Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév

Kezdők és Haladók
I., II. és III. kategória

Feladatok és megoldások

A verseny az NTP-TV-15-0048 azonosító számú pályázat alapján a Nemzeti Tehetség Program, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, valamint az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy trapézról tudjuk, hogy az egyik belső szöge derékszög és két külső szögének aránya 4 : 5. Mekkora lehet a trapéz legkisebb belső szöge? **6 pont**

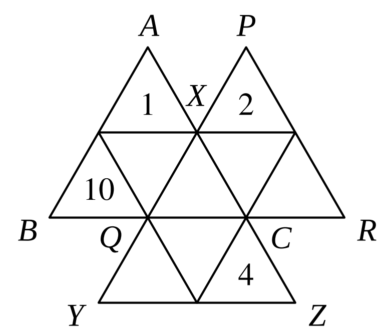
2. Egy medencét három csapon keresztül lehet feltölteni. Az 1. és a 2. csap 6 óra alatt, a 2. és 3. csap 4 óra alatt, az 1. és 3. csap 3 óra alatt tölti fel a medencét. Mennyi idő alatt töltik fel a medencét az egyes csapok külön-külön? **6 pont**

3. Egy diáknak öt egymást követő tanítási napon matematika, angol, biológia és fizika tantárgyakból kell dolgozatot írnia ebben a sorrendben úgy, hogy egy napon legfeljebb két dolgozatot írhat. Hányféleképpen oszthatják el a diák dolgozatait az öt napon? (A dolgozatok egy-egy napon belüli konkrét időpontjai nem számítanak.) **6 pont**

4. Az ábrán az ABC, PQR és XYZ háromszögek láthatók, amelyek mindegyike 4 kisebb háromszögre van felosztva. A 10 kicsi háromszögbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat kell elhelyezni (mindegyiket egyszer felhasználva) úgy, hogy az ABC, PQR és XYZ háromszögekbe kerülő számok összege egyenlő legyen. Az 1, 2, 4, 10 számok elhelyezése előre adott.

Hány különböző módon tölthető ki az ábra?

Adjuk meg a megfelelő eseteket!



6 pont

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy trapézról tudjuk, hogy az egyik belső szöge derékszög és két külső szögének aránya 4 : 5. Mekkora lehet a trapéz legkisebb belső szöge? **6 pont**

Megoldás. Ha a trapéz egyik szöge derékszög, akkor a trapéz szára mentén mellette lévő szög is derékszög (mivel a trapéz alapjai párhuzamosak). (A trapéz összes belső szöge nem lehet derékszög.)

Három eset van, attól függően, hogy melyik két belső szöghöz tartozó külső szögek aránya 4 : 5.

1. eset: egy derékszög és egy nem derékszög melletti külső szögek aránya 4 : 5. 1 pont

A(z egyik) derékszög melletti külső szög 90°, tehát a másik külső szög $(90^\circ : 4) \cdot 5 = 112{,}5^\circ$. Az ehhez tartozó belső szög 67,5°.

Mivel a trapéz egy szárán lévő belső szögek összege 180°, ezért a trapéz negyedik szöge 112,5°. (A trapéz szögei: 90°; 90°; 112,5° és 67,5°), tehát a legkisebb szög ekkor 67,5°. 1 pont

2. eset: egy derékszög és egy nem derékszög melletti külső szögek aránya 5 : 4. 1 pont

A(z egyik) derékszög melletti külső szög 90°, tehát a másik külső szög $(90° : 5) \cdot 4 = 72°$. Az ehhez tartozó belső szög 108°.

Mivel a trapéz egy szárán lévő belső szögek összege 180°, ezért a trapéz negyedik szöge 72°. (A trapéz szögei: 90°; 90°; 108° és 72°), tehát a legkisebb szög ekkor 72°. 1 pont

3. eset: a két nem derékszög melletti külső szögek aránya 5 : 4 1 pont

(A trapéz két nem derékszög belső szögének összege 180°, ezért) a két nem derékszög melletti külső szög összege is 180°.

A 180°-ot kell felosztani 4 : 5 arányban: $(180 : 9) \cdot 4 = 80°$, illetve $(180 : 9) \cdot 5 = 100°$. (A trapéz szögei 90°, 90°, 100° és 80°), tehát a legkisebb szög ekkor 80°. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Egy medencét három csapon keresztül lehet feltölteni. Az 1. és a 2. csap 6 óra alatt, a 2. és 3. csap 4 óra alatt, az 1. és 3. csap 3 óra alatt tölti fel a medencét. Mennyi idő alatt töltik fel a medencét az egyes csapok külön-külön? **6 pont**

1. megoldás. Jelölje a, b, c azt, hogy az 1., 2., 3. csap a medence hányad részét tölti fel egy óra alatt.

Az adatok szerint $a + b = \frac{1}{6}$, $b + c = \frac{1}{4}$ és $c + a = \frac{1}{3}$. 1 pont

Ebből következik, hogy $a + b + c = \frac{3}{8}$, ahonnan $c = \frac{5}{24}$. 2 pont

Innen pedig $a = \frac{1}{8}$ és $b = \frac{1}{24}$. 1 pont

Tehát az első csap 8, a második csap 24, a harmadik $\frac{24}{5}$ óra alatt (4 óra 48 perc) tölti fel a medencét. 2 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés: Az a, b, c-re kapható lineáris egyenletrendszer felírására 1, bármilyen megoldására 3 pont adható. Bármilyen ezzel egyenértékű megoldás 4 pontot ér.

2. megoldás. Jelölje a, b, c azt, hogy mennyi idő alatt tölti fel az 1., a 2., illetve a 3. csap a medencét.

Az első csap tehát egy óra alatt a medence $\frac{1}{a}$ részét, a második az $\frac{1}{b}$ részét, a harmadik az $\frac{1}{c}$ részét tölti fel. 1 pont

Az első két csapból 6 óra alatt megtelik a medence, tehát $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$ vagy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$, hasonlóan a második és harmadik csapra $\frac{4}{b} + \frac{4}{c} = 1$ vagy $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$, valamint a harmadik és az első csapra $\frac{3}{c} + \frac{3}{a} = 1$ vagy $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$. 1 pont

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$$ 1 pont

Az első és harmadik egyenlet összegéből kivonva a másodikat $\frac{2}{a}=\frac{1}{4}$, azaz $a = 8$ óra adódik. 1 pont

Hasonlóan $\frac{2}{b}=\frac{1}{12}$, azaz $b = 24$ óra, illetve $\frac{2}{c}=\frac{5}{12}$, azaz $c=\frac{24}{5}$ óra (4 óra 48 perc). 1 pont

Tehát az első csap 8, a második csap 24, a harmadik $\frac{24}{5}$ óra alatt (4 óra 48 perc) tölti fel a medencét. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Egy diáknak öt egymást követő tanítási napon matematika, angol, biológia és fizika tantárgyakból kell dolgozatot írnia ebben a sorrendben úgy, hogy egy napon legfeljebb két dolgozatot írhat. Hányféleképpen oszthatják el a diák dolgozatait az öt napon? (A dolgozatok egy-egy napon belüli konkrét időpontjai nem számítanak.) **6 pont**

Megoldás. Három eset lehetséges: 1. mindegyik dolgozat külön napon van; 2. két (egymás után következő) dolgozat egy napon, a másik két dolgozat külön napokon van; 3. két-két dolgozat egy-egy napon van. 1 pont

Az 1. esetben az 5 napból választjuk ki azt a 4-et, amelyiken dolgozat van, vagy ezzel egyenértékűen azt az egyet, amelyiken nincs dolgozat: ez 5-féleképpen lehetséges. 1 pont

A 2. esetben 3 napot választunk ki a dolgozatok számára, vagy ezzel egyenértékűen 2 napot, amelyeken nincs dolgozat: ez $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$-féleképpen lehetséges. Ezután a 4 dolgozatból 3-féleképpen rakhatunk két egymás utánit egy napra, ami végül összesen $3 \cdot 10 = 30$ lehetőséget jelent. 2 pont

A 3. esetben az 5 napból kiválasztunk 2 napot, ami 10 lehetőség. 1 pont

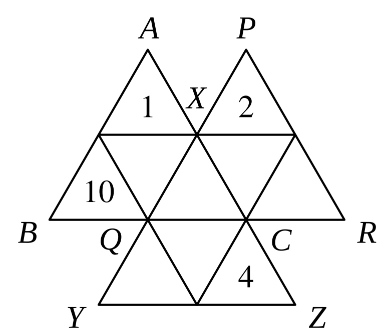
Összesen tehát $5+30+10 = 45$ lehetőség van a dolgozatok elosztására az adott feltételek mellett. 1 pont

Összesen: **6 pont**

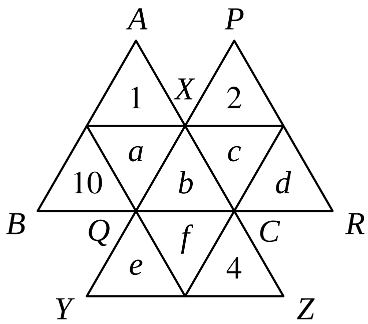
4. Az ábrán az ABC, PQR és XYZ háromszögek láthatók, amelyek mindegyike 4 kisebb háromszögre van felosztva. A 10 kicsi háromszögbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat kell elhelyezni (mindegyiket egyszer felhasználva) úgy, hogy az ABC, PQR és XYZ háromszögekbe kerülő számok összege egyenlő legyen. Az 1, 2, 4, 10 számok elhelyezése előre adott.

Hány különböző módon tölthető ki az ábra?

Adjuk meg a megfelelő eseteket! **6 pont**



Megoldás. Jelöljük az üres mezőkbe kerülő számokat az ábra szerint.



Ekkor a betűvel jelölt mezőkbe a 3, 5, 6, 7, 8 és 9 számok fognak kerülni.

Összegezve az ABC, PQR, XYZ háromszögekbe kerülő számokat, a b háromszor, a többi pedig egyszer szerepel az összeadásban.

Így a háromszögbe kerülő számok összege

$$(1 + 2 + \ldots + 8 + 9 + 10) + 2b = 55 + 2b$$ 1 pont

Mivel mindhárom háromszögben a számok összege ugyanannyi, ezért $3 \mid 55 + 2b$.

Figyelembe véve b lehetséges értékeit, ez a feltétel csak a $b = 7$ esetben teljesül. 1 pont

Ekkor az egyes háromszögekbe kerülő számok összege $\dfrac{55 + 2 \cdot 7}{3} = 23$.

Ezt és a $b = 7$ feltételt figyelembe véve az ABC, PQR, XYZ háromszögekre felírható egyenletek:

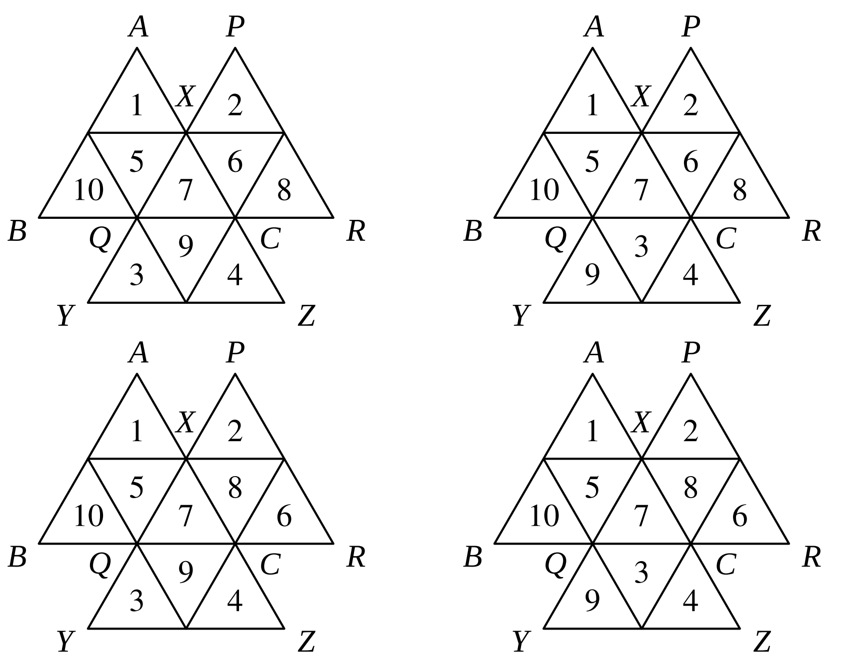
$$1 + 10 + 7 + a = 23$$
$$2 + 7 + c + d = 23$$
$$4 + 7 + e + f = 23$$

Ebből $a = 5$, $c + d = 14$ és $e + f = 12$ következik.

Mivel $\{c, d, e, f\} = \{3, 6, 8, 9\}$, ezért $\{c, d\} = \{6, 8\}$ és $\{e, f\} = \{3, 9\}$. 2 pont

Mivel a c, d, illetve e, f számpárok kiválasztása egymástól függetlenül 2–2-féleképpen történhet, ezért a megfelelő kitöltések száma $2 \cdot 2 = 4$.

Ezeket az alábbi ábrák mutatják:



2 pont

Megjegyzés: Ha a tanuló indoklás nélkül adja meg a helyes ábrákat, akkor csak 2 pontot kaphat.

Kezdők I–II. kategória 2. és III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy matematika-szakkörön 8 diák vett részt. 4 padba ültek le úgy, hogy senki sem ismerte a padtársát. Az első padban András és Bea ültek. Tudjuk, hogy Andrást kivéve a többi 7 diáknak mind különböző számú ismerőse van a jelenlévő diákok között. Ki ismer több diákot a szakkörről, András vagy Bea? (Az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük: ha X ismeri Y-t, akkor Y is ismeri X-et.) **6 pont**

2. Balázs felírt egy lapra egy olyan háromjegyű számot, amelynek számjegyei között nem szerepelt a 0. Ezután leírta alá azokat a háromjegyű számokat, amiket úgy kapott, hogy az eredeti szám számjegyeinek sorrendjét megváltoztatta. Miután az összes lehetséges számot felírta, a lapon szereplő számokat összeadta. Így 1776-ot kapott eredményül. Mennyi lehet a lapra elsőként felírt szám számjegyeinek összege? **8 pont**

3. Az ABC háromszögben $AC = \sqrt{3}$ egység, $BC = 1$ egység, továbbá a C-ből induló magasság talppontja az AB oldal B-hez közelebbi negyedelőpontjával egyezik meg. Mekkorák az ABC háromszög szögei? **8 pont**

4. Adott a síkon véges sok egyenes és véges sok pont a következő feltételekkel: minden egyenesre legfeljebb 4 pont illeszkedik, és minden ponton áthalad legalább 2 egyenes. Bizonyítsuk be, hogy a pontok száma legfeljebb az egyenesek számának kétszerese! Mutassunk egy-egy olyan példát, ahol egyenlőség áll fenn, és az egyenesek száma

a) páros

b) páratlan! **8 pont**

5. Melyik két szomszédos egész szám közé esik a következő kifejezés értéke:

$$\frac{32}{31} - \frac{34}{33} + \frac{36}{35} - \frac{38}{37} + \ldots - \ldots + \frac{2016}{2015} - \frac{2018}{2017}$$ **10 pont**

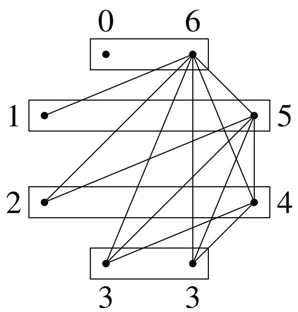
Megoldások és javítási útmutató

1. Egy matematika-szakkörön 8 diák vett részt. 4 padba ültek le úgy, hogy senki sem ismerte a padtársát. Az első padban András és Bea ültek. Tudjuk, hogy Andrást kivéve a többi 7 diáknak mind különböző számú ismerőse van a jelenlévő diákok között. Ki ismer több diákot a szakkörről, András vagy Bea? (Az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük: ha X ismeri Y-t, akkor Y is ismeri X-et.) **6 pont**

Megoldás. Mivel senki nem ismeri a padtársát, ezért mindenki legfeljebb 6 diákot ismerhet, vagyis az ismerősök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehet, ami 7 lehetőség 7 emberre, vagyis mindegyik szám pontosan egyszer fordul elő. 1 pont

A 6 ismerőssel rendelkező diák a padtársán kívül mindenkit ismer, tehát csak mellette ülhet a 0 ismerőssel rendelkező diák. (Ebből az is következik, hogy Andrásnak nem lehet 0 vagy 6 ismerőse.) 1 pont

