmerőlegesére, emiatt a BPC szög is 75°-os. 1 pont

Tehát a keresett szög: $360^\circ - 150^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 60^\circ$ nagyságú. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Hány zérushelye van a p valós szám értékétől függően az f függvénynek, ha

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f\colon x \mapsto \begin{cases} x^2 + 6x + p, & \text{ha } x < 0, \\ \sqrt{x^2 - 6x + 9} - p, & \text{ha } x \geq 0? \end{cases}$$

10 pont

2. Egy orosházi szüret során az egyik nap 270 kg érett dinnyét szedtek le. A leszedett dinnyék egyikének a tömege sem haladta meg a 7 kg-ot. A gyümölcsöket 11 személy szállítja a teherautóra úgy, hogy egyikük sem visz egyszerre 30 kg-nál nagyobb terhet magával. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges tömegeloszlás esetén egy lépésben megoldható a dinnyék elszállítása! **10 pont**

3. Adott az $ABCD$ paralelogramma, amelynek szomszédos oldalai különböző hosszúságúak. A BC egyenesen kijelölünk olyan E és F pontokat, hogy AC felezze el az EAB és DAF szögeket. Legyen az AE és AF egyenesek CD oldalegyenessel alkotott metszéspontja rendre G és H.

Mutassuk meg, hogy az FG egyenes áthalad az EH szakasz felezőpontján! **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

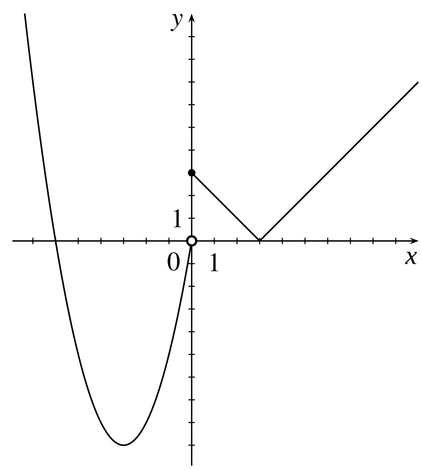
1. Hány zérushelye van a p valós szám értékétől függően az f függvénynek, ha

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f\colon x \mapsto \begin{cases} x^2+6x+p, & \text{ha } x<0, \\ \sqrt{x^2-6x+9}-p, & \text{ha } x \geq 0? \end{cases}$$ **10 pont**

Megoldás. $x^2+6x+p=(x+3)^2-9+p$. 1 pont

$\sqrt{x^2-6x+9}-p=\sqrt{(x-3)^2}-p=|x-3|-p$. 1 pont

$p=0$ esetén megrajzolható az f függvény grafikonja (de nem elvárt):



ha $x<0$, akkor

p-től függően	$p \leq 0$	$0<p<9$	$p=9$	$p>9$
a zérushelyek száma	1	2	1	0

2 pont

ha $x \geq 0$, akkor

p-től függően	$p<0$	$p=0$	$0<p\leq 3$	$p>3$
a zérushelyek száma	0	1	2	1

2 pont

Összesítve:

p-től függően	$p<0$	$p=0$	$0<p\leq 3$	$3<p<9$	$p=9$	$p>9$
a zérushelyek száma	1	2	4	3	2	1

4 pont

Összesen: **10 pont**

2. Egy orosházi szüret során az egyik nap 270 kg érett dinnyét szedtek le. A leszedett dinnyék egyikének a tömege sem haladta meg a 7 kg-ot. A gyümölcsöket 11 személy szállítja a teherautóra úgy, hogy egyikük sem visz egyszerre 30 kg-nál nagyobb terhet magával. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges tömegeloszlás esetén egy lépésben megoldható a dinnyék elszállítása! **10 pont**

Megoldás. Osszuk a leszedett dinnyéket két csoportba. Az első csoportba kerüljenek azok, amelyeknek a tömege meghaladja a 6 kg-ot, a másodikba pedig azok, amelyek tömege legfeljebb 6 kg.

Ekkor az első csoportba kerülő dinnyék száma biztosan kevesebb, mint $\frac{270}{6} = 45$, tehát ebbe a csoportba legfeljebb 44 elszállítandó dinnye kerülhet. Ha ezeket egyenletesen elosztjuk a szállítók között, akkor egy-egy embernek legfeljebb 4 gyümölcs juthat az első csoportból, és ezeknek össztömege személyenként legfeljebb $4 \cdot 7 = 28$ kg. Ez a tömeg nem haladja meg az egy ember által egy fordulóban elszállítható mennyiség felső határát. 2 pont

A feladat állításának további igazolásához indirekt bizonyítást alkalmazunk.

Tegyük fel, hogy az első csoportba tartozó dinnyéket már megfelelő módon elosztottuk a szállítók között, és kezdjük el a második csoportba tartozó dinnyéket is szétosztani a 11 ember között. Tegyük fel, hogy a 30 kg-os teherhatárt figyelembe véve egy $x \leq 6$ kg tömegű dinnyét már egyik hordár csomagjához sem lehet hozzátenni anélkül, hogy meghaladnánk az előírást. 2 pont

Ekkor minden személyhez már több mint $(30-x)$ kg teher van társítva, 1 pont

és így a dinnyék össztömegére felírható, hogy

$$m_{\text{összes}} > 11(30-x)+x = 330-10x \geq 330-10\cdot 6 = 270.$$

3 pont

Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy legalább az egyik szállítóhoz legfeljebb $(30-x)$ kg teher van társítva, így neki még odaadható az x kg tömegű dinnye anélkül, hogy túllépnénk a felső szállítási határt. 1 pont

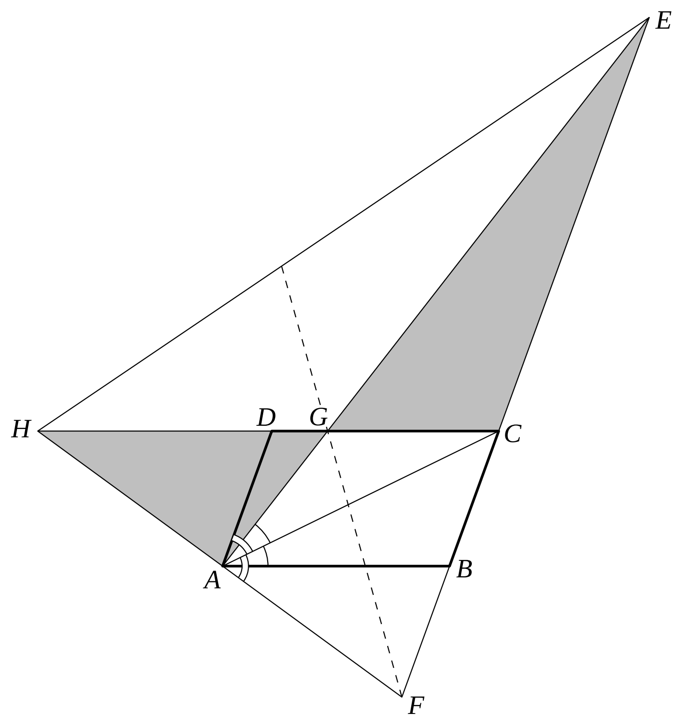
Mivel a fenti gondolatmenet lépésenként minden 2. csoportbeli dinnyére alkalmazható, ezért az összes gyümölcs elszállítása egy lépésben megvalósítható. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Adott az $ABCD$ paralelogramma, amelynek szomszédos oldalai különböző hosszúságúak. A BC egyenesen kijelölünk olyan E és F pontokat, hogy AC felezze el az EAB és DAF szögeket. Legyen az AE és AF egyenesek CD oldalegyenessel alkotott metszéspontja rendre G és H.

Mutassuk meg, hogy az FG egyenes áthalad az EH szakasz felezőpontján! **10 pont**

Megoldás.



$AB \parallel CD$, ezért $ACG\sphericalangle = CAB\sphericalangle = GAC\sphericalangle$, így GAC egyenlő szárú háromszög, és $GA = GC$.

Hasonlóképpen $BC \parallel DA$, ahonnan $FCA\sphericalangle = DAC\sphericalangle = CAF\sphericalangle$, ezért FCA egyenlő szárú háromszög, és $FA = FC$. 2 pont

Így a GAF és GCF háromszögek egybevágók, mivel egyik oldaluk közös, másik két-két oldaluk pedig páronként egyenlő hosszúságú. 1 pont

A megállapított egybevágóság alapján:

$$GAF\sphericalangle = GCF\sphericalangle \quad \Rightarrow \quad HAG\sphericalangle = 180^\circ - GAF\sphericalangle = 180^\circ - GCF\sphericalangle = ECG\sphericalangle$$

1 pont

Másrészt $AGH\sphericalangle = CGE\sphericalangle$ (csúcsszögek). Így a korábban megállapított $GA = GC$ egyenlőség alapján $HAG\triangle \cong ECG\triangle$, $GH = GE$ és $HA = CE$. 2 pont

Továbbá $FH = FA + AH = FC + CE = FE$. 2 pont

Tehát a G és a H pontok is illeszkednek az EH szakasz felezőmerőlegesére, vagyis az EH szakasz felezőmerőlegese éppen az FG egyenes. 2 pont

Ezzel az állítást igazoltuk.

Összesen: **10 pont**

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy táblára felírtuk 1-től n-ig a természetes számokat (n legalább 2). Egy lépésben egyszerre két számot letörlünk, és helyettük a két szám (nemnegatív) különbségét írjuk fel. Addig folytatjuk ezt az eljárást, amíg már csak egy szám marad a táblán. Mi lehet az utolsónak kapott szám? **10 pont**

2. Adjunk elvi eljárást a háromszög megszerkesztésére, ha adott egy oldalának és a hozzá tartozó súlyvonalának a hossza, valamint a kerülete! **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $a(n)$-nel a legkisebb olyan n-nél nagyobb egész számot, amely felírható két négyzetszám összegeként. A két négyzetszám lehet egyenlő, és közülük az egyik lehet 0 is. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számra

$$a(n) < n + 4n^{1/4}.$$ **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy táblára felírtuk 1-től n-ig a természetes számokat (n legalább 2). Egy lépésben egyszerre két számot letörlünk, és helyettük a két szám (nemnegatív) különbségét írjuk fel. Addig folytatjuk ezt az eljárást, amíg már csak egy szám marad a táblán. Mi lehet az utolsónak kapott szám? **10 pont**

Megoldás. Két természetes szám összegének és különbségének a paritása azonos, ezért paritás szempontjából mindegy, hogy a két szám különbségét vagy összegét vizsgáljuk. Így végül az $n-1$ különbség helyett $n-1$ összeget, az összes szám összegét vizsgáljuk, 1 pont

ami pontosan akkor páratlan, ha páratlan sok páratlan szám van ($4k+1$ vagy $4k+2$ alakú az n). 1 pont

Az eljárás során semelyik felírt szám (így az utolsó) sem lehet sem negatív, sem n-nél nagyobb. 2 pont

A továbbiakban a paritással nem foglalkozunk, csak támaszkodunk a fentiekre.

Azt állítjuk, hogy minden megfelelő paritású, n-nél nem nagyobb nemnegatív egész számot megkaphatunk végeredményként. Erre több konstrukciót mutatunk.

1.1. konstrukció. Legyen $0 \le k \le n$ megfelelő paritású (egész) szám.

Írjuk fel a számokat csökkenő sorrendben. Két eset lehet:

$$\underbrace{n, n-1, \ldots, k+1}_{\text{páros sok szám}}, k, k-1, \ldots, 2, 1 \qquad \text{vagy} \qquad \underbrace{n, n-1, \ldots, k+2}_{\text{páros sok szám}}, k+1, k, \ldots, 2, 1$$ 1 pont

Ez akkor is felírható, ha $k = n$ vagy $k = 0$, legfeljebb k-tól vagy $k+1$-től valamelyik irányban nem szerepel szám. 1 pont

Páros sok egymás után következő számból az egymás után következő szomszédos számok különbségét képezve csupa 1-est kaphatunk. 1 pont

Adott számnál kisebb számokból is kaphatunk csupa 1-est a legnagyobbtól kezdve a párosítást. Végül vagy $2-1=1$ az utolsó különbség, vagy $3-2=1$, és megmarad az 1-es. 1 pont

Az 1-esekből kivonások sorozatával előállítható a 0 vagy az 1, de mivel k paritása megfelelő, csak azt kaphatjuk, hogy a k mellett egy 0, $k+1$ mellett egy 1-es szerepel a táblán, és ezek különbsége mindkét esetben k. 1 pont

Ez a konstrukció csak akkor nem kivitelezhető, ha csak egy k-nál nagyobb szám van, kisebb meg egy sincs, azaz ha $k=1$, $k+1=n=2$, de akkor $2-1=1$ alapján állítható elő a $k=1$. 1 pont

1.2. konstrukció. Legyen $0 \le k \le n$ megfelelő paritású szám. Hagyjuk ki az n szám közül a k-t, illetve ha $k=0$, akkor ne hagyjunk ki számot. A cél a többi számból előállítani a 0-t. 1 pont

Nagyság szerint csökkenő sorba rendezve a számokat két eset lehet:

$$\underbrace{n, n-1, \ldots, k+1}_{\text{páros sok szám}}, k-1, \ldots, 2, 1 \qquad \text{vagy} \qquad \underbrace{n, n-1, \ldots, k+2}_{\text{páros sok szám}}, \underbrace{k+1, k-1}_{\text{2 a különbség}}, k-2, \ldots, 2, 1$$ 1 pont

Páros sok egymás után következő számból a megfelelő szomszédos számok különbségét képezve csupa 1-est kaphatunk. 1 pont

Adott számnál kisebb számokból is kaphatunk csupa 1-est a legnagyobbtól kezdve a párosítást. Végül vagy $2-1=1$ az utolsó különbség, vagy $3-2=1$, és megmarad az 1-es. 1 pont

A második esetben az egyetlen 2-esből egy 1-est kivonva (ha van 1-es) csupa 1-es marad. Az így megmaradt 1-esek száma páros, mert k paritása megfelelő. Az 1-esekből 0-kat, a 0-kból egyetlen 0-t kaphatunk, így végül $k-0=k$ marad a táblán. 1 pont

Ez a konstrukció nem kivitelezhető, ha $k=2$ és $n=k+1=3$, mert ekkor kapunk egy 2-es különbséget, de nem kapunk 1-est, ekkor $3-(2-1)$ módon állítható elő a 2; illetve ha $k=1$ és $k+1=n=2$, mert akkor csak egy szám marad, ekkor $2-1=1$ adja a kívánt eredményt. 1 pont

Megjegyzés. Mindkét konstrukciót szétbonthatjuk esetekre n 4-es osztási maradéka szerint, de akkor minden esetben külön vizsgálni kell az egyes nem általánosan tárgyalható értékeket (pl. $k=0$, $k=n$, illetve $n=3$ és $k=2$ vagy $n=2$ és $k=1$), ezek nélkül a megoldás hiányos. Az erre kapható 6 pont arányosan csökkenthető.

