Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2019/2020-as tanév

Kezdők és Haladók
I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

A verseny az NTP-TMV-M-19-B-0004 azonosító számú pályázat alapján
a Nemzeti Tehetség Program,
az Emberi Erőforrások Minisztériuma,
valamint az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. A bűvös négyzet egy olyan négyzet alakú számtáblázat, amelynek minden egyes oszlopában, sorában és átlójában szereplő három szám összege ugyanannyi. Ezt az összeget szokás bűvös összegnek nevezni. Adjuk meg a mellékelt megkezdett (3×3-as) bűvös négyzet minden lehetséges kitöltését! **6 pont**

	2	
3		4

2. Az ABC háromszög AB oldala 26 cm. Az A csúcsból induló súlyvonal 18 cm, a C csúcsból induló súlyvonal pedig 15 cm hosszú. Mekkora a háromszög területe? **6 pont**

3. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzata osztható 10-zel? **6 pont**

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]=x$$

egyenletet, ahol $[x]$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amely még nem nagyobb, mint x. **6 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. A bűvös négyzet egy olyan négyzet alakú számtáblázat, amelynek minden egyes oszlopában, sorában és átlójában szereplő három szám összege ugyanannyi. Ezt az összeget szokás bűvös összegnek nevezni. Adjuk meg a mellékelt megkezdett (3×3-as) bűvös négyzet minden lehetséges kitöltését! **6 pont**

	2	
3		4

Megoldás. Jelölje a bűvös összeget b! Ennek segítségével kifejezhető a középső, illetve az alatta álló érték (ábra). 1 pont

	2	
3	$b-7$	4
	5	

Ha a bal fölső négyzetben álló számot a-val jelöljük, akkor az első sorban álló harmadik szám $b-a-2$, az első oszlopban álló harmadik szám pedig $b-a-3$. Ezek összegéhez hozzáadva a középső számot, b-t kapunk:

$$b-a-3+b-7+b-a-2=b,$$

ahonnan $2b-12=2a$, vagyis $a=b-6$.

Vagyis a mellékelt ábrában látható értékeket kapjuk. 1 pont

Ekkor, mivel az utolsó oszlopban (vagy sorban) álló számok összege is b, a hiányzó szám csak $b-8$ lehet. 1 pont

$b-6$	2	4
3	$b-7$	4
3	5	

Ellenőriznünk kell, hogy minden b értékre teljesülnek-e a bűvös négyzetre kirótt feltételek.

Mivel a másik átlóban álló számok összege is b, így $b-6+b-7+b-8=b$, vagyis $2b=21$, ahonnan $b=10{,}5$ adódik. 1 pont

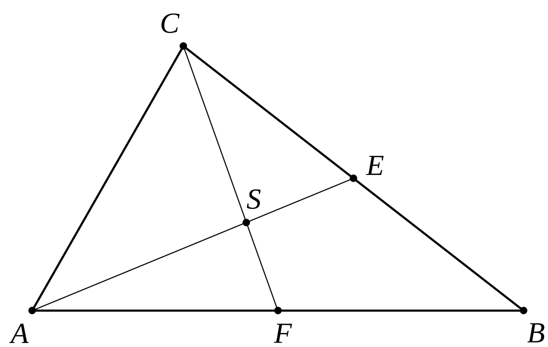
Egyetlen lehetséges b értéket kaptunk, 1 pont

amelyre a kitöltött bűvös négyzet a mellékelt ábrán látható. 1 pont

4,5	2	4
3	3,5	4
3	5	2,5

Összesen: **6 pont**

2. Az ABC háromszög AB oldala 26 cm. Az A csúcsból induló súlyvonal 18 cm, a C csúcsból induló súlyvonal pedig 15 cm hosszú. Mekkora a háromszög területe? **6 pont**



Megoldás. Készítsünk ábrát! Jelölje F az AB oldal felezőpontját és S a háromszög súlypontját! 1 pont

A súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, ezért $AS=12$ cm és $SF=5$ cm. 1 pont

Mivel F felezi az AB oldalt, ezért $AF=13$ cm. 1 pont

Az ASF háromszög oldalaira: $5^2+12^2=13^2$, így a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt ASF háromszög S-nél derékszögű. 1 pont

Így az ACF háromszögben AS magasság. Az ACF háromszög területe tehát $\dfrac{15\cdot 12}{2}=90\ \text{cm}^2$. 1 pont

A súlyvonal felezi a háromszög területét, így $T_{ABC}=2\cdot T_{ACF}=180\ \text{cm}^2$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Ha a tanuló az 5, 12, 13 oldalú háromszög területét Héron-képlettel számítja ki, és megmutatja, hogy a háromszög területe annak 6-szorosa, akkor is teljes pontszám jár.

3. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzata osztható 10-zel? **6 pont**

1. megoldás. Mivel $10=2\cdot 5$ és $(2,5)=1$, ezért a számjegyek szorzata pontosan akkor osztható 10-zel, ha a számjegyek között szerepel legalább egy 5-tel osztható és legalább egy páros számjegy. Jelölje H a négyjegyű pozitív egész számok halmazát, továbbá A_1 legyen azon négyjegyű pozitív egész számok halmaza, amelyek tízes számrendszerbeli alakja nem tartalmaz 0-s vagy

5-ös számjegyet, valamint A_2 azon négyjegyű pozitív egészek halmaza, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában nem szerepel páros számjegy. Ekkor a $H \setminus (A_1 \cup A_2)$ halmaz elemszámát keressük, amelyet a szita formula segítségével a következő módon határozhatunk meg:

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2)| = |H| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|,$$

ahol az abszolút érték az elemszámot jelöli. 1 pont

A H halmaz elemszáma $9 \cdot 10^3 = 9000$, hiszen az első helyre kilencféle számjegy kerülhet (a 0 nem), a többire pedig tízféle. 1 pont

Az A_1 halmaz elemszáma $8^4 = 4096$, hiszen sem 0, sem 5 nem kerülhet egyik helyre sem. 1 pont

Az A_2 halmaz elemszáma $5^4 = 625$, hiszen mind a négy számjegy ötféle páratlan szám közül kerülhet ki. 1 pont

Az $A_1 \cap A_2$ halmaz elemszáma $4^4 = 256$, hiszen mind a négy számjegy négyféle páratlan szám közül kerülhet ki (5-ös nem lehet). 1 pont

Ekkor a szita formula alapján a $H \setminus (A_1 \cup A_2)$ halmaz elemszáma: $9000 - 4096 - 625 + 256 = = 4535$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás. Mivel $10 = 2 \cdot 5$ és $(2,5) = 1$, ezért a számjegyek szorzata pontosan akkor osztható 10-zel, ha a számjegyek között szerepel legalább egy 5-tel osztható és legalább egy 2-vel osztható (páros) számjegy.

Összesen 9000 négyjegyű szám van. 1 pont

Ezek közül biztosan nem felelnek meg azok, amelyek egyik számjegye sem osztható 5-tel, azaz amelyeknek a számjegyei az $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ halmazból valók. Ezek száma $8^4 = 4096$. 1 pont

Azok sem felelnek meg, amelyekben ugyan szerepel az 5-ös, de minden további számjegyük páratlan. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy az összes csupa páratlan számjegyű négyjegyű számok közül kihagyjuk azokat, amelyekben nem szerepel az 5-ös. 1 pont

A csupa páratlan számjegyű négyjegyű számok száma $5^4 = 625$, 1 pont

az 5-ös számjegyet nem tartalmazó négyjegyű számok száma $4^4 = 256$. 1 pont

Így az 5-öst tartalmazó csupa páratlan számjegyből álló négyjegyű számok száma $5^4 - 4^4 = 369$.

Tehát összesen $9000 - 4096 - 369 = 4535$ megfelelő négyjegyű szám marad. 1 pont

Összesen: **6 pont**

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right] = x$$

egyenletet, ahol $[x]$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amely még nem nagyobb, mint x. **6 pont**

Megoldás. Mivel az egyenlet bal oldalán szereplő kifejezések értéke egész szám, ezért $x \in \mathbb{Z}$. 1 pont

Legyen $x = 6 \cdot q + r$, ahol $q \in \mathbb{Z}$, és $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. 2 pont

a) $r=0$ esetén $q=0$ és $x=0$, *b)* $r=1$ esetén $q=1$ és $x=7$,
c) $r=2$ esetén $q=0$ és $x=2$, *d)* $r=3$ esetén $q=0$ és $x=3$,
e) $r=4$ esetén $q=0$ és $x=4$, *f)* $r=5$ esetén $q=0$ és $x=5$ adódik.*

A kapott x értékeket ellenőrizve, azok kielégítik az egyenletet. Tehát az egyenlet megoldásai:

$$M=\{0,2,3,4,5,7\}.$$ 3 pont

Megjegyzés. *1–2 megtalált megoldás 1 pont, 3–4 megoldás 2 pont, 5–6 megoldás 3 pont.

Összesen: **6 pont**

Kezdők I–II. kategória 2. és III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 5-tel osztva 2, 7-tel osztva 3, 11-gyel osztva pedig 5 maradékot ad? **6 pont**

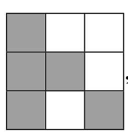
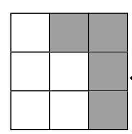
2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számpárok halmazán:

$$\frac{1}{a}=2b+1-b^2-a.$$ **6 pont**

3. Az ABC szabályos háromszögben D és E rendre az AC és AB oldalak pontjai, P pedig a BD és CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg a BPE szög nagyságát, ha az $AEPD$ négyszög és a BCP háromszög területe egyenlő. **8 pont**

4. Egy 3×3-as táblázat minden mezője fehér vagy szürke színű. Ezt a táblázatot újraszínezzük a következő szabály szerint:

- azok a mezők, amelyeknek páros számú (0, 2 vagy 4) oldalszomszédja szürke, szürkék lesznek;
- azok a mezők, amelyeknek páratlan számú (1 vagy 3) oldalszomszédja szürke, fehérek lesznek.

Ha például a kiindulási táblázat ez: , akkor ezt a táblázatot kapjuk: .

a) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője szürke! **4 pont**

b) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője fehér! **2 pont**

c) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyen az újraszínezést 2020-szor egymás után végrehajtva a kapott táblázat minden mezője szürke lesz! **4 pont**

5. Egy 30 csapatos bajnokságban eddig 14 fordulót rendeztek. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszott, mégpedig egy olyan csapattal, amellyel korábban még nem játszott. Igazoljuk, hogy van három olyan csapat, amelyek között még egyetlen mérkőzést sem játszottak le. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 5-tel osztva 2, 7-tel osztva 3, 11-gyel osztva pedig 5 maradékot ad? **6 pont**

Megoldás. A keresett számot x-szel jelölve, $x = 5k+2$, $x = 7l+3$, illetve $x = 11m+5$ alakban írható, ahol k, l, valamint m nemnegatív egész számok. 1 pont

Tekintsük az $y = 2x+1$ kifejezést. Mivel az $y = 2x+1$ kifejezés szigorúan monoton növő, x pontosan akkor minimális, amikor y. 2 pont

Az $y = 2x+1$ kifejezés $10k+5 = 5(2k+1)$, $14l+7 = 7(2l+1)$, valamint

$$22m+11 = 11(2m+1)$$

alakú, tehát osztható 5-tel, 7-tel és 11-gyel. 1 pont

Az y kifejezés minimuma tehát az 5, 7 és 11 legkisebb közös többszöröse. Mivel a három szám páronként relatív prím, a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk, azaz y minimális értéke $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. 1 pont

Így x minimuma $\dfrac{385-1}{2} = 192$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Ha a versenyző megállapítja, hogy a keresett szám $11m+5$ alakú, majd $m = 0$, 1, 2, …, 16-ra teszteli az értékeket, és minden esetben jelzi, hogy melyik másik feltétel nem teljesül, ezt követően pedig megállapítja, hogy $m = 17$ a feltételeknek megfelel, és így jut helyes eredményre, maximális pontot kap (ugyanez érvényes, ha akár az $5k+2$, akár a $7l+3$ alakból indul ki).

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számpárok halmazán:

$$\frac{1}{a} = 2b+1-b^2-a.$$ **6 pont**

1. megoldás.

Az egyenletet átrendezve, majd a jobb oldalt teljes négyzetté alakítva a következő egyenletet kapjuk: $a+\dfrac{1}{a} = -(b-1)^2+2$. 2 pont

Ha a pozitív, akkor tudjuk, hogy $a+\dfrac{1}{a} \geq 2$. 1 pont

Minden b valós szám esetén $(b-1)^2 \geq 0$, így $-(b-1)^2 \leq 0$, amiből $-(b-1)^2+2 \leq 2$. 1 pont

A kapott feltételek alapján: $2 \leq a+\frac{1}{a}=-(b-1)^2+2 \leq 2$. Ebből következően egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $a+\frac{1}{a}=-(b-1)^2+2=2$. 1 pont

Ez pontosan akkor teljesül, ha $a=b=1$. Mivel mindkét kapott szám pozitív, így az egyenletet igazzá tevő egyetlen számpár az $(1,1)$. 1 pont

Összesen: 6 pont

2. megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát a-val szorozva, majd (a^2-2a)-t hozzáadva a következő egyenlőséget kapjuk: $a^2-2a+1=2ab-ab^2-a$. A jobb oldalon $(-a)$-t kiemelve és mindkét oldalon teljes négyzetté alakítva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$(a-1)^2=-a(b-1)^2.$$ 3 pont

$(a-1)^2 \geq 0$ és $(b-1)^2 \geq 0$, valamint mivel a pozitív, ezért $-a<0$, és $-a(b-1)^2 \leq 0$. 1 pont

Így a következőt kapjuk: $0 \leq (a-1)^2=-a(b-1)^2 \leq 0$.

Ebből következően egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $(a-1)^2=-a(b-1)^2=0$. 1 pont

Ez pontosan akkor teljesül, ha $a=b=1$. Mivel mindkét kapott érték pozitív, az egyenletet igazzá tevő egyetlen számpár az $(1,1)$. 1 pont

Összesen: 6 pont

3. megoldás. Rendezzük 0-ra a kifejezést: $b^2-2b+a+\frac{1}{a}-1=0$. 1 pont

Egészítsük ki a b^2-2b kifejezést teljes négyzetté: $\left(b^2-2b+1\right)+\left(a+\frac{1}{a}-2\right)=0$. 1 pont

Vegyük észre, hogy a második zárójeles kifejezés éppen $\left(a+\frac{1}{a}-2\right)=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$. 1 pont

(Mivel a nemnegatív, $\sqrt{a}$ létezik.) Eszerint $(b-1)^2+\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=0$. 1 pont

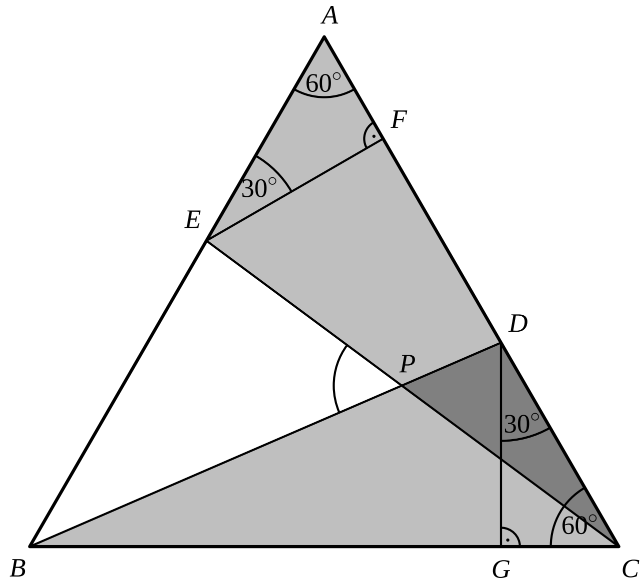
Két nemnegatív szám összege csak úgy lehet 0, ha mindkettő 0. 1 pont

Ekkor $b=1$, $\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}$, ahonnan $a=1$. 1 pont

Összesen: 6 pont

3. Az ABC szabályos háromszögben D és E rendre az AC és AB oldalak pontjai, P pedig a BD és CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg a BPE szög nagyságát, ha az $AEPD$ négyszög és a BCP háromszög területe egyenlő. **8 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Egészítsük ki az $AEPD$ négyszöget és a BCP háromszöget is a PDC háromszöggel. Ekkor $T_{AEPD} = T_{BCP}$ pontosan akkor teljesül, ha $T_{CAE} = T_{BCD}$. 1 pont

Mivel a CAE és a BCD háromszögek CA és BC oldalai egyenlők, ezért a területük egyenlősége alapján az említett oldalakhoz tartozó magasságok is egyenlő hosszúságúak. 1 pont

Legyenek ezek a magasságok EF és DG.

Az AEF és CDG félszabályos háromszögekben $EF = DG$ és az említett oldalakon fekvő szögek 90° és 30°. Így a két háromszög egybevágó és $AE = CD$. 2 pont

Ezt felhasználva, a CAE és BCD háromszögek is egybevágók, mivel $CA = BC$, $AE = CD$ és $CAE\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 60^\circ$. 2 pont

Az egybevágóság alapján $ECA\sphericalangle = DBC\sphericalangle$. 1 pont

Ezt az egyenlőséget és a külsőszög-tételt felhasználva:

$$BPE\sphericalangle = PBC\sphericalangle + BCP\sphericalangle = DBC\sphericalangle + BCE\sphericalangle = ECA\sphericalangle + BCE\sphericalangle = 60^\circ$$ 1 pont

Összesen: **8 pont**

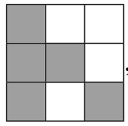
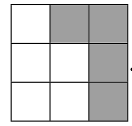
Megjegyzések. Ha valaki speciális helyzetű D és E pontok felvételével határozza meg a $BPE\sphericalangle$ nagyságát, akkor csak 1 pontot kaphat.

Ha a tanuló nem bizonyítja az AE és CD szakaszok hosszának egyenlőségét, akkor legfeljebb 6 pontot szerezhet.

4. Egy 3×3-as táblázat minden mezője fehér vagy szürke színű. Ezt a táblázatot újraszínezzük a következő szabály szerint:

- azok a mezők, amelyeknek páros számú (0, 2 vagy 4) oldalszomszédja szürke, szürkék lesznek;

- azok a mezők, amelyeknek páratlan számú (1 vagy 3) oldalszomszédja szürke, fehérek lesznek.