Vizsgáljuk a maradék 3 padnál lévő 6 diák egymás közti ismeretségeit. A teljes létszámot tekintve köztük van 1, 2, 3, 4, 5 ismerőssel rendelkező diák, de ha ebbe nem számoljuk bele a 6 ismerőssel rendelkező diákkal való kapcsolatot, akkor marad 0, 1, 2, 3, illetve 4 ismerős egymás közt. Megint elmondható, hogy a (maradék 3 pad 6 diákját tekintve) 4 ismerőssel rendelkező diák mindenkit ismer a padtársán kívül, tehát mellette kell, hogy üljön a (maradék 3 padot tekintve) 0 ismerőssel rendelkező diák. Vagyis a teljes létszámot tekintve 5, illetve 1 ismerőssel rendelkező diákok padtársak. (Ebből az is következik, hogy Andrásnak nem lehet 1 vagy 5 ismerőse.) 1 pont



Ez a gondolat folytatható a maradék 2 pad 4 diákjára is. Itt ülnek a teljes társaságot tekintve 2, 3, illetve 4 ismerőssel rendelkező diákok, akik egymás között 0, 1, 2 másikat ismernek (mert az előző 2 padból az 5-öst, illetve 6-ost ismeri mindenki). Az előzőekhez hasonlóan a 2-es mellett a 0-s kell, hogy üljön. Vagyis a teljes társaságban a 2, illetve 4 ismerőssel rendelkező diákok egymás mellett ülnek. (Ebből az is következik, hogy Andrásnak nem lehet 2 vagy 4 ismerőse.) 1 pont

A fenti gondolatmenetből az is kiderül, hogy a megmaradt, 3 ismerőssel rendelkező diák padtársa (András) kit ismer és kit nem: a 6, 5, illetve 4 ismerőssel rendelkezőket igen, a 0,1,2, illetve 3 ismerőssel rendelkezőket nem, tehát neki szintén 3 ismerőse van. 1 pont

Tehát Andrásnak és Beának egyaránt 3-3 ismerőse van. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Balázs felírt egy lapra egy olyan háromjegyű számot, amelynek számjegyei között nem szerepelt a 0. Ezután leírta alá azokat a háromjegyű számokat, amiket úgy kapott, hogy az eredeti szám számjegyeinek sorrendjét megváltoztatta. Miután az összes lehetséges számot felírta, a lapon szereplő számokat összeadta. Így 1776-ot kapott eredményül. Mennyi lehet a lapra elsőként felírt szám számjegyeinek összege? **8 pont**

Megoldás. *1. eset:* Balázs egy olyan számot írt fel, amelynek három különböző számjegye van. Jelölje a számot $\overline{abc}$. Ennek a számjegyei $3! = 6$-féle sorrendbe írhatók, így Balázs összesen 6 számot írt fel a lapra. 1 pont

Ezek összege: $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222 \cdot (a + b + c) = 1776$. 1 pont

Ekkor a számjegyek összege: $a + b + c = 8$. 1 pont

2. eset: Balázs egy olyan számot írt fel, amelynek két különböző számjegye van. Legyen a szám $\overline{aab}$. Ennek a számjegyei 3-féle sorrendbe írhatók, így Balázs összesen 3 számot írt fel a lapra. 1 pont

Ezek összege: $\overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = 111 \cdot (2a + b) = 1776$. 1 pont

Ekkor a számjegyek összege: $2a + b = 16$. 1 pont

Mindkét eset meg is megvalósulhat: például, ha Balázs a 125, illetve az 556 számot írta fel. 1 pont

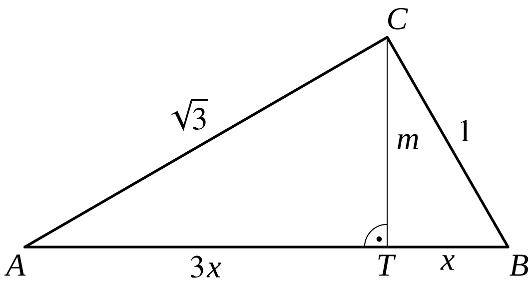
Tehát az eredeti szám számjegyeinek összege 8 vagy 16. 1 pont

Megjegyzés. Ha a megoldásban csak az egyik eset szerepel, legfeljebb 5 pont adható. (3 pont az eset vizsgálatáért, 1 pont annak igazolásáért, hogy valóban létezik adott tulajdonságú szám, 1 pont a válaszért.)

Összesen: **8 pont**

3. Az ABC háromszögben $AC = \sqrt{3}$ egység, $BC = 1$ egység, továbbá a C-ből induló magasság talppontja az AB oldal B-hez közelebbi negyedelőpontjával egyezik meg. Mekkorák az ABC háromszög szögei? **8 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát: jelölje T a szóban forgó magasság talppontját, m a magasság hosszát, és legyen $x = TB$! 1 pont



Ekkor a CTB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $m^2 + x^2 = 1$. 1 pont

Mivel $AB = 4TB$, ezért $AT = 3x$, így az ATC derékszögű háromszögben ugyancsak a Pitagorasz-tétel alapján $m^2 + (3x)^2 = 3$. 1 pont

A két egyenletet egymásból kivonva $8x^2 = 2$, ahonnan $x = \frac{1}{2}$, és így $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2 pont

Ekkor a CTB háromszög éppen egy fél szabályos háromszög, ezért a B-nél lévő szöge 60°-os. 1 pont

Másrészt $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ miatt ATC is egy fél szabályos háromszög, ezért az A-nál lévő szöge 30°-os. 1 pont

Az ABC háromszög szögei tehát 30°, 60° és 90°. 1 pont

Összesen: **8 pont**

4. Adott a síkon véges sok egyenes és véges sok pont a következő feltételekkel: minden egyenesre legfeljebb 4 pont illeszkedik, és minden ponton áthalad legalább 2 egyenes. Bizonyítsuk be, hogy a pontok száma legfeljebb az egyenesek számának kétszerese! Mutassunk egy-egy olyan példát, ahol egyenlőség áll fenn, és az egyenesek száma

a) páros

b) páratlan! **8 pont**

Megoldás. Jelölje a pontok számát k és az egyenesek számát n.

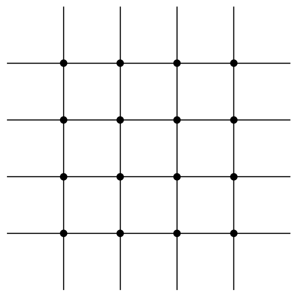
Legyen I az olyan (p, e) pont-egyenes párok halmaza, hogy $p \in e$. Vizsgáljuk meg, hogy mennyi lehet az I-beli párok darabszáma. 1 pont

Mivel minden egyenesre legfeljebb 4 pont illeszkedik, ezért $|I| \leqslant 4n$. 1 pont

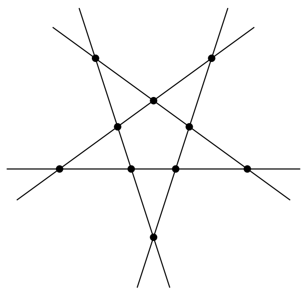
Mivel minden ponton áthalad legalább 2 egyenes, ezért $|I| \geqslant 2k$. 1 pont

A kettőt összevetve, $2k \leqslant 4n$, tehát $k \leqslant 2n$, az állítást igazoltuk. 1 pont

Lehetséges példák az egyenlőség esetére:



a) 8 egyenes, 16 pont, minden egyenesre pontosan 4 pont illeszkedik, minden ponton pontosan 2 egyenes halad át. 2 pont



b) 5 egyenes, 10 pont, minden egyenesre pontosan 4 pont illeszkedik, minden ponton pontosan 2 egyenes halad át. 2 pont

Megjegyzés. Minden olyan példa megfelel, ahol az egyenesek száma a feltételnek megfelelően páros/páratlan, minden egyenesre pontosan 4 pont illeszkedik és minden ponton pontosan két egyenes halad át.

Összesen: **8 pont**

Más lehetőség a feladat első részének indoklására:

Jelölje az egyenesek számát n. Minden pont egyenesre illeszkedik. 1 pont

Mivel egy egyenesre legfeljebb 4 pont illeszkedik, így legfeljebb $4n$ pont van adva, de mivel minden ponton legalább két egyenes megy át, azaz minden pontot legalább kétszer számoltunk, a felvett pontok száma valóban legfeljebb $2n$. 3 pont

5. Melyik két szomszédos egész szám közé esik a következő kifejezés értéke:

$$\frac{32}{31} - \frac{34}{33} + \frac{36}{35} - \frac{38}{37} + \ldots - \ldots + \frac{2016}{2015} - \frac{2018}{2017}$$

10 pont

Megoldás.

$$\begin{aligned} K &= \frac{32}{31} - \frac{34}{33} + \frac{36}{35} - \frac{38}{37} + \ldots - \ldots + \frac{2016}{2015} - \frac{2018}{2017} = \\ &= 1\frac{1}{31} - 1\frac{1}{33} + 1\frac{1}{35} - 1\frac{1}{37} + \ldots - \ldots + 1\frac{1}{2015} - 1\frac{1}{2017} = \\ &= \frac{1}{31} - \frac{1}{33} + \frac{1}{35} - \frac{1}{37} + \ldots - \ldots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2017} = \\ &= \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{33}\right) + \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{37}\right) + \ldots - \ldots + \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2017}\right) = \end{aligned}$$

2 pont

$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2} = \frac{a+2-a}{a(a+2)} = \frac{2}{a(a+2)}$ alapján

$$= \frac{2}{31 \cdot 33} + \frac{2}{35 \cdot 37} + \ldots + \frac{2}{2015 \cdot 2017}. \qquad (1)$$ 2 pont

A másodiktól kezdve minden tag nagyobb, mint az első, ezért ezek felülről becsülhetők az elsővel, $\frac{2}{1023}$-dal. 3 pont

Az összegben szereplő tagok száma kevesebb, mint 1023 fele, hiszen a nevezőkben szereplő első tényezők 4-esével növekednek, ezért az összegnek kevesebb, mint $2015 : 4 < 504$ tagja van. (A tagok száma egészen pontosan $(2015 - 31) : 4 + 1 = 497$.) 1 pont

Mivel tehát a tagok száma kevesebb, mint 1023 fele, így K kisebb 1-nél, 1 pont
valamint K (1) alatti alakjából nyilvánvaló, hogy K pozitív, ezért a kifejezés értéke 0 és 1 közé esik. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ paralelogrammában a D csúcsból merőlegest állítunk a C csúcsot az AB oldal E felezőpontjával összekötő szakaszra. A merőleges talppontja G, amely belső pontja a CE szakasznak. Mekkora az AG szakasz hossza, ha $AB = 10$ cm és $AD = 6$ cm? **10 pont**

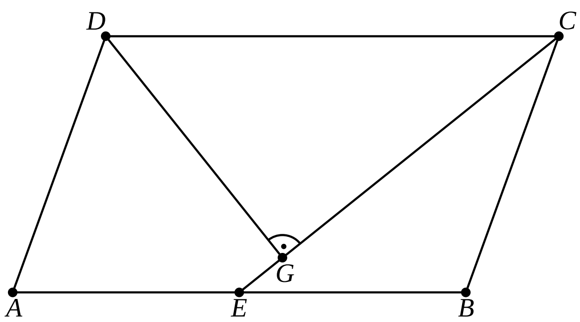
2. Elhelyeztünk 111 érmét egy $n \times n$-es négyzetrács ($n \geqslant 2$) mezőibe úgy, hogy az élszomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőkbe tett érmék számának különbsége 1, és minden mezőre került érme. Határozzuk meg n lehetséges értékeit! **10 pont**

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre a $2^8 + 5 \cdot 2^6 + 2^n$ kifejezés értéke négyzetszám? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ paralelogrammában a D csúcsból merőlegest állítunk a C csúcsot az AB oldal E felezőpontjával összekötő szakaszra. A merőleges talppontja G, amely belső pontja a CE szakasznak. Mekkora az AG szakasz hossza, ha $AB = 10$ cm és $AD = 6$ cm? **10 pont**

1. megoldás. Készítsünk ábrát. 1 pont



Jelölje F a CD oldal felezőpontját. A G-nél lévő derékszög miatt G rajta van a CD átmérőjű Thalész-körön, így $CF = FD = FG$. 2 pont

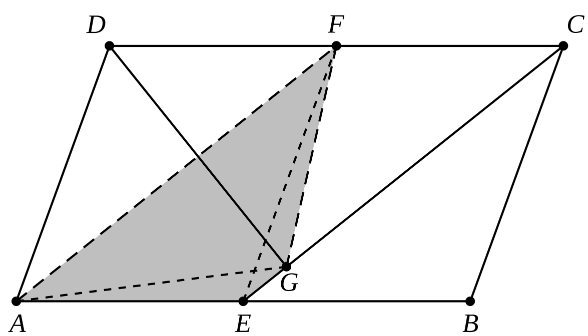
Mivel AE és CF egymással párhuzamos és egyenlő hosszúságú szakaszok, ezért az $AECF$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Emiatt AF és EG egymással párhuzamosak, tehát az $AEGF$ négyszög trapéz. 2 pont

Sőt, az $AEGF$ trapéz szimmetrikus (más szóval húrtrapéz), mert $AE = FG$ miatt a szárai egyenlő hosszúak, és nem paralelogramma, hiszen G belső pontja CE-nek. 2 pont

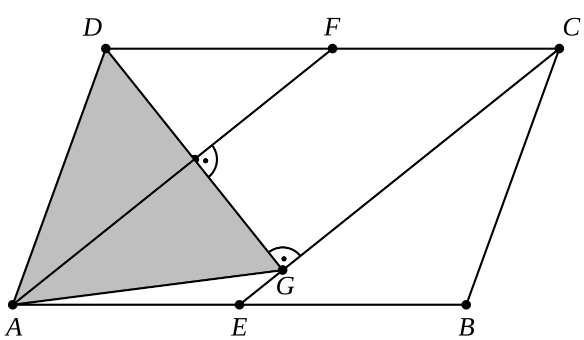
Az $AEGF$ trapéz szimmetriájából adódóan az átlói egyenlő hosszúak, ezért $AG = EF = AD$. 1 pont

Tehát az AG szakasz 6 cm hosszú. 1 pont



Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Készítsünk ábrát. (Lásd az 1. megoldás első ábráját.) 1 pont



Jelölje F a CD oldal felezőpontját. Mivel AE és CF egymással párhuzamos és egyenlő hosszúságú szakaszok, ezért az $AECF$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Emiatt AF és EG egymással párhuzamosak. 1 pont

Ebből következően az AF egyenes merőleges a GD szakaszra, másrészt az AF egyenes a GCD háromszögben a középvonal egyenese. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy az AGD háromszögben az AF magasságvonal felezi a GD oldalt, vagyis oldalfelező merőleges egyben. 2 pont

Ez csak úgy lehetséges, hogy az AGD háromszög egyenlő szárú, vagyis $AG = AD$. 2 pont

Tehát az AG szakasz 6 cm hosszú. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Elhelyeztünk 111 érmét egy $n \times n$-es négyzetrács ($n \geqslant 2$) mezőibe úgy, hogy az élszomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőkbe tett érmék számának különbsége 1, és minden mezőre került érme. Határozzuk meg n lehetséges értékeit! **10 pont**

Megoldás. Színezzük sakktáblaszerűen fehérre és feketére a négyzetrács mezőit!
Ha egy fehér mezőn páros az érmék száma, akkor a mellette lévő fekete mezőkön páratlan számú érme van, amelyek mellett a fehéreken ismét páros számú stb. Azaz a sakktáblán az összes fehér mezőn páros, az összes feketén páratlan számú érme van. (Vagy fordítva.) 1 pont

$n = 2$ és más páros n esetén nem létezik jó elrendezés, mivel páros n esetén n^2 fele is páros, azaz páros számú olyan mező van, amelyen páratlan számú érme van, tehát az érmék összegének is párosnak kellene lennie. 2 pont

Páratlan n esetén a sarokmezőkön és a velük egyező színű mezőkön van páratlan számú, így ezeken kell páratlan számú érmének lennie, hogy páratlan legyen az érmék számának összege.

$n = 3$, 5 és 7 esetén létezik jó elrendezés.

Példák: A példákban a sarokmezők és a velük egyező színű mezők lesznek a fekete mezők.

$n = 3$ – A 4 fehér mezőre tegyünk 12-12 érmét, 4 feketére 13-13-at, egyre pedig 11-et.

$n = 5$ – A 12 fehér mezőre tegyünk 4-4 érmét, 12 feketére 5-5-öt, egyre pedig 3-at.

$n = 7$ – A 24 fehér mezőre tegyünk 2-2 érmét, 19 feketére 3-3-at, 6-ra pedig 1-1-et. 4 pont*

Mivel $n \geq 9$ esetén legalább $41 + 2 \cdot 40 = 121$ érmét kell elhelyezni, ezért csak $n \leq 7$ lehetséges. 2 pont

Tehát n lehetséges értékei: $n = 3, 5, 7$. 1 pont

* A 4 pont bontása: Egy helyes konstrukcióért 2 pont, minden továbbiért 1-1 pont adható.