2.1. konstrukció. Alkalmazzunk teljes indukciót n-ről $n+1$-re. 2-re nyilván igaz az állítás. 1 pont

Tételezzük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor a kapható r végeredményekre: $0 \le r \le n$. 2 pont

Tekintsük most $n+1$-et. Mivel az n-re előálló végeredményeket $(n+1)$-ből kivonva a kapható különbségekre fennáll, hogy $1 \le (n+1)-r \le n+1$, így a 0-tól eltekintve minden (megfelelő paritású) végeredmény megkapható. 2 pont

A 0-t, ha n függvényében megkapható, például úgy állíthatjuk elő, hogy a legnagyobbtól a legkisebbig haladva szomszédos számok különbségét vesszük (1-esek), amelyekből már előáll a 0. 1 pont

2.2. konstrukció. Teljes indukciós gondolat n-ről $n+4$-re. Tetszőleges 4 egymást követő számból ($a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$) előállítható a 0 ($= [(a+4)-(a+3)] - [(a+2)-(a+1)]$), a 2 ($= [(a+4)-(a+1)] - [(a+3)-(a+2)]$) és a 4 ($= (a+4) - \{(a+1) - [(a+3)-(a+2)]\}$). 2 pont

Így ha az első n számból előáll egy k, akkor az első $n+4$ számból előállítható k, $k+2$, $k+4$. 2 pont

$n=2$-re az 1, $n=3$-ra a 0 és a 2, $n=4$-re a 0, 2 és a 4, $n=5$-re az 1, 3, 5 állítható elő, vagyis tetszőleges n-re előáll az összes n-nél nem nagyobb nemnegatív megfelelő paritású szám. 2 pont

Összesen: **10 pont**

2. Adjunk elvi eljárást a háromszög megszerkesztésére, ha adott egy oldalának és a hozzá tartozó súlyvonalának a hossza, valamint a kerülete! **10 pont**

Megoldás. Legyen c az adott oldal, s a hozzá tartozó súlyvonal hossza, k pedig a kerület. Legyen a két ismeretlen oldal a és b. Definíció szerint

$$k = a + b + c,$$

a Stewart-tétel szerint pedig

$$s^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

(A Stewart-tétel ezen speciális esete könnyen levezethető abból, hogy egy paralelogrammában az átlók hosszának négyzetösszege megegyezik az oldalak hosszának négyzetösszegével.) Ekkor

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab = (k-c)^2 - (2(a+b)^2 - 2(a^2+b^2)) \\ &= (k-c)^2 - (2(k-c)^2 - 4s^2 - c^2) = (2s)^2 + c^2 - (k-c)^2.\end{aligned}$$ 2 pont

Egy segédábrán szerkesszünk egy derékszögű háromszöget $2s$ és c befogókkal, a Pitagorasz-tétel értelmében az átfogója $d = \sqrt{(2s)^2 + c^2}$ lesz. Ezután egy másik segédábrán szerkesszünk egy derékszögű háromszöget, melynek az utoljára kapott d az átfogója, az egyik befogója pedig $k-c$ (megengedve azt az elfajuló esetet, amikor $d = k - c$). Ekkor a másik befogó lesz $|a-b|$, ismét a Pitagorasz-tétel szerint (az elfajuló esetben $|a-b| = 0$-t véve). Az $|a-b|$ és $a+b$ ismeretében a ás b megszerkesztése nyilvánvaló: $((a+b)+|a-b|)/2 = \max(a,b)$, $((a+b)-|a-b|)/2 =$ $= \min(a,b)$. 5 pont

Tehát ha a megszerkesztendő háromszög létezik, akkor egyértelműen szerkszthető, és a lépések azt is mutatják, melyek a létezésének a feltételei. Egyrészt szükséges, hogy

$$(a-b)^2 = (2s)^2 + c^2 - (k-c)^2 \geq 0,$$

azaz

$$(2s)^2 + c^2 \geq (k-c)^2$$

legyen. Másrészről kell, hogy $k - 2c > 0$ legyen (a háromszög-egyenlőtlenség alapján). Tehát a szerkeszthetőség (szükséges és elégséges) feltételét, melynek fennállása esetén a háromszög egyértelműen szerkeszthető a következő egyenlőtlenség-lánccal foglalhatjuk össze:

$$\sqrt{(2s)^2 + c^2} \geq k - 2c > 0.$$ 3 pont

Megjegyzés. Lehetnek más jó alternatív megoldások is. 7 pont jár más jó szerkesztésért, 3 pont a fentivel ekvivalens diszkusszióért.

Összesen: **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $a(n)$-nel a legkisebb olyan n-nél nagyobb egész számot, amely felírható két négyzetszám összegeként. A két négyzetszám lehet egyenlő, és közülük az egyik lehet 0 is. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számra

$$a(n) < n + 4n^{1/4}.$$ **10 pont**

Megoldás. Válasszuk meg x-et a lehető legnagyobb egésznek úgy, hogy $x^2 \le n$ legyen, majd y-t a lehető legkisebb pozitív egésznek úgy, hogy $y^2 > n - x^2$ is fennálljon. 3 pont

Ha $x^2 = n$, vagyis n négyzetszám, akkor $y = 1$, és $a(n) = n + 1$, ami nyilván teljesíti a feladat feltételeit. Ezért a a továbbiakban tegyük fel, hogy n nem négyzetszám, tehát $n - x^2 \ge 1$, vagyis $y \ge 2$. 1 pont

Az x, y számok megválasztása értelmében

$$x > n^{1/2} - 1$$

(különben x nem lenne maximális választás), tehát

$$x^2 > n - 2n^{1/2} + 1, \qquad n - x^2 < 2n^{1/2} - 1,$$

így

$$y < \sqrt{2}n^{1/4} + 1$$

(különben y nem lenne minimális választás). 3 pont

Ekkor $x^2 + y^2$ olyan n-nél nagyobb szám, amely felírható két négyzetszám összegeként, így $a(n) \le x^2 + y^2$. Továbbá y megválasztása miatt $x^2 + (y-1)^2 \le n$ is fennáll. Ezeket összefoglalva

$$x^2 + (y-1)^2 \le n < a(n) \le x^2 + y^2,$$

tehát

$$a(n) - n \le x^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 2y - 1 < 2\sqrt{2}n^{1/4} + 1 < 4n^{1/4},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség azért áll fenn, mert $n^{1/4} \ge 1$ és $4 - 2\sqrt{2} > 1$, tehát

$$(4 - 2\sqrt{2})n^{1/4} > 1.$$

Ezzel a bizonyítás kész. 3 pont

Megjegyzés. A helyesség minden más jó bizonyítása szintén 6 pontot ér. Ha az x, y megválasztásából vagy a számolásból a 4-nél nagyobb konstans adódik az $n^{1/4}$ mellé, akkor, feltéve, hogy egyéb megállapítás helyes, 9 pont adható.

Összesen: **10 pont**

Haladók I. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Keressük meg mindazokat a $p \in \mathbb{N}$ prímszámokat, amelyekre $p^3 + p^2 + 11p + 2$ is prím! **7 pont**

2. Egy öt házaspárból álló társaság olyan játékot játszik, amelyhez két csoportba kell osztani őket úgy, hogy az első csoportban hat fő legyen, közülük legalább két házaspár. Hányféle módon lehet a felosztást megvalósítani? **7 pont**

3. Egy sorozat első tagja $a_1 = \dfrac{1}{2}$, és tetszőleges $n > 1$ természetes szám esetén a sorozat n-edik tagját az

$$a_n = \frac{1}{1 - a_{n-1}}.$$

képlet adja meg Határozzuk meg a sorozat 2020-adik tagját és a sorozat első 2020 tagjának az összegét! **7 pont**

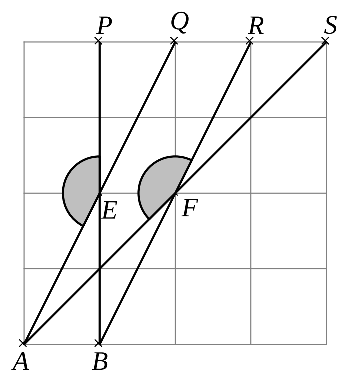
4. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egész számpárok halmazán!

$$1 = \frac{2036}{ab} + \frac{5}{a} - \frac{3}{b}$$ **7 pont**

5. A 4×4-es méretű négyzetrácson felvettük az A, B, E, F, P, Q, R, S pontokat a mellékelt ábra szerint.

($A(0;0)$, $B(1;0)$, $E(1;2)$, $F(2;2)$, $P(1;4)$, $Q(2;4)$, $R(3;4)$, $S(4;4)$)

Mekkora az $AEP\sphericalangle$ és az $AFR\sphericalangle$ szögek összege? **7 pont**



Megoldások és javítási útmutató

1. Keressük meg mindazokat a $p \in \mathbb{N}$ prímszámokat, amelyekre $p^3 + p^2 + 11p + 2$ is prím! **7 pont**

Megoldás. A legkisebb pozitív prímszám a 2, erre az egész kifejezés páros számot ad, tehát ez nem jó. 1 pont

$p = 3$-ra az összeg 71, ez prím, tehát $p = 3$ jó. 1 pont

A továbbiakban, ha n egy hárommal nem osztható egész szám, akkor felírható $3k + 1$ vagy $3l + 2$ alakban. Ha $n = 3k + 1$, akkor

$$(3k+1)^3 + (3k+1)^2 + 11(3k+1) + 2 = 27k^3 + 36k^2 + 48k + 15,$$ 1 pont

ami 3-mal osztható, és pozitív n esetén háromnál nagyobb, tehát nem lehet prímszám. 1 pont

Ha $n = 3l + 2$, akkor

$$(3l+2)^3 + (3l+2)^2 + 11(3l+2) + 2 = 27k^3 + 63k^2 + 81k + 36, \qquad \text{1 pont}$$

ahol szintén az összeg minden tagja osztható 3-mal, így az egész kifejezés is, ezért ekkor se kaphatunk prímet. 1 pont

Azaz egyetlen, a feladat feltételének eleget tevő pozitív prímszám van, a $p = 3$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy öt házaspárból álló társaság olyan játékot játszik, amelyhez két csoportba kell osztani őket úgy, hogy az első csoportban hat fő legyen, közülük legalább két házaspár. Hányféle módon lehet a felosztást megvalósítani? **7 pont**

Megoldás. Az, hogy a hat személy között legalább két házaspár legyen, azt jelenti, hogy vagy *a)* pontosan két házaspár van a csoportban, vagy *b)* három házaspárból áll a csoport. Ennek megfelelően külön-külön határozzuk meg a felbontások számát, a végeredmény az így kapott két szám összege lesz. 2 pont

a) Két házaspárt az 5 közül $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$-féle módon tudunk kiválasztani. 1 pont

A maradék 6 emberből még kettőt kell hozzájuk választani, de ők nem lehetnek házastársak. Így bármely kiválasztott taghoz csak 4 másik embert választhatunk, azaz a lehetőségek száma:

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = 12, \qquad \text{1 pont}$$

azaz az *a)* esetet megvalósító összes lehetőség $10 \cdot 12 = 120$. 1 pont

A *b)* esetben 3 házaspárt választunk, ekkor 2 házaspárt kihagyunk az előzőekben leírtak szerint; ezt 10-féle módon tehetjük meg. 1 pont

Az összes lehetőség tehát $120 + 10 = 130$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy sorozat első tagja $a_1 = \frac{1}{2}$, és tetszőleges $n > 1$ természetes szám esetén a sorozat n-edik tagját az

$$a_n = \frac{1}{1 - a_{n-1}}.$$

képlet adja meg Határozzuk meg a sorozat 2020-adik tagját és a sorozat első 2020 tagjának az összegét! **7 pont**

Megoldás. A sorozat első néhány elemét kiszámítva

$$\frac{1}{2}; \quad 2; \quad -1; \quad \frac{1}{2}; \quad \ldots$$

észrevehető, hogy a sorozat periodikus. 2 pont

A periódus hossza 3. 1 pont

$2020 = 3 \cdot 673 + 1$, azaz a 2020 hárommal osztva 1 maradékot ad, 1 pont

így a keresett tag: $a_{2020} = \frac{1}{2}$. 1 pont

Egy hármas csoport összege $\frac{1}{2} + 2 + (-1) = 1{,}5$. 1 pont

673 darab hármas csoport és a maradék $\frac{1}{2}$ összege 1010. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egész számpárok halmazán!

$$1 = \frac{2036}{ab} + \frac{5}{a} - \frac{3}{b}$$ **7 pont**

Megoldás. Az egyenletet ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozhatjuk:

$$(a-5)(b+3) = 2021.$$ 2 pont

A 2021 prímtényezős felbontása $2021 = 43 \cdot 47$. 1 pont

Az $(a-5)$ és $(b+3)$ tényezőkre a lehetséges számpárok:

$(1;2021), (43;47), (47;43), (2021;1), (-1;-2021), (-43;-47), (-47;-43), (-2021;-1)$. 1 pont

A negatív tényezők, valamint a $(2021;1)$ rendezett számpár nem adnak megoldást a pozitív számok halmazán. 1 pont

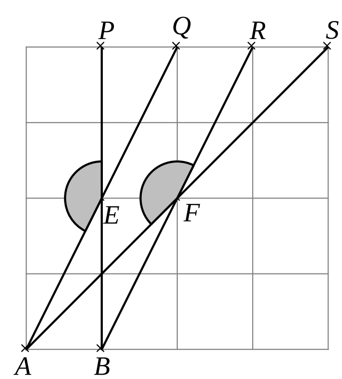
A lehetséges megoldások: $a_1 = 6$; $b_1 = 2018$; $a_2 = 48$; $b_2 = 44$; $a_3 = 52$; $b_3 = 40$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

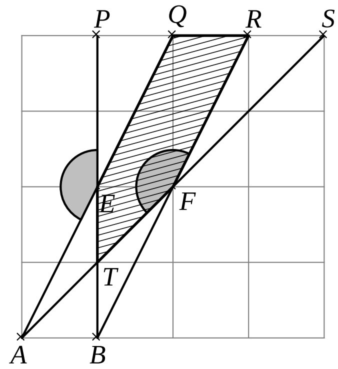
5. A 4×4-es méretű négyzetrácson felvettük az A, B, E, F, P, Q, R, S pontokat a mellékelt ábra szerint.