Ha például a kiindulási táblázat ez: , akkor ezt a táblázatot kapjuk: .

a) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője szürke! **4 pont**

b) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője fehér! **2 pont**

c) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyen az újraszínezést 2020-szor egymás után végrehajtva a kapott táblázat minden mezője szürke lesz! **4 pont**

Megoldás.

a) Számozzuk meg a táblázat mezőit az ábrán látható módon!

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ha az 1-es mező az újraszínezés után szürke lesz, akkor neki vagy nulla, vagy két szomszédja szürke. Ha nulla szomszédja szürke, akkor fehér a 2-es és a 4-es mező, de akkor a 6-os és a 8-as mezőnek is fehérnek kell lennie ahhoz, hogy újraszínezéskor a 3-as és a 7-es mező is szürkére váltson. Ekkor a 9-es mező is szürke lesz, mert nulla szomszédja szürke. Hasonlóan kaphatjuk meg, hogy ha az 1-esnek két szomszédja szürke, azaz szürke a 2-es és 4-es, akkor a 6-os és a 8-as mezőnek is szürkének kell lennie.

Azaz a szürkére váltó színezésekben a 2*-es,* 4*-es,* 6*-os és* 8*-as mezők vagy mind fehérek, vagy mind szürkék.* 1 pont

Mindkét esetben teljesül, hogy az 5-ös mező is szürke lesz az újraszínezéskor, hiszen vagy nulla, vagy 4 szomszédja szürke.

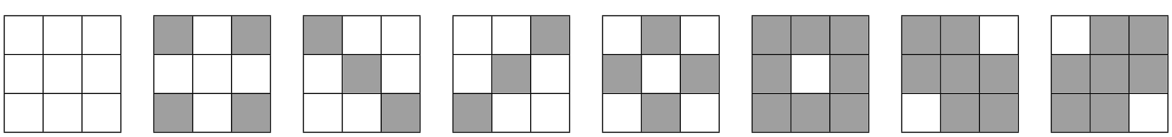
A 2-es mező akkor lesz szürke, ha nulla vagy két szomszédja szürke. Ha nulla szomszédja szürke, akkor az 1, 3 és 5 számokkal jelölt mezők fehérek. Ekkor a 7-es és 9-es mezőknek is fehéreknek kell lenniük, hogy a 4-es, 6-os és 8-as mezőknek is páros számú szürke szomszédja legyen.

Ha a 2-es mezőnek két szomszédja szürke, akkor az lehet

- 1-es és 3-as – ekkor a többi mező miatt a 7-es és a 9-es is szürke;
- 1-es és 5-ös – ekkor a többi mező miatt a 9-es is szürke;
- 3-as és 5-ös – ekkor a többi mező miatt a 7-es is szürke.

Azaz *a* 2*-es,* 4*-es,* 6*-os és* 8*-as szomszédai az* $(1,3,5,7,9)$*-es mezők négyféle színezést kaphatnak.* 1 pont

Így korábbi megállapításaink alapján $2 \cdot 4 = 8$ kiindulási táblázat vált szürkére:



2 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző mindenféle indoklás nélkül adja meg a 8 táblázatot, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat. Ha legalább két különböző kiindulási táblázatot talál, akkor már kaphat 1 pontot erre a feladatrészre a feladat helyes értelmezéséért.

b) Most is az előző ábra számozását használjuk.

Az 1-es mező akkor lesz fehér, ha pontosan 1 szomszédja szürke. Legyen ez például a 2-es. Ekkor a 4-es és 6-os mezőknek fehérnek, viszont a 8-as mezőnek szürkének kell lennie, hogy a 3-as, 7-es és 9-es mezőknek is pontosan egy szürke szomszédjuk legyen. Ekkor viszont az 5-ös mezőnek pontosan 2 szürke szomszédja van, azaz újraszínezéskor szürkének kell lennie. Ugyanígy ellentmondásra jutunk, ha a 4-es mezőről feltételezzük, hogy szürke. 1 pont

Tehát nincs olyan kiindulási táblázat, amely újraszínezés után fehér lesz. 1 pont

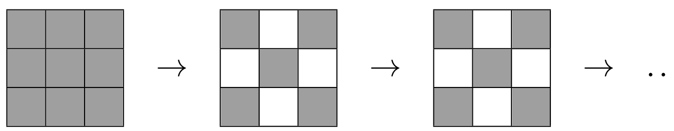
Megjegyzés. Ha a versenyző mindenféle indoklás nélkül közli, hogy nincs megfelelő táblázat, akkor 1 pontot kapjon.

c) A táblázatot összesen $2^9 = 512$-féleképpen színezhetjük ki. 1 pont

Így az első 512 lépés alatt legalább egy színezésnek ismétlődnie kellett. A két azonos színezést azonban ugyanolyan színezés követi, így a színezések sorozata innen periodikusan ismétlődik. 1 pont

Ha ebben a periódusban nincsen teljesen szürke táblázat, akkor nem kaphatunk teljesen szürkét a 2020. lépés után sem. 1 pont

Ha viszont van benne teljesen szürke, akkor az azt követő lépésekben így folytatódik a tábla színezése:



Azaz a következő lépésekben már végig ugyanaz a táblázat ismétlődik. Így ebben az esetben sem kaphatunk a 2020. lépés után teljesen szürkét. 1 pont

Összesen: **10 pont**

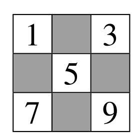
Az *a)* rész egy másik lehetséges megoldása.

a) Számozzuk meg a táblázat mezőit az ábrán látható módon!

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ha az 1-es mező az újraszínezés után szürke lesz, akkor annak a kiindulási helyzetben 0 vagy 2 szomszédja szürke, azaz a két oldalszomszédja egyszínű.

1. eset. Ha a kiindulási helyzetben az 1-es mező 2 szomszédja szürke, akkor a 2-es és a 4-es mező eredetileg szürke. Ebből következik, hogy a kiindulási helyzetben a 3-as, a 6-os és a 9-es mezőnek is minden oldalszomszédja szürke kellett, hogy legyen hiszen a 2–6, 6–8 és 8–4 mezők páronként egyszínűek.



2. eset. Ha a kiindulási helyzetben az 1-es mező 0 szomszédja szürke, akkor a 2-es és a 4-es mező eredetileg fehér. Ebből következik, hogy a kiindulási helyzetben a 3-as, a 6-os és a 9-es mezőnek is minden oldalszomszédja fehér kellett, hogy legyen, hiszen a 2–6, 6–8 és 8–4 mezők páronként egyszínűek.

1		3
	5	
7		9

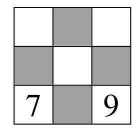
Azaz azokban a kiindulási helyzetekben, amelyekből egy lépésben történő újraszínezéssel minden mező szürke színű lesz, azokban a 2-es, 4-es, 6-os és 8-as mezők vagy mind szürkék vagy mind fehérek. 1 pont

(Láthatjuk, hogy az 5-ös mező kiindulási színétől függetlenül az újraszínezés után mindenképpen szürke lesz a színe, hiszen eredetileg 0 vagy 4, azaz páros sok oldalszomszédja szürke.)

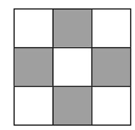
Vizsgáljuk meg a 2-es mező újraszínezését az első esetben! Ez a mező akkor lesz szürke az újraszínezés után, ha a kiindulási helyzetben nulla vagy két oldalszomszédja szürke a három oldalszomszédja közül.

1. eset, a) rész. Ha a 2-es mező egyik oldalszomszédja sem szürke, akkor az 1, 3 és 5 számú mezők a kiindulási helyzetben fehérek.

Ebből az következik, hogy a 6-os mező három oldalszomszédja is mind fehér kellett, hogy legyen eredetileg (hiszen 2 szürke oldalszomszédja már nem lehet, ha a 3-as és az 5-ös mező fehér). Ebből következik, hogy 8-as mező minden oldalszomszédja is fehér.

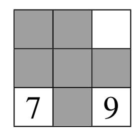


Tehát egyetlen kiindulási helyzet lehetséges:

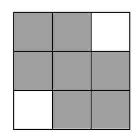


1 pont

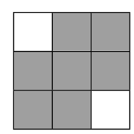
1. eset, b) rész. Ha a 2-es mező két oldalszomszédja szürke, akkor az 1, 3 és 5 számú mezők közül ki kell választanunk kettőt, ami a kiindulási helyzetben szürke. Ezt háromféleképpen tehetjük meg: csúcsban közös mezőket választunk szürke színűnek (1–5 vagy 3–5) vagy csúcsban nem közöseket (1–3).



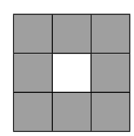
1–5 esete: a 6-os mező három oldalszomszédja közül hiányzó 9-es mezőnek szürkének, a 4-es három oldalszomszédja közül hiányzó 7-es mezőnek fehérnek kell lennie:



1–5 esete: a 6-os mező három oldalszomszédja közül hiányzó 9-es mezőnek fehérnek, a 4-es három oldalszomszédja közül hiányzó 7-es mezőnek szürkének kell lennie:



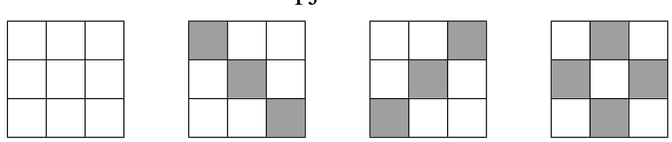
1–3 esete: a 6-os mező három oldalszomszédja közül hiányzó 9-es mezőnek szürkének, a 4-es mező három oldalszomszédja közül hiányzó 7-es mezőnek szürkének kell lennie:



1 pont

A 2. esetben az 1. esetben látottakhoz hasonlóan tekinthetjük végig a lehetséges színezéseket.

Ezzel az alábbi négy kiindulási táblázatot kapjuk:



1 pont

5. Egy 30 csapatos bajnokságban eddig 14 fordulót rendeztek. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszott, mégpedig egy olyan csapattal, amellyel korábban még nem játszott. Igazoljuk, hogy van három olyan csapat, amelyek között még egyetlen mérkőzést sem játszottak le. **10 pont**

1. megoldás. Tekintsünk két olyan csapatot, amelyek még nem játszottak egymással. Legyenek ezek A és B. 1 pont

a) Ha azon csapatok közt, amelyekkel A és B már játszott, van közös, akkor ez a két csapat összesen legfeljebb 27 másikkal játszott. Ekkor A, B és ez a csapat teljesíti a feladat feltételeit. 1 pont

b) Vegyük azt az esetet, amikor nincsen olyan csapat, amelyik A-val és B-vel is játszott. 1 pont

Legyen A_1 és A_2 két olyan csapat, amelyekkel A játszott. Ha A_1 és A_2 között nem volt még mérkőzés, akkor rájuk igaz az *a)* bekezdésben leírt gondolatmenet, miszerint mivel mindketten játszottak A-val, ezért ketten együtt összesen legfeljebb 27 másik csapattal játszottak, tehát van olyan csapat, amelyikkel egyikük sem játszott. Ez a csapat, valamint A_1 és A_2 a feladat feltételeinek megfelelő három csapat. 2 pont

c) Tehát az az eset maradt, amikor nincs olyan csapat, amelyik A-val és B-vel is játszott, és amelyek játszottak A-val, azok mind játszottak egymással, és ugyanígy, amelyek játszottak B-vel, azok mind játszottak egymással is. Vagyis van két 15-15 csapatból álló csoport, amelyeken belül már mindenki mindenkivel játszott, de különböző csoportokba tartozó csapatok között nem volt mérkőzés. 1 pont

Megmutatjuk azonban, hogy ez az eset nem lehetséges, 1 pont

mert 15 csapatot nem lehet fordulónként párokba rendezni (egy mindig kimarad), és így a 14 forduló alatt nem játszhatott minden csapat 14 mérkőzést. 3 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás. Válasszunk ki egy csapatot (A), ez tizennégy mérkőzést játszott (ellenfelei: A_1, A_2, …, A_{14}). Nevezzük ezt a 15-öt első csoportnak, míg a többieket (B_1, B_2, …, B_{15}) másodiknak. 1 pont

Két eset fordulhat elő.

1. eset: Volt mérkőzés a két csoport között is. 1 pont

A nem vehetett részt ilyenben, így feltehető, hogy például A_1 és B_1 játszott egymással. B_1 is 14-szer játszott összesen, ezért nem mérkőzhetett meg mindenkivel a második csoportból, feltehetjük, hogy B_1 és B_2 között nem volt mérkőzés. 1 pont

Ekkor azonban az A, B_1, B_2 csapatok egymás között még nem játszottak egyetlen meccset sem: B_1 nem játszott B_2-vel, hiszen B_2-t így választottuk, A pedig nem játszott második csoportbeliekkel, azaz sem B_1-gyel, sem B_2-vel. 2 pont

2. eset: Minden mérkőzés az egyes csoportokon belül zajlott le. Ez azt jelentené, hogy a csoportokon belül mindenki játszott már mindenkivel, azaz két teljes 15 résztvevős körmérkőzés zajlott le 14 forduló alatt. 1 pont

Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. 1 pont

Tekintsük csak az első csoportot. Mivel 15 csapatból áll, és ennyi résztvevőt nem lehet párokba állítani, így minden fordulóban valaki kimaradt volna. Ez azonban ellentmond annak, hogy mindenki játszott mindenkivel. A második eset tehát nem fordulhat elő. 3 pont

Összesen: 10 pont

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ négyszögben $AB = BC = CD$, továbbá az $ABC\sphericalangle = 70^\circ$, a $BCD\sphericalangle = 170^\circ$. Mekkora a $DAB\sphericalangle$ nagysága? **10 pont**

2. Hány hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszöget határoznak meg egy szabályos húszszög csúcsai? **10 pont**

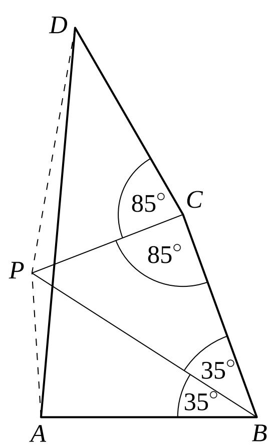
3. Legyen p egy 3-nál nagyobb prímszám úgy, hogy az a és b pozitív egész számokra teljesül a $p^2 + a^2 = b^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) a osztható 12-vel, és
b) $2(p + a + 1)$ négyzetszám. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ négyszögben $AB = BC = CD$, továbbá az $ABC\sphericalangle = 70^\circ$, a $BCD\sphericalangle = 170^\circ$. Mekkora a $DAB\sphericalangle$ nagysága? **10 pont**

1. megoldás. Készítsünk ábrát. 1 pont



Az ABC és BCD belső szögek szögfelezőjének metszéspontját jelölje P. 1 pont

Az ABP és BCP háromszögek egybevágóak, ugyanis PB közös oldaluk, továbbá $AB = BC$ és $ABP\sphericalangle = PBC\sphericalangle = 35^\circ$. 2 pont

Ebből következően

$$BPA\sphericalangle = CPB\sphericalangle = 180^\circ - 85^\circ - 35^\circ = 60^\circ. \qquad 1 \text{ pont}$$

Az előbbiekhez hasonló módon a DPC és BPC háromszögek is egybevágóak, mert a C-nél lévő szögük megegyezik és az ezt közrefogó oldalak páronként egyenlő hosszúak. 2 pont

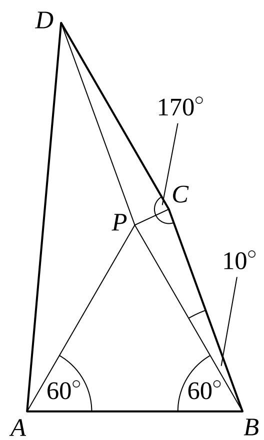
Emiatt $DPC\sphericalangle = CPB\sphericalangle = 60^\circ$. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy $BPA\sphericalangle + CPB\sphericalangle + DPC\sphericalangle = 180^\circ$, tehát P valójában az AD oldalra esik. 1 pont

Ekkor viszont a DAB szög megegyezik a PAB szöggel, így $DAB\sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ - 35^\circ = 85^\circ$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Készítsünk ábrát. 1 pont



Vegyük fel a P pontot a négyszög belsejében úgy, hogy az ABP háromszög szabályos legyen. 1 pont

Ekkor $PB = AB = BC$ miatt a PBC háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Mivel $ABP\sphericalangle = 60^\circ$, ezért $PBC\sphericalangle = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$ és így $BCP\sphericalangle = 85^\circ$. 1 pont

A P pont tehát rajta van a C csúcsnál lévő szög szögfelezőjén. 1 pont

Ekkor a CDP és CBP háromszögek egybevágóak, mert két-két oldal és az ezen két oldal által bezárt szög egyenlő, így $PD = PB = PA$. 1 pont

Következésképpen a PCD és az APD háromszög is egyenlő szárú. 1 pont

A PCD egyenlő szárú háromszögben $DPC\sphericalangle = PCD\sphericalangle = 85^\circ$, ezért

$$APD\sphericalangle = 360^\circ - BPA\sphericalangle - CPB\sphericalangle - DPC\sphericalangle =$$
$$= 360^\circ - 60^\circ - 85^\circ - 85^\circ = 130^\circ.$$ 1 pont

Így az APD egyenlő szárú háromszögben $DAP\sphericalangle = 25^\circ$. 1 pont

Tehát $DAB\sphericalangle = DAP\sphericalangle + PAB\sphericalangle = 25^\circ + 60^\circ = 85^\circ$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Hány hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszöget határoznak meg egy szabályos húszszög csúcsai? **10 pont**

Megoldás. A húszszög csúcsai által meghatározott háromszögek köré írt köre a húszszög köré írt kör. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a köré írt kör középpontja a háromszög belsejében, ha derékszögű, akkor a háromszög oldalán, ha tompaszögű, akkor pedig a háromszögön kívül található. 2 pont

Számoljuk meg először a derékszögű háromszögeket! Ezek egyik oldalán rajta van a köré írt kör középpontja, tehát az a húszszög egyik szimmetriaátlója. Válasszuk ki először ezt az oldalt: ezt 10-féleképpen tehetjük meg. A harmadik csúcs 18-féle lehet, így összesen $10 \cdot 18 = 180$ derékszögű háromszög van. 2 pont

Most számoljuk meg a tompaszögű háromszögeket! Mindegyik háromszöget a tompaszögű csúcstól pozitív forgásirányban elhelyezkedő csúcshoz rendelve számoljuk meg. Ezt a csúcsot 20-féleképpen választhatjuk ki. A háromszög másik két csúcsa a kiválasztott csúcsból húzott szimmetriaátlótól „jobbra” esik. Ezt a két csúcsot $\binom{9}{2} = 36$-féleképpen választhatjuk ki. Tehát összesen $20 \cdot 36 = 720$ tompaszögű háromszög van. 3 pont

Végül számoljuk meg a hegyesszögű háromszögeket! Összesen $\binom{20}{3} = 1140$ háromszöget határoznak meg a húszszög csúcsai. Közülük hegyesszögű $1140 - 720 - 180 = 240$. 3 pont

Tehát a húszszög csúcsai 240 hegyesszögű, 180 derékszögű és 720 tompaszögű háromszöget határoznak meg.