Összesen: **10 pont**

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre a $2^8+5\cdot 2^6+2^n$ kifejezés értéke négyzetszám? **10 pont**

Megoldás. Olyan $(x; n)$ számpárt keresünk $(x, n \in \mathbb{Z}^+)$ (*), amelyre a $2^8 + 5 \cdot 2^6 + 2^n = x^2$ egyenlőség fennáll. 1 pont

Az első két tag összege négyzetszám: $2^8 + 5 \cdot 2^6 = 256 + 5 \cdot 64 = 576 = 24^2$.

Erre az alábbi átalakítás után is juthatunk: $2^8 + 5 \cdot 2^6 = 2^6 \cdot (2^2 + 5) = 2^6 \cdot 9 = (2^3 \cdot 3)^2$. 2 pont

A kapott egyenletet rendezzük: $2^n = x^2 - 24^2$ (tehát $x > 24$), 1 pont

majd alakítsuk szorzattá a jobb oldalon kapott kifejezést $2^n = (x - 24) \cdot (x + 24)$. 1 pont

A bal oldalon egy kettőhatvány áll, a jobb oldalon két pozitív egész szám szorzata. Így a jobb oldalon szereplő két tényezőnek is kettőhatványnak (megengedve a $2^0 = 1$ tényezőt is) kell lennie. 1 pont

A jobb oldalon álló két tényező különbsége 48. Két pozitív kettőhatvány különbsége pontosan akkor 48, ha ezek a 64 és a 16. 1 pont

Tehát $x - 24 = 16 = 2^4$ és $x + 24 = 64 = 2^6$, azaz $x = 40$, és $2^n = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$, azaz $n = 10$. 1 pont

Válasz: a feladat egyetlen megoldása: $n = 10$. 1 pont

Ellenőrzés: $n = 10$-re tehát valóban négyzetszámot kapunk: $2^8 + 5 \cdot 2^6 + 2^{10} = 1600 = 40^2$. 1 pont

(*) az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy x pozitív egész.

Összesen: **10 pont**

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyenek x, y olyan valós számok, amelyekre $xy = 3$ és $x \neq y$. Határozzuk meg azt a legnagyobb c valós számot, amelyre minden megfelelő x, y érték esetén fennáll – de nála nagyobbakra már nem –, hogy

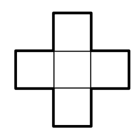
$$\frac{\left[(x+y)^2 - 10\right]\left[(x-y)^2 + 8\right]}{(x-y)^2} \geqslant c.$$

Ezen maximális c érték mellett adjuk meg az egyenlőséget biztosító $(x; y)$ számpárokat. **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CDA\sphericalangle = 135^\circ$, $BDA\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 2DAB\sphericalangle = 4DBC\sphericalangle$ és $BC = \sqrt{2}CD$. Igazoljuk, hogy $AB = AD + BC$. **10 pont**

3. Egy 7×7-es tábla 4 sarokmezőjét eltávolítjuk, és a megmaradt kis négyzetek közül néhányat befestünk feketére.

a) Elérhető-e 7 mező feketére színezésével az, hogy a táblán ne maradjon teljesen fehér, kereszt alakú pentominó? (A kereszt alakú pentominó öt egybevágó kis négyzetből áll, és az alakja az ábrán látható.)



b) Biztosítható-e ugyanez, ha csak 6 mezőt festünk be feketére?

c) Igazoljuk, hogy a tábla mezőibe elhelyezhetünk egész számokat úgy, hogy bármely kereszt alakú pentominóban a számok összege negatív, míg az egész táblán szereplő számok összege pozitív. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyenek x, y olyan valós számok, amelyekre $xy = 3$ és $x \neq y$. Határozzuk meg azt a legnagyobb c valós számot, amelyre minden megfelelő x, y érték esetén fennáll – de nála nagyobbakra már nem –, hogy

$$\frac{\left[(x+y)^2 - 10\right]\left[(x-y)^2 + 8\right]}{(x-y)^2} \geqslant c.$$

Ezen maximális c érték mellett adjuk meg az egyenlőséget biztosító $(x; y)$ számpárokat. **10 pont**

Megoldás.

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = (x-y)^2 + 12$$ 1 pont

A helyettesítést végrehajtva és bevezetve a $(x-y)^2 = z > 0$ jelölést

$$\frac{\left[(x+y)^2-10\right]\left[(x-y)^2+8\right]}{(x-y)^2} = \frac{(z+2)\,(z+8)}{z} = \frac{z^2+10z+16}{z} = z+10+\frac{16}{z} = 10+4\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)$$ 3 pont

Mivel egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, ezért $10 + 4 \cdot \left(\frac{4}{z} + \frac{z}{4}\right) \geqslant 18$, tehát c értéke legalább 18. 2 pont

Az egyenlőség feltétele $\frac{z}{4} = \frac{4}{z}$, amiből a $z > 0$ feltétel alapján $z = 0$ adódik. 1 pont

$z = 4$ esetén $(x - y)^2 = 4$ és $(x + y)^2 = 16$, amiből $x - y$ értéke ± 2, $x + y$ értéke pedig ± 4 lehet. 1 pont

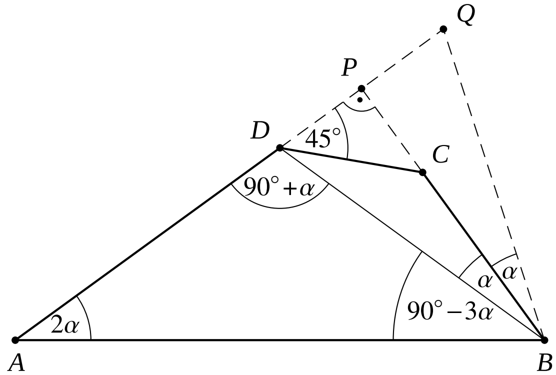
Az összes lehetséges párosítást figyelembe véve az egyenletrendszerek megoldásaként a $c = 18$-as értékhez az alábbi $(x; y)$ számpárok tartozhatnak: $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $(1; 3)$, $(-1; -3)$. 2 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $CDA\sphericalangle = 135^\circ$, $BDA\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 2DAB\sphericalangle = 4DBC\sphericalangle$ és $BC = \sqrt{2}CD$. Igazoljuk, hogy $AB = AD + BC$. **10 pont**

Megoldás. Vezessük be a $DBC\sphericalangle = \alpha$ jelölést.

Ekkor a feladat feltételei alapján $DAB\sphericalangle = 2\alpha$, $BDA\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 4\alpha$. 1 pont



Másrészt az ABD háromszögből $BDA\sphericalangle + ABD\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$.

Az utóbbi két egyenlőség alapján $BDA\sphericalangle = 90^\circ + \alpha$, $ABD\sphericalangle = 90^\circ - 3\alpha$ 2 pont

és $DAB\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 90^\circ$. 1 pont

Legyen P az AD és BC oldalegyenesek metszéspontja. Ekkor az ABP háromszög P csúcsnál levő szöge 90°-os, 1 pont

és a PDC egyenlő szárú derékszögű háromszög, amiből

$$PD = \frac{\sqrt{2}}{2}CD = \frac{BC}{2}.$$ 1 pont

Legyen Q a D pont P-re vonatkozó tükörképe. Ekkor $DQ = 2PD = BC$. 1 pont

Mivel a PBD és PBQ háromszögek tükrösek a PB egyenesre nézve, ezért

$$CBQ\sphericalangle = CBD\sphericalangle = \alpha, \quad ABQ\sphericalangle = 90^\circ - 3\alpha + \alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

és az ABQ háromszögben $AQB\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha$.

Tehát az ABQ háromszög egyenlő szárú, 2 pont

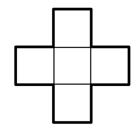
és $AB = AQ = AD + DQ = AD + BC$. 1 pont

Ezzel az állítást igazoltuk.

Összesen: **10 pont**

3. Egy 7×7-es tábla 4 sarokmezőjét eltávolítjuk, és a megmaradt kis négyzetek közül néhányat befestünk feketére.

a) Elérhető-e 7 mező feketére színezésével az, hogy a táblán ne maradjon teljesen fehér, kereszt alakú pentominó? (A kereszt alakú pentominó öt egybevágó kis négyzetből áll, és az alakja az ábrán látható.)

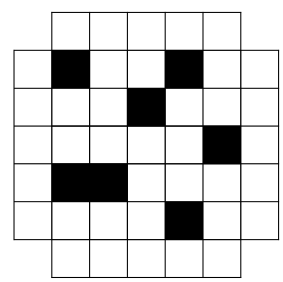


b) Biztosítható-e ugyanez, ha csak 6 mezőt festünk be feketére?

c) Igazoljuk, hogy a tábla mezőibe elhelyezhetünk egész számokat úgy, hogy bármely kereszt alakú pentominóban a számok összege negatív, míg az egész táblán szereplő számok összege pozitív. **10 pont**

Megoldás. *a)* Jelölje az i-edik sor, j-edik oszlop kis négyzetét $(i; j)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 7, i, j \in \mathbb{N}^+)$.

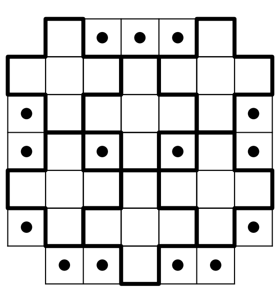
7 fekete mezővel teljesíthető a feladat feltétele. Például egy lehetőség a $(2; 5)$, $(3; 2)$, $(3; 3)$, $(4; 6)$, $(5; 4)$, $(6; 2)$, $(6; 5)$ mezők feketére festése (1. ábra). 2 pont



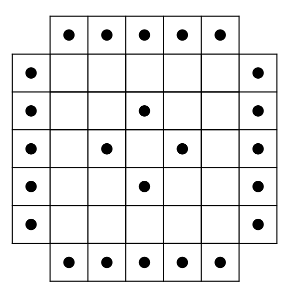
1. ábra

b) Ezután tegyük fel, hogy 6 kis négyzet kiszínezésével teljesíthetők a feladat feltételei.

A 2. ábra szerint a tábla $(2; 2)$, $(2; 6)$, $(3; 4)$, $(5; 2)$, $(5; 6)$, $(6; 4)$ centrumú keresztjei páronként diszjunktak, ezért ha nem akarjuk, hogy ezek közül bármelyik is fehér maradjon, akkor minden keresztben pontosan egy mezőt feketére kell színezni, és a ponttal jelzett részeknek fehéren kell maradniuk.
A 2. ábrát az óramutató járásának megfelelően 90°, 180°, 270°-kal elforgatva, és a festés szempontjából kitiltott mezőket megjelölve és összesítve a 3. ábrát kapjuk.



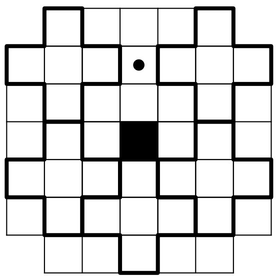
2. ábra.



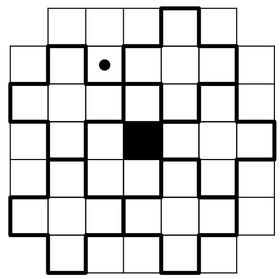
3. ábra.

Ekkor a készült rajz alapján látható, hogy a $(4; 4)$ mezőt kötelező befestenünk feketére, mert különben a $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(4; 4)$, $(4; 5)$, $(5; 4)$ mezők fehér keresztet alkotnának. 2 pont

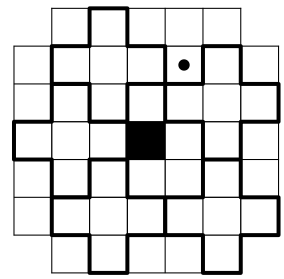
A 4–6. ábrák szerint kialakítva a kereszteket, a 6 fekete négyzet kialakítása és a középső négyzet kötelező befestése mellett mind az 5 diszjunkt keresztbe pontosan egy fekete négyzetnek kell kerülnie. Így a $(2; 4)$, $(2; 3)$ és $(2; 5)$ mezőknek fehérnek kell maradnia.



4. ábra.



5. ábra.



6. ábra.

Viszont ekkor az $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(2; 4)$, $(2; 5)$, $(3; 4)$ mezőkből álló kereszt fehér maradna, ami ellentmondás.

Tehát a tábla megfelelő színezéséhez nem elegendő 6 fekete négyzet. 3 pont

c) Írjunk az *a)* esetnél felsorolt 7 fekete mező mindegyikébe (-5)-öt, a többi kis négyzetbe pedig 1-et. Ekkor minden keresztbe 1 vagy 2 fekete mező jut, így a számok összege $-5 + 4 = -1$ vagy $2 \cdot (-5) + 3 = -7$ lesz.

A táblán levő összes szám pedig összeadva $7 \cdot (-5) + 38 = 3$-at ad eredményül. Tehát a feladat feltétele teljesül. 3 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az összes olyan b (1-nél nagyobb) természetes számot, amelyre teljesül, hogy minden nem egész, véges tizedes tört alakban felírható pozitív valós szám b alapú számrendszerbeli „b-edes tört” alakja végtelen szakaszos. **10 pont**

2. Mely $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényekre igaz, hogy tetszőleges x, y egész számokra

$$f(x + f(y)) = f(x) + y?$$

10 pont

3. Tekintsük a síkon az $ABCD$ négyszöget, és egy olyan P pontot, amely nincs rajta $ABCD$ semelyik oldal- vagy átlóegyenesén! Az $ABCD$ négyszöget a P pontra tükrözve az $A_1B_1C_1D_1$ négyszöget kapjuk. Tudjuk, hogy az A_1, B, C, D pontok, az A, B_1, C, D pontok, illetve az A, B, C_1, D pontok egy-egy körön helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C, D_1 pontok is egy körre illeszkednek! **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az összes olyan b (1-nél nagyobb) természetes számot, amelyre teljesül, hogy minden nem egész, véges tizedes tört alakban felírható pozitív valós szám b alapú számrendszerbeli „b-edes tört” alakja végtelen szakaszos. **10 pont**

1.. megoldás. Minden véges tizedes tört felírható közönséges tört alakban. Legyen egy tetszőleges véges tizedes tört közönséges tört alakja $\frac{p}{q}$, ahol $q \neq 1$, $(p, q) = 1$. 1 pont

Mivel a szám tizedes tört alakja véges, van valamilyen $k \in N$, amelyre $10^k \cdot \frac{p}{q} \in N$. 1 pont

Tekintettel arra, hogy $(p, q) = 1$, ez csak úgy lehet, ha $q \mid 10^k$. 1 pont

Eszerint q prímtényezős felbontásában 2-es és 5-ös prímtényezőn kívül más nem szerepelhet. 1 pont

Ha $\frac{p}{q}$-t átírjuk „b-edes tört” alakba, akkor (mivel nyilván ott sem lehet egész) vagy véges, vagy végtelen szakaszos törtet kaphatunk. 1 pont

Véges abban az esetben lehetne, ha valamilyen n-re $b^n \cdot \frac{p}{q}$ egész szám lenne, azaz $q \mid b^n$ lenne.