($A(0;0)$, $B(1;0)$, $E(1;2)$, $F(2;2)$, $P(1;4)$, $Q(2;4)$, $R(3;4)$, $S(4;4)$)

Mekkora az $AEP\sphericalangle$ és az $AFR\sphericalangle$ szögek összege? **7 pont**



Megoldás. A mellékelt ábrát és az ábrába berajzolt $ETFRQ$ ötszöget fogjuk használni. 1 pont



Jelöljük az $(1;1)$ pontot T-vel. Ekkor $TEQ\sphericalangle = AEP\sphericalangle$, mivel csúcsszögek. 1 pont

Továbbá $ETF\sphericalangle = 45^\circ$ a megfelelő ETF derékszögű egyenlő szárú háromszög miatt, valamint A, T és F pontok egy egyenesre esnek, és így $AFR\sphericalangle = TFR\sphericalangle$. 1 pont

Másfelől EQ és FR párhuzamossága miatt

$$EQR\sphericalangle + QRF\sphericalangle = 180^\circ.$$ 2 pont

Mivel az $ETFRQ$ rácsötszög belső szögeinek összege 540°, 1 pont

rövid számolással adódik, hogy

$$AEP\sphericalangle + AFR\sphericalangle = QET\sphericalangle + TFR\sphericalangle = 540^\circ - (180^\circ + 45^\circ) = 315^\circ.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

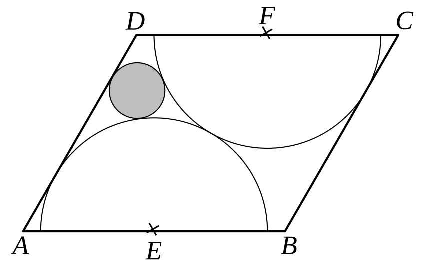
1. Bizonyítsuk be, hogy $5a^2 + 4ab - b^2$ (a és b egész számok) akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha $a + b$ is osztható 3-mal. **7 pont**

2. Egy dobozban 20 golyó található, p db piros, f db fehér és z db zöld színű. Ha a dobozban a fehér golyók számát megdupláznánk, akkor egy piros golyó kihúzásának az esélye $\frac{1}{25}$-del csökkenne. Ha a dobozból minden piros golyót kivennénk, akkor egy fehér golyó húzásának esélye $\frac{1}{16}$-dal nőne. Határozzuk meg p, f, z értékét. **7 pont**

3. Egy falu 2020 lakójáról tudjuk, hogy bármely három embert választva közülük, ebből a háromból van kettő, akik egymás között szoktak telefonon üzenetet váltani. Egy hírt szeretnénk ennek a 2020 embernek eljuttatni. Igazoljuk, hogy ki lehet jelölni két embert a faluból úgy, hogy nekik elmondjuk a hírt, és ők ketten 2018 üzenettel az összes többi emberhez eljuttatják! **7 pont**

4. Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, és a terület mérőszáma kétszerese a kerület mérőszámának. Mekkorák az oldalak? **7 pont**

5. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsnál lévő szöge 60°. Az AB és CD oldalak felezőpontjai köré egymást és egy-egy szomszédos oldalt érintő 3 egység sugarú félköröket rajzoltunk az ábrán látható módon. Mekkora az ábrán berajzolt, a két kört és az oldalt érintő kis kör sugara, illetve mekkorák a paralelogramma oldalai? **7 pont**



Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy $5a^2+4ab-b^2$ (a és b egész számok) akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha $a+b$ is osztható 3-mal. **7 pont**

Megoldás.

$$5a^2+4ab-b^2=(5a-b)(a+b).$$ 3 pont

Ha $3 \mid a+b$, akkor nyilván $(5a-b)(a+b)$ is osztható 3-mal. 1 pont

Ha $3 \mid (5a-b)(a+b)$, akkor – mivel a 3 prímszám – $3 \mid a+b$ (és ebben az esetben az állítás igaz) vagy $3 \mid 5a-b$. 1 pont

Mivel $5a-b=6a-(a+b)$, ez akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha $a+b$ is, tehát az állítás ebben az esetben is igaz. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy dobozban 20 golyó található, p db piros, f db fehér és z db zöld színű. Ha a dobozban a fehér golyók számát megdupláznánk, akkor egy piros golyó kihúzásának az esélye $\frac{1}{25}$-del csökkenne. Ha a dobozból minden piros golyót kivennénk, akkor egy fehér golyó húzásának esélye $\frac{1}{16}$-dal nőne. Határozzuk meg p, f, z értékét. **7 pont**

Megoldás. A feladat feltételei alapján:

$$p+f+z=20 \tag{1}$$

$$\frac{p}{20+f}=\frac{p}{20}-\frac{1}{25} \tag{2}$$

$$\frac{f}{20-p}=\frac{f}{20}+\frac{1}{16} \tag{3}$$ 2 pont

A (2)-es egyenlet alapján:

$$\frac{p}{20}-\frac{p}{20+f}=\frac{1}{25} \iff \frac{pf}{20+f}=\frac{4}{5} \tag{4}$$ 1 pont

A (3)-as egyenlet figyelembevételével:

$$\frac{f}{20-p}-\frac{f}{20}=\frac{1}{16} \iff \frac{pf}{20-p}=\frac{5}{4} \tag{5}$$ 1 pont

A (4), (5)-ös egyenlőségek megfelelő oldalainak elosztásával:

$$\frac{20-p}{20+f}=\frac{16}{25}\Longleftrightarrow f=\frac{180-25p}{16}$$ 1 pont

f-et az (5)-ös egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{180p-25p^2}{16(20-p)}=\frac{5}{4}\Longleftrightarrow p^2-8p+16=0$$ 1 pont

A kapott másodfokú egyenletet megoldva:

$$p=4,\qquad f=\frac{180-25p}{16}=5\quad \text{és}\quad z=20-p-f=11.$$

A kapott számok teljesítik a feladat feltételeit, tehát a dobozban eredetileg 4 piros, 5 fehér és 11 zöld golyó volt. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy falu 2020 lakójáról tudjuk, hogy bármely három embert választva közülük, ebből a háromból van kettő, akik egymás között szoktak telefonon üzenetet váltani. Egy hírt szeretnénk ennek a 2020 embernek eljuttatni. Igazoljuk, hogy ki lehet jelölni két embert a faluból úgy, hogy nekik elmondjuk a hírt, és ők ketten 2018 üzenettel az összes többi emberhez eljuttatják! **7 pont**

Megoldás. Vegyünk egy tetszőleges lakót, hívjuk Bélának.

Nézzük Béla összes üzenőtársát. Ha 2019 üzenőtársa van, akkor csak Bélának kell a hírt elmondani és még egy tetszőleges embernek. Ilyenkor Béla küld 2018 üzenetet, a másik kiválasztott nem küld egyet sem. 2 pont

Ha Béla nem üzen mindenkinek, akkor tekintsünk egy olyan embert, akinek Béla nem üzen. Legyen ő Gergő. 1 pont

Gergő már üzen az összes többi embernek. Hiszen ha Gergő például nem üzenne Katának, akkor a Béla, Gergő, Kata hármasban nem lenne üzenetváltás. 3 pont

Tehát Bélának és Gergőnek kell a hírt elmondani, és ők ketten összesen2018 üzenettel továbbadják a többi lakosnak. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, és a terület mérőszáma kétszerese a kerület mérőszámának. Mekkorák az oldalak? **7 pont**

Megoldás. Jelöljük a befogókat a-val és b-vel, az átfogót c-vel.

A feltétel szerint:

$$\frac{1}{2}ab=2(a+b+c).$$ 1 pont

Ebből c-t kifejezve és négyzetre emelve

$$c = \frac{1}{4}ab - a - b,$$

$$c^2 = \frac{1}{16}a^2b^2 + a^2 + b^2 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{2}ab^2 + 2ab. \qquad \text{1 pont}$$

Pitagorasz tételét felhasználva:

$$a^2b^2 - 8a^2b - 8ab^2 + 32ab = 0. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel $ab \neq 0$, ezzel egyszerűsítve és mindkét oldalhoz 32-t adva

$$ab - 8a - 8b + 64 = 32. \qquad \text{1 pont}$$

A bal oldalt szorzattá alakítva:

$$(a-8)(b-8) = 32. \qquad \text{1 pont}$$

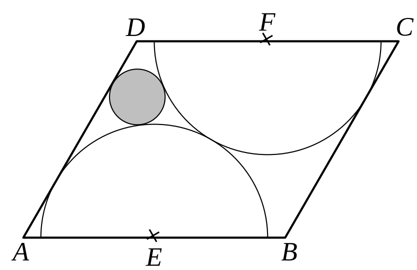
32-t kell két egész szám szorzataként felírni. Ez a sorrendtől eltekintve hatféleképpen lehetséges: $(32 \cdot 1,\ 16 \cdot 2,\ 8 \cdot 4,\ (-8) \cdot (-4),\ (-16) \cdot (-2),\ (-32) \cdot (-1)$. 1 pont

Az utolsó három eset nem felel meg a feladat feltételeinek, ezért az oldalakra három megoldás adódik: 40, 9 és 41, 24, 10 és 26, 16, 12 és 20. 1 pont

Összesen: **7 pont**

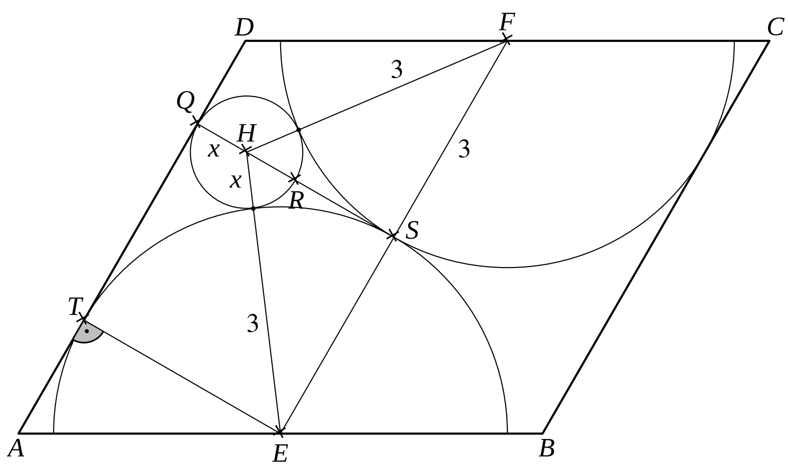
Megjegyzés. Ha valaki próbálgatással megtalálja az összes megoldást, de nem bizonyítja, hogy több nincs, legfeljebb 2 pontot kaphat.

5. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsnál lévő szöge 60°. Az AB és CD oldalak felezőpontjai köré egymást és egy-egy szomszédos oldalt érintő 3 egység sugarú félköröket rajzoltunk az ábrán látható módon. Mekkora az ábrán berajzolt, a két kört és az oldalt érintő kis kör sugara, illetve mekkorák a paralelogramma oldalai?



7 pont

Megoldás.