Megjegyzés. A háromszögek leszámolhatók úgy is, hogy megnézzük, milyen egész hosszúságú részekre bontják a háromszög csúcsai a 20 egységnyi körívet. Ahhoz, hogy a háromszög tompaszögű legyen, az ívek között kell lennie 10 egységnél hosszabbnak. Ahhoz, hogy derékszögű legyen, kell lennie 10 egység nagyságúnak. Hegyesszögű háromszög esetén minden ív hossza rövidebb 10 egységnél.

A 20 felbontásai	Darabszám
$2+9+2$	20
$3+8+9$	40
$4+7+9$	40
$4+8+8$	20
$5+6+9$	40
$5+7+8$	40
$6+6+8$	20
$6+7+7$	20

Összesen: **10 pont**

3. Legyen p egy 3-nál nagyobb prímszám úgy, hogy az a és b pozitív egész számokra teljesül a $p^2+a^2=b^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) a osztható 12-vel, és
b) $2(p+a+1)$ négyzetszám. **10 pont**

Megoldás. *a)* Az egyenlőséget átrendezve, majd nevezetes azonosság segítségével a b^2-a^2 kifejezést szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$p^2=b^2-a^2=(b-a)(b+a)$$ 1 pont

A megadott feltétel miatt $b>a$, így a két tényező pozitív egész és $b+a>b-a$, tehát p^2 szorzattá bontása csak egyféleképpen lehetséges, ha $b-a=1$ és $b+a=p^2$. 1 pont

Ebből

$$b=\frac{p^2+1}{2} \qquad \text{és} \qquad a=\frac{p^2-1}{2},$$ 1 pont

$$2a=p^2-1=(p-1)(p+1).$$ 1 pont

Második megoldás (az első négy pontra). A feltétel miatt p, a és b alap pitagoraszi számhármas (p prím volta miatt), tehát a primitív pitagoraszi számhármasokra vonatkozó összefüggés szerint

$$p=m^2-n^2, \quad a=2mn, \quad \text{és} \quad b=m^2+n^2,$$

ahol m és n olyan pozitív egészek, amelyekre $m>n$, $(m;n)=1$, illetve m és n különböző paritású (mivel p páratlan, így $a=2mn$). 1 pont

Ebből $p=(m-n)(m+n)$, ami a feltételeket tekintve csak egyféleképpen valósulhat meg:

$$m-n=1 \qquad \text{és} \qquad m+n=p$$ 1 pont

Ebből

$$m=\frac{p+1}{2}; \qquad n=\frac{p-1}{2},$$ 1 pont

amiből

$$a=\frac{(p+1)(p-1)}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad 2a=(p+1)(p-1).$$ 1 pont

Azt kell igazolnunk, hogy $(p-1)(p+1)$ osztható 24-gyel, hiszen az, hogy $2a$ osztható 24-gyel, szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a osztható 12-vel.

Tekintve, hogy p páratlan prím, így $p-1$ és $p+1$ is páros.

$p-1$ és $p+1$ közül pontosan az egyik 4-gyel is osztható, tehát a szorzatuk osztható 8-cal. 1 pont

Mivel p egy 3-nál nagyobb prím, így $p-1$ és $p+1$ közül pontosan az egyik 3-mal is osztható. 1 pont

Tehát $(p-1)(p+1)$ osztható 8-cal és 3-mal, azaz 24-gyel. 1 pont

Második megoldás (az utóbbi három pontra). Egy 3-nál nagyobb prím 6-tal osztva 1 vagy -1 maradékot ad, azaz a p prím $6k+1$ vagy $6k-1$ alakú (ahol k pozitív egész). 1 pont

Tehát

$$(p-1)(p+1)=6k(6k+2)=12k(3k+1) \text{ vagy } (p-1)(p+1)=(6k-2)6k=12k(3k-1).$$ 1 pont

Azt kell megmutatnunk, hogy $k(3k+1)$ vagy $k(3k-1)$ szorzat páros: ha k páros, akkor a szorzat első tényezője páros, ha k páratlan, akkor szorzat második tényezője páros, tehát a szorzat bármilyen k pozitív egészre páros. 1 pont

Megjegyzés. A bizonyításból tehát azt is megkapjuk, hogy bármilyen $p>3$ prímszámra pontosan egy ilyen p, a, b számhármas létezik, például $p=5$-re $a=12$ és $b=13$.

b)

$$2(p+a+1)=2\left(p+\frac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2-1+2=p^2+2p+1=(p+1)^2,$$

tehát a kérdezett kifejezés valóban négyzetszám. 3 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ konvex négyszög átlói az E pontban metszik egymást. Az ABE háromszög magasságpontja M, a BCE, CDE és DAE háromszögek körülírt köreinek középpontja rendre O_1, O_2 és O_3. A négyszöget az említett pontokkal együtt lerajzoljuk egy lapra, majd az ábrát az M, O_1, O_2 és O_3 pontok kivételével töröljük. A négy megmaradt pontból körző és vonalzó segítségével hogyan tudjuk megszerkeszteni az ábra hiányzó részleteit? **10 pont**

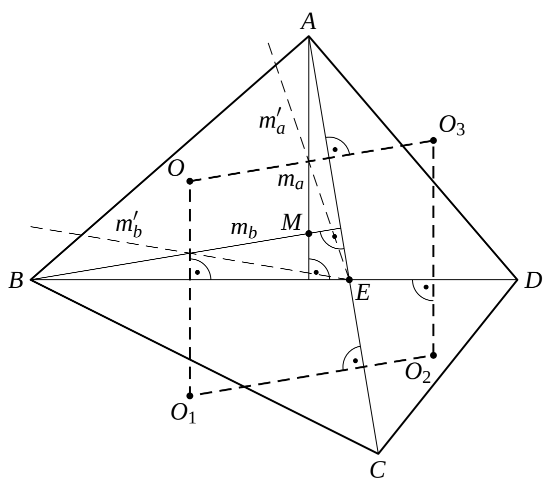
2. Az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 valós számokra teljesül, hogy $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=2$. Adott hat négyzet, amelyek oldalainak hossza a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Bizonyítsuk be, hogy ez a hat négyzet átfedés nélkül elhelyezhető egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetben! **10 pont**

3. Lehetséges-e az egész számok halmazát három olyan páronként diszjunkt részhalmazra felosztani, hogy bármely $n\in\mathbf{Z}$ esetén n, $n-50$, $n+2020$ három különböző részhalmazba tartozzon? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ konvex négyszög átlói az E pontban metszik egymást. Az ABE háromszög magasságpontja M, a BCE, CDE és DAE háromszögek körülírt köreinek középpontja rendre O_1, O_2 és O_3. A négyszöget az említett pontokkal együtt lerajzoljuk egy lapra, majd az ábrát az M, O_1, O_2 és O_3 pontok kivételével töröljük. A négy megmaradt pontból körző és vonalzó segítségével hogyan tudjuk megszerkeszteni az ábra hiányzó részleteit? **10 pont**

Megoldás.



Legyen az ABE háromszög körülírt körének középpontja O. Ekkor az OO_1 és O_2O_3 egyenesek merőlegesek a BD átlóra, az O_1O_2 és O_3O egyenesek pedig az AC átlóra.

Így az $OO_1O_2O_3$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, tehát a négyszög paralelogramma. 3 pont

A paralelogramma OO_2 és O_1O_3 átlói felezik egymást, ezért O_2-t az O_1O_3 szakasz felezőpontjára tükrözve O megszerkeszthető. 1 pont

Másrészt az ABE háromszög A, illetve B csúcsához tartozó m_a, illetve m_b magassága rendre párhuzamos az OO_1, illetve OO_3 egyenesekkel. Ezekre a magasságokra illeszkedik M, ezért M ponton keresztül OO_1-gyel, illetve OO_3-mal párhuzamost húzva megkaphatjuk az m_a és m_b egyeneseket. 2 pont

Az A csúcs OO_3, illetve a B csúcs OO_1 egyenesre vonatkozó tükörképe E, ezért ha az A, illetve a B pontokat tartalmazó m_a és m_b egyeneseket tükrözzük rendre az OO_3, illetve az OO_1 egyenesekre, akkor az m_a' és m_b' egyenesek metszéspontjaként megkaphatjuk az E pontot. 3 pont

Ezután az E pontot tükrözve az $OO_1O_2O_3$ paralelogramma oldalegyeneseire már az eredeti négyszög csúcsaihoz jutunk. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 valós számokra teljesül, hogy $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=2$. Adott hat négyzet, amelyek oldalainak hossza a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Bizonyítsuk be, hogy ez a hat négyzet átfedés nélkül elhelyezhető egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetben! **10 pont**

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6$.

A megoldás során többször használjuk az

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \qquad (*)$$

egyenlőtlenséget. Ez könnyen igazolható a számtani-négyzetes közepek közti egyenlőtlenséggel vagy egy oldalra rendezve teljes négyzet kialakításával.

A megoldás ötlete, hogy a négyzet három, diszjunkt belsejű sávra osztható, és mindhárom sávban elhelyezhetünk két-két négyzetet.

Először megmutatjuk, hogy $a_1+a_3+a_5 \le 2$.

$$a_3^2+a_5^2 \le \frac{a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2}{2} \le \frac{2-a_1^2-a_6^2}{2} \le 1-\frac{a_1^2}{2}.$$

Ekkor $(*)$ miatt $a_3+a_5 \le \sqrt{2-a_1^2}$. Tehát

$$a_1+a_3+a_5 \le a_1+\sqrt{2-a_1^2} \overset{(*)}{\le} \sqrt{2a_1^2+4-2a_1^2}=2.$$

Tehát három sáv (például a_1, a_3 és a_5 oldalhosszakkal) átfedés nélkül elhelyezhető a négyzetben.

Az egyenlőtlenség szerint a 2 egység oldalhosszúságú négyzetben átfedés nélkül elfér egymás fölött egy $2\times a_1$, $2\times a_3$ és egy $2\times a_5$-ös téglalap. 6 pont

A sávokban elhelyezhető a két-két négyzet. Ez például az alábbi módon igazoható.

Helyezzük el az a_1 és az a_2 oldalhosszúságú négyzetet az első, az a_3 és az a_4 oldalhosszúságú négyzetet a második, az a_5 és az a_6 oldalhosszúságú négyzetet a harmadik téglalapban! Ez megvalósítható, ha $a_1+a_2 \le 2$, hiszen ebből következik $a_3+a_4 \le 2$ és $a_5+a_6 \le 2$ is.

$$a_1+a_2 \overset{(*)}{\le} \sqrt{2(a_1^2+a_2^2)} \le \sqrt{2\cdot 2}=2$$

Ezzel az állítást igazoltuk. 4 pont

Megjegyzések. Pontozás: Annak igazolása, hogy három sáv (például a_1, a_3 és a_5 oldalhosszakkal) átfedés nélkül elhelyezhető a négyzetben. Minta: 6 pont

Annak igazolása, hogy a sávokban elhelyezhető a két-két négyzet. 4 pont

A megoldás során nincs jelentősége, hogy éppen hat négyzetről van szó, a feladat általánosítható.

3. Lehetséges-e az egész számok halmazát három olyan páronként diszjunkt részhalmazra felosztani, hogy bármely $n\in\mathbf{Z}$ esetén n, $n-50$, $n+2020$ három különböző részhalmazba tartozzon? **10 pont**

Megoldás. Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\mathbf{Z}$ halmaz elemeinek felosztása a kívánt módon elvégezhető.

Használjuk fel az $m \leftrightarrow k$ jelölést arra, hogy m és k azonos részhalmazba tartoznak, az $m \not\leftrightarrow k$ jelölést arra, hogy m és k különböző részhalmazokhoz tartoznak, a $(p;q;r)\in K$ jelölést pedig arra, hogy a p, q, r egészek 3 különböző részhalmazhoz tartoznak.

A bevezetett jelölések alapján:

$$(n;n-50;n+2020)\in K, \qquad (1)$$

$$(n-50;n-100;n+1970)\in K, \qquad (2)$$

$$(n+2020;n+1970;n+4040)\in K, \qquad (3)$$

1 pont

Így az (1), (2), (3) figyelembevételével:

$$n+1970 \not\leftrightarrow n-50,$$

$$n+1970 \not\leftrightarrow n+2020,$$

$$n-50 \not\leftrightarrow n+2020,$$

Ebből következik, hogy

$$(n+1970; n-50; n+2020) \in K \qquad \text{és} \qquad n \leftrightarrow n+1970. \qquad (4) \quad 2 \text{ pont}$$

Másrészt (2) és (4) alapján $(n-50; n-100; n) \in K$.

Az utolsó feltételt más formában felírva és többször alkalmazva:

$$(n; n-50; n-100) \in K, \qquad (5)$$

$$(n-50; n-100; n-150) \in K. \qquad (6)$$

Az indirekt feltevés és az (5), (6) megállapítások figyelembevételével $n \leftrightarrow n-150$. (7) 1 pont

A (4), (7) kapcsolatok többszöri alkalmazásával:

$$0 \leftrightarrow 1970 \leftrightarrow 2 \cdot 1970 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow 5 \cdot 1970 =$$
$$= 9850 \leftrightarrow 9850-150 \leftrightarrow 9850-2 \cdot 150 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow 9850-65 \cdot 150 =$$
$$= 100 \leftrightarrow -50.$$

3 pont

Viszont az $n \not\leftrightarrow n-50$ feltétel alapján $0 \not\leftrightarrow -50$. 1 pont

Így ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy az egész számok megadott felosztása nem végezhető el. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+c^2}$$

függvényt, ahol a, b, c pozitív valós számok. Hol veszi fel ez a függvény a minimális értékét? **10 pont**

2. Az f függvény egy P sík minden K pontjához hozzárendel egy valós számot, amelyre teljesül, hogy $f(K) = f(A) + f(B) + f(C)$, ha K az ABC háromszög súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy a sík minden X pontjára $f(X) = 0$! **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $r(n)$-nel azt a számot, ahányféleképpen n előáll három négyzetszám összegeként (ezek között lehetnek azonosak, és a 0-t is megengedjük, és két felírást azonosnak tekintünk, ha csak a tagok sorrendjében térnek el). Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, amelyre $r(n) > \dfrac{\sqrt{n}}{100}$. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x)=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(x-b)^2+c^2}$$

függvényt, ahol a, b, c pozitív valós számok. Hol veszi fel ez a függvény a minimális értékét? **10 pont**

Megoldás. Vegyük észre, hogy a feladatbeli függvény nem más, mint a $P(x,0)$, $Q(b,c)$, $R(0,a)$ pontokra felírt PR és PQ távolságok összege. 5 pont

Ez minimális, ha a három pont kollineáris. 2 pont

Felrajzolva az ábrát, a Q pontot tükrözve az x tengelyre, a derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$x=\frac{ab}{a+c}$$

esetén lesz a szakaszok összhossza minimális. 3 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az f függvény egy P sík minden K pontjához hozzárendel egy valós számot, amelyre teljesül, hogy $f(K)=f(A)+f(B)+f(C)$, ha K az ABC háromszög súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy a sík minden X pontjára $f(X)=0$! **10 pont**

Megoldás. Válasszunk ki egy tetszőleges S pontot a síkon. Vegyünk fel egy tetszőleges ABC szabályos háromszöget, amelynek a súlypontja S.

Ezért $f(S)=f(A)+f(B)+f(C)$. 1 pont

A CA, AB, BC oldalak felezőpontjai legyenek rendre L, M, N.