Mivel azonban a szám „b-edes tört” alakja nem véges, így $q \nmid b^n$ (bárhogyan is választjuk meg az n-et). 2 pont

Akkor tudjuk garantálni, hogy b semelyik hatványa sem többszöröse semelyik lehetséges q-nak, ha b prímtényezős felbontásában nem szerepel sem a 2, sem az 5 prímtényező, vagyis $(b, 10) = 1$. 2 pont

Minden más b megfelel, mert bárhogyan választjuk is meg q-t, a prímtényezős felírásában csak 2 és 5 szerepelhet, így ha ezek a prímtényezők nem szerepelnek a b felírásában, akkor b nem lehet többszöröse semelyik q-nak, vagyis a szám b-edes tört alakja csak végtelen szakaszos lehet. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Egy racionális szám n alapú számrendszerben vagy véges, vagy végtelen szakaszos n-edes tört. 2 pont

Akkor és csak akkor véges a $\frac{p}{q}$ tört (ahol $(p, q) = 1$, $q \neq 1$) n-edes alakja, ha q prímtényezői n prímtényezői közül kerülnek ki. 2 pont

A feladat feltételei alapján minden véges tizedes tört végtelen b-edes, és minden véges b-edes tört végtelen tizedes. 4 pont

Ez azt jelenti, hogy a feladatnak azok és csak azok a $b > 1$ természetes számok tesznek eleget, amelyekre $(10, b) = 1$. 2 pont

Összesen: **10 pont**

2. Mely $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényekre igaz, hogy tetszőleges x, y egész számokra

$$f(x + f(y)) = f(x) + y?$$

10 pont

Megoldás. Bevezetünk egy jelölést az eredeti egyenletre:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad (*)$$

Tetszőleges $x, y, y' \in \mathbb{Z}$-re ha $f(y) = f(y')$, akkor $(*)$ szerint

$$f(x) + y = f(x + f(y)) = f(x + f(y')) = f(x) + y', \quad \text{így } y = y',$$

tehát f injektív. 1 pont

Ekkor $(*)$-ba $x = y = 0$-t írva

$$f(f(0)) = f(0),$$

vagyis mivel f injektív, $f(0) = 0$. 1 pont

Ezután $(*)$-ba $x = 0$-t írva

$$f(f(y)) = y \qquad (1)$$

(azaz f involutív). 1 pont

Most $(*)$-ban x helyére $f(x)$-et írva, és (1)-et kétszer használva

$$f(f(x) + f(y)) = f(f(x)) + y = x + y = f(f(x + y)),$$

így az injektivitás miatt

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \qquad (2)$$

(azaz f additív). 2 pont

Bebizonyítjuk, hogy a (2) egyenlet megoldásai az $f(x) = f(1) \cdot x$ alakú lineáris függvények (azaz $f(1)$ meghatározza a függvényt). Ez teljes indukcióval világos a nemnegatív egészekre: $f(x) = f(1) \cdot x$ nyilván fennáll $x = 0$-ra és $x = 1$-re, valamint (2) az $y = 1$ helyettesítéssel

$$f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(1) \cdot x + f(1) \cdot 1 = f(1) \cdot (x + 1);$$

majd negatív számokra is megkapjuk, ha (2)-ben az $y = -x$ helyettesítéssel élünk:

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0,$$

tehát ha $f(x) = f(1) \cdot x$, akkor $f(-x) = f(1) \cdot (-x)$. 2 pont

Ekkor (1) szerint minden $x \in \mathbb{Z}$-re

$$x = f(f(x)) = f(1)^2 \cdot x,$$

azaz $f(1) = \pm 1$. 1 pont

Az $f(x) = \pm x$ függvények jók is, hiszen $(*)$ $f(x) = x$ esetén az

$$x + y = x + y,$$

míg $f(x) = -x$ esetén az

$$y - x = y - x$$

alakot ölti. 2 pont

Összesen: **10 pont**

3. Tekintsük a síkon az $ABCD$ négyszöget, és egy olyan P pontot, amely nincs rajta $ABCD$ semelyik oldal- vagy átlóegyenesén! Az $ABCD$ négyszöget a P pontra tükrözve az $A_1B_1C_1D_1$ négyszöget kapjuk. Tudjuk, hogy az A_1, B, C, D pontok, az A, B_1, C, D pontok, illetve az A, B, C_1, D pontok egy-egy körön helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C, D_1 pontok is egy körre illeszkednek! **10 pont**

Megoldás. A megoldás során végig irányított szögekkel számolunk, mod 180°:

$$BAC\sphericalangle = BAC_1\sphericalangle - CAB_1\sphericalangle - B_1AC_1\sphericalangle \qquad \text{1 pont}$$

A P-re vonatkozó szimmetria miatt $B_1AC_1\sphericalangle = BA_1C\sphericalangle$, tehát

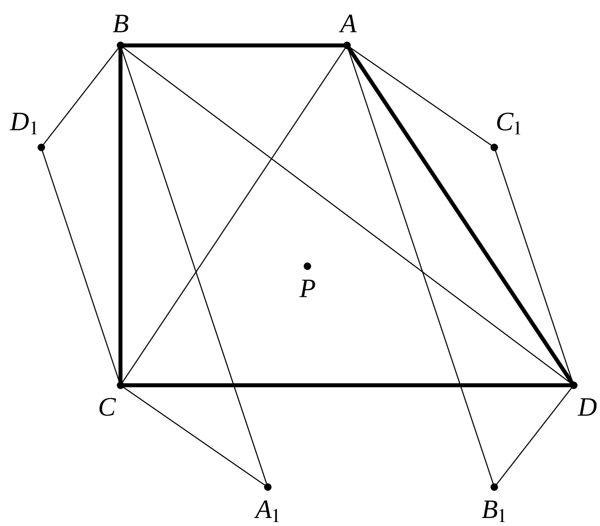
$$BAC\sphericalangle = BAC_1\sphericalangle - CAB_1\sphericalangle - BA_1C\sphericalangle. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel $-CAB_1\sphericalangle = B_1AC$ és $BAC_1\sphericalangle = -C_1AB\sphericalangle$, ezért

$$\begin{aligned}
BAC\sphericalangle &= B_1AC\sphericalangle - C_1AB\sphericalangle - BA_1C\sphericalangle = && && \text{1 pont}\\
&= B_1AC\sphericalangle - C_1DB\sphericalangle - BA_1C\sphericalangle = && (ABC_1D \text{ húrnégyszög}) && \text{1 pont}\\
&= B_1AC\sphericalangle - C_1DB\sphericalangle - BDC\sphericalangle = && (A_1BCD \text{ húrnégyszög}) && \text{1 pont}\\
&= B_1DC\sphericalangle - C_1DB\sphericalangle - BDC\sphericalangle = && (AB_1CD \text{ húrnégyszög}) && \text{1 pont}\\
&= B_1DC_1\sphericalangle
\end{aligned}$$

A P-re vonatkozó szimmetria miatt $B_1DC_1\sphericalangle = BD_1C\sphericalangle$, tehát $BAC\sphericalangle = BD_1C\sphericalangle$, ami azt jelenti, hogy az A, B, C, D_1 pontok egy körre illeszkednek. 1 pont

Diszkusszió (hiánya): 3 pont



Összesen: **10 pont**

Pontozás: Különböző esetek diszkussziója: 4 pont. Ehelyett 3 pont jár akkor, ha a megoldásban nincs szükség az esetek szétválasztására, mint például irányított szögek vagy komplex számok használatánál.

A maradék 6, illetve 7 pont a megoldás minden lényeges lépésére egyenként vagy körülbelül egyenletesen jár!

Haladók I. kategória 1. forduló

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet, ha x és y pozitív egész számok:

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = \frac{1}{z!} \qquad (n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$$ **7 pont**

2. Attila kisöccse megkapta élete első zsebszámológépét. Rögtön elkezdte egymás után összeadni a pozitív egész számokat, és amikor a kijelző már 1000-et mutatott eredményként, büszkén megmutatta Attilának. „Egy számot kihagytál, Öcsi.” – mondta rövid gondolkodás után a báty. Melyik volt ez a szám, ha tudjuk, hogy az öcsi több hibát nem követett el? **7 pont**

3. Legyen az ABC egyenlő szárú, C-nél derékszögű háromszögben AD súlyvonal. A C-ből AD-re állított merőleges egyenes AB-t az E pontban metszi. Hogyan aránylik az EB szakasz a háromszög átfogójához? **7 pont**

4. A $H = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak hányféleképpen adhatjuk meg három olyan különböző háromelemű részhalmazát, amelyek uniója H? **7 pont**

5. Laja a lajhár hosszú – 1 órás – vándorútra indul az amazonasi fák tetején. Lajának kezdetben 100 „energiája” van, és minden perc során két lehetőség közül választhat:

- vagy egy percre megáll és megeszik egy papaya-gyümölcsöt, így 1-gyel növeli az energiáját,
- vagy az adott perc során teljes erőbedobással mászik; ekkor pontosan annyi cm-t tesz meg, amennyi az energiája, de a perc végére 1-gyel csökken az energiája.

Milyen messzire juthat Laja egy óra alatt, és mit kell ehhez tennie? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet, ha x és y pozitív egész számok:

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = \frac{1}{z!} \qquad (n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$$ **7 pont**

Mivel a szereplő törtek pozitívak, ezért $\frac{1}{x!} < \frac{1}{z!}$, valamint $\frac{1}{y!} < \frac{1}{z!}$. Ebből következik, hogy $x > z$ és $y > z$, tehát $x \geq 2$ és $y \geq 2$. 1 pont

Mivel $x! = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (z+1) \cdot z!$, ezért $x! \geq 2 \cdot z!$, ugyanígy $y! = y \cdot (y-1) \cdot \ldots \cdot (z+1) \cdot z!$, ezért $y! \geq 2 \cdot z!$. 2 pont

Ebből következik, hogy $\frac{1}{x!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z!}$, valamint $\frac{1}{y!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z!}$, ezeket összeadva $\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} \leq \frac{1}{z!}$. 2 pont

Az egyenlőség csak úgy valósulhat meg ha

$$x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (z+1) = 2$$

és

$$y \cdot (y-1) \cdot \ldots \cdot (z+1) = 2.$$

Ez csak úgy következhet be, ha a szereplő szorzatok egy tényezőből állnak, és $x = 2$, valamint $y = 2$, $z + 1 = 2$, azaz $z = 1$. 1 pont

Ez a számhármas valóban megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Attila kisöccse megkapta élete első zsebszámológépét. Rögtön elkezdte egymás után összeadni a pozitív egész számokat, és amikor a kijelző már 1000-et mutatott eredményként, büszkén megmutatta Attilának. „Egy számot kihagytál, Öcsi.” – mondta rövid gondolkodás után a báty. Melyik volt ez a szám, ha tudjuk, hogy az öcsi több hibát nem követett el? **7 pont**

Megoldás. Ha n-ig jól adta volna össze a számokat, az összeg $\frac{n(n+1)}{2}$ lett volna. 1 pont

A kihagyott szám legalább 1 és maximum n, így n-re az $1001 \le \frac{n(n+1)}{2} \le 1000 + n$ egyenlőtlenség-rendszernek kell teljesülnie. 1 pont

A bal oldali egyenlőtlenséget átalakítva $n^2 + n - 2002 \ge 0$-t kell megoldanunk. A megoldóképletben $\sqrt{8009}$-et kell megbecsülnünk, ez biztosan kevesebb, mint 90, számolással igazolni kell, hogy több, mint 89. 1 pont
(Ez a pont akkor is jár, ha a versenyző függvénytáblázat segítségével helyesen közelíti $\sqrt{8009}$ értékét.)

Így az egyenlőtlenség megoldása $n < -45$ vagy $n > 44$ 1 pont

A jobb oldali egyenlőtlenség átrendezve az $n^2 - n - 2000 \le 0$ egyenlőtlenséget adja. Ennek megoldása: $-44 \le n < 46$ 1 pont

(Megjegyzés: Itt nem kell a megoldóképletben szereplő gyök értékére adott becslésre pontot adni, a két azonos elvű megoldásra összesen 1 pont adható.)

Mivel n pozitív egész szám, így az egyenlőtlenség-rendszer egyetlen lehetséges megoldása $n = 45$. 1 pont

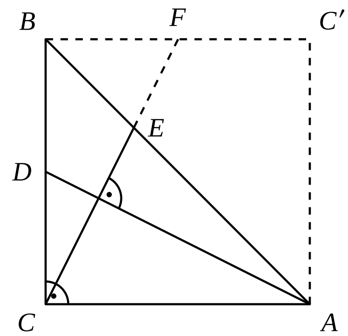
Az első 45 pozitív egész szám összege 1035, így a kihagyott szám a 35 volt. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Amennyiben a versenyző megállapítja, hogy $\frac{44 \cdot 45}{2}$ kevesebb, mint 1000, a $\frac{46 \cdot 47}{2}$ már túl sok, tehát 45 számot adott össze, de nem hivatkozik az $\frac{n \cdot (n+1)}{2} - n$ függvény monotonitására, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

3. Legyen az ABC egyenlő szárú, C-nél derékszögű háromszögben AD súlyvonal. A C-ből AD-re állított merőleges egyenes AB-t az E pontban metszi. Hogyan aránylik az EB szakasz a háromszög átfogójához? **7 pont**

1. megoldás. Tükrözzük a háromszöget az AB átfogóra, legyen C csúcs képe C'. A tükrözés tulajdonságai miatt $ACBC'$ négyszög négyzet. 1 pont



A CE egyenes BC'-vel való metszéspontja legyen F. Mivel $AD \perp CF$, $AC \perp CB$, $CD \perp BF$ és $AC = CB$, ezért az ACD és CBF háromszögek egybevágók (a négyzet középpontja körüli 90°-os forgatás viszi egyiket a másikba). 2 pont

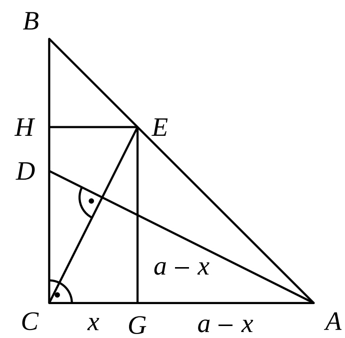
Vagyis $CD = BF$ miatt F felezőpontja BC'-nek. 1 pont

Mivel a CAE és FBE háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak (vagy mert szögeik páronként egyenlők, egy csúcsszögpár és két váltószögpár látható), e két háromszög hasonló, a hasonlóság aránya $CA : FB = 2 : 1$. 2 pont

Így az E pont az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja, azaz a keresett arány $1 : 3$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. A háromszög befogóinak hossza legyen a, és használjuk az ábra jelöléseit! Állítsunk merőlegest E-ből a háromszög befogóira. Legyen $CG = x$, ekkor $AG = a - x$. 1 pont



$GE = a-x$, hiszen AEG háromszög is egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. 1 pont

CGE háromszög hasonló ACD háromszöghöz, mert szögeik merőleges szárú nem tompaszögek, tehát egyenlők. 2 pont

A megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2},$$

ebből $3x = a$. 2 pont

Mivel $HE = x$ és EBH háromszög hasonló ABC háromszöghöz (mindkettő egyenlő szárú és derékszögű), a keresett arány $1 : 3$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

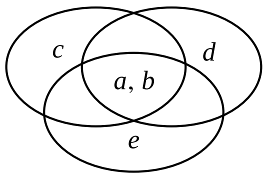
4. A $H = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak hányféleképpen adhatjuk meg három olyan különböző háromelemű részhalmazát, amelyek uniója H? **7 pont**

1. megoldás. Legyen x azoknak a betűknek a száma, amelyek csak egy részhalmaznak elemei, y azoknak a betűknek a száma, amelyek pontosan két részhalmaznak elemei, z azoknak a betűknek a száma, amelyek mindhárom részhalmaznak elemei.

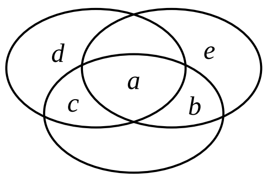
$$x + y + z = 5 \qquad \text{és} \qquad x + 2y + 3z = 9,$$ 1 pont

innen $y + 2z = 4$, azaz három lehetőség van:

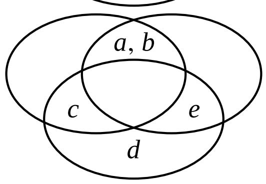
a) $z = 2$, $y = 0$ és $x = 3$ vagy *b)* $z = 1$, $y = 2$ és $x = 2$ vagy *c)* $z = 0$, $y = 4$ és $x = 1$. 2 pont



Az *a)* esetben a lehetőségek száma 10, ennyiféleképpen választható ki az a két elem, amelyik mindhárom halmazban benne van. 1 pont



A *b)* esetben a lehetőségek száma $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$, mert ötféleképpen választható ki a középre kerülő elem, a maradék négyből hatféleképpen az a kettő, amelyik csak egy halmaznak eleme, és a maradék kettőt a végén kétféleképpen helyezhetjük el. 1 pont



A *c)* esetben a lehetőségek száma $10 \cdot 3 = 30$, mert tízféleképpen választhatjuk ki azt a kettőt, amelyik két halmaznak is eleme, ezután a maradék háromból háromféleképpen azt az egyet, amelyik csak egy részhalmaznak eleme. 1 pont

Az összes lehetőség száma: 100. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. A H halmaznak összesen 10 darab háromelemű részhalmaza van. 1 pont

Ezek közül három különbözőt $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ féleképpen lehet kiválasztani. 1 pont

A kiválasztott három részhalmaz uniója akkor és csak akkor egyenlő a H halmazzal, ha az uniójuk ötelemű. Azt számoljuk ki, hogy a három részhalmaz uniója hány esetben nem lesz ötelemű. Háromelemű halmazok uniója nyilván legalább háromelemű, és ha a halmazok különbözők, akkor az uniójuk legalább négyelemű. Tehát a három kiválasztott részhalmaz uniója pontosan akkor nem egyezik meg a H halmazzal, ha ez az unió négyelemű, azaz ha a három részhalmazt a H halmaz valamelyik négyelemű részhalmának elemeiből állítjuk elő. 2 pont

A H halmaznak összesen öt négyelemű részhalmaza van, és ezek mindegyikének négy háromelemű részhalmaza van. 1 pont

Bármely négyelemű részhalmaz esetén az adott részhalmaz négy háromelemű részhalmaza közül négyféleképpen lehet kiválasztani hármat. 1 pont

Ezért összesen $5 \cdot 4 = 20$-féleképpen lehet úgy kiválasztani három háromelemű részhalmazt, hogy az uniójuk csak négy elemű legyen, azaz ne legyen egyenlő H-val, tehát $120 - 20 = 100$ esetben lesz egyenlő a kiválasztott részhalmazok uniója H-val. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Laja a lajhár hosszú – 1 órás – vándorútra indul az amazonasi fák tetején. Lajának kezdetben 100 „energiája” van, és minden perc során két lehetőség közül választhat:

- vagy egy percre megáll és megeszik egy papaya-gyümölcsöt, így 1-gyel növeli az energiáját,
- vagy az adott perc során teljes erőbedobással mászik; ekkor pontosan annyi cm-t tesz meg, amennyi az energiája, de a perc végére 1-gyel csökken az energiája.