Mivel a két kör érintkezési pontja rajta van az EF középvonalon, 1 pont így a paralelogramma ezzel párhuzamos oldalai, $BC = DA = 6$ egység hosszúak, 1 pont

a másik két oldalának hossza az ATE derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből adódik:

$$AB = CD = 4\sqrt{3} \text{ egység.}$$ 1 pont

A kis kör sugarát x-szel jelölve, kihasználva, hogy az érintkező körök érintési pontja rajta van a centrálison, 1 pont

a Pitagorasz-tételt felírva a HSF derékszögű háromszögre:

$$(3+x)^2 = 3^2 + (3-x)^2$$ 2 pont

A keresett kis kör sugara $x = \frac{3}{4}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak hány olyan legalább kételemű részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható 10-zel? **7 pont**

2. Legyen egy derékszögű háromszög egyik befogója egy kockának éle, a másik befogója pedig ugyanannak a kockának lapátlója. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög valamelyik két súlyvonala merőleges egymásra. **7 pont**

3. Igazoljuk, hogy a nyolcjegyű 20202021 szám után pontosan egyféleképpen tudunk írni három újabb számjegyet úgy, hogy a kapott 11-jegyű szám osztható legyen 77-tel, 91-gyel és 143-mal is. **7 pont**

4. Az x, y pozitív számokra teljesül, hogy $x^3 + y^3 = x - y$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x^2 + y^2 < 1$. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak hány olyan legalább kételemű részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható 10-zel? **7 pont**

Megoldás. Az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak $2^9 = 512$ darab olyan részhalma van, amiben benne van a 10, ezek között egy van, ami nem kételemű, ez a $\{10\}$. A többi 511 darab legalább két elemű, és osztható 10-zel. 1 pont

Azt számoljuk ki, hogy a többi $2^9 - 1 = 511$ számú részhalmaz, azaz az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai között hány olyan van, amelyekben az elemek szorzata nem osztható 10-zel. 1 pont

Van 2^5-1 olyan, amelyekben a számok szorzata nem osztható 2-vel, ezek az $\{1;3;5;7;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai. 1 pont

Van 2^8-1 olyan, amelyekben a számok szorzata nem osztható 5-tel, ezek az $\{1;2;3;4;6;7;8;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai. 1 pont

És van 2^4-1 olyan, amelyekben a számok szorzata nem osztható 2-vel és 5-tel sem, ezek az $\{1;3;7;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai. 1 pont

Tehát az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai között

$$2^5-1+2^8-1-(2^4-1)=271$$

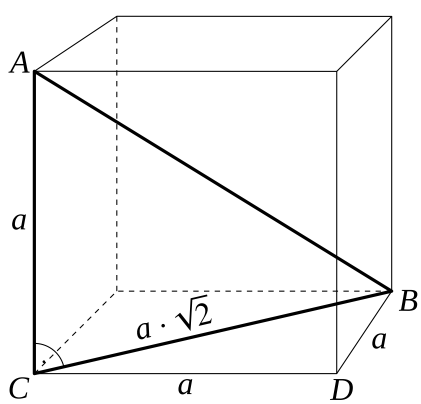
olyan van, amelyek nem oszthatók 2-vel vagy 5-tel, és $511-271=240$ olyan van, amelyek oszthatók 2-vel és 5-tel is, azaz oszthatók 10-zel. 1 pont

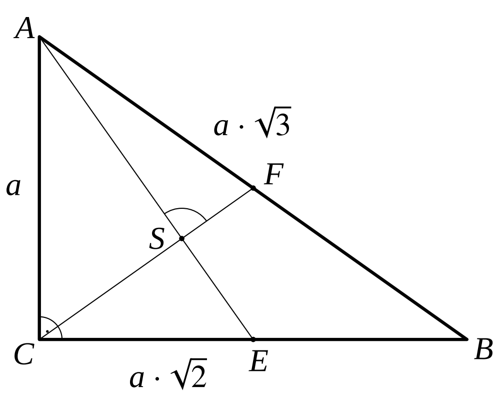
Végül az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak $511+240=751$ olyan legalább kételemű részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható 10-zel. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Legyen egy derékszögű háromszög egyik befogója egy kockának éle, a másik befogója pedig ugyanannak a kockának lapátlója. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög valamelyik két súlyvonala merőleges egymásra. **7 pont**

Megoldás. Legyen a kocka élhossza a, a megfelelő éle és lapátlója AC és CB az ábra szerint.





A CB lapátló egy a oldalú egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogója, ezért a Pitagorasz-tétel szerint $CB = a \cdot \sqrt{2}$.

Tekintsük most már csak az ABC derékszögű háromszöget.

A háromszög AB átfogójára szintén a Pitagorasz-tételt használva $AB = a \cdot \sqrt{3}$. 1 pont

Legyenek CB és AB oldalak felezőpontjai rendre E és F, ekkor az ABC háromszögben CF és AE súlyvonalak. Metszéspontjuk S, a háromszög súlypontja, amelyről tudjuk, hogy a súlyvonalakat a csúcstól számított 2 : 1 arányban osztja két részre. 1 pont

Írjuk fel az ASF háromszög oldalainak hosszát.

Az AE súlyvonal az ACE derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számolható:

$$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 + 2a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{6},$$

ahonnan $AS = \frac{2}{3}AE = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. 1 pont

A Thalesz-tétel megfordítása miatt CF súlyvonal az ABC derékszögű háromszög köré írt körének sugara, azaz $CF = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $SF = \frac{1}{3}CF = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. 1 pont

AF pedig az AB oldal fele, azaz $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

Mivel $AS^2 + SF^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 = a^2\frac{6}{9} + a^2\frac{3}{36} = a^2\frac{27}{36} = a^2\frac{3}{4} = AF^2$, 1 pont

így a Pitagorasz-tétel megfordítása értelmében az ASF háromszögnek S-nél derékszöge van, amivel beláttuk az állítást. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Igazoljuk, hogy a nyolcjegyű 20202021 szám után pontosan egyféleképpen tudunk írni három újabb számjegyet úgy, hogy a kapott 11-jegyű szám osztható legyen 77-tel, 91-gyel és 143-mal is. **7 pont**

1. megoldás. $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$, $143 = 11 \cdot 13$. 1 pont

$[77; 91; 143] = 1001$. 1 pont

Azt kell bizonyítani, hogy a $\overline{20202021abc}$ alakú számok között pontosan egy 1001-gyel osztható van. 1 pont

A 11-es oszthatósági szabály miatt $11 \nmid 20202020999$ 1 pont

Mivel 1001-gyel osztva 1001 osztási maradék van, a skatulyaelv alapján 1 pont

a következő ezer szám között (amik a nekünk megfelelő számok) biztosan van 1001-gyel osztható, 1 pont

és pontosan egy darab van. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$, $143 = 11 \cdot 13$. 1 pont

$[77; 91; 143] = 1001$. 1 pont

$20202021000 = 20181839 \cdot 1001 + 161$. 1 pont

$1001 - 161 = 840$. 1 pont

Tehát a 20202021840 szám osztható 1001-gyel. 1 pont

A következő 1001-gyel osztható szám, a 20202022841, már nem felel meg a feltételnek. 1 pont

Tehát pontosan egy ilyen szám van. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Az x, y pozitív számokra teljesül, hogy $x^3+y^3=x-y$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x^2+y^2<1$. **7 pont**

Megoldás. Mivel x és y pozitív számok, azért x^3+y^3 is pozitív, így szükségképpen $x>y$. 1 pont

$x^3+y^3>x^3-y^3$ mindig teljesül, a jobb oldalt szorzattá alakítva, a bal oldalon pedig a feltételt alkalmazva:

$$x-y>(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. 2 pont

Az $x-y$ pozitív, ezért az ezzel való osztáskor az egyenlőtlenség iránya nem változik. 1 pont

$$1>x^2+xy+y^2$$ 1 pont

minthogy $x>0$, $y>0$, így $xy>0$, tehát

$$1>x^2+y^2,$$

ami a bizonyítandó állítás. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Az $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak hány olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható az A halmaz minden elemével? **7 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok legbővebb részhalmazán.

$$\sqrt{\frac{5}{x+2}-1}+\sqrt{\frac{5}{3-x}-1}=\sqrt{\left(2-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)^2}$$ **7 pont**

3. Legyen minden k pozitív egész szám esetén H_k azoknak a természetes számoknak a halmaza, amelyek $(k+1)$-gyel osztva k maradékot adnak.

a) Ezek közül a halmazok közül hánynak eleme a 2021?
b) Van-e olyan természetes szám, ami az adott H_k halmazok közül pontosan 2021 darab halmaznak eleme? **7 pont**

4. Az ABC derékszögű háromszög átfogója $AB=2$, egyik hegyesszöge 30°. Mi azon P pontok halmaza a háromszögben és kerületén, amelyeket a befogókra tükrözve az AP_1P_2B négyszög trapéz lesz? Milyen értéket vehet fel e trapézok területe? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak hány olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható az A halmaz minden elemével? **7 pont**

Megoldás. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 számok legkisebb közös többszöröse $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Minden, a feltételnek megfelelő H részhalmazban lévő számok szorzata osztható kell legyen a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ szorzattal, ezért a 7 biztos eleme H-nak.

Minden olyan H részhalmaz megfelel, amelynek eleme a 7, a 8, a 9, valamint az 5 és a 10 közül legalább az egyik. Ezeknek a száma $2^5 \cdot 3 = 96$, hiszen a többi öt szám (1, 2, 3, 4 és a 6) közül bármelyik lehet is eleme H-nak, meg nem is. 1 pont

Ha egy megfelelő H halmaznak eleme a 7 és a 8, de nem eleme a 9, akkor – hogy a szorzatban meglegyen a két 3-as prímtényező – benne kell legyen a 3 és a 6 is, valamint az 5 és a 10 közül legalább az egyik. Az ilyen részhalmazok száma $2^3 \cdot 3 = 24$, mivel ekkor az 1, 2 és 4 számok helye bizonytalan, azaz közülük bármelyik lehet is eleme H-nak, meg nem is. 1 pont

Ha egy megfelelő H halmaznak eleme a 7 és a 9, de nem eleme a 8, akkor – hogy a szorzatban meglegyen a három 2-es és az egy 5-ös prímtényező is – a következő lehetőségek vannak:

a) Ha H-nak nem eleme a 10, akkor az 5 biztosan eleme, a 2-hatványok miatt pedig 2 eset van:

a/1) Mind a három 8-tól és 10-től különböző páros szám, azaz a 2, 4 és 6 is eleme H-nak. Ekkor csak az 1 és a 3 helye bizonytalan, ezért ebből a fajta részhalmazból $2^2 = 4$ darab van.

a/2) A 2, 4, és 6 közül valamelyik kettő eleme H-nak, egy kimarad belőle. Ekkor a kettő közül az egyik a 4 kell legyen, a másik a 2 és a 6 valamelyike. Ilyen részhalmazból $2 \cdot 2^2 = 8$ darab van, hiszen mindkét esetben csak az 1 és a 3 helye bizonytalan. 1 pont

b) Ha H-nak eleme a 10, akkor a 2-hatványok miatt 3 eset van:

b/1) Mind a három 8-tól és 10-től különböző páros szám, azaz a 2, 4 és 6 is eleme H-nak. Ekkor csak az 1, a 3 és az 5, ami H-nak lehet is eleme, meg nem is, ezért ebből a fajta részhalmazból $2^3 = 8$ darab van.

b/2) A 2, 4, és 6 közül valamelyik kettő eleme H-nak, egy kimarad belőle. Ilyen részhalmazból $3 \cdot 2^3 = 24$ darab van, hiszen mindhárom esetben az 1, a 3 és az 5 helye bizonytalan.

b/3) A 2, 4, és 6 közül pontosan egy eleme a H-nak. Ekkor ez biztosan a 4 – mert a 10 mellé még két darab 2-es faktor kell –, így ilyen részhalmazból $2^3 = 8$ darab van, hiszen ismét az 1, a 3 és az 5 helye bizonytalan. 2 pont

Ha egy megfelelő H halmaznak eleme a 7, de sem a 8, sem a 9 nem eleme, akkor a 3 és a 6 biztosan eleme, így a két 3-as prímtényező és egy 2-es prímtényező biztosítva van. Ekkor – hogy a még hiányzó két 2-es és az egy 5-ös prímtényező is benne legyen a H-beli elemek szorzatában – a következő lehetőségek vannak:

a) Ha H-nak nem eleme a 10, akkor az 5 biztosan eleme, valamint a maradék párosak (tehát a 2 és a 4) közül vagy mindkettő, vagy csak a 4 eleme H-nak. Ilyen részhalmazból $2 \cdot 2 = 4$ darab van, hiszen mindkét esetben csak az 1 helye bizonytalan.

b) Ha H-nak eleme a 10, akkor a 2 és a 4 közül legalább az egyik eleme H-nak. Ilyen részhalmazból $3 \cdot 2^2 = 12$ darab van, hiszen mindhárom esetben az 1 és az 5 helye bizonytalan. 1 pont

Tehát az összes megfelelő részhalmazok száma: $96+24+4+8+8+24+8+4+12 = 188$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok legbővebb részhalmazán.

$$\sqrt{\frac{5}{x+2}-1}+\sqrt{\frac{5}{3-x}-1}=\sqrt{\left(2-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)^2}$$ **7 pont**

Megoldás. A bal oldalon lévő kifejezések nevezője miatt $x \neq -2;\ 3$.