Ismeretes, hogy az LMN háromszög súlypontja is S, ezért $f(S)=f(L)+f(M)+f(N)$. 2 pont

A LAM, MBN, NCL háromszögek súlypontjait jelölje rendre U, V, W. Az UVW háromszög az ABC háromszögből S középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlósággal kapható, így UVW súlypontja is S. Ezért $f(S)=f(U)+f(V)+f(W)$. 3 pont

Mivel

$f(U)=f(L)+f(A)+f(M),\quad f(V)=f(M)+f(B)+f(N),\quad f(W)=f(N)+f(C)+f(L),$ 1 pont

így

$$\begin{aligned}f(S)&=f(U)+f(V)+f(W)=\\&=f(L)+f(A)+f(M)+f(M)+f(B)+f(N)+f(N)+f(C)+f(L)=\\&=f(A)+f(B)+f(C)+2[f(L)+f(M)+f(N)]=\\&=3f(S),\end{aligned}$$ 1 pont

ahonnan $f(S)=0$. 1 pont

Mivel a sík tetszőleges pontját megválaszthatjuk valamely szabályos háromszög középpontjának, ezért a sík minden pontjára nulla a függvényérték. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $r(n)$-nel azt a számot, ahányféleképpen n előáll három négyzetszám összegeként (ezek között lehetnek azonosak, és a 0-t is megengedjük, és két felírást azonosnak tekintünk, ha csak a tagok sorrendjében térnek el). Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, amelyre $r(n) > \frac{\sqrt{n}}{100}$. **10 pont**

Megoldás. Valamely nagy X pozitív egészre tekintsük a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben az origó középpontú X sugarú gömböt. Legyen a gömb belsejébe eső egész koordinátájú rácspontok száma $N(X)$. Egyrészt $N(X) \geq \frac{X^3\pi}{6} > \frac{X^3}{2}$, hiszen minden ilyen rácspont köré egy $2 \times 2 \times 2$-es kockát téve lefedjük a $\frac{4X^3\pi}{3}$ térfogatú gömböt. 3 pont

Másrészt ha egy gömbön belüli rácspont koordinátái (x,y,z), akkor $x^2+y^2+z^2 = n$ valamely $0 \leq n \leq X^2-1$ egészre a Pitagorasz-tétel szerint. A három koordinátát legfeljebb hatféleképpen permutálhatjuk, továbbá mindegyik koordinátának legfeljebb kétféle előjelet adhatunk (pl. az (x,y,z) és az $(y,-x,-z)$ ugyanazt a három négyzetszámot adják), ennélfogva

$$48(r(0)+r(1)+\ldots+r(X^2-1)) \geq \frac{X^3}{2}.$$ 3 pont

Ekkor, mivel a bal oldali zárójelben a tagok száma X^2, valamely $0 \leq n < X^2$-re

$$r(n) > \frac{X}{100} > \frac{\sqrt{n}}{100}.$$ 3 pont

Ezzel egy megfelelő n-et találtunk, de könnyen módosíthatjuk az érvelést úgy, hogy ez végtelen sokat adjon. Nevezetesen adjuk a következő felső becslést $r(n)$-re: $r(n) \leq (\sqrt{n}+1)^3$, hiszen mindhárom négyzetszám a $\left[0,1,4,\ldots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2\right]$ intervallumból kerül ki. Következésképpen arra az előbb kapott n-re, amelyre $r(n) > \frac{X}{100}$,

$$\frac{X}{100} < r(n) \leq (\sqrt{n}+1)^3, \qquad n > \left(\sqrt[3]{\frac{X}{100}}-1\right)^2,$$

amiből világos, hogy végtelen sok kérdezett tulajdonságú n van, hiszen az utolsó egyenlőtlenség jobb oldala (és így a nála nagyobb bal oldal is) tetszőlegesen nagy lehet. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Haladók I. kategória 1. forduló

1. A $\dfrac{166\ldots6}{66\ldots64}$ törtben a számláló és a nevező is egy-egy olyan 2019-jegyű egész szám, amely 2018 darab 6-os számjegyet tartalmaz. Adjuk meg a tört legegyszerűbb (tovább nem egyszerűsíthető) alakját! **7 pont**

2. Léteznek-e olyan a, b, c, x pozitív valós számok, amelyekre az

$$a^2+b^2=c^2$$
$$(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$$

egyenlőségek egyszerre fennállnak? **7 pont**

3. A 101 kiskutya között kiosztottunk 2019 csontot. Igazoljuk, hogy biztosan van három olyan kiskutya, akik ugyanannyi csontot kaptak. **7 pont**

4. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x és y pozitív egészek, valamint p és q különböző, legalább kétjegyű prímszámok, hogy

$$(x+y)^4-x^4=p\cdot q.$$ **7 pont**

5. Az ABC derékszögű háromszögben valamely súlyvonal merőleges valamely másik súlyvonalra. Mutassuk meg, hogy ekkor az ABC háromszög súlyvonalaiból szerkesztett háromszög újra derékszögű lesz. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. A $\dfrac{166\ldots6}{66\ldots64}$ törtben a számláló és a nevező is egy-egy olyan 2019-jegyű egész szám, amely 2018 darab 6-os számjegyet tartalmaz. Adjuk meg a tört legegyszerűbb (tovább nem egyszerűsíthető) alakját! **7 pont**

Megoldás.

A számlálóban 2018 db 6-os számjegy van. Végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\overline{166\ldots6}=10^{2018}+6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2018\text{ db}}= \qquad \text{1 pont}$$

$$=10^{2018}+\frac{6}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2018\text{ db}}=10^{2018}+\frac{2}{3}\cdot\left(10^{2018}-1\right)= \qquad \text{1 pont}$$

$$=10^{2018}+\frac{2}{3}\cdot10^{2018}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\cdot10^{2018}-\frac{2}{3}. \qquad \text{1 pont}$$

Hasonlóan a nevező, amelyben szintén 2018 db 6-os számjegy van:

$$\overline{66\ldots64} = 60\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2018\text{ db}}+4= \qquad \text{1 pont}$$

$$=\frac{60}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2018\text{ db}}+4=\frac{20}{3}\cdot\left(10^{2018}-1\right)+4= \qquad \text{1 pont}$$

$$=\frac{20}{3}\cdot10^{2018}-\frac{8}{3}=4\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot10^{2018}-\frac{2}{3}\right). \qquad \text{1 pont}$$

A tört legegyszerűbb alakja tehát $\frac{1}{4}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Léteznek-e olyan a, b, c, x pozitív valós számok, amelyekre az

$$a^2+b^2=c^2$$
$$(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$$

egyenlőségek egyszerre fennállnak? **7 pont**

1. megoldás. Induljunk ki az $(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$ egyenlőségből. A műveleteket elvégezve

$$a^2+b^2+2ax+2bx+2x^2=c^2+2cx+x^2.$$

Figyelembe véve, hogy $a^2+b^2=c^2$

$$2ax+2bx+x^2=2cx. \qquad \text{1 pont}$$

A kapott egyenlőséget az $x>0$ kifejezéssel osztva

$$2a+2b+x=2c,$$
$$x=2(c-a-b). \qquad \text{1 pont}$$

Mivel $x>0$, ezért $c-a-b>0$, vagyis $c>a+b>0$. 1 pont

Mivel az $f(x)=x^2$ függvény a pozitív valós számok halmazán szigorúan monoton növekvő, ezért

$$c^2>a^2+b^2+2ab, \qquad \text{1 pont}$$

amiből az $a^2+b^2=c^2$ feltétel ismételt alkalmazásával a $0>2ab$ feltételhez jutunk. 1 pont

$a>0, b>0$ miatt ez ellentmondás, 1 pont

ami azt jelenti, hogy a feltételeknek megfelelő a, b, c, x számok nem léteznek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Induljunk ki az $(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$ egyenlőségből. A műveleteket elvégezve

$$a^2+b^2+2ax+2bx+2x^2=c^2+2cx+x^2.$$

Figyelembe véve, hogy $a^2+b^2=c^2$,

$$2ax+2bx+x^2=2cx.$$ 1 pont

A kapott egyenlőséget az $x>0$ kifejezéssel osztva

$$2a+2b+x=2c,$$

$$x=2(c-a-b).$$ 1 pont

Mivel a, b, c pozitív valós számok és $a^2+b^2=c^2$, ezért a és b tekinthető egy olyan derékszögű háromszög két befogójának, amelynek átfogója c. 1 pont

A háromszög-egyenlőtlenség alapján: $a+b>c$. 1 pont

Ezért $x=2\cdot(c-a-b)<0$. 1 pont

$x>0$ miatt ez ellentmondás, 1 pont

ami azt jelenti, hogy a feltételeknek megfelelő a, b, c, x számok nem léteznek. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. A 101 kiskutya között kiosztottunk 2019 csontot. Igazoljuk, hogy biztosan van három olyan kiskutya, akik ugyanannyi csontot kaptak. **7 pont**

Megoldás.

Indirekt tegyük fel, hogy nincs három kutya, aki azonos mennyiségű csontot kapott. Ebből következően minden lehetséges „mennyiséget” legfeljebb 2 kutya kaphatott. 1 pont

Vizsgáljuk az ebben az esetben kiosztott csontok minimális számát!

Ekkor legfeljebb 2-2 kutya kap 0; 1; 2;...; 49 csontot, és egy kutya 50 csontot. 2 pont

Ekkor a kiadott csontok száma:

$$2\cdot(0+1+2+\ldots+49)+50=$$ 1 pont

$$=2\cdot\frac{49\cdot 50}{2}+50=2500.$$

Tehát ebben az esetben minimum 2500 csont kell. 2 pont

Mivel ez több, mint 2019, ezért nem igaz, hogy minden lehetséges mennyiséget legfeljebb két kutya kapott, tehát van három olyan kutya, aki ugyanannyi csontot kapott. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x és y pozitív egészek, valamint p és q különböző, legalább kétjegyű prímszámok, hogy

$$(x+y)^4-x^4=p\cdot q.$$ **7 pont**

Megoldás. A bal oldalt szorzattá alakítjuk: $y\cdot(2x+y)\cdot\left((x+y)^2+x^2\right)=p\cdot q$. 2 pont

Legyen $p < q$. Mivel a jobb oldalon prímszámok szerepelnek és a bal oldalon három különböző pozitív egész tényező található nagyság szerinti sorrendben, ezért egy lehetőség van:

$$y = 1; \qquad 2x + y = p; \qquad (x+y)^2 + x^2 = q. \qquad \text{2 pont}$$

$y = 1$-et beírva:

$$2x + 1 = p,$$

$$2x^2 + 2x + 1 = q.$$

Szorozzuk a második egyenlet mindkét oldalát 2-vel:

$$4x^2 + 4x + 2 = 2q$$

$$(2x+1)^2 + 1 = 2q,$$

azaz

$$p^2 + 1 = 2q. \qquad \text{2 pont}$$

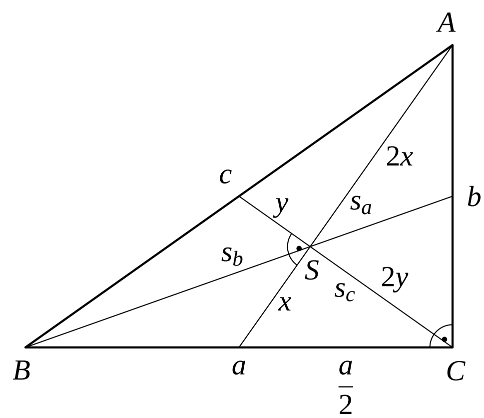
Ilyen prímek léteznek, például: $p = 11$, $q = 61$, ekkor $x = 5$. 1 pont
(Ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek.)

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó három pont akkor is jár, ha a versenyző kipróbálja a legkisebb kétjegyű prímet (11), majd megoldja és ellenőrzi az egyenletet.

5. Az ABC derékszögű háromszögben valamely súlyvonal merőleges valamely másik súlyvonalra. Mutassuk meg, hogy ekkor az ABC háromszög súlyvonalaiból szerkesztett háromszög újra derékszögű lesz. **7 pont**

Megoldás. Mivel a két befogóhoz tartozó súlyvonal nem lehet merőleges egymásra, az egyik (a másik súlyvonalra merőleges) súlyvonal az átfogóhoz tartozik. 1 pont



Felhasználva azt a tételt, miszerint a súlypont a súlyvonalak oldalhoz közelebbi harmadolópontja, és felírva a megfelelő Pitagorasz-tételeket (4-gyel átszorozva) adódik:

$$a^2 = 4x^2 + 16y^2; \qquad b^2 = 4x^2 + 4y^2; \qquad c^2 = 16x^2 + 4y^2 \qquad \text{2 pont}$$

Innen (az eredeti háromszögben felírt Pitagorasz-tétel miatt) adódik:

$$8x^2 + 20y^2 = 16x^2 + 4y^2 \Longrightarrow 2y^2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{2}y = x. \qquad \text{2 pont}$$

Innen az oldalak aránya: $a : b : c = \sqrt{24}y : \sqrt{12}y : \sqrt{36}y = \sqrt{2} : 1 : \sqrt{3}$. Újabb Pitagorasz-tételt felírva s_b súlyvonalra

$$s_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{27y},$$

így a súlyvonalak hosszainak négyzete: $s_a^2 = 18y^2$; $s_b^2 = 27y^2$; $s_c^2 = 9y^2$, ami miatt (Pitagorasz tételének megfordítása alapján) a súlyvonalakból valóban (az eredetihez hasonló) derékszögű háromszög szerkeszthető. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 1. forduló

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = 4x - \frac{2}{x}$$ **7 pont**

2. Dobjunk 5-ször egy szabályos hatoldalú kockával. Dobásainkat írjuk egymás mellé és alkossunk így 5-jegyű számokat. Tekintsük az összes így létrehozható számot.

Melyikből van több és miért: azokból a számokból, amelyekben van legalább két azonos számjegy, vagy azokból, amelyekben nincs két szomszédos 6-os számjegy? **7 pont**

3. Mutassuk meg, hogy bármely olyan $ABCDEF$ hatszögre, amelynek minden szöge egyenlő, igaz, hogy $AB - DE = EF - BC = CD - FA$. ($AB$, BC, CD, DE, EF és FA a hatszög oldalainak hosszát jelölik.) **7 pont**

4. Legyenek a_n és b_n a következő rekurziókkal megadott sorozatok: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 1$ $(n \geq 1)$ és $b_1 = 1$; $b_{n+1} = 10 \cdot (b_n + 1)$ $(n \geq 1)$, továbbá legyen $c_n = b_n - a_n$. Kiszámolva az $s_{2019} = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{2019}$ összeget; s_{2019}-ben mennyi a számjegyek összege? **7 pont**

5. Adott két halmaz: $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$ és $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely mind az A, mind a B halmaz elemei közül pontosan öthöz relatív prím! (Két pozitív egész szám relatív prím, ha legnagyobb közös osztójuk 1.) **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = 4x - \frac{2}{x}$$ **7 pont**

Megoldás. Felhasználva, hogy:

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$$ 1 pont

Az egyenlet az alábbi alakba írható:

$$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2+1=2\left(2x-\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(2x-\frac{1}{x}\right)+1=0$$ 2 pont

Ebből:

$$\left(2x-\frac{1}{x}-1\right)^2=0$$

$$2x-\frac{1}{x}=1$$ 1 pont

Az egyenletet átalakítva:

$$2x^2-x-1=0$$

amiből:

$$x_1=-\frac{1}{2};\qquad x_2=1$$ 2 pont

A kapott gyökök kielégítik az eredeti egyenletet. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Dobjunk 5-ször egy szabályos hatoldalú kockával. Dobásainkat írjuk egymás mellé és alkossunk így 5-jegyű számokat. Tekintsük az összes így létrehozható számot.

Melyikből van több és miért: azokból a számokból, amelyekben van legalább két azonos számjegy, vagy azokból, amelyekben nincs két szomszédos 6-os számjegy? **7 pont**

1. megoldás.

Összesen $6^5=7776$ különböző szám hozható létre, ezek között $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=720$ olyan szám van, melyben nincs ismétlődés. Így $7776-720=7056$ olyan szám van, amelyben van ismétlődő számjegy. 2 pont

Ha azokat a számokat keressük, amelyekben nincs két szomszédos 6-os, akkor aszerint tekintsünk két esetet, hogy a középső számjegy 6-os vagy sem: 1 pont

Ha a középső számjegy 6-os, akkor a 2. és a 4. számjegy 5-5-féle lehet (6-os nem), míg az 1. és az 5. számjegy mind a hatféle számjegy lehet. Ez $6\cdot5\cdot1\cdot5\cdot6=900$ darab szám. 1 pont

Ha a középső számjegy nem 6-os, akkor 5-féle lehet. Az első két számjegy mindegyike 6-os nem lehet, ez $6^2-1=35$ szám, hasonlóan az utolsó két számjegy is 35-féle lehet.

Ez $35\cdot5\cdot35=6125$ darab szám. 1 pont

Így olyan szám, amelyben nincs két szomszédos 6-os: $900+6125=7025$ darab van. 1 pont

Tehát azokból a számokból van több, amelyekben van ismétlődő számjegy. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Összesen $6^5 = 7776$ különböző szám hozható létre, ezek között $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ olyan szám van, amelyben nincs ismétlődés. Így $7776 - 720 = 7056$ olyan szám van, amelyben van ismétlődő számjegy. 2 pont

Ha azokat a számokat keressük, amelyekben nincs két szomszédos 6-os, akkor aszerint tekintsünk négy esetet aszerint, hogy hány darab 6-os számjegy van a számban. Ha 4 vagy 5 db 6-os lenne, akkor biztosan lenne 2 szomszédos 6-os, így 0, 1, 2 vagy 3 darab 6-os lehet a számban. 1 pont

Azokból a számokból, amelyekben 0 darab 6-os számjegy van $5^5 = 3125$ darab van. Ha 1 darab 6-os van a számban, az 5 helyre kerülhet, így ezekből a számokból is $5 \cdot 5^4 = 3125$ darab van. 1 pont

Ha 2 darab 6-os van a számban, azokat 6-féleképpen helyezhetjük el, úgy, hogy ne legyenek szomszédosok. (1.3., 1.4., 1.5., 2.4., 2.5., 3.5.) A fennmaradó 3 helyre 5-5 számjegy kerülhet, ez így $6 \cdot 5^3 = 750$ szám.