Milyen messzire juthat Laja egy óra alatt, és mit kell ehhez tennie? **7 pont**

1. megoldás. Nincs értelme annak, hogy Laja az egyik percben mászik, és a következő percben pihen, mert a két perc során felcserélve a cselekvéseket 1 cm-rel messzebb jutna, és a második időpontokban ugyanannyi lenne az energiája a két esetnél. Emiatt Laja akkor juthat a legmesszebbre, ha az elején egy ideig – mondjuk t percig – pihen, majd végig mászik.
(*Ez a gondolat valamilyen formában.*) 2 pont

Ekkor a t-től függő megtett távolság:

$$s(t) = \overbrace{0+0+\ldots+0}^{t\text{ db}} + (100+t) + \overbrace{(100+t-1)+\ldots+(100+t-(59-t))}^{59-t\text{ db}} \qquad \text{1 pont}$$

$$s(t) = (60-t)(100+t) - (1+2+\ldots+(59-t)) =$$

$$= (60-t)(100+t) - \frac{(60-t)(59-t)}{2} = \frac{(60-t)(200+2t-59+t)}{2} \qquad \text{1 pont}$$

$$s(t) = \frac{(60-t)(141+3t)}{2} = \frac{-3t^2+39t+8460}{2} = \frac{-3\,(t-6,5)^2+8586,75}{2}$$

($s(t)$ *szorzat alakja/számtani-mértani közép is használható*) 1 pont

$s(t)$ maximuma nyilván $t=6$-nál vagy $t=7$-nél lehet, mindkettő esetén $s(6)=s(7)=4293$ cm a megtett távolság. 1 pont

Azaz Laja 4293 cm-t tehet meg, és ehhez 6 vagy 7 percet kell az elején pihennie. 1 pont

2. megoldás. Nincs értelme annak, hogy Laja az egyik percben mászik, és a következő percben pihen, mert a két perc során felcserélve a cselekvéseket 1 cm-rel messzebb jutna, és a második időpontokban ugyanannyi lenne az energiája a két esetnél. Emiatt Laja akkor juthat a legmesszebbre, ha az elején egy ideig – mondjuk t percig – pihen, majd végig mászik.
(*Ez a gondolat valamilyen formában.*) 2 pont

Nézzük meg, hogy mi történik, ha t, illetve ha $(t+1)$ percig pihenünk!

Az első esetben a megtett távolság (összegként):

$$s(t) = \overbrace{0+0+\ldots+0}^{t\text{ db}} +$$

$$+\overbrace{(100+t)+(100+t-1)+\ldots+(100+t-(57-t))+\Big[(100+t-(58-t))+(100+t-(59-t))\Big]}^{60-t\text{ db}}$$

A második esetben pedig:

$$s(t+1) = \overbrace{0+0+\ldots+0}^{t\text{ db}} + 0 + (100+t+1) +$$
$$+ \overbrace{(100+t)+(100+t-1)+\ldots+(100+t-(57-t))}^{58-t\text{ db}} \qquad 1 \text{ pont}$$

1 plusz perc pihenés a képlet „elején” hozzáad $(100+t+1)$ cm-t, de elvesz a „végén”

$$(100+t-(58-t)) + (100+t-(59-t)) = (42+2t)+(41+2t) = 83+4t \text{ cm-t.} \qquad 2 \text{ pont}$$

Addig kell „várni”, amíg $s(t) < s(t+1)$ teljesül, azaz t akkor „jó”, ha erre a különbségre már:

$$101+t \leq 83+4t \to 18 \leq 3t \to 6 \leq t$$

(és $t=6$-ra $s(6)=s(7)$ persze). 1 pont

Ellenőrzés: az $s(6)=s(7)$ esetet végigszámolva:

$s(6) = 0+0+0+0+0+0+106+105+\ldots+53 = \dfrac{54\cdot(106+53)}{2} = 4293$, illetve

$s(7) = 0+0+0+0+0+0+0+107+106+\ldots+55 = \dfrac{53\cdot(107+55)}{2} = 4293$ adódik.

Azaz Laja 4293 cm-t tehet meg, és ehhez 6 vagy 7 percet kell az elején pihennie. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 2. forduló

1. Oldjuk meg az $n+S(n)=2031$ egyenletet, ahol $S(n)$ az n természetes szám számjegyeinek összegét jelenti. **7 pont**

2. Egy számsorozat első eleme $b_1=5$, valamint minden 1-nél nagyobb indexre az n-edik eleme $b_n=b_{n-1}+a_{n-1}$, ahol $a_i=3(i-1)+1$.

a) Igazoljuk, hogy b_n-nek végtelen sok 7-tel osztható eleme van.

b) Mennyi b_{100} értéke? **7 pont**

3. Az $ABCD$ paralelogrammában $DAB\sphericalangle=60^\circ$, $AB=\sqrt{3}+1$, $BC=2$. A DA oldal F felezőpontját és a C csúcsot összekötő szakaszt a B csúcsból induló szögfelező a K pontban metszi. Határozzuk meg a $CKB\sphericalangle$ nagyságát. **7 pont**

4. Egy kör kerülete mentén felsoroljuk egy hatelemű halmaz összes részhalmazát, majd egy-egy szakasszal összekötjük azokat, amelyeknek van közös elemük. Egy halmazt önmagával természetesen nem köt össze szakasz. Hány összekötő szakaszt kapunk? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az $n + S(n) = 2031$ egyenletet, ahol $S(n)$ az n természetes szám számjegyeinek összegét jelenti. **7 pont**

Megoldás. $S(n) \leqslant 1 + 9 + 9 + 9 = 28$, így $n \geqslant 2031 - 28 = 2003$. 1 pont

A keresett szám legalább négyjegyű, mert egy háromjegyű számhoz hozzáadva a számjegyei összegét legfeljebb 1026-ot kapunk. 1 pont

A 2000-nél kisebb négyjegyű számok közül az 1999-nek a legnagyobb a számjegyösszege, a 2000-nél nagyobb vagy egyenlő de 2031-nél kisebb vagy egyenlő számok közül pedig a 2029-nek, tehát $2003 \leqslant n \leqslant 2031$. 1 pont

Egy egész szám 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint a számjegyeinek összege. Mivel 2031 9-cel osztva 6-ot ad maradékul, n és $S(n)$ 9-cel osztva csak 3 maradékot adhat. 2 pont

2003 és 2026 között három ilyen szám van: 2010, 2019 és 2028. 1 pont

Ellenőrizve: $2010 + 3 = 2013$, $2028 + 12 = 2040$, nem ad megoldást, $2019 + 12 = 2031$, ami megfelelő.

Az egyenlet megoldása $n = 2019$. 1 pont

Megjegyzés. Amennyiben a versenyző helyes módszerrel ésszerű határok közé szorítja a megoldást, akkor ezért legfeljebb 3 pontot kaphat. Ha ezen határok között az összes számot követhetően ellenőrzi és megtalálja a helyes megoldást, akkor megkaphatja a további 4 pontot. Amennyiben nem ellenőrzi a számokat, akkor a második részre legfeljebb 1 pontot kaphat!

Összesen: **7 pont**

2. Egy számsorozat első eleme $b_1 = 5$, valamint minden 1-nél nagyobb indexre az n-edik eleme $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$, ahol $a_i = 3(i-1) + 1$.

a) Igazoljuk, hogy b_n-nek végtelen sok 7-tel osztható eleme van.

b) Mennyi b_{100} értéke? **7 pont**

Megoldás. *a)* Képezzük a megadott rekurzió szerint a sorozat b_n elemét: $b_n = b_{n-1} + a_{n-1} = (b_{n-2} + a_{n-2}) + a_{n-1} = (b_{n-3} + a_{n-3}) + a_{n-2} + a_{n-1} = (b_{n-4} + a_{n-4}) + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} = \ldots = b_1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. 2 pont

Tudjuk, hogy $b_1 = 5$, valamint, hogy $a_1 = 1$ és $a_i = 3i - 2$. Így az a sorozat bármely két egymást követő elemének különbsége 3, valamint az első eleme 1, utolsó pedig $a_{n-1} = 3n - 5$. Összesen $n - 1$ elemünk van. 1 pont

Összeadva a tagokat $\frac{1 + (3n-5)}{2}(n-1)$ adódik.

Ebből következik, hogy $b_n = 5 + \frac{1 + (3n-5)}{2}(n-1) = \frac{3n^2 - 7n + 14}{2}$. 2 pont

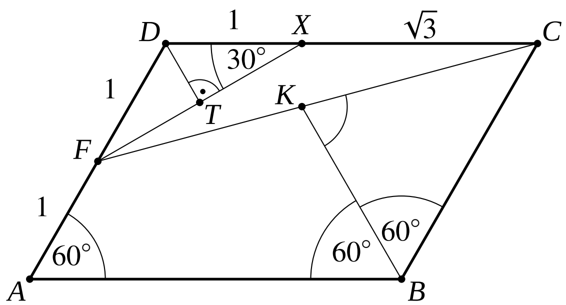
A képletből látszik, hogy $n = 7k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ számokra 7-tel osztható tagot kapunk. 1 pont

b) Az előző képletbe behelyettesítve $b_{100} = 5 + \frac{3 \cdot 100 - 4}{2} \cdot 99 = 14\,657$ adódik. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az $ABCD$ paralelogrammában $DAB\sphericalangle = 60°$, $AB = \sqrt{3}+1$, $BC = 2$. A DA oldal F felezőpontját és a C csúcsot összekötő szakaszt a B csúcsból induló szögfelező a K pontban metszi. Határozzuk meg a $CKB\sphericalangle$ nagyságát. **7 pont**

Megoldás. Legyen X a CD oldal azon pontja, amelyre $DX = 1$ és $XC = \sqrt{3}$. 2 pont



Mivel a paralelogramma egy oldalon fekvő szögeinek összege 180°, ezért $FDX\sphericalangle = 120°$.

Az FXD egyenlő szárú háromszöget a DT magassága két egybevágó félszabályos háromszögre bontja, és $FT = TX = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

Így $FX = \sqrt{3}$ és az FCX háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Szögei $CXF\sphericalangle = 180° - FXD\sphericalangle = 180° - 30° = 150°$ és

$$XFC\sphericalangle = FCX\sphericalangle = \frac{180° - CXF\sphericalangle}{2} = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$ 1 pont

Ezt felhasználva $BCK\sphericalangle = BCD\sphericalangle - FCX\sphericalangle = 60° - 15° = 45°$ és 1 pont

$$CKB\sphericalangle = 180° - KBC\sphericalangle - BCK\sphericalangle = 180° - 60° - 45° = 75°.$$

Tehát a keresett szög 75°-os. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Egy kör kerülete mentén felsoroljuk egy hatelemű halmaz összes részhalmazát, majd egy-egy szakasszal összekötjük azokat, amelyeknek van közös elemük. Egy halmazt önmagával természetesen nem köt össze szakasz. Hány összekötő szakaszt kapunk? **7 pont**

1. megoldás. Először érdemes meghatározni, hogy egy adott részhalmaz hány másikkal nem lesz összekötve. Bármely részhalmaz a komplementerének részhalmazaival nincs összekötve.

Az egyelemű halmaz az ötelemű komplementerének a 32 részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 32 = 31$-gyel igen, így a hat darab egyelemű halmazból összesen $6 \cdot 31 = 186$ szakasz indul ki. 1 pont

A 15 darab kételemű részhalmaz mindegyike a négyelemű komplementerének a 16 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 16 = 47$ részhalmazzal össze van kötve, így a kételeműekből összesen $15 \cdot 47 = 705$ szakasz indul ki. 1 pont

A 20 darab háromelemű részhalmaz mindegyike a háromelemű komplementerének a 8 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 8 = 55$ részhalmazzal össze van kötve, így a háromeleműekből összesen $20 \cdot 55 = 1100$ szakasz indul ki. 1 pont

A 15 darab négyelemű részhalmaz mindegyike a kételemű komplementerének a 4 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 4 = 59$ részhalmazzal össze van kötve, így a négyeleműekből összesen $15 \cdot 59 = 885$ szakasz indul ki. 1 pont

A 6 darab ötelemű részhalmaz mindegyike az egyelemű komplementerének a 2 darab részhalmazával nincs összekötve, a többi $63 - 2 = 61$ részhalmazzal össze van kötve, így az öteleműekből összesen $6 \cdot 61 = 366$ szakasz indul ki. 1 pont

A hatelemű halmazból az üreshalmazba nem megy szakasz, a többi $63 - 1 = 62$-be igen. 1 pont

Így eddig minden szakaszt kétszer vettünk számba, ezért a szakaszok száma:

$$(186 + 705 + 1100 + 885 + 366 + 62) : 2 = 1652.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. A hatvannégy részhalmaz között összesen $(64 \cdot 63) : 2 = 2016$ darab szakasz húzható. 1 pont

Színezzük kékre azokat, amelyek közös elemmel rendelkező halmazokat kötnek össze, és pirosra azokat, amelyek közös elem nélkülieket kötnek össze. A kék szakaszok száma a kérdés. Ha kiszámítjuk a piros szakaszok számát, és ezt levonjuk a 2016-ból, megkapjuk a feladat megoldását.

Az üres halmaz a 63 másik részhalmaz mindegyikével diszjunkt, ebből 63 piros szakasz megy ki.

Az egyelemű halmazok (ebből 6 darab van) az ötelemű komplementereik 32 részhalmazával diszjunktak, így az egyeleműekből összesen $6 \cdot 32 = 192$ piros szakasz indul ki.

A kételemű halmazok (ezekből 15 darab van) a négyelemű komplementereik 16 részhalmazával diszjunktak, így ezekből összesen $15 \cdot 16 = 240$ piros szakasz indul ki. 1 pont

Hasonlóan: a háromeleműekből összesen $20 \cdot 8 = 160$ piros szakasz, 1 pont

a négyeleműekből $15 \cdot 4 = 60$ piros szakasz, 1 pont

az öteleműekből $6 \cdot 2 = 12$ piros szakasz, 1 pont

a hateleműből 1 piros szakasz indul. 1 pont

Ezért a piros szakaszok száma $(63 + 6 \cdot 32 + 15 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 1) : 2 = 364$, a kék szakaszoké pedig $2016 - 364 = 1652$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. A hatvannégy részhalmaz összesen $(64 \cdot 63) : 2 = 2016$ darab halmazpárt határoz meg. 2 pont

A diszjunkt halmazpárok száma a következő módon is kiszámítható:

Ha két diszjunkt A és B halmazt akarunk készíteni a hatelemű halmaz elemeiből, akkor sorban mind a hat elemről eldönthetjük, hogy az A halmazba vagy a B halmazba vagy egyikbe se tesszük bele. Ez $3^6 = 729$ lehetőség. Így az üres halmazt kivéve mindegyik diszjunkt párt (rendezetlen párokat kell számba venni) duplán számoltuk, mivel A és B szerepe felcserélhető.

Ezért a diszjunkt párok száma: $(729 - 1) : 2 = 364$. 4 pont

A közös elemmel rendelkező párok száma: 1652. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

1. Adjuk meg azokat a természetes számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre fennáll az

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

egyenlőség. **7 pont**

2. Egy paralelogramma oldalainak hossza 3 cm és 4 cm. Az átlók összege centiméterben mérve egész szám. Mekkora lehet az átlók különbségének abszolút értéke? **7 pont**

3. 2019^2 darab követ szeretnénk elszállítani a bányából. A kövek tömegei számtani sorozatot alkotnak. Igazoljuk, hogy a kövek elszállíthatók 2019 teherautóval! (Az autók teherbírása egyenlő, a teherbírások összege egyenlő a kövek össztömegével. Az autókat nem szabad túlterhelni, a köveket nem szabad darabokra törni.) **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Adjuk meg azokat a természetes számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre fennáll az

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$$

egyenlőség. **7 pont**

Megoldás. Az egyenletet átalakítva:

$$x^2y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2$$

$$x^2y^2 - 12xy + 49 = x^2 + y^2 + 2xy$$ 1 pont

$$(xy-6)^2 + 13 = (x+y)^2$$

$$(xy-6)^2 - (x+y)^2 = -13$$ 1 pont

Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva: $(xy - 6 - (x + y))(xy - 6 + (x + y)) = -13$.