Alakítsuk át a gyök alatti kifejezéseket:

$$\frac{5}{x+2}-1=\frac{5-x-2}{x+2}=\frac{3-x}{x+2}$$
$$\frac{5}{3-x}-1=\frac{5-3+x}{3-x}=\frac{x+2}{3-x}$$ 1 pont

A nevezőket is figyelembe véve ezek a kifejezések akkor lesznek pozitívak, ha $-2 < x < 3$. 1 pont

Vegyük észre, hogy a bal oldalon két olyan pozitív szám összege áll, amelyek egymás reciprokai. Ezek összegéről tudjuk, hogy legalább kettő, 1 pont

valamint, hogy a szélsőértékét (a kettőt) akkor veszi fel, ha a két szám egyenlő, 1 pont

amiből

$$\frac{3-x}{x+2}=\frac{x+2}{3-x}$$
$$(3-x)^2=(x+2)^2$$

(a feltétel miatt pozitív számok négyzetei)

$$3-x=x+2$$
$$x=\frac{1}{2}$$

következik. Tehát a bal oldal minimuma 2, és ezt az $x=\frac{1}{2}$ esetben veszi fel. 1 pont

A jobb oldali kifejezést átalakítva:

$$\sqrt{\left(2-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)^2}=\left|2-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right|\leq 2.$$

Tehát a jobb oldal maximum 2, amit az $x = \frac{1}{2}$ helyen vesz fel. 1 pont

Így az egyenletnek akkor van megoldása, ha mindkét oldal 2, és ez csak az $x = \frac{1}{2}$ esetben teljesül. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Legyen minden k pozitív egész szám esetén H_k azoknak a természetes számoknak a halmaza, amelyek $(k+1)$-gyel osztva k maradékot adnak.

a) Ezek közül a halmazok közül hánynak eleme a 2021?
b) Van-e olyan természetes szám, ami az adott H_k halmazok közül pontosan 2021 darab halmaznak eleme? **7 pont**

Megoldás. *a)* A kérdés a következő: Hány k-hoz van olyan x természetes szám, hogy teljesül a $(k+1)x + k = 2021$ egyenlet? 1 pont

Kissé alakítva a $(k+1)(x+1) = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Tehát $k+1$ a 2022-nek osztója, és $k+1$ legalább 2. A 2022-nek nyolc osztója van, egyik az 1, ezért $k+1$ értéke 7-féle lehet, tehát hét halmaznak eleme a 2021. 1 pont

b) Az n szám annyi halmaznak eleme, ahány $(k;x)$, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{N}$, számpár igazzá teszi a $(k+1)x + k = n$, azaz $(k+1)(x+1) = n+1$ egyenletet. 1 pont

A $k+1$ szám az $(n+1)$-nek 1-nél nagyobb osztója. 1 pont

Tehát ha $(n+1)$-nek 2021 darab 1-nél nagyobb osztója van, azaz 2022 osztója van, akkor az n szám 2021 halmaznak eleme. 1 pont

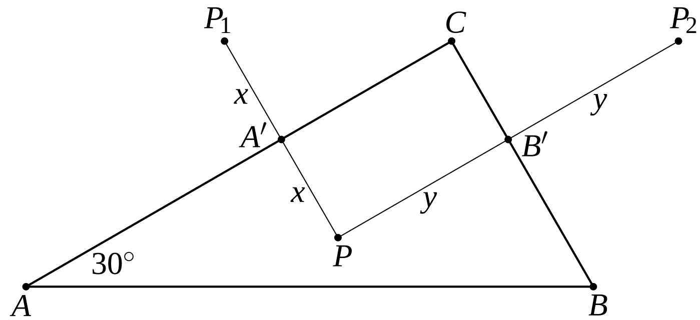
Tehát olyan számot kell keresni, aminek 2022 darab pozitív osztója van. Ilyen például a 2^{2021}, tehát az $n = 2^{2021} - 1$ szám a H_k halmazok közül éppen 2021 darab halmaznak eleme. 1 pont

Összesen: **pont**

4. Az ABC derékszögű háromszög átfogója $AB = 2$, egyik hegyesszöge 30°. Mi azon P pontok halmaza a háromszögben és kerületén, amelyeket a befogókra tükrözve az AP_1P_2B négyszög trapéz lesz? Milyen értéket vehet fel e trapézok területe? **7 pont**

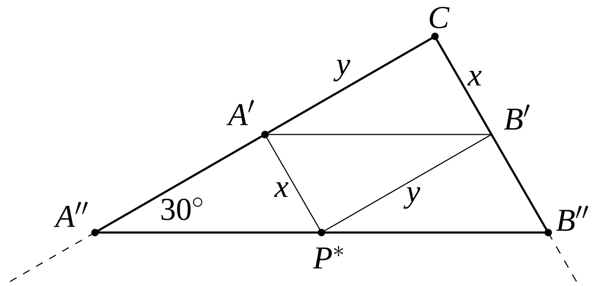
Megoldás. **1. eset:** ha $AB \parallel P_1P_2$.

Tükrözzük a háromszög egy tetszőleges P pontját a befogókra.



Ekkor a tükrözés tulajdonságai miatt $A'PB'C$ téglalap, valamint a C pont illeszkedik a P_1P_2 szakaszára. $P_1P_2 \parallel AB$ akkor áll fenn, ha P_1PP_2 középvonala ($A'B'$) is párhuzamos az átfogóval. Ebből pedig az következik, hogy $ABC\triangle \sim A'B'C\triangle$, vagyis $x : y = 1 : \sqrt{3}$. 1 pont

Tetszőleges ilyen arányú ($CB' : CA' = x : y (= 1 : \sqrt{3})$ szakaszokat mérve fel a C csúcstól,



így a tükrözött P^* pont az $A''B''C$ háromszög ($A''B'' \parallel AB$) átfogójának felezőpontja lesz. (Pl. a versenyző hivatkozik az egybevágó háromszögekre.) Ez azt jelenti, hogy a P pontok mértani helye a súlyvonal lesz. 1 pont

A legnagyobb területű trapézt akkor kapjuk, ha a P_1P_2 szakasz hossza a legnagyobb (vagyis $A'B'$ a legnagyobb). Ez a két tulajdonság egyszerre teljesül akkor, ha a P az átfogó felezőpontja.

Ekkor a trapéz területe:

$$T = \frac{AB + P_1P_2}{2} \cdot m_c = \frac{2+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$ 1 pont

A legkisebb terület viszont akkor keletkezik, amikor a P_1P_2 szakasz hossza nulla, vagyis a P a C ponttal azonos. Ekkor a háromszöggé fajuló trapéz területe:

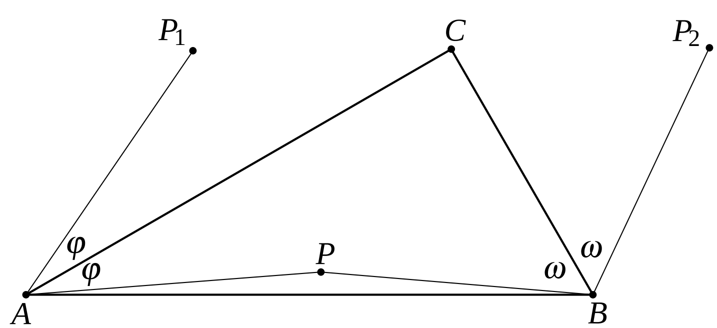
$$T = \frac{AB + P_1P_2}{2} \cdot m_c = \frac{2+0}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ 1 pont

A terület legalább $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és legfeljebb $\sqrt{3}$. 1 pont

Megjegyzés. Az is elfogadható, ha valaki az alsó becslésnél az egyenlőséget nem engedi meg.

2. eset: ha $AP_1 \parallel BP_2$.

Ekkor a $PAC\sphericalangle = CAP_1\sphericalangle$, valamint a $PBC\sphericalangle = CBP_2\sphericalangle$ teljesül. Mivel $\varphi \leq 30^\circ$ és $\omega \leq 60^\circ$,

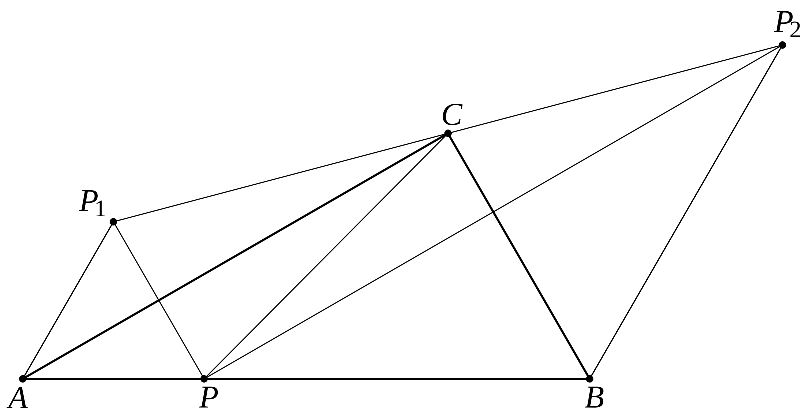


így a párhuzamosság következtében

$$\underbrace{30^\circ + \varphi}_{\leq 60^\circ} = \underbrace{180^\circ - 60^\circ - \omega}_{60^\circ \leq}$$

Az egyenlőség, vagyis a párhuzamosság feltétele, hogy P rajta van az átfogón. 1 pont

Ekkor a keresett trapéz területe (a tükrözött háromszögeket figyelembe véve) éppen az adott háromszög területének kétszerese.



Tehát ebben az esetben a P pont az átfogó tetszőleges pontja lehet, s területe minden esetben $\sqrt{3}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 1. forduló

Feladatok

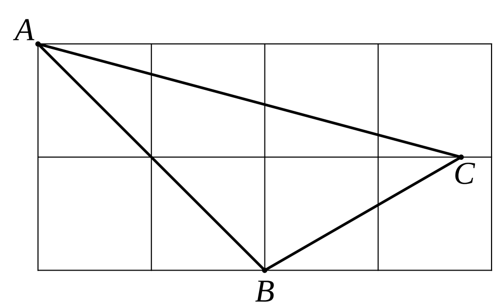
1. Határozzuk meg, hogy pontosan mely értékeket veheti fel az alábbi kifejezés?

$$[2a+3b]-[a]-[b]-[a+2b]$$

Az a és b tetszőleges valós számok, $[c]$ pedig a c egész részét jelöli. **7 pont**

2. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, melyre egy $n \times n$-es táblázat mezői kitölthetők az 1, 2, -3 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege 0 legyen. **7 pont**

3. Egy 45°-os szöggel rendelkező ABC háromszöget az ábra szerint lerajzoltunk egy négyzethálós lapra. Határozzuk meg a háromszög másik két szögét. (A és B rácspont.) **7 pont**



4. Nevezzük az n pozitív egész számot „prímben gazdag” számnak, ha a prímtényezős felbontásában szereplő prímek mindegyikének négyzetével is osztható. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok „prímben gazdag” szomszédos számpár létezik. **7 pont**

5. Egy kör érinti az M csúcsú derékszög szárait. A szög csúcsából induló e félegyenes a kört először az A, majd a B pontban metszi. A kör rövidebb $\widehat{AB}$ íve a kör kerületének éppen a negyed része. Mekkora szöget zár be az e félegyenes a derékszög száraival? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg, hogy pontosan mely értékeket veheti fel az alábbi kifejezés?

$$[2a+3b]-[a]-[b]-[a+2b]$$

Az a és b tetszőleges valós számok, $[c]$ pedig a c egész részét jelöli. **7 pont**

Megoldás. Jelöljük a egészrészét x-szel, törtrészét h-val, b egészrészét y-nal, törtrészét k-val.

Azaz $a = x+h$, $b = y+k$, ahol $h,k \in [0,1[$. Ezeket a és b helyére beírva kapjuk, hogy $[2a+3b] = [2x+3y+2h+3k]$, valamint $[a+2b] = [x+2y+h+2k]$. 1 pont

Használjuk ki, hogy ha egy r valós számot felírunk $r = z+m$ alakban, ahol z egész szám, akkor

$$[r] = z+[m].$$

Emiatt $[2x+3y+2h+3k] = 2x+3y+[2h+3k]$, ugyanígy $[x+2y+h+2k] = x+2y+[h+2k]$.

Mindezeket az eredeti kifejezésbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$[2a+3b]-[a]-[b]-[a+2b] = [2h+3k]-[h+2k].$$ 2 pont

$h,k \in [0;1[$ miatt a kisebbítendő értéke 0, 1, 2, 3, 4 lehet, a kivonandóé 0, 1, 2.

Vegyük figyelembe, hogy $[2h+3k] \geq [h+2k]$. Ezért a különbség értéke 0, 1, 2, 3, 4 lehet. 1 pont

A 4 nem valósulhat meg, mert ehhez az kellene, hogy $2h+3k \geq 4$ és $h+2k \leq 1$ egyszerre teljesüljön, ami lehetetlen, hiszen a második egyenlőtlenséget 2-vel szorozva $2h+4k \leq 2$ adódik, ami ellentmondásban áll az elsővel. 1 pont

A 3 bekövetkezhetne úgy, hogy $4-1$, vagy $3-0$.

Az első esetben $2h+3k \geq 4$ és $2 > h+2k \geq 1$ kellene, de a másodikat 2-vel szorozva itt is kiderül az ellentmondás.

A második esethez az kellene, hogy és $4 > 2h+3k \geq 3$ és $1 > h+2k \geq 0$, de a másodikat 2-vel szorozva itt is ellentmondásra jutunk. 1 pont

A 2 megvalósulhat $3-1$ alakban, például $h = 0{,}19$, $k = 0{,}9$ választásasal.

Az 1 megvalósulhat $1-0$ alakban például $h = 0{,}6$, $k = 0$ választással.

A 0 is könnyen elérhető például $h = 0$, $k = 0$ esetén.