Három darab 6-os úgy, hogy ne legyen köztük szomszédos, csak egyféleképpen helyezhető el, az 1., a 3. és az 5. helyre. A 2. és a 4. helyre 5-5 féle számjegy kerülhet. Ez $1 \cdot 5^2 = 25$ szám. 1 pont

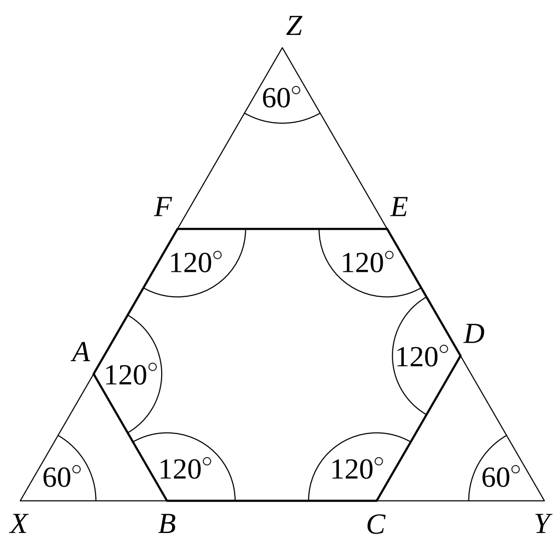
Így olyan szám, amelyben nincs két szomszédos 6-os: $3125 + 3125 + 750 + 25 = 7025$ darab van. 1 pont

Tehát azokból a számokból van több, amelyekben van ismétlődő számjegy. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Mutassuk meg, hogy bármely olyan $ABCDEF$ hatszögre, amelynek minden szöge egyenlő, igaz, hogy $AB - DE = EF - BC = CD - FA$. ($AB$, BC, CD, DE, EF és FA a hatszög oldalainak hosszát jelölik.) **7 pont**

Megoldás. Egy hatszög belső szögeinek összege: $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Mivel a feladat szerinti hatszög minden szöge egyenlő, ezért minden belső szög $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$. 1 pont



Ezért a hatszög külső szögei mind 60° nagyságúak. 1 pont

Hosszabbítsuk meg az AF, BC és DE oldalakat, messék ezek egymást páronként az ábra szerint az X, Y, Z pontokban. 1 pont

Az XAB, YCD, ZEF háromszögek szabályosak, de így az XYZ háromszög mindhárom szöge is 60°, vagyis ez a háromszög is szabályos. 1 pont

Ennek a háromszögnek az oldalaira:

$$XY = XB + BC + CY = AB + BC + CD,$$
$$YZ = YD + DE + EZ = CD + DE + EF,$$
$$ZX = ZF + FA + AX = EF + FA + AB.$$
1 pont

Mivel az XYZ háromszög oldalai egyenlő hosszúak, ezért $AB + BC + CD = CD + DE + EF$, rendezve: $AB - DE = EF - BC$ 1 pont

ugyanígy az $YZ = ZX$ egyenlőségből $CD - FA = AB - DE$ 1 pont

Megjegyzés. Ha valaki csak szabályos hatszöget vizsgál, legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: **7 pont**

4. Legyenek a_n és b_n a következő rekurziókkal megadott sorozatok: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 1$ $(n \geq 1)$ és $b_1 = 1$; $b_{n+1} = 10 \cdot (b_n + 1)$ $(n \geq 1)$, továbbá legyen $c_n = b_n - a_n$. Kiszámolva az $s_{2019} = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{2019}$ összeget; s_{2019}-ben mennyi a számjegyek összege? **7 pont**

1. megoldás. $a_1 = 1$; $a_2 = 11$; $a_3 = 111$,… a sorozat képzési szabályából következően az előző elem után mindig egy újabb 1-es számjegyet írunk, így $a_n = \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ db 1-es}}$. 1 pont

Ekkor
$$a_n = \frac{10^n - 1}{9}$$
1 pont

$b_1 = 1$; $b_2 = 20$; $b_3 = 210$; $b_4 = 2110$; $b_5 = 21110$,… a sorozat képzési szabályából következően az előző elem 1-es számjegyei után mindig egy újabb 1-es számjegyet írunk, így
$$b_n = 2\underbrace{111\ldots11}_{n-2 \text{ db 1-es}}0.$$
1 pont

Tehát
$$b_n = 2 \cdot 10^{n-1} + \frac{10^{n-1} - 1}{9} - 1$$
$$b_n - a_n = 2 \cdot 10^{n-1} + \frac{1}{9} \cdot 10^{n-1} - \frac{1}{9} - 1 - \left(\frac{10}{9} \cdot 10^{n-1} - \frac{1}{9}\right) = 10^{n-1} - 1 = \underbrace{999\ldots99}_{n-1 \text{ db 9-es}}.$$
1 pont

Ekkor
$$s_{2019} = (1-1) + (10-1) + (10^2 - 1) + \ldots + (10^{2018} - 1) =$$
$$= \underbrace{111\ldots11}_{2019 \text{ db 1-es}} - 2019 = \underbrace{111\ldots11}_{2014 \text{ db 1-es}}09092.$$
2 pont

Tehát s_{2019} számjegyeinek összege: $2014 \cdot 1 + 9 + 9 + 2 = 2034$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. n_c sorozat definíciója alapján

$$c_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = 10(b_n + 1) - 10(a_n + 1) = 10(a_n - b_n) + 9, \text{ ahol } c_1 = 9. \qquad \text{1 pont}$$

A kapott képzési szabály szerint

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 10 \cdot (a_n - b_n) + 9 = 10 \cdot (10 \cdot (a_{n-1} - b_{n-1}) + 9) + 9 = \dots \\ &= 10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (\dots \cdot (a_1 - b_1) \dots))) + 9 = \underbrace{999\dots99}_{n-1 \text{ db}}. \end{aligned} \qquad \text{3 pont}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} s_{2019} &= \underbrace{999\dots99}_{n-1 \text{ db}} + \underbrace{999\dots99}_{n-2 \text{ db}} + \dots + 999 + 99 + 9 = \\ &= (10^{2018} - 1) + (10^{2017} - 1) + \dots + (10^2 - 1) + (10 - 1) + (1 - 1) = \\ &= \underbrace{111\dots11}_{2019 \text{ db}} - 2019 = \underbrace{111\dots11}_{2014 \text{ db}}09092. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

s_{2019} számjegyeinek összege $2014 \cdot 1 + 9 + 9 + 2 = 2034$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Adott két halmaz: $A = \{1;3;5;7;9;11;13;15;17;19\}$ és $B = \{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely mind az A, mind a B halmaz elemei közül pontosan öthöz relatív prím! (Két pozitív egész szám relatív prím, ha legnagyobb közös osztójuk 1.) **7 pont**

Megoldás. A keresett n szám nem lehet páros, mert akkor a B halmaz egyetlen eleméhez sem lenne relatív prím. 1 pont

$$A = \{1;3;5;7;3^2;11;13;3\cdot 5;17;19\} \quad \text{és} \quad B = \{2;2^2;2\cdot 3;2^3;2\cdot 5;2^2\cdot 3;2\cdot 7;2^4;2\cdot 3^2;2^2\cdot 5\}$$

Mivel a keresett n szám páratlan, a B halmaz négy eleméhez (2-höz, 4-hez, 8-hoz és 16-hoz) biztosan relatív prím. Így a többi hat elem $2\cdot 3$; $2\cdot 5$; $2^2\cdot 3$; $2\cdot 7$; $2\cdot 3^2$; $2^2\cdot 5$ közül még pontosan egyhez kell relatív prímnek lennie. 1 pont

Az n szám páratlan, ezért prímtényezős felbontásában nem szerepel a 2. Ha a 3 sem szerepelne benne, akkor az n szám a 6-hoz, 12-höz és 18-hoz is relatív prím lenne, így a B halmaz elemei közül már legalább héthez lenne relatív prím. 1 pont

Ha az n prímtényezős felbontásában nem szerepelne az 5, akkor n relatív prím lenne a 10-hez és a 20-hoz, így már legalább hat B-beli elemhez lenne relatív prím. 1 pont

Tehát n prímtényezős felbontásában van 3 és van 5. Ellenben a 7 nem szerepelhet az n prímtényezős felbontásában, hiszen akkor a $6 = 2\cdot 3$; $10 = 2\cdot 5$; $12 = 2^2\cdot 3$; $14 = 2\cdot 7$; $18 = 2\cdot 3^2$; $20 = 2^2\cdot 5$ számok közül egyhez sem lenne relatív prím, pedig az egyikhez relatív prímnek kell lennie.

Tehát $n = 3\cdot 5$ vagy $n = 3\cdot 5\cdot p\cdot q\cdot\dots$, ahol a $p, q, \dots$ prímek mindegyike 7-nél nagyobb. 1 pont

A $15 = 3\cdot 5$ az A halmaz elemei közül relatív prím az 1-hez, 7-hez, 11-hez, 13-hoz, 17-hez és 19-hez. Ez így hat szám, ezért az egyik relatív prím relációt meg kell szüntetni, tehát az n prímtényezős felbontásában az iménti felsorolásban szereplő öt prímszám közül pontosan egynek szerepelni kell. 1 pont

Korábban láttuk, hogy ez nem lehet a 7. Mivel az n szám a lehető legkisebb kell legyen, ezért n prímtényezős felbontásában a 3 és az 5 mellett a 11-nek kell szerepelni. Tehát $n = 165$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 2. forduló

1. Melyik tört a nagyobb,

$$\frac{2020^{2022}}{2022^{2020}} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{2019^{2021}}{2021^{2019}}?$$

7 pont

2. Az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90^\circ$. Az AB oldal felezőmerőlegese a BC oldalegyenest a K pontban metszi, az AK szakasz felezőmerőlegese a CA oldalegyenest pedig az L pontban. Határozzuk meg az ABC háromszög két hegyesszögét, ha tudjuk, hogy BL belső szögfelezője az ABC szögnek. **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy $5401^n - 2710^n - 2036^n + 1364^n$ minden n természetes szám esetén osztható 2019-cel. **7 pont**

4. Bizonyítsuk be, hogy minden 17-nél nagyobb pozitív egész szám előállítható három 1-nél nagyobb egész szám összegeként, ahol az összegben szereplő számok páronként relatív prímek. Igazoljuk, hogy a 17 nem állítható elő ugyanilyen módon. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik tört a nagyobb,

$$\frac{2020^{2022}}{2022^{2020}} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{2019^{2021}}{2021^{2019}}?$$

7 pont

Megoldás. Vizsgáljuk általánosan az $\frac{(n+1)^{n+3}}{(n+3)^{n+1}}$ és az $\frac{n^{n+2}}{(n+2)^n}$ törteket. (Ahol n pozitív egész szám.) 1 pont

Kis n-ekre kipróbálva, az első tört mindig nagyobb, így a sejtés az, hogy az első tört nagyobb. 1 pont

(Megjegyzés: Ez az 1 pont jár abban az esetben, ha indoklás nélküli helyes választ ad a feladat kérdésére, illetve akkor is megadható az 1 pont, ha nem próbálta ki kis n-ekre, de igazolja általánosan a helyes egyenlőtlenséget.)

$$\frac{(n+1)^{n+3}}{(n+3)^{n+1}} \overset{?}{>} \frac{n^{n+2}}{(n+2)^n}$$

Mivel mindkét nevező pozitív, a beszorzás nem változtatja a reláció irányát.

A nevezőkkel beszorozva, a bal oldal

$$(n+1)^{n+3}\cdot(n+2)^n = \big((n+1)^n\cdot(n+2)^n\big)\cdot(n+1)^3 = (n^2+3n+2)^n\cdot(n^3+3n^2+3n+1). \qquad \text{2 pont}$$

A jobb oldal:

$$(n+3)^{n+1}\cdot n^{n+2} = n^n\cdot(n+3)^n\cdot n^2\cdot(n+3) = (n^2+3n)^n\cdot(n^3+3n^2). \qquad \text{1 pont}$$

Mivel n pozitív egész szám, ezért a bal oldal átalakításával kapott szorzat mindkét tényezője nagyobb a jobb oldalon szereplő szorzat tényezőinél, ezért az első tört, azaz $\dfrac{2020^{2022}}{2022^{2020}}$ a nagyobb. 2 pont

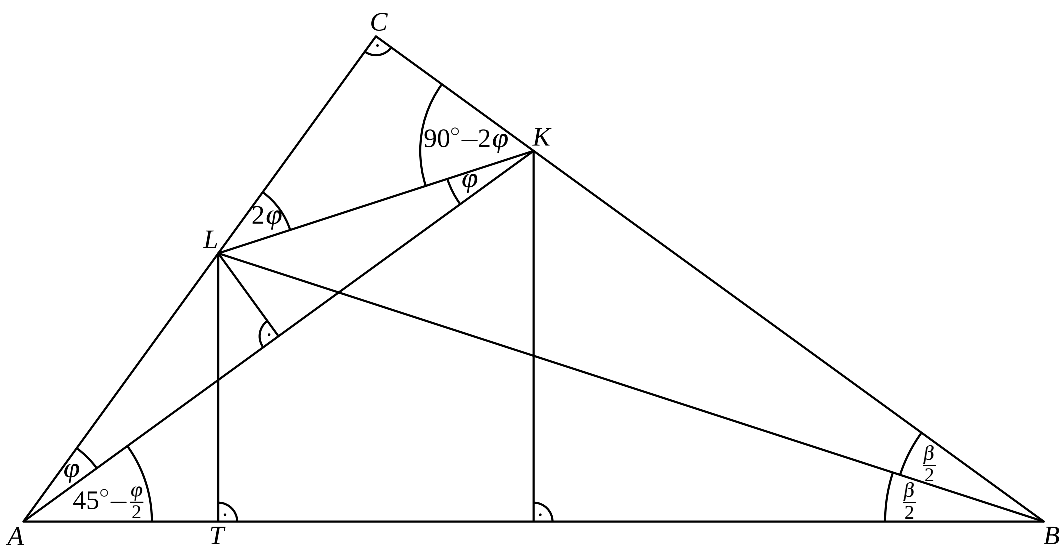
Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Amennyiben a versenyző a konkrét számokkal számolva korrektül bizonyít, a teljes pontszámot megkaphatja.

2. Az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90°$. Az AB oldal felezőmerőlegese a BC oldalegyenest a K pontban metszi, az AK szakasz felezőmerőlegese a CA oldalegyenest pedig az L pontban. Határozzuk meg az ABC háromszög két hegyesszögét, ha tudjuk, hogy BL belső szögfelezője az ABC szögnek. **7 pont**

Megoldás. Három esetet vizsgálhatunk.

1. eset: $CA < CB$. Jelöljük az ABC háromszög szögeit α-val, β-val és γ-val. Mivel L rajta van az AK szakasz felezőmerőlegesén, ezért $LA = LK$ és $LAK\sphericalangle = LKA\sphericalangle = \varphi$.



Az AKL háromszögre a külsőszög-tételt alkalmazva $CLK\sphericalangle = 2\varphi$, és emiatt az LKC háromszögben $CKL\sphericalangle = 90° - 2\varphi$.

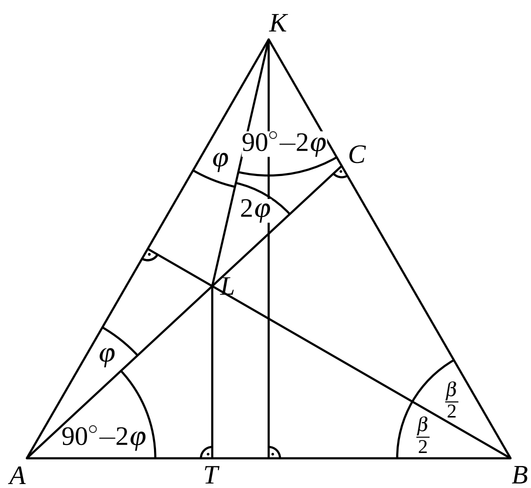
Az ABK egyenlő szárú háromszögre alkalmazva a külsőszög-tételt:

$$KAB\sphericalangle = KBA\sphericalangle = \frac{AKC\sphericalangle}{2} = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$ 1 pont

Legyen T az AB oldal azon pontja, amelyre $LT \perp AB$. Mivel BL belső szögfelezője β-nak, ezért $LT = LC$ és $ATL\triangle \cong KCL\triangle$, hiszen két-két oldal hossza és a hosszabbikkal szemközti szög nagysága egyenlő, emiatt $LAT\sphericalangle = LKC\sphericalangle$, 1 pont

azaz $\varphi + 45^\circ - \dfrac{\varphi}{2} = 90^\circ - 2\varphi$, amiből $\varphi = 18^\circ$.

Ezt felhasználva $\alpha = 45^\circ + \dfrac{\varphi}{2} = 54^\circ$ és $\beta = 36^\circ$. 1 pont



2. eset: $CA > CB$. Az előző esethez hasonló gondolatmenettel:

$$LAK\sphericalangle = LKA\sphericalangle = \varphi,$$

$$CLK\sphericalangle = 2\varphi,$$

amiből

$$LKC\sphericalangle = 90^\circ - 2\varphi.$$

$L \in f_\beta$ miatt $LT = LC$ és $ATL\triangle \cong KCL\triangle$ ($LT = LC$, $LA = LK$, $ATL\sphericalangle = LCK\sphericalangle = 90^\circ$), ezért

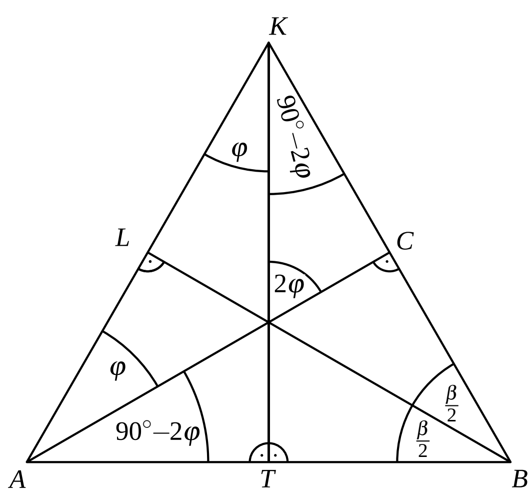
$$LAT\sphericalangle = LKC\sphericalangle = 90^\circ - 2\varphi,$$

ahonnan

$$BAK\sphericalangle = BKA\sphericalangle = 90^\circ - \varphi,$$

így

$$BA = BK.$$ 1 pont



Másrészt, mivel K rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, ezért $KA = KB$, tehát az ABK háromszög szabályos, és így az A csúcsánál levő szöge 60°, vagyis

$$\varphi + 90^\circ - 2\varphi = 60^\circ,$$

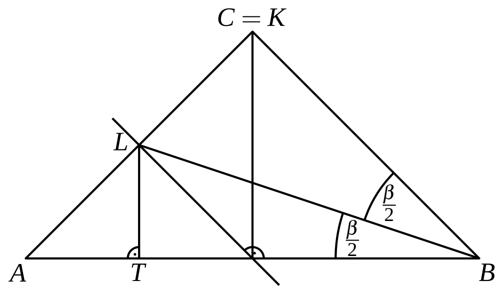
ezért

$$\varphi = 30^\circ,$$

tehát

$$\alpha = 90^\circ - 2\varphi = 30^\circ,$$

$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$ 1 pont



3. eset: $CA = CB$. Ebben az esetben $K \equiv C$, L az AC oldal felezőpontja és $LC = LA$. 1 pont

Másrészt emiatt $LT = LC$, vagyis $LT = LA$, ami nyilvánvalóan nem lehetséges, mivel az ATL derékszögű háromszögben LA átfogó, LB pedig befogó. Így ez az eset nem valósulhat meg. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy $5401^n - 2710^n - 2036^n + 1364^n$ minden n természetes szám esetén osztható 2019-cel. **7 pont**

Megoldás. $5401^n - 2710^n - 2036^n + 1364^n = 5401^n - 2710^n - (2036^n - 1364^n)$ 1 pont

Felhasználva, hogy $a^n - b^n$ osztható $(a-b)$-vel, $5401^n - 2710^n$ osztható $5401 - 2710 = 2691$-gyel, így osztható 3-mal is. 1 pont

Hasonlóan: $2036^n - 1364^n$ osztható $2036 - 1364 = 672$-vel, így osztható 3-mal is. 1 pont

Ugyanakkor: $5401^n - 2710^n - 2036^n + 1364^n = (5401^n - 2036^n) - (2710^n - 1364^n)$. 1 pont

Az előbbieknek megfelelően: $5401^n - 2036^n$ osztható $5401 - 2036 = 3365$-tel, így osztható 673-mal is. 1 pont

Ugyanígy: $2710^n - 1364^n$ osztható $2710 - 1364 = 1346$-tal, így osztható 673-mal is. 1 pont

A kifejezés minden természetes szám esetén osztható 673-mal és 3-mal. Mivel a 673 és a 3 relatív prímek, ezért a kifejezés mindig osztható $3 \cdot 673 = 2019$-cel. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Bizonyítsuk be, hogy minden 17-nél nagyobb pozitív egész szám előállítható három 1-nél nagyobb egész szám összegeként, ahol az összegben szereplő számok páronként relatív prímek. Igazoljuk, hogy a 17 nem állítható elő ugyanilyen módon. **7 pont**

Megoldás. Legyen $k \geq 3$, $k \in N^+$. Ekkor a

$$18 = 2 + 3 + 13, \qquad 20 = 3 + 4 + 13, \qquad 22 = 2 + 3 + 17$$

felbontások alapján:

$$6k = 2 + 3 + (6k - 5), \qquad 6k + 2 = 3 + 4 + (6k - 5), \qquad 6k + 4 = 2 + 3 + (6k - 1)$$ 2 pont

A $6k+1$, $6k+3$, $6k+5$ típusú számokat két-két csoportra osztva például az alábbi előállítások lehetségesek:

$$12l+1=9+(6l-1)+(6l-7), \qquad 12m+7=3+(6m-1)+(6m+5)$$
$$12l+3=3+(6l-1)+(6l+1), \qquad 12m+9=9+(6m-1)+(6m+1)$$
$$12l+5=9+(6l-5)+(6l+1), \qquad 12m+11=3+(6m+1)+(6m+7)$$
$$(l \in \mathbb{N}^+,\ m \in \mathbb{N}^+,\ l \geq 2,\ m \geq 1)$$ 3 pont

Ezután azt fogjuk belátni, hogy a 17 nem bontható fel a feladat feltételei szerint háromtagú összegre. Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $17=a+b+c$, ahol a, b, c páronként relatív prímek, és $1<a<b<c$ $(a,b,c \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor az a, b, c számok mindegyikének páratlannak kell lennie.