Mivel a megadott alaphalmazon (x, y természetes számok) a bal oldalon szereplő tényezők értéke egész szám, a 13 pedig prímszám, ezért két eset valósulhat meg: $-13 = (-1) \cdot 13$ vagy $-13 = (-13) \cdot 1$. 1 pont

1. eset:

$$\begin{cases} xy - 6 - (x+y) = -1 \\ xy - 6 + (x+y) = 13. \end{cases} \quad \text{Ebből} \quad \begin{cases} xy - (x+y) = 5 \\ xy + (x+y) = 19. \end{cases}$$

A kapott egyenletrendszert xy-ra, illetve $x + y$-ra megoldva: $\begin{cases} xy = 12 \\ x+y = 7 \end{cases}$ 1 pont

adódik, amiből az $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, illetve $x_2 = 4$, $y_2 = 3$ megoldások adódnak. 1 pont

2. eset:

$$\begin{cases} xy - 6 - (x+y) = -13 \\ xy - 6 + (x+y) = 1. \end{cases} \quad \text{Ebből} \quad \begin{cases} xy - (x+y) = -7 \\ xy + (x+y) = 7. \end{cases}$$

A kapott egyenletrendszert xy-ra, illetve $x + y$-ra megoldva: $\begin{cases} xy = 0 \\ x+y = 7 \end{cases}$ 1 pont

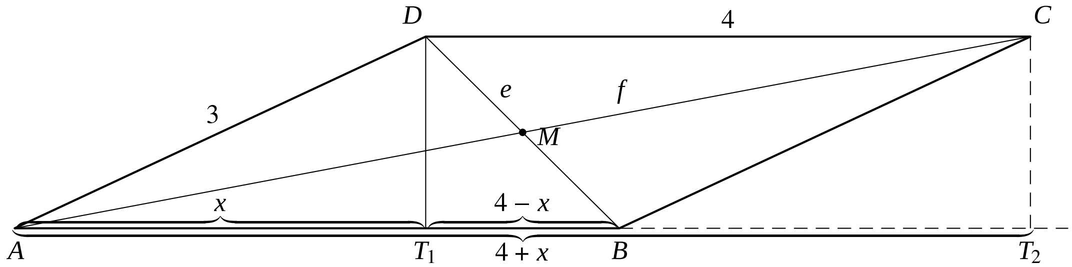
adódik, amiből az $x_1 = 0$, $y_1 = 7$, illetve $x_2 = 7$, $y_2 = 0$ megoldások adódnak. 1 pont

Tehát az egyenletrendszer megoldásai: $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(0; 7)$, $(7; 0)$

Összesen: **7 pont**

2. Egy paralelogramma oldalainak hossza 3 cm és 4 cm. Az átlók összege centiméterben mérve egész szám. Mekkora lehet az átlók különbségének abszolút értéke? **7 pont**

Megoldás.



Rajzoljunk be két magasságot, és használjuk az ábra jelöléseit!

Pitagorasz-tételt felírva AT_2C, AT_1D és BT_1D háromszögekben kapjuk, hogy:

$$e^2 - (4-x)^2 = 3^2 - x^2$$
$$f^2 - (4+x)^2 = 3^2 - x^2$$
1 pont

Ebből: $e^2 + f^2 = 50$. 1 pont

A számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenségből:

$$\frac{e+f}{2} \leqslant \sqrt{\frac{e^2+f^2}{2}} = 5, \qquad \text{így} \qquad e+f \leqslant 10.$$
1 pont

Felírjuk a háromszög-egyenlőtlenséget ABM háromszögben, ebből $8 < e + f$. 1 pont

Így két lehetőség van:

1. $e + f = 10$, ekkor a számtani és a négyzetes közép között egyenlőség van, ami pontosan akkor teljesül, ha $e = f = 5$, tehát a paralelogramma téglalap, a különbség nulla. 1 pont

2. $e + f = 9$ és tudjuk, hogy $e^2 + f^2 = 50$, tehát egy szimmetrikus másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk. 1 pont

Ebből a $2e^2 - 18e + 31 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, ahol a gyökök különbségének abszolút értéke:

$$\frac{18+\sqrt{76}}{4} - \frac{18-\sqrt{76}}{4} = \frac{\sqrt{76}}{2} = \sqrt{19}.$$
1 pont*

Összesen: **7 pont**

* A *-gal jelölt 1 pont akkor is jár, ha a versenyző az ismert (diszkriminráns négyzetgyöke osztva a főegyütthatóval) képletet használja.

3. 2019^2 darab követ szeretnénk elszállítani a bányából. A kövek tömegei számtani sorozatot alkotnak. Igazoljuk, hogy a kövek elszállíthatók 2019 teherautóval! (Az autók teherbírása egyenlő, a teherbírások összege egyenlő a kövek össztömegével. Az autókat nem szabad túlterhelni, a köveket nem szabad darabokra törni.) **7 pont**

Megoldás. A tömegeket jelöljük $a_1, a_2, \ldots, a_{2019^2}$-nel.

A tömegeket rendezzük el egy 2019×2019-es táblázatban legkisebbtől a legnagyobbig, a bal felső sarokból indulva a sorokban balról jobbra, majd az alatta levő sorban is balról jobbra. 1 pont

a_1	a_2	a_3			a_{2019}
a_{2020}	a_{2021}	a_{2022}			a_{4038}
a_{4039}	a_{4040}	a_{4041}			a_{6057}
					e
f					b
c	g			h	a_{2019^2}

2019 darab csoportot kell létrehozni. Ha minden csoport minden sorból és minden oszlopból pontosan egy követ tartalmaz, akkor a kövek tömegei számtani sorozatot alkotnak, vagyis tömegük szerint sorba téve őket, az egymás melletti kövek tömegének különbsége ugyanakkora. Tehát minden autóra $S + d + 2d + 3d + \ldots + 2018d$ tömegű rakomány kerül, ahol d a számtani sorozat differenciája, S pedig az első oszlopban levő elemek összege. 3 pont

Az első csoport álljon főátlóbeli elemekből, 1 pont

a második csoport a főátló feletti átló a_2-től b-ig, valamint c,

a harmadik csoport a főátló felett a második átló a_3-tól e-ig, valamint f és g,. . .

az utolsó csoport a_{2019}-ből és a főátló alatti átlóból a_{2020}-tól h-ig.

Így mindegyik csoportban szerepel minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elem, vagyis a csoportbeli elemek összege minden csoportnál megegyezik. Egy csoport legyen egy teherautó rakománya, így valóban el lehet szállítani 2019 teherautóval az összes követ. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 1. forduló

1. Melyek azok a p prímek, amelyekre $(p^2 + 11)$-nek pontosan 6 pozitív osztója van? **7 pont**

2. Az $ABCD$ trapéz AB alapja 5, CD alapja 3 egység. A BC szár hossza 8 egység. Legyen F a DA szár felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $FB^2 + FC^2$ állandó, és adja meg ennek az állandónak az értékét! **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 10 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

7 pont

4. Adott a síkon egy irány. Vegyünk fel a síkon 1001 téglalapot úgy, hogy mindegyik téglalap két oldala párhuzamos legyen ezzel az iránnyal. Legfeljebb hány diszjunkt tartományra oszthatják ezek a téglalapok a síkot? **7 pont**

5. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontja P, valamint az AF súlyvonal és a CP szakasz metszéspontja N. Mekkora lehet az ABC háromszög területe, ha az APN háromszög területe 1,6, a CFN háromszög területe pedig 3 területegység? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok a p prímek, amelyekre $(p^2 + 11)$-nek pontosan 6 pozitív osztója van? **7 pont**

1. megoldás. Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15$, aminek csak 4 osztója van, így ez nem megoldás. Ha $p = 3$ akkor $p^2 + 11 = 3^2 + 11 = 20$, aminek 6 osztója van, így ez jó megoldás. 1 pont

A továbbiakban megmutatjuk, hogy $p > 3$ megfelelő prím nincs.

Egy egésznek pontosan 6 pozitív osztója csak két esetben lehet:

(I) ha q^5 alakú, vagy (II) ha q^2r alakú, ahol q és r különböző prímek. 2 pont

Mivel p páratlan, ezért felírható $2k + 1$ alakban, ahol k pozitív egész. Ekkor $p^2 + 11 = 4k^2 + 4k + 1 + 11 = 4(k^2 + k + 3)$, tehát osztható 4-gyel. 1 pont

A 4-gyel való oszthatóság miatt (I) és (II) esetben is csak $q = 2$ lehetséges. Ebből az (I) esetben $p^2 + 11 = 2^5 = 32$, ahonnan p-re nem kapunk megoldást. 1 pont

A (II) esetben, mivel $p > 3$, ezért $p = 3l \pm 1$ alakba írható (ahol l pozitív egész), de ekkor $p^2 + 11 = 9l^2 \pm 6l + 1 + 11 = 3(3l^2 \pm 2l + 4)$, tehát osztható 3-mal is, amiből $r = 3$ következik. Ekkor $p^2 + 11 = 2^2 \cdot 3 = 12$, ahonnan p-re szintén nem kapunk megoldást (hiszen az 1 nem prímszám). 2 pont

Tehát valóban egyetlen megfelelő prím van, a $p = 3$.

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15$, aminek csak 4 osztója van, így ez nem megoldás. Ha $p = 3$ akkor $p^2 + 11 = 3^2 + 11 = 20$, aminek 6 osztója van, így ez jó megoldás. 1 pont

A továbbiakban megmutatjuk, hogy $p > 3$ megfelelő prím nincs. Végezzük el a következő átalakítást: $p^2 + 11 = (p+1)(p-1) + 12$, 2 pont

Mivel p páratlan, a $p+1$ és $p-1$ is páros, és $p > 3$ miatt (pontosan) az egyik osztható 3-mal is. Ezért a $(p+1)(p-1)$ és innen $p^2 + 11$ is osztható 12-vel, azaz $p^2 + 11 = 12k$ (k egész). 2 pont

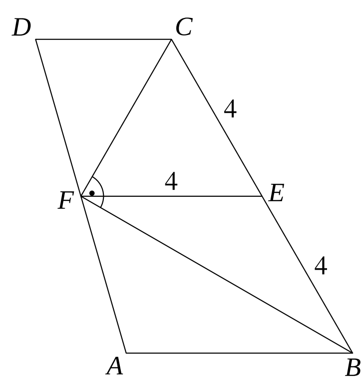
De $p > 3$ miatt $k \geq 2$ szintén teljesül, a 12-nek 6 pozitív osztója van, így a $p^2 + 11 = 12k$-nak biztosan 6-nál több osztója van. 2 pont

Tehát valóban egyetlen megfelelő prím van, a $p = 3$.

Összesen: **7 pont**

2. Az $ABCD$ trapéz AB alapja 5, CD alapja 3 egység. A BC szár hossza 8 egység. Legyen F a DA szár felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $FB^2 + FC^2$ állandó, és adja meg ennek az állandónak az értékét! **7 pont**

1. megoldás. A trapéz középvonalának hossza $\frac{5+3}{2} = 4$ egység. 1 pont



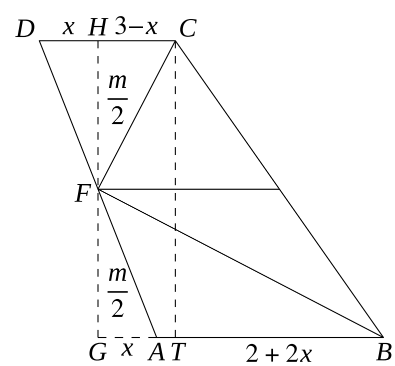
Ez azt jelenti, hogy a BC szár E felezőpontja 4 egység távol van B-től, C-től és F-től is, azaz F rajta van egy E középpontú, BC átmérőjű körön. 2 pont

Thalész tétele miatt a BFC háromszög derékszögű, a derékszög az F csúcsnál van. 2 pont

Ezért Pitagorasz tétele alapján $FB^2 + FC^2 = 8^2 = 64$, ami állandó. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Rajzoljuk meg a trapéz C csúcson, illetve az F ponton átmenő magasságát! Mivel az F pont felezőpont, ezért felezi a magasságot, és az alapok egyenesét A és D csúcsoktól egyenlő távolságra metszi, jelöljük ezt a távolságot x-szel. 1 pont



Ennek megfelelően:

$$HC = 3 - x$$
$$GB = 5 + x$$
$$TB = 2 + 2x$$

1 pont

Fontos megjegyezni, hogy x előjeles távolság, ahol az előjel a trapéz szögeitől függ. Ez azonban a megoldást érdemben nem befolyásolja. 1 pont

Pitagorasz tétele alapján az alábbi egyenlőségek írhatók fel:

$$FB^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (5+x)^2$$
$$FC^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (3-x)^2$$
$$BC^2 = 64 = m^2 + (2+2x)^2$$

1 pont

Az első két egyenlet összegét véve és a harmadik egyenletet átalakítva:

$$\frac{m^2}{2} + 2x^2 + 4x = 30$$

és

$$FB^2 + FC^2 = \frac{m^2}{2} + 2x^2 + 4x + 34 \qquad \text{2 pont}$$

Így $FB^2 + FC^2 = 30 + 34 = 64$, állandó. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 10 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \qquad \textbf{7 pont}$$

1. megoldás.

Vezessük be az $a = x + y$ és a $b = \sqrt{xy}$ új ismeretleneket. Így az egyenletrendszerünk:

$$\begin{cases} ab = 10 \\ a^2 - 2b^2 = 17 \end{cases} \qquad \text{2 pont}$$

Az első egyenletből b-t kifejezve és a másodikba beírva az

$$a^4 - 17a^2 - 200 = 0$$

másodfokúra visszavezethető egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai $a^2 = -8$ és $a^2 = 25$. 2 pont

Az első nem ad valós megoldást, a második esetben $a = 5$ és $b = 2$, vagy $a = -5$ és $b = -2$, de ez utóbbi a négyzetgyök definíciója miatt nem lehetséges.

Így az eredetinél lényegesen egyszerűbb

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \qquad \text{1-1 pont}$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldásai: (1; 4), illetve (4; 1). 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Az első egyenletet négyzetre emelve (szükséges, hogy az egyenlet bal oldala pozitív legyen): 1 pont

$$x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 = 100$$

$$\left(x^2 + y^2\right)xy + 2(xy)^2 = 100 \qquad \text{1 pont}$$

A második egyenletet felhasználva xy-ra másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2(xy)^2 + 17(xy) - 100 = 0 \qquad \text{1 pont}$$

Ennek megoldásai: $xy = 4$ vagy $xy = -12{,}5$, de a második megoldás a négyzetgyök definíciója alapján nem lehetséges. 1 pont

y-t kifejezve és a második egyenletbe beírva az $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ másodfokúra visszavezethető egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $x^2 = 1$, vagy $x^2 = 16$. 1 pont

Ekkor a lehetséges megoldások: $(1;4)$; $(4;1)$; $(-1;-4)$; $(-4;-1)$, 1 pont
de az utolsó két számpár nem felel meg a négyzetre emelés előtti feltételnek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Adott a síkon egy irány. Vegyünk fel a síkon 1001 téglalapot úgy, hogy mindegyik téglalap két oldala párhuzamos legyen ezzel az iránnyal. Legfeljebb hány diszjunkt tartományra oszthatják ezek a téglalapok a síkot? **7 pont**

A téglalapok helyzetéből következik, hogy két ilyen téglalapnak legfeljebb 4 metszéspontja lehet. 1 pont

Vegyük fel a téglalapokat egyenként. Egy téglalap a korábbi tartományokat legfeljebb 2 részre osztja. Amikor berajzoljuk a k-adik téglalapot, akkor ennek az új téglalapnak a kerületén legfeljebb $4(k-1)$ metszéspont alakul ki. Ezek a metszéspontok a téglalap kerületét $4(k-1)$részre osztják. 1 pont

Ezek a részek már meglévő síkrészeket vágnak ketté, így a síkrészek száma $4(k-1)$-gyel nő. 1 pont