Azaz a kifejezés a 0, 1, 2 értékeket veszi fel. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, melyre egy $n \times n$-es táblázat mezői kitölthetők az 1, 2, -3 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege 0 legyen. **7 pont**

Megoldás. $n = 1$, 2 esetén a megfelelő kitöltés nem valósítható meg, hiszen ha a táblázat kitöltéséhez nem használjuk a -3-at, akkor a sor- és oszlopösszegek mindegyike pozitív lesz, ha viszont valamelyik mezőbe beírjuk a -3-at, akkor ezen cella sorában és oszlopában negatív összeget kapunk. 1 pont

$n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén viszont a megfelelő kitöltés mindig megvalósítható. A táblázat kitöltése az alábbi konstrukció szerint valósítható meg:

- Először kitöltjük az 1, 2, -3 segítségével az első sort úgy, hogy a benne levő számok összege 0 legyen.
- Ezután a 2., 3., …, n. sort a megadott sorrendben úgy töltjük ki, hogy a felettük levő sorhoz képest a számokat mindig eggyel jobbra toljuk. Tehát
  - a $(k+1)$. sor 2. eleme a k. sor 1. eleme lesz ($k = 1, 2, \ldots, n-1$);
  - a $(k+1)$. sor 3. eleme a k. sor 2. eleme lesz,
  - $\vdots$
  - a $(k+1)$. sor n. eleme a k. sor $(n-1)$. eleme lesz,
  - végül a $(k+1)$. sor 1. eleme a k. sor n. eleme lesz. 1 pont

$n = 3m$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az első sor kitöltéséhez például az $(1, 2, -3)$ számsorozatot használhatjuk fel m-szer, 1 pont

$n = 3m + 1$ esetén az $(1, 1, 1, -3)$ számsorozatot az $(1, 2, -3)$ számhármas követheti $\dfrac{n-4}{3}$-szor, 1 pont

$n = 3m + 2$ esetén a $(2, 2, 2, -3, -3)$ számsorozatot az $(1, 2, -3)$ számhármas követheti $\dfrac{n-5}{3}$-szor. 1 pont

A megfelelő kitöltések szerkezetét az alábbi táblázatok mutatják be $n = 6$, 7, 8 esetén:

$n = 6$

1	2	-3	1	2	-3
-3	1	2	-3	1	2
2	-3	1	2	-3	1
1	2	-3	1	2	-3
-3	1	2	-3	1	2
2	-3	1	2	-3	1

$n = 7$

1	1	1	-3	1	2	-3
-3	1	1	1	-3	1	2
2	-3	1	1	1	-3	1
1	2	-3	1	1	1	-3
-3	1	2	-3	1	1	1
1	-3	1	2	-3	1	1
1	1	-3	1	2	-3	1

$n = 8$

2	2	2	-3	-3	1	2	-3
-3	2	2	2	-3	-3	1	2
2	-3	2	2	2	-3	-3	1
1	2	-3	2	2	2	-3	-3
-3	1	2	-3	2	2	2	-3
-3	-3	1	2	-3	2	2	2
2	-3	-3	1	2	-3	2	2
2	2	-3	-3	1	2	-3	2

Mivel

$$m\left[1+2+(-3)\right] = 0, \left[1+1+1+(-3)\right] + \frac{n-4}{3}\left[1+2+(-3)\right] = 0,$$

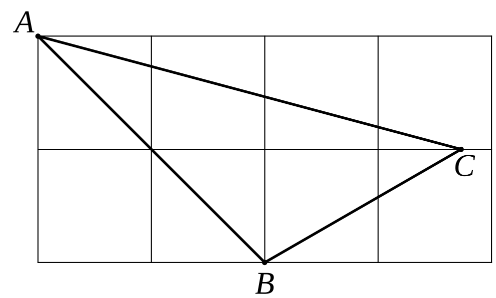
$$\left[2+2+2+(-3)+(-3)\right] + \frac{n-5}{3}\left[1+2+(-3)\right] = 0,$$

ezért minden esetben a táblázat első sorában a beírt számok összege 0. 1 pont

Továbbá, mivel a sorokban a ciklikus jobbra tologatás miatt mindig ugyanaz az n db szám szerepel, ezért a többi sorban is a számok összege csak 0 lehet.
Másrészt mivel az első sor számai a ciklikus jobbra tologatás miatt mindig másik oszlopba kerülnek, ezért mindegyikük minden oszlopba pontosan egyszer jut el. Így oszloponként is a számok összege csak 0 lehet. 1 pont
Ezzel a megadott konstrukció helyességét igazoltuk.

Összesen: **7 pont**

3. Egy 45°-os szöggel rendelkező ABC háromszöget az ábra szerint lerajzoltunk egy négyzethálós lapra. Határozzuk meg a háromszög másik két szögét. (A és B rácspont.) **7 pont**

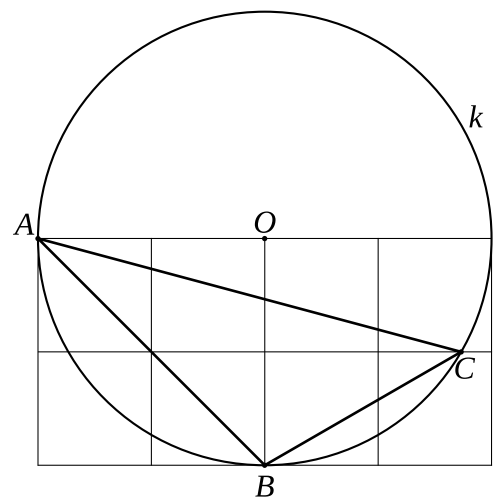


Megoldás. Alkalmazzuk az ábra szerinti jelöléseket. Ekkor az OAB egyenlő szárú derékszögű háromszög, hegyesszögei 45°-osak.

$CAB\sphericalangle < OAB\sphericalangle = 45^\circ$ és $ABC\sphericalangle > ABO\sphericalangle = 45^\circ$ alapján az ABC háromszög 45°-os szöge csak a C csúcsnál lehet. 1 pont

Mivel $OA = OB$ és $BOA\sphericalangle = 90^\circ = 2 \cdot BCA\sphericalangle$, ezért az ABC háromszög körülírt körének középpontja O és $OB = OC$. 2 pont

Másrészt C rajta van az OB szakasz felezőmerőlegesén, így $BC = OC$, tehát az OBC háromszög szabályos és $COB\sphericalangle = 60^\circ$. 2 pont



Az adott ívhez tartozó kerületi és középponti szögek viszonyát figyelembe véve:

$$CAB\sphericalangle = \frac{1}{2}COB\sphericalangle = 30^\circ \quad \text{és} \quad ABC\sphericalangle = 180^\circ - BCA\sphericalangle - CAB\sphericalangle = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ.$$

Tehát az ABC háromszög másik két szöge 30° és 105° nagyságú. 2 pont

Összesen: **7 pont**

4. Nevezzük az n pozitív egész számot „prímben gazdag” számnak, ha a prímtényezős felbontásában szereplő prímek mindegyikének négyzetével is osztható. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok „prímben gazdag” szomszédos számpár létezik. **7 pont**

Megoldás. A $(8;9)$ számpár megfelel a feladat feltételeinek, mivel $8 = 2^3$ és $2^2 \mid 8$, illetve $9 = 3^2$ és $3^2 \mid 9$. Tehát legalább egy „prímben gazdag” szomszédos számpár biztosan létezik. 1 pont

Használjuk fel az alábbi tulajdonságokat:

a) a négyzetszámok „prímben gazdag” számok,
b) két „prímben gazdag” szám szorzata is „prímben gazdag” szám.

Az *a)* tulajdonság abból következik, hogy egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden prímszám páros kitevőn szerepel, így minden kitevő 2 vagy annál nagyobb páros szám, ezért a négyzetszám osztható bármely felbontásban szereplő prím négyzetével. 1 pont

A *b)* tulajdonság pedig abból adódik, hogy a két szám szorzatának prímtényezős felbontásában csak azok a prímek szerepelhetnek, amelyek a számok felbontásában megjelentek, és ha a számok valamelyike a prímek valamelyikének négyzetével osztható volt, akkor ez igaz lesz a többszörösére is. 1 pont

A megállapított két tulajdonság alapján legyen n és $n+1$ két szomszédos „prímben gazdag” szám ($n \in \mathbb{N}^+$). Ekkor

– az $n(n+1)$ is „prímben gazdag” szám, 1 pont

– a $4n(n+1)$ is „prímben gazdag” szám, 1 pont

– a $(2n+1)^2$ is „prímben gazdag” szám. 1 pont

Viszont

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1,$$

így a $(4n^2+4n, 4n^2+4n+1)$ szomszédos egészekből álló számpár tagjai is „prímben gazdag” számok. Mivel n értékét a pozitív egészek körében végtelen sokféleképpen megválaszthatjuk, ezért az állítást ezzel igazoltuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Egy kör érinti az M csúcsú derékszög szárait. A szög csúcsából induló e félegyenes a kört először az A, majd a B pontban metszi. A kör rövidebb $\widehat{AB}$ íve a kör kerületének éppen a negyed része. Mekkora szöget zár be az e félegyenes a derékszög száraival? **7 pont**

1. megoldás. A kör középpontja K, a rövidebb $\widehat{AB}$ ív és a szögszár érintési pontja F. Forgassuk el 90°-kal a K pont körül a derékszöget a körrel együtt.

Ekkor a kör képe önmaga, az M csúcsú derékszög képe az N csúcsú derékszög lesz, ennek szárai szintén érintik a kört, az A pont B-be, az AB húr a rá merőleges BC húrba megy át.

Az M pont rajta van az AB egyenesen, ezért az N pont, ami az M pont képe az elforgatásnál, rajta lesz az AB egyenes képén, ami éppen a BC egyenes.

Ezért az $NBM\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 90^\circ$.

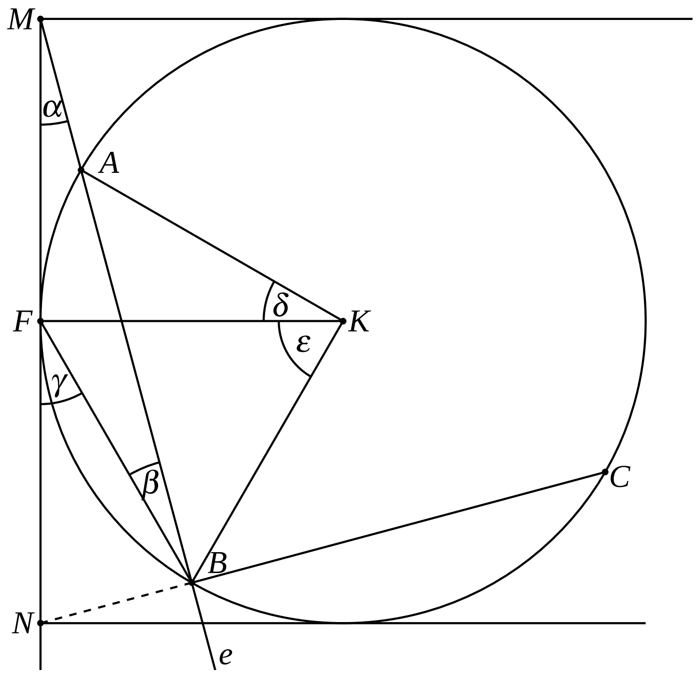
Thalész tételének megfordítása miatt $FB = FM$, ezért $\beta = \alpha$,

$$\gamma = \alpha + \beta = 2\alpha,$$

mert γ külső szöge az MFB háromszögnek.

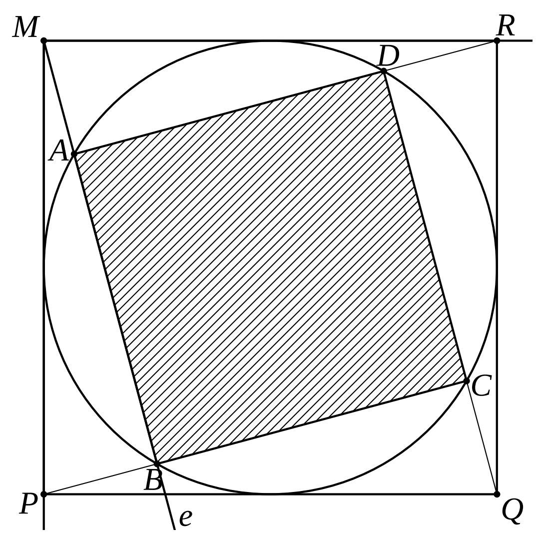
A középponti és kerületi szögek tétele szerint $\varepsilon = 2\gamma = 4\alpha$ és $\delta = 2\beta = 2\alpha$, 2 pont

így $90^\circ = \delta + \varepsilon = 2\alpha + 4\alpha = 6\alpha$, innen $\alpha = 15^\circ$. 1 pont



Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Vegyük fel az $MPQR$ négyzetet úgy, hogy a megadott kör a beírt köre legyen, P és R pedig a megadott derékszög szárain legyen. Az MB szakaszt 90°-kal elforgatva a négyzet középpontja körül kapjuk a PC szakaszt, amely átmegy a B ponton, hiszen az az MB szakaszon lévő A pont elforgatottja. Hasonlóan kapjuk a C és D pontokat. 2 pont



Az $ABCD$ négyzet területe az $MPQR$ négyzet területének fele, hiszen az adott körbe írható összes négyzet egyforma területű, és az $MPQR$ oldalfelező pontjai által alkotott négyzetről könnyű látni, hogy fele akkora területű. 2 pont

Így az egybevágó MPB, PQC, QRD és RMA háromszögeknek együtt a területe szintén fele a négyzet területének, külön-külön tehát területük a négyzet területének nyolcada. 1 pont

Így az átfogóhoz tartozó magasságuk az átfogó negyedével egyenlők. Az jól ismert, hogy ha egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága negyede az átfogónak, akkor a szögei nagysága 15° és 75°, azaz a feladat kérdésére is ez a két szög a válasz. 2 pont

(A jól ismert tény bizonyítása: ha F az MP felezőpontját jelöli, akkor a Thalész-tétel megfordítása miatt BF fele az átfogónak. Ha az MPB háromszög magassága a BT szakasz, akkor BTF

háromszög olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik befogója fele az átfogójának, azaz félszabályos. Innen a szögek már könnyen adódnak).

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az ábra kiegészítése után a feladat trigonometriai ismeretekkel is befejezhető. Ha az $MPQR$ négyzet oldala 2 egység, a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy $AB = \sqrt{2}$. Ha az $MA = PB$ szakasz hosszát x jelöli, a Pitagorasz-tételt felírva az

$$(x+\sqrt{2})^2 + x^2 = 2^2$$

egyenlet adódik. Ez a

$$2x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = 0$$

másodfokú egyenlethez vezet, amelynek egyedüli pozitív megoldása $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Innen pedig az $PMB\sphericalangle$ szög szinuszára $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ adódik, amelyről ismert, hogy a hegyesszögek körében csak a 15° a megoldása.