$a=3$ esetén a $3+5+7<a+b+c=17<3+5+11$,

$a \geq 5$ esetén pedig $b \geq 7$, $c \geq 9$ miatt az $a+b+c \geq 5+7+9=21>17$

egyenlőtlenség igazolja, hogy a kívánt felbontás nem valósítható meg. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 2. forduló

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén az $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}$ tört nem egyszerűsíthető. **7 pont**

2. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékeit az $[1;6]$ intervallumon:

$$f\colon x \mapsto \frac{4x^2+100}{x}$$ **7 pont**

3. Adjuk meg az összes olyan legalább kételemű halmazt, amelynek elemei egész számok, és a halmaz elemeinek szorzata éppen annyi, mint ahány részhalmaza van a halmaznak! **7 pont**

4. Az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle=90^\circ$. A háromszög befogóira kifelé $ACDE$ és $BFGC$ négyzeteket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög átfogóhoz tartozó magasságának talppontja T, akkor az FDT háromszög derékszögű. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén az $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}$ tört nem egyszerűsíthető. **7 pont**

Megoldás.

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}=\frac{\left(n^2+1\right)\left(n^2+3\right)}{\left(n^2+2\right)\left(n^2+4\right)}$$ 1 pont

A számlálóban és a nevezőben szereplő négy zárójeles kifejezés négy egymást követő pozitív egész számot jelöl. Mivel két szomszédos pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, ezért a tört csak abban az esetben egyszerűsíthető, ha az egyszerűsítés az n^2+1 és n^2+4 számokat érinti. 1 pont

$d \mid n^2+4$ és $d \mid n^2+1$ esetén $d \mid \left(n^2+4\right)-\left(n^2+1\right)=3$ alapján a tört pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $d=3$. 2 pont

A két kifejezés 3-mal való osztási maradékát vizsgáljuk.

Ha $n=3k\pm 1$ ($k\in\mathbb{N}$), akkor

$$n^2+1=9k^2\pm 6k+2=3\cdot\left(3k^2\pm 2k\right)+2 \quad \text{és} \quad n^2+4=3\cdot\left(3k^2\pm 2k+1\right)+2$$

alapján mindkét kifejezés 3-mal osztva 2 maradékot ad. 1 pont

Ha $n=3k$ ($k\in\mathbb{N}$), akkor

$$n^2+1=9k^2+1=3\cdot 3k^2+1 \quad \text{és} \quad n^2+4=9k^2+4=3\left(3k^2+1\right)+1$$

alapján mindkét kifejezés 3-mal osztva 1 maradékot ad. 1 pont

Így $\left(n^2+1;n^2+4\right)=1$, tehát a tört 3-mal sem egyszerűsíthető. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékeit az $[1;6]$ intervallumon:

$$f: x \mapsto \frac{4x^2+100}{x}$$ **7 pont**

Megoldás.

$$f(x)=4x+\frac{100}{x}$$

Mivel az összeg mindkét tagja pozitív az $[1;6]$ intervallumon, ezért alkalmazhatjuk a számtani–mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$4x+\frac{100}{x}\geq 2\cdot\sqrt{4x\cdot\frac{100}{x}}=40.$$ 1 pont

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a két tag egyenlő, azaz

$$4x=\frac{100}{x}.$$

Ami a feltételt figyelembe véve $x=5$ esetben teljesül. 1 pont

Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy a függvény az $[1;6]$ intervallumon az 5-ben veszi fel a minimumát, amely 40-nel egyenlő. 1 pont

Megmutatjuk, hogy a függvény az $[1;5[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, vagyis

$1 \le x_1 < x_2 < 5$ esetén a

$$\frac{4x_1^2+100}{x_1} > \frac{4x_2^2+100}{x_2} \Leftrightarrow 4(x_1-x_2) > 100 \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = 100 \cdot \frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$$

$$(x_1-x_2) > (x_1-x_2) \cdot \frac{25}{x_1x_2}$$

összefüggés teljesül.

Mivel ha $1 \le x_1 < x_2 < 5$, akkor $x_1 \cdot x_2 > 0$ (és $x_1 - x_2 < 0$), így valóban fennáll ez utóbbi egyenlőtlenség. 1 pont

Most pedig megmutatjuk, hogy a függvény az $]5;6]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, vagyis $5 < x_1 < x_2 \le 6$ esetén a

$$\frac{4x_1^2+100}{x_1} < \frac{4x_2^2+100}{x_2} \Leftrightarrow (x_1-x_2) < (x_1-x_2) \cdot \frac{25}{x_1x_2}$$

összefüggés teljesül.

Mivel ha $5 < x_1 < x_2 \le 6$, akkor $x_1x_2 > 25$ (és $x_1 - x_2 < 0$), így valóban fennáll ez utóbbi egyenlőtlenség. 1 pont

Mivel f az $[1;5[$ intervallumban szigorúan monoton növekedő, az $]5;6]$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő, a maximumát kizárólag az $[1;6]$ intervallum végpontjaiban veheti fel. 1 pont

A két intervallumhatáron felvett, $f(1) = 104$ és $f(6) = \dfrac{244}{6} = 40\dfrac{2}{3}$ értékek közül $f(1)$ a nagyobb, így ez lesz a függvény maximumértéke is. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Adjuk meg az összes olyan legalább kételemű halmazt, amelynek elemei egész számok, és a halmaz elemeinek szorzata éppen annyi, mint ahány részhalmaza van a halmaznak! **7 pont**

Megoldás. A halmaz elemeinek száma legyen n, ekkor részhalmazainak száma 2^n. Ha egész számok szorzata a 2-nek hatványa, akkor e szorzat bármely tényezője 2 valamely hatványa vagy annak ellentettje. 1 pont

Először belátjuk, hogy a halmaz elemeinek száma legfeljebb 6. Tegyük fel, hogy $n \ge 7$, azaz $n = 6+k$, ahol $k \ge 1$. A halmaz elemei legyenek $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots, x_n$.

A feltétel szerint $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot \ldots \cdot x_n = 2^n = 2^{6+k} = 2^6 \cdot 2^k$.

Feltehetjük, hogy $|x_1| \le |x_2| \le |x_3| \le |x_4| \le |x_5| \le |x_6| \le |x_7| \le \ldots \le |x_n|$.

Ekkor $|x_1| \ge 1$; $|x_2| \ge 1$; $|x_3| \ge 2$; $|x_4| \ge 2$; $|x_5| \ge 4$; $|x_6| \ge 4$; $|x_7| \ge 8$, és nyilván $|x_i|$ legalább 8, ha $i \ge 7$, ezért

$$2^n = 2^6 \cdot 2^k = |x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot \ldots \cdot x_n| =$$

$$= |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| \cdot |x_4| \cdot |x_5| \cdot |x_6| \cdot |x_7| \cdot \ldots \cdot |x_n| \ge 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8 = 2^6 \cdot 8^k.$$

Tehát $2^6 \cdot 2^k \ge 2^6 \cdot 8^k$, innen $k = 0$, ami ellentmond a $k \ge 1$ feltételnek. Tehát $n \le 6$. 2 pont

Ha $n = 6$ lenne, akkor $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 2^6$, és ebben az esetben

$$64 = 2^6 = |x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| \cdot |x_4| \cdot |x_5| \cdot |x_6| \geq 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

Az egyenlőség csak úgy teljesülhet, hogy $|x_1| = 1$; $|x_2| = 1$; $|x_3| = 2$; $|x_4| = 2$; $|x_5| = 4$; $|x_6| = 4$, azaz $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$; $x_5 = -4$; $x_6 = 4$, ám ebben az esetben

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = -64$$

lenne. 1 pont

Tehát $2 \leq n \leq 5$.

Ha $n = 5$, akkor nyilván $|x_5| \leq 8$. A lehetséges halmazok: $\{-1; 1; -2; 2; 8\}$ és $\{-1; 1; 2; -4; 4\}$.

Ha $n = 4$, akkor a halmazok:

$$\{-1; 1; -2; 8\}, \{-1; 1; 2; -8\}, \{-1; 1; -4; 4\}, \{-1; -2; 2; 4\}, \{1; -2; 2; -4\}.$$

Ha $n = 3$, akkor a halmazok: $\{-1; 1; -8\}$, $\{-1; -2; 4\}$, $\{-1; 2; -4\}$, $\{1; -2; -4\}$, $\{1, 2, 4\}$.

Ha $n = 2$, akkor a halmazok: $\{1; 4\}$, $\{-1; -4\}$. 3 pont

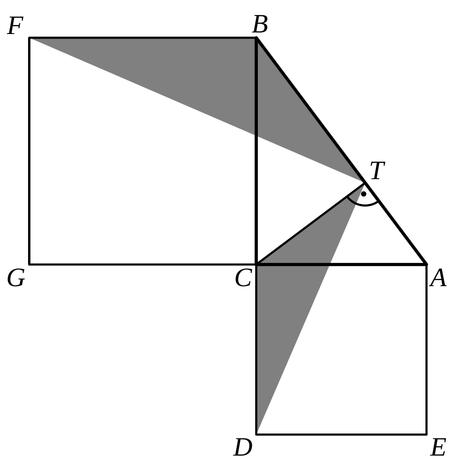
Megjegyzés. Az utolsó három pont akkor jár, ha mind a tizennégy halmazt megadja.

Két pontot kapjon, ha megtalál legalább kilenc halmazt, egy pontot kapjon, ha megtalál legalább ötöt.

Összesen: **7 pont**

4. Az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90^\circ$. A háromszög befogóira kifelé $ACDE$ és $BFGC$ négyzeteket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög átfogóhoz tartozó magasságának talppontja T, akkor az FDT háromszög derékszögű. **7 pont**

1. megoldás. $CAT\triangle \sim BCT\triangle$, mivel $ATC\sphericalangle = CTB\sphericalangle = 90^\circ$ és $TCA\sphericalangle = TBC\sphericalangle$ (merőleges szárú hegyesszögek). 1 pont



A hasonlóság alapján:

$$\frac{CA}{CT} = \frac{BC}{BT}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{CD}{CT} = \frac{BF}{BT} \qquad (1)$$ 1 pont

Ezt felhasználva:

$$TCD\sphericalangle = TCA\sphericalangle + 90^\circ = TBC\sphericalangle + 90^\circ = TBF\sphericalangle. \quad (2)$$ 1 pont

Az (1), (2) egyenlőségek figyelembevételével:

$$TCD\triangle \sim TBF\triangle \qquad \text{és} \qquad CDT\sphericalangle = BFT\sphericalangle.$$ 1 pont

Ez utóbbi egyenlőség alapján $BDT\sphericalangle = BFT\sphericalangle$, így az $FDTB$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

Ezen húrnégyszög alapján: $DTF\sphericalangle = DBF\sphericalangle = 90^\circ$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek).

Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó két pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a versenyző:

A hasonlóság és $CTB\sphericalangle = 90^\circ$ miatt TCB és TBF háromszögek 90°-os elforgatással középpontosan hasonló helyzetbe hozhatók. 1 pont

Így viszont $FTD\sphericalangle = 90^\circ$, ezzel az állítást bizonyítottuk. 1 pont

2. megoldás. Használjuk az előző megoldás ábráját és jelöléseit.

Az ACB derékszögű háromszöget a CT magasság két hasonló háromszögre bontja. Eszerint $BT : BC = CT : CA$, de mivel $FB = BC$ és $CD = CA$, ezért $BT : FB = CT : CD$. 2 pont

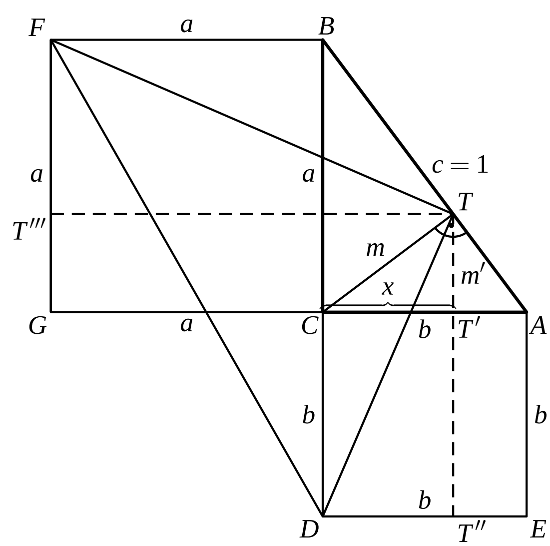
FBT és DCT merőleges szárú tompaszögek ($FB \perp BC$, azaz CD, illetve $BT \perp CT$), így FBT és DCT hasonló háromszögek. 2 pont

A hasonló háromszögek megfelelő szögei egyenlők, így $BTF\sphericalangle = CTD\sphericalangle$, ebből 1 pont

$$FTD\sphericalangle = FTC\sphericalangle + CTD\sphericalangle = FTC\sphericalangle + BTF\sphericalangle = BTC\sphericalangle = 90^\circ.$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit!



Mivel a hasonlósági transzformáció szögtartó, ezért legyen a derékszögű háromszög átfogója egységnyi, ekkor $a^2 + b^2 = 1$.

A területképlet alapján ekkor a derékszögű háromszög magassága: $m = a \cdot b$ 1 pont

$$CAT\triangle \sim ABC\triangle \quad \Rightarrow \quad \frac{m'}{b} = \frac{m}{c} \quad \Rightarrow \quad m' = ab^2,$$

$$CT'T\triangle \sim BCA\triangle \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{m} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad x = a^2 b.$$ 1 pont

Felírjuk Pitagorasz tételét a TDT' háromszögben:

$$\begin{aligned} DT^2 &= \left(b+ab^2\right)^2 + \left(a^2b\right)^2 = \\ &= b^2+2ab^3+a^2b^4+a^4b^2 = \\ &= b^2+2ab^3+a^2b^2\left(a^2+b^2\right) = \\ &= b^2+2ab^3+a^2b^2. \end{aligned} \qquad \text{1 pont}$$

Ugyanígy felírjuk Pitgorasz tételét a TFT''' háromszögben:

$$\begin{aligned} FT^2 &= \left(a+a^2b\right)^2 + \left(a-ab^2\right)^2 = \\ &= a^2+2a^3b+a^4b^2+a^2-2a^2b^2+a^2b^4 = \\ &= 2a^2+2a^3b+a^2b^2\left(a^2+b^2\right)-2a^2b^2 = \\ &= 2a^2+2a^3b-a^2b^2. \end{aligned} \qquad \text{1 pont}$$

Végül felírjuk Pitagorasz tételét az FDB háromszögben:

$$FD^2 = a^2+(a+b)^2 = a^2+1+2ab. \qquad \text{1 pont}$$

$$DT^2+FT^2 = a^2+a^2+b^2+2ab^3+2a^3b = a^2+1+2ab\left(a^2+b^2\right) = a^2+1+2ab. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel $DT^2+FT^2=FD^2$, ezért Pitagorasz tételének megfordítása miatt $FTD=90°$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 1. forduló

1. Jelölje $[a;b]$ az a és b pozitív egész számok legkisebb közös többszörösét. Legyen n olyan pozitív egész szám, amelyre

$$[n;n+1] > [n;n+2] > [n;n+3] > \cdots > [n;n+9].$$

Bizonyítsuk be, hogy $[n;n+9] > [n;n+10]$. **7 pont**

2. Egy háromszög mindegyik oldalán kijelölünk két-két pontot úgy, hogy a hat pont egy olyan hatszög hat csúcsa legyen, amelynek minden oldala egyenlő, és szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének a kétharmad része! **7 pont**

3. Az a_n sorozat a következő rekurzióval adott:

$$a_1 = 1; \quad a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot a_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Legyen továbbá $s_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Igazoljuk, hogy

$$2020 \mid s_{100}+1. \qquad \textbf{7 pont}$$

4. Legyen n pozitív egész szám, jelölje $h(n)$ azt, hogy n hányféleképpen áll elő a 3 hatványainak összegeként. Mennyi a

$$h(2020) - \big(h(673) + h(672) + h(671) + \dots h(1)\big)$$

különbség?