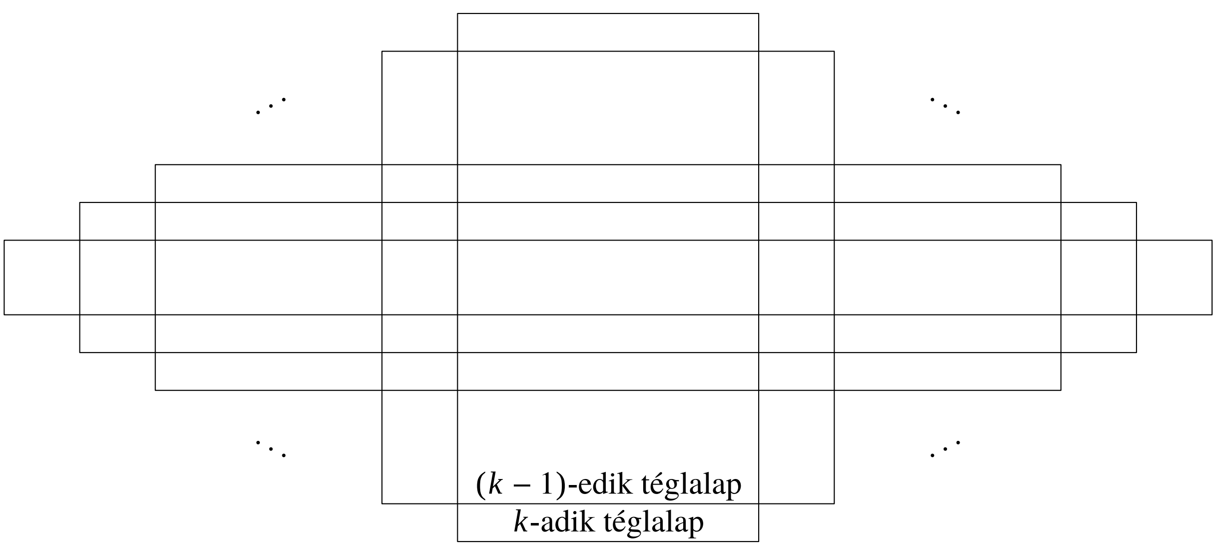
Ezért 1001 téglalap esetén a síkrészek száma legfeljebb:

$$2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot 1000.$$ 1 pont

A szorzatokból 4-et kiemelve és a zárójelben az összegzést Gauss-módszerrel elvégezve kapjuk, hogy

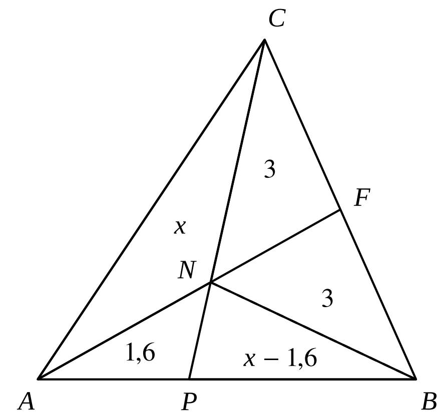
$$2 + 4 \cdot 1001 \cdot 500 = 2 + 2002 \cdot 1000 = 2\,002\,002.$$ 2 pont

Ez tényleg elérhető például a következő módon: a k-adik téglalap „vízszintes” oldala legyen feleakkora, „függőleges” oldala legyen kétszer akkora, mint az előző téglalap megfelelő oldala, valamint az összes téglalap középpontja legyen ugyanaz a pont. 1 pont



Összesen: **7 pont**

5. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontja P, valamint az AF súlyvonal és a CP szakasz metszéspontja N. Mekkora lehet az ABC háromszög területe, ha az APN háromszög területe 1,6, a CFN háromszög területe pedig 3 területegység? **7 pont**



Megoldás. Jelölje az ANC háromszög területét x. Mivel F az AC szakasz felezőpontja, ezért NBC háromszögben NF súlyvonal, tehát $T_{NBF\triangle} = T_{NCF\triangle} = 3$. 1 pont

Mivel az ABC háromszögben AF súlyvonal, ezért $T_{ABF\triangle} = T_{ACF\triangle} = 3 + x$, ahonnan $T_{NPB\triangle} = x - 1{,}6$. 2 pont

Az N illeszkedik CP szakaszra, ezért ABC és ABN háromszögek területét CP szakasz azonos $\dfrac{BP}{PA}$ arányban osztja két részre, azaz $\dfrac{T_{PBC\triangle}}{T_{PAC\triangle}} = \dfrac{T_{PBN\triangle}}{T_{PAN\triangle}} = \dfrac{BP}{PA}$. 2 pont

Behelyettesítés után: $\dfrac{3 + 3 + x - 1{,}6}{x + 1{,}6} = \dfrac{x - 1{,}6}{1{,}6}$. Az egyenletet rendezve $5x^2 - 8x - 48 = 0$ adódik, amelynek pozitív megoldása csak az $x = 4$. 1 pont

Az ABC háromszög területe tehát $2 \cdot (3 + x) = 14$ területegység. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 2. forduló

1. Határozzuk meg a $|36^n - 5^k|$ kifejezés legkisebb értékét, ahol n és k pozitív egész számok. **7 pont**

2. Tekintsünk egy legfeljebb kétjegyű pozitív egészekből álló 10-elemű halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ennek mindig van két olyan, közös elemek nélküli nemüres részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő. (Ha egy halmazba egyetlen elem kerül, az összeg az elem maga.) **7 pont**

3. Az $ABCD$ négyszög csúcsai rajta vannak a k körön. A négyszög AC és BD átlója merőleges egymásra. A k kör középpontja O, az AB oldal felezőpontja F. Bizonyítsuk be, hogy $CD = 2 \cdot OF$. **7 pont**

4. A $[0; 12]$ intervallumban levő x, y valós számokra teljesül, hogy $xy = (12 - x)^2 \cdot (12 - y)^2$. Mekkora az xy szorzat legnagyobb értéke? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg a $|36^n - 5^k|$ kifejezés legkisebb értékét, ahol n és k pozitív egész számok. **7 pont**

Megoldás. Minden pozitív egész n és k esetén 36^n hatra, 5^k ötre végződik.
Így $|36^n - 5^k|$ utolsó jegye $36^n > 5^k$ esetén 1-es, $36^n < 5^k$ esetén 9-es. 2 pont

$|36^n - 5^k|$ értéke nem lehet 1, mert ha $36^n - 5^k = 1$, akkor $36^n - 1 = 5^k$. Mivel $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, az egyenlőség bal oldalán álló kifejezés osztható 35-tel, azaz 7-tel is, de a jobb oldalon álló kifejezés biztosan nem osztható 7-tel. Így az egyenlőség nem állhat fenn. 2 pont

$|36^n - 5^k|$ értéke nem lehet 9, mert ha $36^n - 5^k = -9$, akkor $36^n + 9 = 5^k$. Az egyenlőség bal oldalán álló kifejezés osztható 9-cel, de a jobb oldalon álló kifejezés biztosan nem osztható 9-cel. Így az egyenlőség nem állhat fenn. 2 pont

A következő szám a 11, $|36^n - 5^k|$ értéke felveszi ezt a számot, mégpedig $n = 1$, $k = 2$ esetben. Tehát a feladat megoldása: 11. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Tekintsünk egy legfeljebb kétjegyű pozitív egészekből álló 10-elemű halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ennek mindig van két olyan, közös elemek nélküli nemüres részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő. (Ha egy halmazba egyetlen elem kerül, az összeg az elem maga.) **7 pont**

Megoldás. Legyen A egy tetszőleges részhalmaz. Az A-beli elemek összege legalább 0 és legfeljebb 945, így az elemek összegeként legfeljebb 945 különböző érték jöhet ki. 2 pont

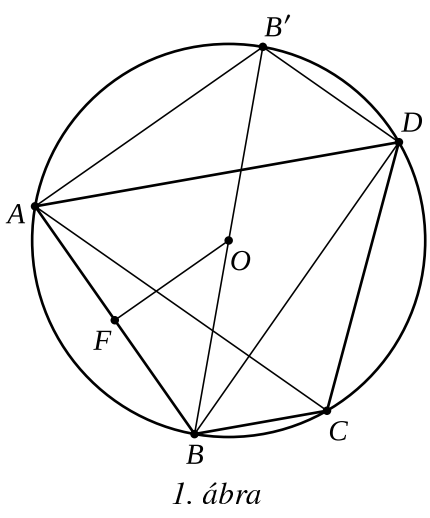
Az elemekből képezhető összes különböző részhalmaz száma $2^{10} = 1024$, így a skatulya-elv alapján biztosan van legalább két különböző részhalmaz, amelyekben ugyanannyi az elemek összege. 2 pont

Vegyünk két ilyen részhalmazt! Hagyjuk el ezekből a közös elemeket (ha vannak), így mindkét részhalmazban ugyanannyival csökkentettük az elemek összegét, de egyik sem lesz üres, mert az azt jelentené, hogy eredendően egyenlő volt a két halmaz. 2 pont

Mivel a korábban egyenlő összegek ugyanannyival csökkentek, az elemek összege továbbra is egyenlő, közös elemek nincsenek, így éppen a feladat feltételének megfelelő két részhalmazt kaptunk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az $ABCD$ négyszög csúcsai rajta vannak a k körön. A négyszög AC és BD átlója merőleges egymásra. A k kör középpontja O, az AB oldal felezőpontja F. Bizonyítsuk be, hogy $CD = 2 \cdot OF$. **7 pont**



1. ábra

1. megoldás. Legyen a B pont O-ra vonatkozó tükörképe B'. Vizsgáljuk meg az $AB'DC$ négyszöget.

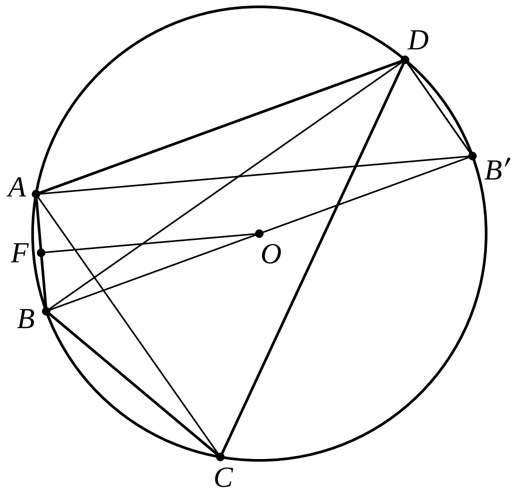
Ebben a négyszögben $AB' = 2 \cdot OF$, mert az OF középvonal az $AB'B$ háromszögben. Azt kell tehát belátni, hogy $AB' = CD$. 1 pont

Mivel BB' a k kör átmérője, ezért a Thálesz-tétel miatt a BD és $B'D$ merőleges egymásra. 1 pont

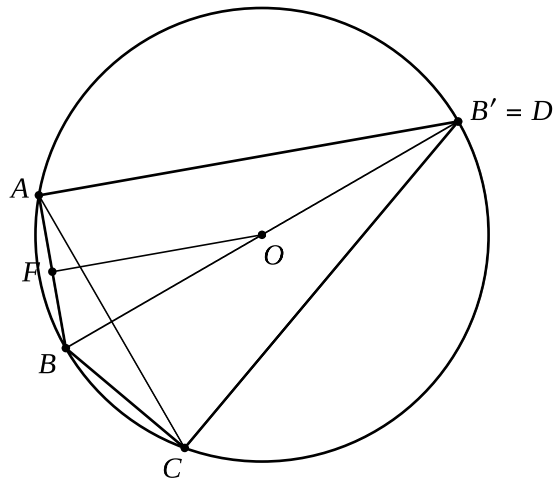
Mivel AC is merőleges BD-re, ezért $B'D$ és AC párhuzamosak egymással, tehát az $AB'DC$ négyszög trapéz. 1 pont

Mivel az $AB'DC$ trapéz csúcsai rajta vannak a k körön, így ez egy húrtrapéz. A húrtrapéz szárai egyenlő hosszúak, tehát $AB' = CD$, így korábbi megjegyzésünk alapján készen vagyunk. 1 pont

Nem biztos, hogy az A, B', D, C pontok ebben a sorrendben jönnek egymás után a körön: az is lehet, hogy B' és D fordított sorrendben vannak (2. ábra). Ilyenkor a fentiek az $ADB'C$ négyszögre mondhatók el. Ugyanígy kijön, hogy a négyszög húrtrapéz, ám most azt a tulajdonságát használjuk a húrtrapéznak, hogy az átlói egyforma hosszúak. 2 pont



2. ábra

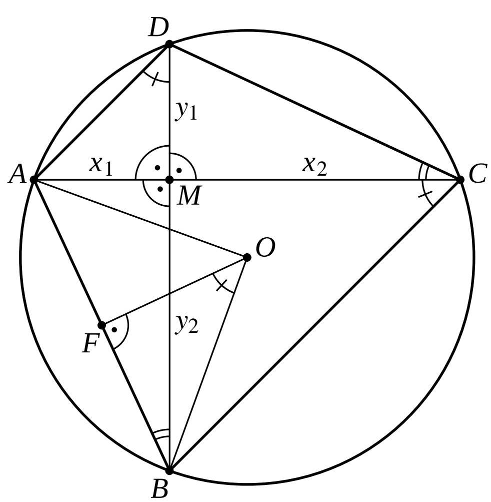


3. ábra

Végül az is lehet, hogy B' és D egybeesnek (3. ábra). Ilyenkor az eredeti négyszög egy deltoid (BD átmérő a körben), és $AB'C$ egy egyenlő szárú háromszög, és emiatt vagyunk készen. 1 pont

Megjegyzés. Ha a megoldó nem gondol rá, hogy az ábra többféle módon is kinézhet, csak 4 pontot kaphat a gondolatmenetért.

Összesen: **7 pont**



2. megoldás. A kerületi szögek tétele alapján $ACD\sphericalangle = DBA\sphericalangle$ és $ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek. 1 pont

A kerületi és középponti szögek tétele alapján $AOB\sphericalangle = 2 \cdot ACB\sphericalangle = 2 \cdot ADB\sphericalangle$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi és középponti szögekről van szó. 1 pont

De $FOB\sphericalangle = \frac{1}{2} \cdot AOB\sphericalangle$, hiszen F az AOB egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja, így FO az alaphoz tartozó magasság, ami felezi a szárszöget.

Így $FOB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$. 1 pont

Ekkor AMD háromszög hasonló BFO háromszöghöz, mert szögeik egyenlők. 1 pont

A megfelelő oldalak arányát felírva: $\dfrac{OF}{\frac{1}{2}AB} = \dfrac{y_1}{x_1}$, ebből

$$2 \cdot OF = AB \cdot \frac{y_1}{x_1}. \qquad (1)$$ 1 pont

CDM háromszög hasonló BAM háromszöghöz, mert szögeik egyenlők. 1 pont

A megfelelő oldalak arányát felírva: $\frac{CD}{y_1} = \frac{AB}{x_1}$, ebből

$$CD = AB \cdot \frac{y_1}{x_1} \qquad (2)$$

Ekkor (1) és (2) feltételek alapján: $CD = 2 \cdot OF$ 1 pont

Megjegyzés. Az átlók merőlegessége miatt a kör középpontja mindig a négyszög belsejében van.

Összesen: **7 pont**

4. A $[0; 12]$ intervallumban levő x, y valós számokra teljesül, hogy $xy = (12-x)^2 \cdot (12-y)^2$. Mekkora az xy szorzat legnagyobb értéke? **7 pont**

Megoldás. Az egyenlet két oldalán nemnegatív számok állnak, így gyököt vonhatunk. Mivel x és y a $[0; 12]$ intervallumban vannak, a jobb oldal négyzetgyöke

$$(12-x)\cdot(12-y) = 12^2 - 12(x+y) + xy. \qquad \text{1 pont}$$

Így azt kapjuk, hogy $\sqrt{xy} = 12^2 - 12(x+y) + xy = 12^2 - 24 \cdot \frac{x+y}{2} + xy$. 1 pont

A jobb oldal nem csökken, ha x és y számtani közepe helyére az annál nem nagyobb mértani középüket írjuk: $\sqrt{xy} \leqslant 144 - 24\sqrt{xy} + xy$. 1 pont

Ez a $\sqrt{xy} = z$ helyettesítéssel a $0 \leqslant 144 - 25z + z^2$ egyenlőtlenségnek felel meg. 1 pont

Mivel $0 \leqslant z = \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant 12$, azért a z változó is a $[0; 12]$ intervallumba esik. Ezen a halmazon a $0 \leqslant z^2 - 25x + 144 = (z-9)\cdot(z-16)$ egyenlőtlenség megoldása a $[0; 9]$ intervallum. Ebből következik, hogy a feladat változóira $\sqrt{xy} \leqslant 9$, azaz $xy \leqslant 81$. 2 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenlőség az $x = y = 9$ esetben fennáll, tehát az xy szorzat legnagyobb értéke 81. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

1. Keressük meg azokat a pozitív egészekből álló rendezett $(a; b)$ számpárokat, amelyekre az

$$\frac{a^3b-1}{a+1} \quad \text{és a} \quad \frac{b^3a+1}{b-1}$$

kifejezés értéke is pozitív egész szám. **7 pont**

2. Egy háromszögnek három különböző nagyságú hegyesszöge van. Képezzük mindegyik oldalánál az oldalfelezési pont és a magasságvonal talppontja közti távolság és az oldalhoz tartozó magasság hányadosát. Bizonyítsuk be, hogy az egyik hányados a másik két hányados összege. **7 pont**

3. Egy 1 egység oldalú szabályos tízszöget néhány 1 egység oldalú rombuszra osztunk fel. Két rombuszra azt mondjuk, hogy ugyanolyan fajta, ha egybevágók. Bizonyítsd be, hogy a tízszög bármely, 1 egység oldalú rombuszokra történő felosztásában ugyanannyi rombusz szerepel, sőt az egyes fajta rombuszokból is minden esetben ugyanannyi van! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Keressük meg azokat a pozitív egészekből álló rendezett $(a; b)$ számpárokat, amelyekre az

$$\frac{a^3b-1}{a+1} \quad \text{és a} \quad \frac{b^3a+1}{b-1}$$

kifejezés értéke is pozitív egész szám. **7 pont**

Megoldás. A megadott feltételek mellett az első törtet vizsgálva $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$, tehát

$$a+1 \mid a^3+1.$$

Mivel $a+1 \mid a^3b-1$, ezért $a+1 \mid (a^3+1)+(a^3b-1)=a^3(b+1)$.