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Mekkora lehet az xyz szorzat értéke, ha az x, y, z valós számok teljesítik a következő egyenleteket:

$$x + y + xy = 3 \quad (1)$$

$$y + z + yz = 8 \quad (2)$$

$$z + x + zx = 35 \quad (3)$$

7 pont

2. Mekkorák annak az ABC háromszögnek a szögei, amelynél a C csúcsból induló magasságvonal talppontjának a C csúcsból induló belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe éppen a C-ből húzott súlyvonal felezőpontja? **7 pont**

3. Jelölje a_k a pozitív egész k szám négyzetgyökének egészekre való kerekítését. Mekkora n értéke, ha

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 2021?$$

7 pont

Megoldások és javítási útmutató

1. Mekkora lehet az xyz szorzat értéke, ha az x, y, z valós számok teljesítik a következő egyenleteket:

$$x+y+xy=3 \tag{1}$$
$$y+z+yz=8 \tag{2}$$
$$z+x+zx=35 \tag{3}$$ **7 pont**

1. megoldás. Minden egyenlethez 1-et hozzáadva a bal oldalak szorzattá alakíthatóak:

$$(x+1)(y+1)=2^2 \tag{1'}$$
$$(y+1)(z+1)=3^2 \tag{2'}$$
$$(z+1)(x+1)=6^2 \tag{3'}$$ 2 pont

Az egyenleteket összeszorozva: $(x+1)^2\cdot(y+1)^2\cdot(z+1)^2=36^2$.

Tehát

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 36.$$ 1 pont

Ha $(x+1)(y+1)(z+1)=36$, akkor (mivel $x=-1$ vagy $y=-1$ vagy $z=-1$ nem ad megoldást) $(1')$, $(2')$, $(3')$-vel rendre osztva az összefüggést kapjuk, hogy:

$$z+1=9$$
$$x+1=4$$
$$y+1=1$$ 1 pont

Ebből $x=3$, $y=0$, $z=8$, tehát $xyz=0$. 1 pont

Ha $(x+1)(y+1)(z+1)=-36$, akkor $(1')$, $(2')$, $(3')$-vel rendre osztva azt kapjuk, hogy:

$$z+1=-9$$
$$x+1=-4$$
$$y+1=-1$$ 1 pont

Ebből $x=-5$, $y=-2$, $z=-10$, tehát $xyz=-100$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.

$$x(y+1)=3-y. \tag{1}$$

Mivel $y=-1$ nem megoldás

$$x=\frac{3-y}{y+1}$$ 2 pont

$$z(y+1)=8-y \tag{2}$$

$$z=\frac{8-y}{y+1}$$ 1 pont

$$\frac{8-y}{y+1}+\frac{3-y}{y+1}+\frac{(8-y)(3-y)}{(y+1)^2}=35 \tag{3}$$

Ebből az alábbi egyenlethez jutunk:

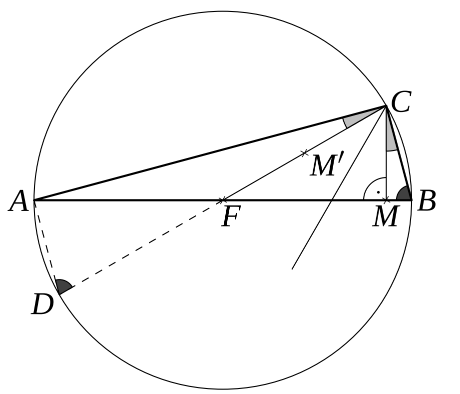
$$y^2 + 2y = 0 \qquad \text{2 pont}$$

Megoldások: $y = -2$, $x = -5$, $z = -1$, ekkor $xyz = -100$

vagy $y = 0$, $x = 3$, $z = 8$, ekkor $xyz = 0$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Mekkorák annak az ABC háromszögnek a szögei, amelynél a C csúcsból induló magasságvonal talppontjának a C csúcsból induló belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe éppen a C-ből húzott súlyvonal felezőpontja? **7 pont**



1. megoldás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha M magasság talppont szögfelezőre vonatkozó M' tükörképe az s_c súlyvonalra esik, akkor az ABC háromszögnek C-nél derékszöge van. Ehhez hosszabbítsuk meg a CF súlyvonalat az ABC háromszög köré írt köréig, és a kör és a súlyvonal (C-től különböző) metszéspontját jelöljük D-vel. $ADC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi szögek. 1 pont

Viszont mivel a belső szögfelezőre tükröztünk

$$ACD\sphericalangle = MCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$$

is igaz. Innen a DAC háromszögben $DAC\sphericalangle = 90^\circ$. 1 pont

Azaz ABC körülírt köre egyúttal CD szakasz Thalész-köre. Ennek középpontja egyfelől rajta van CD-n (a felezőpontja), másfelől rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén is. 1 pont

De AB felezőmerőlegesének és CD-nek a metszéspontja pontosan F, azaz AB felezőpontja egyúttal ABC köré írt körének középpontja, azaz $ACB\sphericalangle = 90^\circ$.

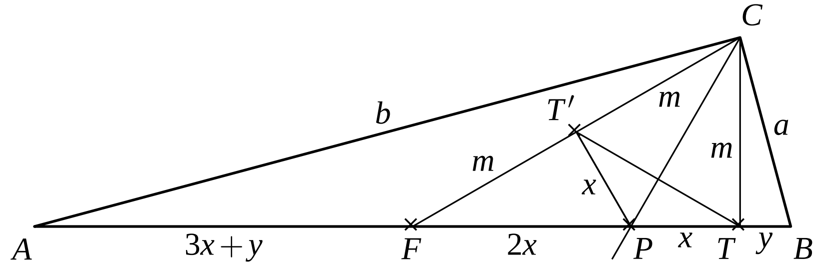
(Megjegyzés: AB felezőmerőlegese és CD a feladat feltételei alapján nem eshet egybe.) 1 pont

Másodjára vegyük észre, hogy FMC olyan derékszögű háromszög, amelynek MC befogója (a feltételek alapján) pontosan fele a CF átfogónak, azaz félszabályos. 1 pont

Innen $FCM\sphericalangle = 60^\circ$ és így $ACF\sphericalangle = MCB\sphericalangle = 15^\circ$. Innen azonnal adódik, hogy az ABC háromszög szögei: 15°, 75°, 90°. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.



Legyen a C csúcshoz tartozó magasság m. A tükrözés miatt $CT' = m$, így $FT' = m$. De ekkor FTC háromszög félszabályos. Legyen $PT = x$. A tükrözés miatt $PT' = x$, így FPT' félszabályos háromszögben $FP = 2x$, valamint $m = \sqrt{3}x$.

Pitagorasz tételét felírva ATC és TBC derékszögű háromszögekben:

$$b^2 = (6x+y)^2 + 3x^2$$
$$a^2 = y^2 + 3x^2 \qquad \text{1 pont}$$

Ezekből $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{39x^2+12xy+y^2}{3x^2+y^2}$. A szögfelező-tétel alapján:

$$\frac{b}{a} = \frac{5x+y}{x+y} \qquad \text{1 pont}$$

Ebből

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{25x^2+10xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$$

Tehát

$$\frac{39x^2+12xy+y^2}{3x^2+y^2} = \frac{25x^2+10xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$$

x^2-tel egyszerűsítünk és vezessük be a $z = \dfrac{y}{x}$ új ismeretlent:

$$\frac{39+12z+z^2}{3+z^2} = \frac{25+10z+z^2}{1+2z+z^2}$$

$$39+78z+39z^2+12z+24z^2+12z^3+z^2+2z^3+z^4 = 75+30z+3z^2+25z^2+10z^3+z^4$$

$$4z^3+36z^2+60z-36 = 0$$

$$z^3+9z^2+15z-9 = 0 \qquad \text{1 pont}$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a $z = -3$ megoldása az egyenletnek, így a bal oldalon $z+3$ kiemelhető: $(z+3)\left(z^2+6z-3\right) = 0$. Így az egyenlet megoldásai: $z = -3$, $z = -3-2\sqrt{3}$, $z = -3+2\sqrt{3}$.

Ezek közül csak a $z = -3+2\sqrt{3}$ lehet a feladat megoldása, így

$$\frac{y}{x} = 2\sqrt{3}-3, \qquad y = \left(2\sqrt{3}-3\right)x \qquad \text{2 pont*}$$

Ekkor $AF = FB = 3x+y = 2\sqrt{3}x$ és $FC = 2m = 2\sqrt{3}x$, tehát $AF = FB = FC$, azaz a Thalész-tétel értelmében $BCA = 90^\circ$, AFC egyenlő szárú háromszögből pedig $CAB = 15^\circ$, így $ABC = 75^\circ$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A *-gal jelölt 2 pontot például az alábbi gondolatmenetekért is megkaphatja a versenyző:

Vezessük be a v új ismeretlent, ahol $z = v - 3$.

$$\begin{aligned}
(v-3)^3 + 9(v-3)^2 + 15(v-3) - 9 &= 0 \\
v^3 - 9v^2 + 27v - 27 + 9v^2 - 54v + 81 + 15v - 45 - 9 &= 0 \\
v^3 - 12v &= 0
\end{aligned}$$

Az egyenlete gyökei: $v = 0$, $v = -2\sqrt{3}$, $v = 2\sqrt{3}$, így $z = -3$, $z = -2\sqrt{3} - 3$, $z = 2\sqrt{3} - 3$.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} &= 2\sqrt{3} - 3 \\
y &= \left(2\sqrt{3} - 3\right) x
\end{aligned}$$

vagy

Csoportosítsuk át az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned}
z^3 + 6z^2 + 3z^2 - 3z + 18z - 9 &= 0 \\
z^3 + 6z^2 - 3z + 3z^2 + 18z - 9 &= 0 \\
z\left(z^2 + 6z - 3\right) + 3\left(z^2 + 6z - 3\right) &= 0 \\
(z+3)\left(z^2 + 6z - 3\right) &= 0
\end{aligned}$$

így $z = -3$, $z = -2\sqrt{3} - 3$, $z = 2\sqrt{3} - 3$.

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} &= 2\sqrt{3} - 3 \\
y &= \left(2\sqrt{3} - 3\right) x
\end{aligned}$$

3. Jelölje a_k a pozitív egész k szám négyzetgyökének egészekre való kerekítését. Mekkora n értéke, ha

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 2021?$$ **7 pont**

Megoldás. Először belátjuk, hogy két szomszédos négyzetszám között pontosan a számok fele lesz lefelé, másik fele fölfelé kerekítve. Ha például $m^2 \leq k_i \leq (m+1)^2$, akkor ezen $2m+2$ darab k_i szám négyzetgyökei közül $m+1$ darab lesz lefelé és $m+1$ darab fölfelé kerekítve.

k_i négyzetgyöke akkor lesz lefelé, (m-re) kerekítve, ha $m^2 \leq k_i \leq (m+0{,}5)^2$, 1 pont

azaz $m^2 \leq m^2 + m + 0{,}25$. Ez $m+1$ darab szám (m^2, $m^2+1, \ldots, m^2+m$), a maradék $m+1$ darab pedig fölfelé lesz kerekítve. 1 pont

Az előzőek szerint pontosan m-re kerekítve magán az m^2 szám négyzetgyökén kívül a nála nagyobb számok közül m darab, a nála kisebbek közül $m-1$ darab lesz. Ez tehát $2m$ darab szám, 1 pont

ezért

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$ 1 pont

azaz az m nevezőjű tagok összege: $\frac{1}{m} \cdot 2m = 2$. 1 pont

$2020 = 2\cdot 1010$, tehát 2020 akkor lesz a tagok összege, ha az utolsó 2020 tagban a nevező 1010. Vagyis az összeadandó tagok száma $2+4+6+\ldots+2020 = 1\,021\,110$. 1 pont

Ahhoz, hogy az összeg 2021 legyen, ehhez még hozzá kell venni a következő 1011 darab 1011 nevezőjű tagot, ezért $n = 10\,211\,110 + 1011 = 10\,221\,21$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCDE$ körbe írható ötszögben $AB = BC = CD$. Az AC és BE átlók a K pontban, az AD és CE átlók pedig az L pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy $AK = KL$. **7 pont**

2. Melyek azok az x és y természetes számok, amelyek igazzá teszik az alábbi egyenletet:

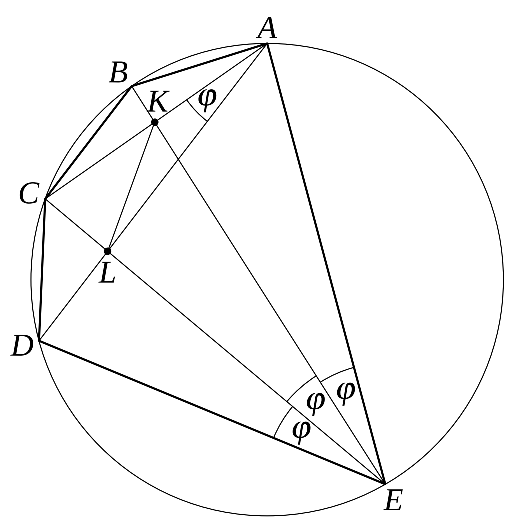
$$x\cdot(y-18)+7 = x\cdot\sqrt{\frac{x+y}{3}}$$ **7 pont**

3. 2021 nemnegatív valós szám összege 1. Válasszunk ki közülük kettőt az összes lehetséges módon, a kétféle sorrend külön lehetőségnek számít. Képezzük a két szám szorzatának és összegének szorzatát, majd adjuk össze az igy kapott szorzatokat. Mennyi ennek az összegnek a maximuma? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCDE$ körbe írható ötszögben $AB = BC = CD$. Az AC és BE átlók a K pontban, az AD és CE átlók pedig az L pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy $AK = KL$. **7 pont**

Megoldás. Mivel adott körben az azonos hosszúságú ívekhez azonos nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$,



innen $BEA\sphericalangle = CEB\sphericalangle = DEC\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \varphi$, 2 pont

amiből következik, hogy $LEK\sphericalangle = LAK\sphericalangle = \varphi$, azaz $AKLE$ húrnégyszög. 2 pont

Az $AKLE$ húrnégyszög körülírt körében az $\widehat{AK}$ ívhez tartozó kerületi szögek egyenlősége alapján:

$$KLA\sphericalangle = KEA\sphericalangle = BEA\sphericalangle = \varphi.$$ 1 pont

Így $KLA\sphericalangle = LAK\sphericalangle = \varphi$, 1 pont tehát az AKL háromszög egyenlő szárú, és $AK = KL$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Melyek azok az x és y természetes számok, amelyek igazzá teszik az alábbi egyenletet:

$$x \cdot (y - 18) + 7 = x \cdot \sqrt{\frac{x+y}{3}}$$ **7 pont**

Megoldás. Mivel $x = 0$ nem megoldás, így x-szel osztva a két oldalt:

$$y - 18 + \frac{7}{x} = \sqrt{\frac{x+y}{3}}.$$

Az egyenlet bal oldalán racionális szám áll, ezért $\sqrt{\frac{x+y}{3}}$ is racionális.