(Itt 3 hatványán 3-nak nemnegatív egész kitevőjű hatványait értjük. Ha két előállítás csak a tagok sorrendjében különbözik, akkor e két előállítást nem különböztetjük meg.) **7 pont**

5. Egy $ABCD$ érintőnégyszög beírt körének középpontja O. Az ACD és ABC háromszögek beírt köreinek középpontja F és E. Az AEF háromszög köréírt körének középpontja K. Bizonyítsuk be, hogy A, O és K egy egyenesen vannak! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje $[a;b]$ az a és b pozitív egész számok legkisebb közös többszörösét. Legyen n olyan pozitív egész szám, amelyre

$$[n;n+1] > [n;n+2] > [n;n+3] > \dots > [n;n+9].$$

Bizonyítsuk be, hogy $[n;n+9] > [n;n+10]$. **7 pont**

Megoldás. Jelölje $(a;b)$ az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját. Ekkor $(a;b) = \dfrac{a \cdot b}{[a;b]}$, és mivel $n(n+1) < n(n+2) < \dots < n(n+9)$, ezért a feladat feltétele alapján:

$$(n;n+1) < (n;n+2) < \dots < (n;n+9). \qquad (1)$$ 2 pont

Másrészt $(n;n+m) \mid n+m$ és $(n;n+m) \mid n$ miatt: $(n;n+m) \mid (n+m) - n = m$, innen adódik, hogy $(n;n+m) \le m$. 1 pont

Az $1 \le (n;n+m) \le m$ és az (1) figyelembevételével: $(n;n+m) = m$ $(m = 1, 2, \dots, 9)$. Innen

$$[n;n+9] = \frac{n(n+9)}{9} = \frac{n^2}{9} + n. \qquad (2)$$ 1 pont

Másfelől $(n;n+2) = 2$ és $(n;n+5) = 5$ miatt $2 \mid n$ és $5 \mid n$, és innen $10 \mid n$, illetve emiatt $10 \mid (n+10)$ adódik. Ebből következik, hogy $10 = (n;n+10)$. 1 pont

Innen kapjuk (a korábbi (2) figyelembevételével) a következőt:

$$[n;n+10] = \frac{n(n+10)}{(n;n+10)} = \frac{n(n+10)}{10} = \frac{n^2}{10} + n < \frac{n^2}{9} + n = [n;n+9].$$

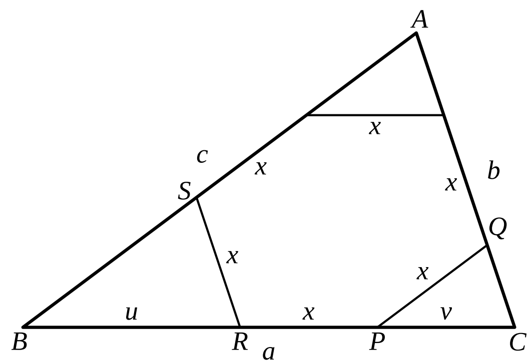
És éppen ezt akartuk belátni. 2 pont

Megjegyzés. Létezik a feltételeknek megfelelő n (mégpedig végtelen sok). n lehet például $n = k!$ alakú, ha $k \ge 7$.

Összesen: **7 pont**

2. Egy háromszög mindegyik oldalán kijelölünk két-két pontot úgy, hogy a hat pont egy olyan hatszög hat csúcsa legyen, amelynek minden oldala egyenlő, és szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének a kétharmad része! **7 pont**

Megoldás. A háromszög oldalai $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$, a hatszögé pedig x.



A BRS és az BCA háromszög hasonlók, ezért $\dfrac{u}{x} = \dfrac{a}{b}$, innen $u = \dfrac{a}{b}x$. 1 pont

A PCQ és az BCA háromszög hasonlók, ezért $\dfrac{v}{x} = \dfrac{a}{c}$, innen $v = \dfrac{a}{c}x$. 1 pont

$u + x + v = a$, azaz $\dfrac{a}{b}x + x + \dfrac{a}{c}x = a$, innen $x = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. 2 pont

Ezután a $\dfrac{6}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \le \dfrac{2}{3}(a + b + c)$ egyenlőtlenséget kell belátni.

1. lehetőség: Ez ekvivalens a $\dfrac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \le \dfrac{a + b + c}{3}$ egyenlőtlenséggel, ami nyilván igaz, mert az egyenlőtlenség bal oldalán az oldalak hosszának a harmonikus közepe, jobb oldalán az oldalak hosszának számtani közepe áll. És a szélsőértéket az $a = b = c$ esetben fel is veszi. 3 pont

2. lehetőség: A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a $9 \le (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ egyenlőtlenséggel. A zárójelek felbontása és rendezés után a $6 \le \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a}$ egyenlőtlenség adódik, ami igaz, mert egy pozitív számnak és a reciprok értékének az összege legalább 2. És a szélsőértéket az $a = b = c$ esetben fel is veszi. 3 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az a_n sorozat a következő rekurzióval adott:

$$a_1 = 1; \quad a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot a_{n-1} \quad (n \ge 2).$$

Legyen továbbá $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Igazoljuk, hogy
$$2020 \mid s_{100} + 1.$$ **7 pont**

Megoldás. Az első néhány a_n kiszámolása után látható, hogy $a_n = n \cdot n!$. Ezt fogjuk először bizonyítani. a_n-t „végigvezetve” a_1-ig, teleszkópos szorzatot kapunk, majd egyszerűsítve adódik:
$$a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{2^2}{1} \cdot 1 = n^2 \cdot (n-1)! = n \cdot n!$$ 2 pont

Kicsit tovább alakítva: $a_n = n \cdot n! = (n+1)n! - 1 \cdot n! = (n+1)! - n!$. 1 pont

Innen s_n-re újabb „teleszkóp”, egy teleszkópos összeg adódik:
$$s_n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + (n! - (n-1)!) + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1.$$

Azaz $s_{100} + 1 = 101! - 1 + 1 = 101!$. 2 pont

Másfelől 2020 prímfelbontása: $2020 = 101 \cdot 5 \cdot 2^2$. Mivel $2^2 \mid 101!$, $5 \mid 101!$, $101 \mid 101!$, ezért $2020 \mid 101! = s_{100} + 1$. És ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Összesen: **7 pont**

4. Legyen n pozitív egész szám, jelölje $h(n)$ azt, hogy n hányféleképpen áll elő a 3 hatványainak összegeként. Mennyi a
$$h(2020) - \big(h(673) + h(672) + h(671) + \ldots h(1)\big)$$
különbség? (Itt 3 hatványán 3-nak nemnegatív egész kitevőjű hatványait értjük. Ha két előállítás csak a tagok sorrendjében különbözik, akkor e két előállítást nem különböztetjük meg.) **7 pont**

Megoldás. Írjuk fel 2020-at 3 hatványainak összegeként úgy, hogy balról jobbra haladva a kitevők nem csökkenhetnek. A felírásban szereplő 3^0 kifejezések összege legyen E, a többi tag összege legyen T. 2 pont

Mivel T osztható 3-mal ezért T értéke $0, 3, 6, \ldots, 2019$ lehet. 1 pont

Tekintsük csak azokat a tagokat, amelyek T-hez tartoznak.

$T = 2019$ esetén ezen tagok összegéből a 3 kiemelhető. Így csak a 673-at kell előállítani, ez $h(673)$ módon lehetséges. Az ilyen előállításokat 3-mal szorozni kell, majd egy darab 1-et az elejére írni. Így az összes olyan előállítást megkapjuk pontosan egyszer, amely egy 1-gyel kezdődik.

$T = 2016$ esetén ezen tagok összegéből a 3 kiemelhető. Így csak a 672-t kell előállítani, ez $h(672)$ módon lehetséges. Az ilyen előállításokat 3-mal szorozni kell, majd négy darab 1-et az elejére írni. Így az összes olyan előállítást megkapjuk pontosan egyszer, amely négy 1-gyel kezdődik.

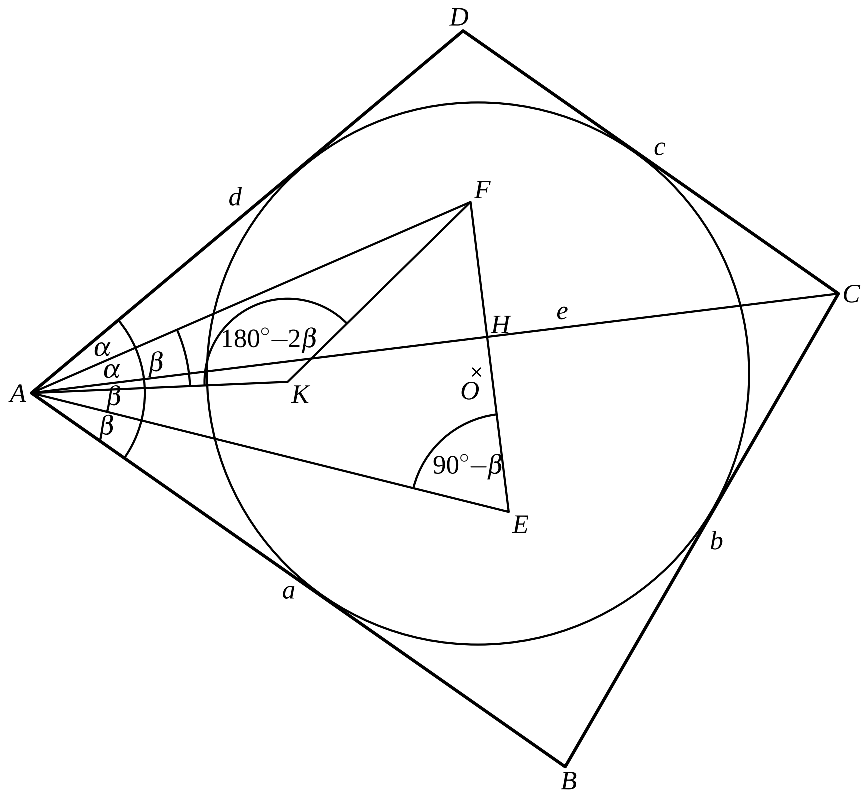
Így lépünk hármasával visszafelé egészen $T = 0$-ig. 2 pont

Tehát a $h(673) + h(672) + h(671) + \ldots h(1)$ összegben a 2020 összes előállítása szerepel egy kivételével, amikor 2020-at csupa 1-gyel állítjuk elő (ez tartozik $T = 0$-hoz). Ezért a kérdezett különbség 1. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. Egy $ABCD$ érintőnégyszög beírt körének középpontja O. Az ACD és ABC háromszögek beírt köreinek középpontja F és E. Az AEF háromszög köréírt körének középpontja K. Bizonyítsuk be, hogy A, O és K egy egyenesen vannak! **7 pont**

Megoldás. Jelöljük a négyszög oldalait és AC átlóját az ábra szerint. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$.



Érintse az ACD háromszög beírt köre AC-t H_1-ben, ABC beírt köre pedig H_2-ben.

$AH_1 = \dfrac{d+e-c}{2}$, $AH_2 = \dfrac{a+e-b}{2}$. 1 pont

Mivel érintőnégyszögről van szó, ezért $d-c = a-b$, emiatt $AH_1 = AH_2$, azaz $H_1 \equiv H_2 \equiv H$. 1 pont

Az AHF$\sphericalangle = 90^\circ$, valamint $AHE\sphericalangle = 90^\circ$, ezért F, H, E egy egyenesen vannak, és AH az $AEF\triangle$ magassága. 1 pont

Használjuk ki, hogy AF felezi a $DAC\sphericalangle$-et, valamint AE felezi a $CAB\sphericalangle$-et, ezért az A-nál levő szög két α-ból és két β-ból áll. 1 pont

$AEH\triangle$-ből $AEH\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, a középponti és kerületi szögek tétele alapján

$$AKF\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta.$$

Mivel $AKF\triangle$ egyenlő szárú, ezért $KAF\sphericalangle = \beta$. 2 pont

Ebből $DAK\sphericalangle = \alpha + \beta$, tehát AK felezi a négyszög A-nál levő szögét, és ezen a félegyenesen van a beírt kör középpontja is. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x-6\sqrt{x-2}+7} \cdot \sqrt{-x+6\sqrt{6-x}+15}$ függvény értékkészletét! **7 pont**

2. Határozzuk meg az

$$xy+yz+zx = xyz+2$$

egyenlet megoldásait a pozitív egész számok halmazán! **7 pont**

3. Két kör kívülről érinti egymást. A két kör közös külső érintőinek metszéspontja M. Az M pontból induló félegyenes mindkét kört metszi. A metszéspontok – az M pont felől indulva a félegyenesen – sorban A, B, C és D. Mekkora a körök sugara, ha $MA = 3$, $AB = 2$ és $BC = 1$? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x-6\sqrt{x-2}+7} \cdot \sqrt{-x+6\sqrt{6-x}+15}$ függvény értékkészletét! **7 pont**

Megoldás. Mivel

$$x-6\sqrt{x-2}+7 = \left(\sqrt{x-2}-3\right)^2$$ 1 pont

és

$$-x+6\sqrt{6-x}+15 = \left(\sqrt{6-x}+3\right)^2,$$ 1 pont

ezért $\sqrt{x-6\sqrt{x-2}+7} = \left|\sqrt{x-2}-3\right|$ és $\sqrt{-x+6\sqrt{6-x}+15} = \left|\sqrt{6-x}+3\right|$. 1 pont

Az értelmezési tartomány: $2 \le x \le 6$, ezért $\sqrt{x-2}-3 < 0$ és $\sqrt{6-x}+3 > 0$, vagyis

$$f(x) = \left|\sqrt{x-2}-3\right| \cdot \left|\sqrt{6-x}+3\right| = (-\sqrt{x-2}+3)(\sqrt{6-x}+3).$$ 1 pont

A szorzat mindkét tényezője pozitív, és mindkét tényező csökkenő a $[2;6]$ intervallumon, 1 pont

ezért a maximum: $f(2) = 15$, a minimum: $f(6) = 3$. 1 pont

Mivel a függvények folytonosak, az értékkészlet: $[3;15]$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Határozzuk meg az

$$xy+yz+zx = xyz+2$$

egyenlet megoldásait a pozitív egész számok halmazán! **7 pont**

Megoldás. Mivel az egyenlet a benne szereplő változókra szimmetrikus, ezért először keressük meg azokat a megoldásokat, melyeknél $x \le y \le z$.

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva az $xyz > 0$ kifejezéssel:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 + \frac{2}{xyz}$$

Ezt felhasználva:

$$1 < 1 + \frac{2}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$$ 2 pont

Ebből $x = 1$ vagy $x = 2$ adódik. 1 pont

$x = 1$ esetén az eredeti egyenletbe helyettesítve $y + z = 2$, amiből a feltételek alapján $y = z = 1$ adódik. 1 pont

$x = 2$ esetén

$$\begin{aligned} 2y + 2z &= yz + 2 \\ 2 &= (y-2)(z-2) \end{aligned}$$

ahonnan $2 \leq y \leq z$ figyelembevételével

$$\begin{aligned} y - 2 &= 1 \qquad \text{és} \qquad & z - 2 &= 2 \\ y &= 3 & z &= 4 \end{aligned}$$

adódik. 2 pont

Ez alapján az egyenlet összes megoldása

$$M = \{(1;1;1);\ (2;3;4);\ (2;4;3);\ (3;2;4);\ (3;4;2);\ (4;2;3);\ (4;3;2)\}.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Két kör kívülről érinti egymást. A két kör közös külső érintőinek metszéspontja M. Az M pontból induló félegyenes mindkét kört metszi. A metszéspontok – az M pont felől indulva a félegyenesen – sorban A, B, C és D. Mekkora a körök sugara, ha $MA = 3$, $AB = 2$ és $BC = 1$? **7 pont**

Megoldás. A kisebb kör sugara legyen r, a nagyobb köré R.

A két kör középpontosan hasonló, a hasonlóság centruma az M pont, aránya $MC : MA = 6 : 3 = 2$. 2 pont

Ezért $R = 2r$, és $CD = 2AB = 4$. 1 pont

Legyen az AB húr felezőpontja E, a CD húré F, a kis kör középpontja K, a nagy köré L.

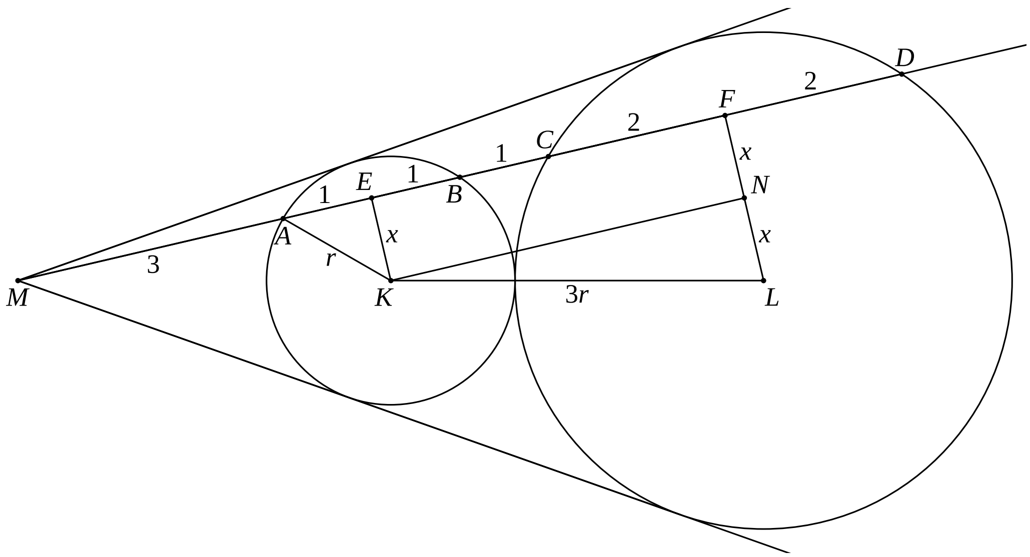
Ekkor EK és FL merőleges az M-ből induló MA félegyenesre. Húzzunk a K-n keresztül párhuzamost a félegyenessel, ez az FL szakaszt N-ben metszi. A $KNFE$ négyszög téglalap, ezért $FN = KE = x$.