Azaz $\sqrt{\frac{x+y}{3}} = \frac{p}{q}$, ahol $(p;q) = 1$. Innen $x + y = \frac{3p^2}{q^2}$. 1 pont

A bal oldalon egész szám áll, ezért q^2 osztója a $3p^2$-nek, ezért $(p;q) = 1$ miatt q^2 osztója a 3-nak, ezért $q = 1$. 1 pont

Tehát $x + y = 3p^2$, ezért $\frac{x+y}{3}$ négyzetszám, így $\sqrt{\frac{x+y}{3}} \in \mathbb{N}$. 1 pont

Ebből következik, hogy $\frac{7}{x} \in \mathbb{N}$, tehát $x = 1$ vagy $x = 7$. 2 pont

A megoldandó egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$ esetén y nem egész szám, 1 pont

$x = 7$ esetén $y = 20$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. 2021 nemnegatív valós szám összege 1. Válasszunk ki közülük kettőt az összes lehetséges módon, a kétféle sorrend külön lehetőségnek számít. Képezzük a két szám szorzatának és összegének szorzatát, majd adjuk össze az igy kapott szorzatokat. Mennyi ennek az összegnek a maximuma? **7 pont**

Megoldás. Egy szorzat így néz ki: $x_i x_j (x_i + x_j)$. Bontsuk fel a zárójelet: $x_i^2 x_j + x_j^2 x_i$. 1 pont

Ha tekintjük az összes szorzatot és mindenütt felbontjuk a zárójelet, akkor megállapíthatjuk, hogy egy adott x_i^2 mellett az összes az összes x_j szerepelni fog pontosan kétszer, kivéve magát x_i-t, mivel $x_i^2 x_j$ szerepel $x_i x_j (x_1 + x_j)$-ben, valamint $x_j x_i (x_i + x_j)$-ben.

Ezért x_i^2-et kiemelve ezekből, a zárójelben a többi szám összegének kérszerese lesz, ami $2 - 2x_i$. Tehát az eredeti összeg felírható $\sum_i x_i^2 \cdot 2(1 - x_i)$ alakban.

Tekintsük ezt a szorzatot: $x_i^2 (1 - x_i) = x_i x_i (1 - x_i)$. Mivel $x_i (1 - x_1) \leq \frac{1}{4}$, 1 pont ezért $2x_ix_i(1-x_i) \leq \frac{1}{2}x_i$, tehát az S összeg maximum

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \ldots + \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2}$$

lehet. 2 pont

Ezt el tudjuk érni, ha két számot $\frac{1}{2}$-nek, a többit 0-nak választunk, azaz a maximum $\frac{1}{2}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyenek x, y és z nullától és egymástól páronként különböző valós számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitívak, továbbá $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, akkor x, y és z is racionális számok.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, de nem feltétlenül pozitívak, akkor x, y és z lehetnek irracionális számok is. **7 pont**

2. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 110^\circ$, $BCD\sphericalangle = 35^\circ$, $ADC\sphericalangle = 105^\circ$ és az AC átló felezi a $DAB\sphericalangle$-et. Határozzuk meg az $ABD\sphericalangle$ nagyságát! **7 pont**

3. A pozitív egész számok a_1, a_2, ... sorozatát „hexadecimálisnak” nevezzük, ha bármely nyolc egymást követő tag összege legfeljebb 16, vagyis bármely $i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+7} \leq 16.$$

Egy m pozitív egész számot „vágáshossznak” nevezzük, ha minden hexadecimális sorozat néhány egymást követő tagjának összege m, azaz léteznek olyan $k \leq l$ ($k,l \in \mathbb{N}^+$) számok, amelyekre

$$\sum_{i=k}^{l} a_i = m.$$

Határozzuk meg m összes lehetséges értékét, vagy bizonyítsuk be, hogy m egyetlen pozitív egész értéket sem vehet fel! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyenek x, y és z nullától és egymástól páronként különböző valós számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitívak, továbbá $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, akkor x, y és z is racionális számok.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, de nem feltétlenül pozitívak, akkor x, y és z lehetnek irracionális számok is. **7 pont**

Megoldás.

a) $x+\frac{1}{y}=p$, $y+\frac{1}{z}=q$, $z+\frac{1}{x}=r$, $xyz=s$, ahol p, q, r és s racionális számok, sőt, mivel x, y és z pozitívak, ezért nyilván p, q és r is pozitívak.

Az első két egyenletet összeszorozva:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)=pq$$

$$xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{yz}=pq$$ 1 pont

Szorozzuk meg z-vel mindkét oldalt

$$xyz+x+z+\frac{1}{y}=pqz$$

$$s+p+z=pqz$$

$$s+p=z(pq-1)$$ 1 pont

Két eset van.

1\. eset: Tegyük fel, hogy $pq\neq 1$, ekkor $s+p$ nem lehet 0, hiszen $pq-1\neq 0$, z pedig a feladat feltétele szerint nem nulla.

Tehát $z=\frac{s+p}{pq-1}$, ezért z racionális (hiszen a racionális számok halmaza zárt a négy alapműveletre). 1 pont

Akkor pedig $\frac{1}{z}$ is racionális.

Így $y=q-\frac{1}{z}$ is racionális, $\frac{1}{y}$ is racionális, és $x=p-\frac{1}{y}$ is racionális. 1 pont

2\. eset: Ha $pq=1$, akkor $s+p=0$.

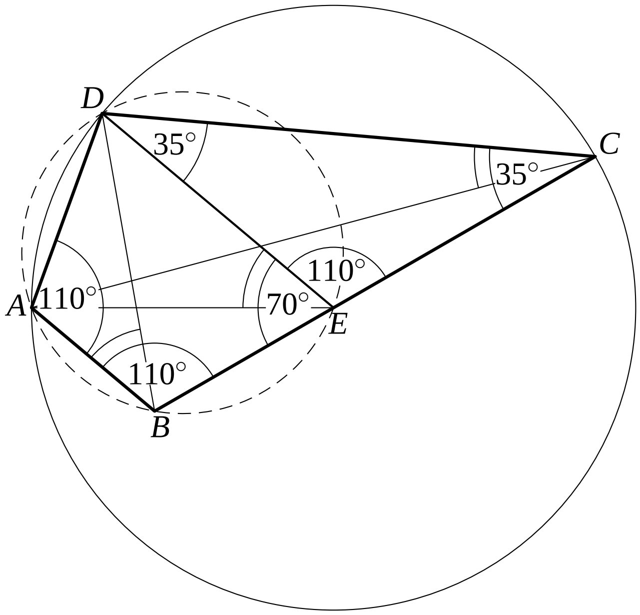
Ez ellentmond annak, hogy p és s pozitív számok, így ez az eset nem valósulhat meg. 1 pont

b) Például $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}-1$ és $z=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\sphericalangle=ABC\sphericalangle=110^\circ$, $BCD\sphericalangle=35^\circ$, $ADC\sphericalangle=105^\circ$ és az AC átló felezi a $DAB\sphericalangle$-et. Határozzuk meg az $ABD\sphericalangle$ nagyságát! **7 pont**

Megoldás. Legyen az E a BC oldal azon pontja, amelyre $DE\parallel AB$. 1 pont



Mivel $DAB\sphericalangle = ABE\sphericalangle = 110^\circ$, ezért az $ABED$ négyszög szimmetrikus trapéz, körbe írható, a DE oldalon fekvő szögei 70°-osak, és $ABD\sphericalangle = AED\sphericalangle$. 1 pont

Továbbá $ADC\sphericalangle = 105^\circ$, $EDA\sphericalangle = 70^\circ$, ezért $CDE\sphericalangle = 35^\circ$.

Így a DCE háromszög egyenlő szárú, és $EC = ED$. 1 pont

Mivel $DAC\sphericalangle = \frac{1}{2}DAB\sphericalangle = \frac{1}{2}DEC\sphericalangle$, ezért A rajta van az E középpontú, $EC = ED$ sugarú körön, és így

$$AED\sphericalangle = 2 \cdot ACD\sphericalangle. \qquad \text{1 pont}$$

Az ACD háromszögben $ACD\sphericalangle = 180^\circ - DAC\sphericalangle - ADC\sphericalangle = 180^\circ - 55^\circ - 105^\circ = 20^\circ$. 1 pont

A kerületi és középponti szögek tétele alapján $AED\sphericalangle = 2 \cdot ACD\sphericalangle = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, ami korábbi megállapításunk alapján azt jelenti, hogy a $ABD\sphericalangle$ is 40°-os. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. A pozitív egész számok $a_1, a_2, \ldots$ sorozatát „hexadecimálisnak” nevezzük, ha bármely nyolc egymást követő tag összege legfeljebb 16, vagyis bármely $i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+7} \le 16.$$

Egy m pozitív egész számot „vágáshossznak” nevezzük, ha minden hexadecimális sorozat néhány egymást követő tagjának összege m, azaz léteznek olyan $k \le l$ $(k, l \in \mathbb{N}^+)$ számok, amelyekre

$$\sum_{i=k}^{l} a_i = m.$$

Határozzuk meg m összes lehetséges értékét, vagy bizonyítsuk be, hogy m egyetlen pozitív egész értéket sem vehet fel! **7 pont**

Megoldás. Először azt fogjuk belátni, hogy $16 \mid m$. Meg fogjuk mutatni, hogy $16 \nmid m$ esetén nem létezik megfelelő m érték.

a) m nem lehet páratlan szám.

A kettesekből álló 2, 2, 2, 2, … hexadecimális sorozatot tekintve látható, hogy minden vágáshossz páros szám.

b) m nem lehet 4-gyel osztva 2 maradékot adó pozitív egész szám, mert a 3, 1 számok periodikus ismétlésével felépített 3, 1, 3, 1, 3, 1, … sorozat páros sok egymást követő tagjának összege mindig osztható néggyel, míg páratlan sok szomszédos tagjának összege páratlan szám.

c) Hasonlóképpen m nem lehet 8-cal osztva 4 maradékot adó pozitív egész szám sem. Ezt igazolja pl. az 5, 1, 1, 1 számok periodikus ismétlésével felírt 5, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, … sorozat.

d) Végül m nem lehet 16-tal osztva 8 maradékot adó pozitív egész szám sem. Erre megfelelő ellenpéldát szolgáltat pl. a 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 számok periodikus ismételgetésével adódó 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, … sorozat. 2 pont

Ezután igazolni fogjuk, hogy ha $16 \mid m$, akkor tetszőleges hexadecimális sorozat tartalmaz néhány olyan egymást követő tagot, melyek összege m.

Legyen $m = 16n$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

Tekintsük először azokat a hexadecimális sorozatokat, amelyeknél bármely 8 egymást követő tag összege 16, vagyis bármely $i \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+7} = 16$.

Nevezzük az ilyen sorozatokat „maximálisnak”.

Ekkor egy ilyen maximális sorozat első $8n$ tagjának összege $a_1 + a_2 + \ldots + a_{8n} = 16n = m$, vagyis m előáll egymást követő tagok összegeként. 1 pont

Ezután vizsgáljuk meg a „nem maximális” sorozatokat. Tetszőleges $i \in \mathbb{N}^+$ esetén jelöljük a sorozat első i tagjának összegét S_i-vel. Mivel a sorozat elemei pozitív egészek, ezért az S_i-k pozitív egészekből álló szigorúan monoton növekvő sorozatot alkotnak.

Szeretnénk olyan $i < j$ ($i, j \in \mathbb{N}^+$) indexeket találni, amelyekre $S_j - S_i = m$, mert ez azt jelentené, hogy $a_{i+1} + \ldots + a_j = m$.

Mivel sorozatunk nem maximális, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}^+$, amelyre $S_{k+8} < S_k + 16$.

Tekintsük a $H = \{S_k, S_k + 1, \ldots, S_k + 15\}$ halmazt. Mivel $S_{k+8} < S_{k+16}$, ezért kilenc S_k, S_{k+1}, …, S_{k+8} részletösszeg biztosan eleme H-nak. 1 pont

Ezután tekintsük a $T = \{S_k + m, S_k + m + 1, \ldots, S_k + m + 15\}$ halmazt. Megmutatjuk, hogy ennek a halmaznak legalább 8 eleme szintén részletösszege a sorozatnak.

Legyen S_b a legnagyobb $S_k + m$-nél kisebb részletösszeg. Ez azt jelenti, hogy $S_{b+1} \in T$. Mivel

$$S_{b+8} - S_b = a_{b+1} + a_{b+2} + \ldots + a_{b+8} \leq 16,$$

ezért

$$S_{b+8} \leq S_b + 16 < S_k + m + 16$$

Tehát S_{b+1}-től S_{b+8}-ig a részletösszegek elemei T-nek.

Így tudjuk, hogy H legalább $9, T$ pedig legalább 8 részletösszeget tartalmaz a sorozatból. 1 pont

A skatulyaelv alapján az alábbi 16 pár közül legalább az egyik tartalmazza a sorozat két részletösszegét.

$$\{S_k, S_k + m\}, \{S_k + 1, S_k + m + 1\}, \ldots, \{S_k + 15, S_k + m + 15\}.$$

A két részletösszeg a keresett S_i és S_j, különbségük pedig éppen m.

Ezzel igazoltuk, hogy a hexadecimális sorozat m vágáshossza a 16 tetszőleges pozitív egész számú többszöröse lehet. 2 pont

Összesen: **7 pont**