Továbbá az FL szakasz az EK szakasz képe a kétszeres nagyításnál, ezért $FL = 2x$, így $NL = x$. 1 pont

Az AEK derékszögű háromszögből $x^2 + 1 = r^2$, 1 pont

a KNL háromszögből $(3r)^2 = x^2 + 4^2$. 1 pont

Innen $r = \sqrt{\dfrac{15}{8}} = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$ és $R = 2\sqrt{\dfrac{15}{8}} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$. 1 pont



Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Ha a tanuló nem gyökteleníti a nevezőt, azért ne veszítsen pontot.

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

1. Egy iskolában a tanulók 10 fős csapatokat szerveztek. Egy diák több csapatnak is tagja lehet, vagy akár egyiknek sem. A csapatok száma 500. Bizonyítsuk be, hogy a diákokat el lehet helyezni két terembe úgy, hogy minden csapatnak mindkét teremben legyen tagja. **7 pont**

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T. Az átfogón kijelöljük a P és a Q pontokat úgy, hogy $AP = AC$ és $BQ = BC$ legyen. Az AC befogón az M, az BC befogón az N pontot úgy jelöljük ki, hogy $CM = CT = CN$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy a $QPNCM$ ötszög területének és az ABC háromszög területének aránya $2r : R$, ahol r az ABC háromszög beírt körének a sugara, R pedig a köré írt körének a sugara. **7 pont**

3. Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy iskolában a tanulók 10 fős csapatokat szerveztek. Egy diák több csapatnak is tagja lehet, vagy akár egyiknek sem. A csapatok száma 500. Bizonyítsuk be, hogy a diákokat el lehet helyezni két terembe úgy, hogy minden csapatnak mindkét teremben legyen tagja. **7 pont**

Megoldás. A tanulók száma legyen n, akkor az n diák a két teremben 2^n-féleképpen helyezkedhet el. 1 pont

Tegyük fel, hogy nincs ilyen elhelyezés. 1 pont

Ez azt jelentené, hogy minden elrendezés esetén van legalább 1 csapat, amelynek a tagjai ugyanabba a terembe kerülnek. 1 pont

Mivel a legalább az egyik csapatot alkotó 10 diák már bent van az egyik teremben, akkor a többiek 2^{n-10}-féle módon rendeződhetnek. 1 pont

Viszont az egy terembe szorult csapat 2 teremből választhat, így számukra a lehetőségek száma

$$2 \cdot 2^{n-10} = 2^{n-9}.$$ 1 pont

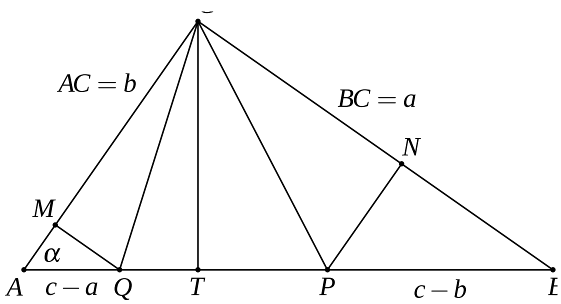
Mivel bármelyik csapattal előfordulhat, hogy egy terembe kerülnek, az összes lehetőség a tanulók elhelyezkedésére legfeljebb $500 \cdot 2^{n-9}$. 1 pont

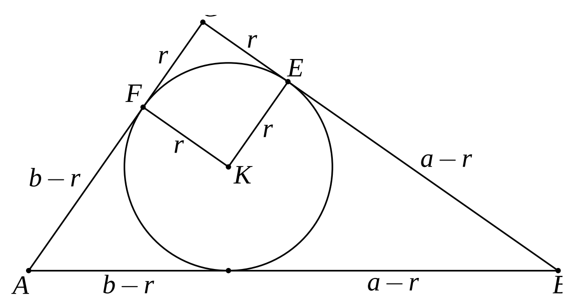
Ez viszont kevesebb, mint $512 \cdot 2^{n-9} = 2^n$, az összes elhelyezkedési lehetőség, ellentmondásra jutottunk, azaz a kiindulási feltétel volt rossz. (Tehát tuduni olyan elrendezést készíteni, melyben minden csapatnak mindkét teremben van tagja.) 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T. Az átfogón kijelöljük a P és a Q pontokat úgy, hogy $AP = AC$ és $BQ = BC$ legyen. Az AC befogón az M, az BC befogón az N pontot úgy jelöljük ki, hogy $CM = CT = CN$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy a $QPNCM$ ötszög területének és az ABC háromszög területének aránya $2r : R$, ahol r az ABC háromszög beírt körének a sugara, R pedig a köré írt körének a sugara. **7 pont**

1. megoldás. Az A csúcsnál lévő szög legyen α. Az APC háromszög egyenlő szárú, ezért $ACP\sphericalangle = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$.





$ACT\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, ezért $TCP\sphericalangle = ACP\sphericalangle - ACT\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

Az A-nál lévő α szög és a $TCB\sphericalangle$ szög merőleges szárú szögek, ezért $TCB\sphericalangle = \alpha$, így $PCB\sphericalangle = TCB\sphericalangle - TCP\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

Tehát $TCP\sphericalangle = PCB\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$, azaz a PC szakasz felezi a $TCB\sphericalangle$ szöget. 2 pont

Ezért a T pont CP egyenesre vonatkozó tükörképe a CB befogóra esik, és mivel $CN = CT$, ezért T tükörképe éppen az N pont, így a TPC háromszög CP-re vonatkozó tükörképe az NPC háromszög, ezért $T_{NPC} = T_{TPC}$. 1 pont

Hasonlóan belátható, hogy $TCQ\sphericalangle = QCA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, ahol β az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge, és így a TCQ háromszög CQ egyenesére vonatkozó tükörképe az MCQ háromszög, ezért $T_{MCQ} = T_{TCQ}$.

Tehát a $QPNCM$ ötszög területe megegyezik a PQC háromszög területének a kétszeresével. 1 pont

Így azt kell belátni, hogy $2T_{PQC} : T_{ABC} = 2r : R$, azaz $T_{PQC} : T_{ABC} = r : R$.

A PQC háromszögnek és az ABC háromszögnek a CT szakasz közös magassága, ezért a két háromszög területének aránya egyenlő a PQ szakasz és az $AB = 2R$ szakasz arányával. 1 pont

Legyen $AB = c$, $CA = b$ és $CB = a$. Ekkor $AQ = AB - BQ = c - a$, $BP = AB - AP = c - b$, így

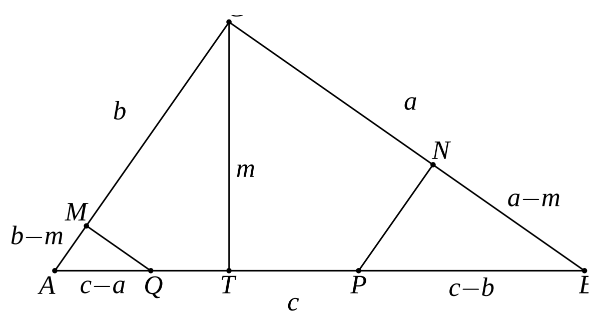
$$PQ = c - (c - a) - (c - b) = a + b - c,$$ 1 pont

ami éppen az ABC háromszögbe írt kör átmérője (ez a jobb oldali ábrán látszik, nyilván $b - r + a - r = c$)

Tehát $T_{PQC} : T_{ABC} = 2r : 2R = r : R$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.



A háromszög oldalait a szokott módon a, b, c-vel, a magasságot m-mel jelölve:

$$AM = b - m \quad \text{és} \quad AQ = c - a.$$ 1 pont

A derékszögű háromszög területképletéből:

$$2T = c \cdot m = a \cdot b \Longrightarrow m = \frac{ab}{c}.$$

Valamint ismert, hogy a beírt kör, illetve a köré írt kör sugara:

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad \text{és} \quad R = \frac{c}{2}.$$ 1 pont

Ekkor

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{b - m}{c - a} = \frac{b - \frac{ab}{c}}{c - a} = \frac{\frac{b \cdot (c - a)}{c}}{c - a} = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}$$

és az A csúcsnál lévő szög az AQM és az ABC háromszögek közös szöge, tehát $AQM\triangle \sim ABC\triangle$, hiszen a két oldal aránya és a közbezárt szög megegyezik. A hasonlóság aránya: $\lambda_1 = \frac{c - a}{c}$. 1 pont

Hasonló módon a $PBN\triangle \sim ABC\triangle$ és a hasonlóság aránya $\lambda_2 = \frac{c - b}{c}$. 1 pont

A *QPNCM* ötszög területét a háromszög területével kifejezve:

$$T_{QPNCM} = T - \lambda_1^2 \cdot T - \lambda_2^2 \cdot T = \left(1 - \frac{(c-a)^2}{c^2} - \frac{(c-b)^2}{c^2}\right) \cdot T$$ 1 pont

A területek aránya tehát (felhasználva a Pitagorasz-tételt):

$$1 - \frac{(c-a)^2}{c^2} - \frac{(c-b)^2}{c^2} = \frac{c^2 - c^2 - a^2 + 2ac - c^2 - b^2 + 2bc}{c^2} = \frac{2ac + 2bc - 2c^2}{c^2}$$ 1 pont

Az ismert képleteket felhasználva:

$$\frac{2ac + 2bc - 2c^2}{c^2} = \frac{2a + 2b - 2c}{c} = \frac{a+b-c}{\frac{c}{2}} = \frac{2r}{R}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám. **7 pont**

Megoldás.

Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$, ahol p prímszám. Ekkor

$$\begin{aligned} p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= (a^2 + 2ad + d^2) + (b^2 + c^2 - 2ad) = \\ &= (a+d)^2 + b^2 + c^2 - 2(b^2 + bc + c^2) = (a+d)^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = \\ &= (a+d)^2 - (b+c)^2 = [(a+d) - (b+c)]\,[(a+d) + (b+c)] \end{aligned}$$ 2 pont

Mivel a p prímszám csak $1 \cdot p$ formában bontható szorzattá, és $a + d - b - c < a + d + b + c$, ezért $a + d - b - c = 1$ és $a + d + b + c = p$. 1 pont

A kapott két egyenlőségből az elsőt vizsgálva:

$$\begin{gathered} a + d = b + c + 1 \\ a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + c^2 + 1 + 2bc + 2b + 2c \\ a^2 + 2b^2 + 2bc + 2c^2 + d^2 = b^2 + c^2 + 1 + 2bc + 2b + 2c \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2b - 2c = 1 \\ a^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + d^2 = 3 \end{gathered}$$ 2 pont

A pozitív egész számok halmazán a kapott egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha $a = d = 1$ és $\{b-1; c-1\} = \{0; 1\}$. Ebben az esetben viszont az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség nem teljesül.

Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

1. Felírtunk a táblára 2^n darab pozitív egész számot tetszőleges sorrendben egymás után. Ezen számok összes prímosztója n prím közül kerül ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható ezen számok egy nem üres részhalmaza, amelynek elemei a felírt sorban egymást utániak, és a részhalmaz elemeinek szorzata négyzetszám! **7 pont**

2. Az x, y, z pozitív valós számok szorzata 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$K(x,y,z)=\frac{x}{y+z+3}+\frac{y}{x+z+3}+\frac{z}{x+y+3}\geq\frac{3}{5}$$ **7 pont**

3. Az ABC háromszög belsejében található D pontra $CAD\sphericalangle=DCA\sphericalangle=30^\circ$ és $ABD\sphericalangle=60^\circ$. Legyen E a BC oldal felezőpontja, F pedig a CA oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. Igazoljuk, hogy $DE\perp EF$. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Felírtunk a táblára 2^n darab pozitív egész számot tetszőleges sorrendben egymás után. Ezen számok összes prímosztója n prím közül kerül ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható ezen számok egy nem üres részhalmaza, amelynek elemei a felírt sorban egymást utániak, és a részhalmaz elemeinek szorzata négyzetszám! **7 pont**

Megoldás. Legyenek ezek a számok $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ($k=2^n$), a szereplő prímek $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Jelöljük c_l-lel az első l darab d_i szorzatát, azaz $c_l=d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_l$. 1 pont

Mindegyik c_l-t írjunk fel prímhatványok szorzataként kanonikus alakban. Mindegyik c_l-hez tartozik egy n hosszú sorozat. Ebben a sorozatban az i-edik helyre nullát írunk, ha c_l-ben p_i páros hatványon szerepel és 1-et írunk, ha páratlanon. 2 pont

Így 2^n darab 0-1 sorozatot kapunk, pontosan annyit, ahányféle lehetséges. 1 pont

Ha ezek között van csupa 0 sorozat, akkor készen vagyunk, mert valamelyik c_l-ben minden prím páros hatványon szerepel, ezért ez négyzetszám. 1 pont

Ha nincs ilyen, akkor a skatulyaelv miatt van két egyforma sorozat. Ha a nagyobb indexhez tartozót elosztjuk a kisebb indexhez tartozóval, akkor az egyszerűsítés után olyan számot kapunk, amely egymást követő számok szorzata és minden prím páros hatványon szerepel benne, tehát négyzetszám. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az x, y, z pozitív valós számok szorzata 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$K(x,y,z)=\frac{x}{y+z+3}+\frac{y}{x+z+3}+\frac{z}{x+y+3}\geq\frac{3}{5}$$ **7 pont**

Megoldás.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz},\qquad\text{ezért}\qquad x+y+z\geq 3.$$ 1 pont

A nevezőbeli 3-at ezzel helyettesítve a törtek nem nőnek, ezért foglalkozzunk

$$K(x,y,z)\geq L(x,y,z)=\frac{x}{y+z+x+y+z}+\frac{y}{x+z+x+y+z}+\frac{z}{x+y+x+y+z}\text{-vel.}$$ 1 pont

A nevezőket a-val, b-vel, c-vel jelöljük.

$$x+2y+2z=a;\qquad 2x+y+2z=b;\qquad 2x+2y+z=c.$$ 1 pont

Megoldjuk az egyenletrendszert x-re, y-ra, z-re, ekkor azt kapjuk, hogy

$$x=-\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{2}{5}c;\qquad y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{5}b+\frac{2}{5}c;\qquad z=\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}b-\frac{3}{5}c.$$ 2 pont

Ezekkel az új ismeretlenekkel a következőhöz jutunk:

$$\begin{aligned}L(x,y,z)&=\frac{-\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{2}{5}c}{a}+\frac{\frac{2}{5}a-\frac{3}{5}b+\frac{2}{5}c}{b}+\frac{\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}b-\frac{3}{5}c}{c}=\\&=-\frac{9}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right).\end{aligned}$$

Mivel egy pozitív szám és reciproka összege legalább 2, ezért ez nagyobb vagy egyenlő, mint

$$K(x,y,z)\geq L(x,y,z)=-\frac{9}{5}+\frac{2}{5}\cdot 6=\frac{3}{5}.$$ 2 pont

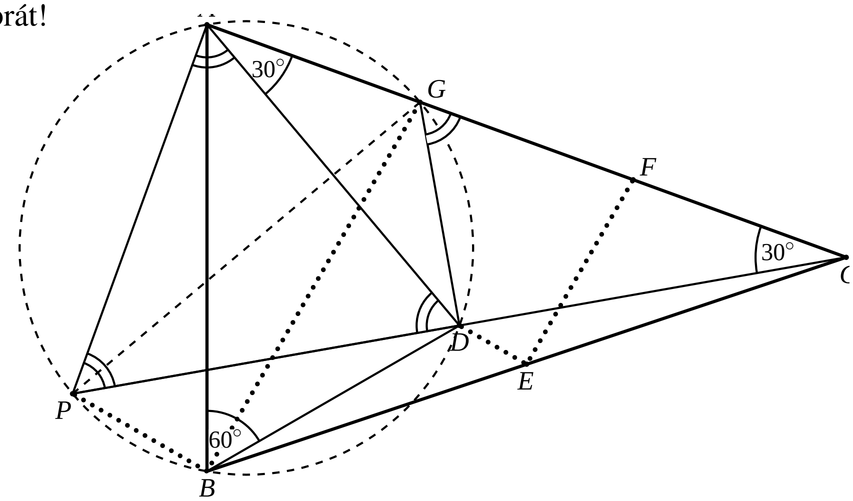
Az egyenlőség $x=y=z$ esetén áll fenn.

Összesen: **7 pont**

3. Az ABC háromszög belsejében található D pontra $CAD\sphericalangle=DCA\sphericalangle=30^\circ$ és $ABD\sphericalangle=60^\circ$. Legyen E a BC oldal felezőpontja, F pedig a CA oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. Igazoljuk, hogy $DE\perp EF$. **7 pont**

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



A feladat feltételei szerint az ADC háromszög két szöge egyenlő, tehát egyenlő szárú (szárszögei 30°-osak, a D-nél lévő csúcsszöge 120°).

Legyen a C pont D-re vonatkozó középpontos tükörképe P. 2 pont

Ekkor $PD = CD = AD$ és $PDA\sphericalangle = 60^\circ$, mert az $ADC\sphericalangle$ külső szöge. Ezért az APD háromszög szabályos. Ebből következik, hogy a PAC háromszög félszabályos, a harmadik szöge ($PAC\sphericalangle$) derékszög. 1 pont

Mivel az AD szakaszra írt APD és ABD szög is 60°, azaz ugyanakkora húrhoz tartozó szögek és egyenlőek, az $APBD$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

Messe a köré írt kör az AC oldalt G-ben!

Láttuk, hogy $PAC\sphericalangle$ derékszög, ezért PG a kör átmérője. Emiatt $PDG\sphericalangle$ és így $CDG\sphericalangle$ is derékszög. A CDG (félszabályos) háromszögben tehát $2DG = GC$.

$PDA\sphericalangle = 60^\circ$, $PDG\sphericalangle = 90^\circ$ (mert PG átmérő), ezért $ADG\sphericalangle = 30^\circ$, tehát PG az ADG háromszög (sőt, $AP = DP$ miatt az $APDG$ húrnégyszög) szimmetriatengelye. 1 pont

Azaz $AG = DG$, így $2AG = 2DG = GC$, azaz G harmadolja az AC oldalt, más szóval G az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja. 1 pont

Mivel F a C-hez közelebbi harmadolópont, ezért a C középpontú 2-szeres nagyítás F-et G-be, D-t P-be, E-t B-ve viszi, vagyis az FED háromszöget a GBP háromszögbe, amelyben az $FED\sphericalangle$-nek megfelelő $GBP\sphericalangle$ derékszög, így az $FED\sphericalangle$ is az.

Tehát DE valóban merőleges EF-re. 1 pont

Összesen: 7 pont