Mivel $(a; a+1)=1$, ezért ebből $a+1 \mid b+1$ adódik. 2 pont

A második törtet vizsgálva és figyelembe véve, hogy a tört értéke pozitív egész szám, ezért $b \geqslant 2$ $(b \in \mathbb{N}^+)$, illetve $b^3-1=(b-1)(b^2+b+1)$, tehát

$$b-1 \mid b^3-1.$$

Mivel $b-1 \mid ab^3+1$, ezért $b-1 \mid (b^3-1)+(ab^3+1)=b^3(a+1)$.

Mivel $(b-1; b)=1$, ezért ebből $b-1 \mid a+1$ adódik. 2 pont

A kapott két feltételt egyesítve $b-1 \mid a+1 \mid b+1$, tehát

$$b-1 \mid b+1.$$

Ebből $b-1 \mid (b+1)-(b-1)=2$, ezért $b_1=2$, vagy $b_2=3$. 1 pont

$b=2$ esetén $a+1 \mid 3$. Ez a feltétel $a \in \mathbb{N}^+$ esetén csak az $a=2$ esetben teljesül. 1 pont

$b=3$ esetén $a+1 \mid 4$. Ez a feltétel $a \in \mathbb{N}^+$ esetén csak az $a=1$, vagy az $a=3$ esetben teljesül.

Így a megoldásként kapott számpárok: $(2; 2)$, $(1; 3)$, $(3; 3)$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy háromszögnek három különböző nagyságú hegyesszöge van. Képezzük mindegyik oldalánál az oldalfelezési pont és a magasságvonal talppontja közti távolság és az oldalhoz tartozó magasság hányadosát. Bizonyítsuk be, hogy az egyik hányados a másik két hányados összege. **7 pont**

1. megoldás. A háromszög oldalai különbözőek, legyen $c>a>b$.

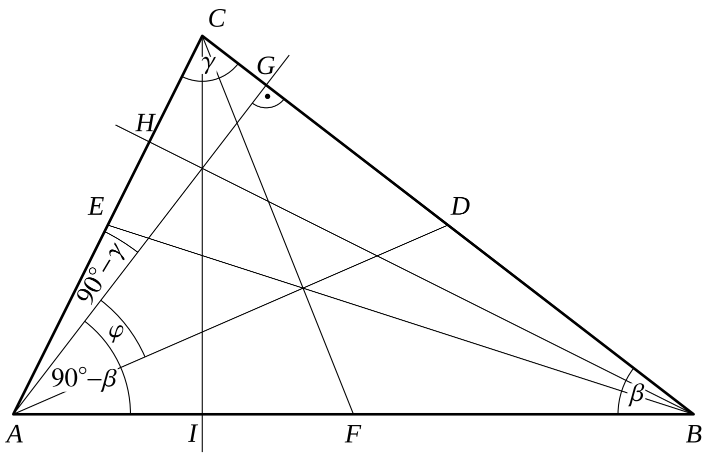
Írjuk fel Pitagorasz tételét az ABG és az AGC háromszögekben az AG befogóra:

$$AG^2=AB^2-BG^2=AC^2-GC^2.$$

Rendezzük át:

$$AB^2-AC^2=BG^2-GC^2=(BG+GC)(BG-GC). \qquad (1)$$ 2 pont

G a BC szakaszon van, így $BG + GC = BC$, másrészt $BG - GC = (BD + DG) - (CD - DG) =$ $= 2DG$, hiszen D pont BC felezési pontja, azaz $BD = CD$. 2 pont



A kapott eredményeket (1)-be beírva, rendezve:

$$DG = \frac{AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC} = \frac{c^2 - b^2}{2a},$$

azaz

$$\frac{DG}{AG} = \frac{c^2 - b^2}{2am_a} = \frac{c^2 - b^2}{4T}.$$ 1 pont

Hasonlóan felírva a hányadosokat:

$$\frac{HE}{BH} = \frac{c^2 - a^2}{4T} \quad \text{és} \quad \frac{IF}{CI} = \frac{a^2 - b^2}{4T}$$ 1 pont

Így adódik a bizonyítandó állítás, hiszen $\frac{HE}{BH} + \frac{IF}{CI} = \frac{DG}{AG}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.

A háromszög oldalai különbözőek, legyen $c > a > b$.

$BG - GC = (BD + DG) - (CD - DG) = 2DG$, hiszen D pont BC felezési pontja, azaz $BD = CD$. 2 pont

Legyen $DAG\sphericalangle = \varphi$, ekkor

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{DG}{AG} = \frac{BG - GC}{2AG} = \frac{1}{2}\left(\frac{BG}{AG} - \frac{GC}{AG}\right) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) - \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma)\big).$$ 3 pont

Hasonlóan felírva a hányadosokat:

$$\frac{HE}{BE} = \frac{1}{2}\big(\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma)\big) \quad \text{és} \quad \frac{IF}{CI} = \frac{1}{2}\big(\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) - \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)\big).$$ 1 pont

Így adódik a bizonyítandó állítás, hiszen $\frac{HE}{BE} + \frac{IF}{CI} = \frac{DG}{AG}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy 1 egység oldalú szabályos tízszöget néhány 1 egység oldalú rombuszra osztunk fel. Két rombuszra azt mondjuk, hogy ugyanolyan fajta, ha egybevágók. Bizonyítsd be, hogy a tízszög bármely, 1 egység oldalú rombuszokra történő felosztásában ugyanannyi rombusz szerepel, sőt az egyes fajta rombuszokból is minden esetben ugyanannyi van! **7 pont**

Megoldás. Két, a felosztásban szereplő rombuszt nevezzünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk, vagy egy-egy oldaluk legalább részben egybeesik (azaz a két oldalnak van közös szakasza).

A szabályos tízszög oldalai legyenek $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$.

Legyen $ABCD$ egy, a felosztásban szereplő R rombusz. Ennek például az AB oldala vagy a tízszög egyik oldalára esik, vagy az AB oldalt átlépve egy szomszédos R_1 rombuszra jutunk. Ennek AB-vel párhuzamos oldala vagy a tízszög oldalára esik, vagy az AB-vel párhuzamos oldalát átlépve egy R_1-gyel szomszédos, R_2 rombuszra jutunk. Az R_2 rombusz AB-vel párhuzamos oldala vagy a tízszög oldalára esik, vagy ha nem, akkor ezt az oldalt átlépve egy szomszédos, R_3 rombuszra jutunk és így tovább. Az eljárás akkor szakad meg, ha egy olyan rombuszhoz jutunk, amelynek AB-vel párhuzamos oldala a tízszög valamelyik a_i oldalára illeszkedik.

Ezt az eljárást az $ABCD$ rombusz CD oldalára is elvégezve néhány egymáshoz csatlakozó rombuszon végig lépkedve egy olyan rombuszhoz jutunk, amelynek CD-vel (és ezért AB-vel is) párhuzamos oldala a tízszög valamely a_j oldalára esik. Mivel $a_i \parallel AB \parallel CD \parallel a_j$, azt kapjuk, hogy a_i és a_j a tízszög két párhuzamos oldala, azaz ezek a szabályos tízszög szemközti oldalai.

Tehát az $ABCD$ rombusz a tízszög két szemközti, AB-vel és CD-vel párhuzamos oldalát összekötő, egymáshoz csatlakozó rombuszokból álló út egy eleme.

Teljesen hasonlóan belátható, hogy az $ABCD$ rombusz a tízszög két szemközti, BC-vel és AD-vel párhuzamos oldalát összekötő, egymáshoz csatlakozó rombuszokból álló útnak is eleme.

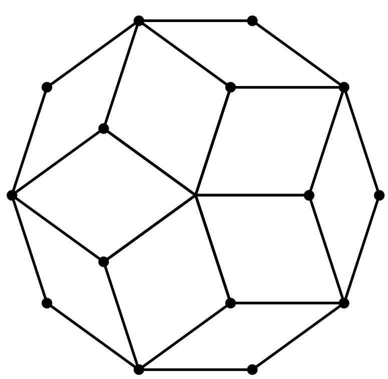
Ebből az is látszik, hogy a felosztásban szereplő bármely rombusz oldalai párhuzamosak a tízszög valamelyik két oldalával. 2 pont

A szabályos tízszög bármely két oldalegyenese vagy párhuzamos, vagy $36°$-os vagy $72°$-os szöget zár be, így a felosztásban kétféle rombusz szerepel, az egyiknek $36°$ és $144°$-os szögei (ez legyen 1. fajta), a másiknak $72°$-os és $108°$-os szögei vannak (ez a 2. fajta). 1 pont

Két olyan út, amelyek a tízszög két-két szemközti oldalát kötik össze, nyilván keresztezi egymást, ezért meghatároz legalább egy rombuszt.

1. fajta rombusz az a_1–a_6 és a_2–a_7, a_2–a_7 és a_3–a_8, a_3–a_8 és a_4–a_9, a_4–a_9 és a_5–a_{10}, illetve a_5–a_{10} és a_1–a_6 utak metszetében található, és az öt útpár mindegyikének a metszetében van legalább egy rombusz, ezért a felosztásban legalább öt darab 1. fajta rombusz van.

2. fajta rombusz az a_1–a_6 és a_3–a_8, a_2–a_7 és a_4–a_9, a_3–a_8 és a_5–a_{10}, a_4–a_9 és a_6–a_1, végül a_5–a_{10} és a_7–a_2 utak metszetében van, ebből is legalább öt darab van tetszőleges felosztás esetén. 2 pont

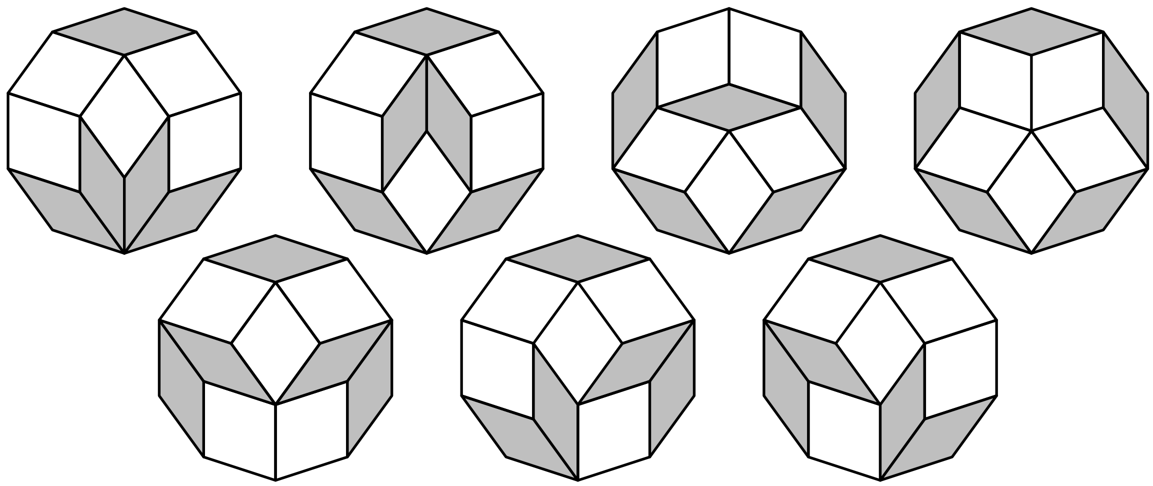


Az ábrán látható egy olyan felosztás, amelyben pontosan 5 darab 1. fajta és pontosan 5 darab 2. fajta, tehát összesen 10 darab rombusz szerepel. 1 pont

Ha a kétféle rombusz területe T, illetve t, akkor a tízszög területe $5T + 5t$. Ha egy felosztásban valamelyik fajta rombuszból 5-nél több lenne, akkor a másikból nyilván 5-nél kevesebb kellene legyen, hiszen a tízszög területe adott. Ám ez lehetetlen, mert mindkét fajtából van legalább öt. Tehát egyikből sem lehet ötnél több, azaz mindkét fajtából pontosan öt darab van, bármely felosztás esetén. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A tízszög összes lehetséges 1 egység oldalú rombuszokra történő olyan felosztása, amelyek forgatással nem vihetők egymásba, az alábbi ábrán látható. Az utolsó kettő egymás tükörképe, a többi ábra eleve tengelyesen szimmetrikus.



Haladók III. kategória 1. forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan konvex nyolcszög, amelynek minden belső szöge ugyanakkora, és az oldalai valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, illetve 8 egység hosszúak. **7 pont**

2. Mely x, y pozitív számokra teljesül a következő egyenlet?

$$x^2 + y^2 + x + y = 2\sqrt{x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy}$$ **7 pont**

3. Adott egy rögzített AB szakasz, egy vele nem párhuzamos e egyenes, és egy $\mathbf{v}$ vektor, ami az e-vel párhuzamos és AB-vel egyenlő hosszú. Az egyenes egy tetszőleges P pontjához jelöljük ki azt az R pontot, amelyre $\overrightarrow{PR} = \mathbf{v}$. Az $\overrightarrow{AB}$ vektort a $\overrightarrow{PR}$ vektorba vivő elforgatás középpontja legyen O. Milyen ponthalmazt alkotnak az O pontok, ha P végigfut az egyenesen? **7 pont**

4. Vegyünk egy tíz darab különböző pozitív egész számból álló halmazt. Képezzük minden nem üres részhalmaza esetén a részhalmazban szereplő számok összegét! Egyelemű halmaz esetén az összeg maga a szám. Igazoljuk, hogy a tíz szám megválasztható úgy, hogy 959 különböző összeg fordul elő! **7 pont**

5. A pozitív egész számokból álló (p, a, b, c) számnégyest nevezzük különlegesnek, ha teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:

a) p páratlan prímszám,
b) a, b, c különböző számok,
c) $ab + 1$, $bc + 1$ és $ca + 1$ is osztható p-vel.

Bizonyítsuk be, hogy $p + 2 \leqslant \dfrac{a + b + c}{3}$, és adjunk példát arra, hogy mikor áll fenn az egyenlőség. **7 pont**

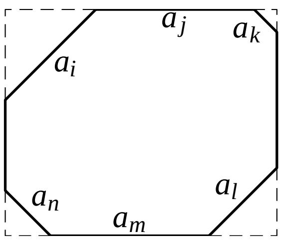
Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan konvex nyolcszög, amelynek minden belső szöge ugyanakkora, és az oldalai valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, illetve 8 egység hosszúak. **7 pont**

Megoldás.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen nyolcszög! Ekkor annak minden szöge 135°, ezért a külső szögek 45° nagyságúak. Ezért minden második oldalt meghosszabbítva a nyolcszöget egy téglalapba lehet foglalni, amelynek csúcsaiban egyenlő szárú derékszögű háromszögek egészítik ki a nyolcszöget. 2 pont

Az a_i átfogójú háromszög befogója $\frac{a_i}{\sqrt{2}}$, ahol a_i 1 és 8 közötti egész szám. 1 pont



A téglalap oldalai ilyen befogókból, illetve 1 és 8 közötti oldalhosszúságú nyolcszög-oldalakból állnak össze. 1 pont

Mivel a téglalap szemközti oldalai egyenlő hosszúak, ezért

$$\frac{a_i}{\sqrt{2}} + a_j + \frac{a_k}{\sqrt{2}} = \frac{a_l}{\sqrt{2}} + a_m + \frac{a_n}{\sqrt{2}},$$

ahol a_i, a_j, a_k, a_l, a_m és a_n egész számok. 1 pont

Ebből $\sqrt{2} = \frac{a_l + a_n - a_i - a_k}{a_j - a_m}$, azaz $\sqrt{2}$ kifejezhető két egész szám hányadosaként, ami ellentmond annak, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát hamis az indirekt feltétel, vagyis nem létezik ilyen nyolcszög. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Mely x, y pozitív számokra teljesül a következő egyenlet?

$$x^2 + y^2 + x + y = 2\sqrt{x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy}$$ **7 pont**

Megoldás. Az egyenletet 2-vel osztva és a jobb oldalt szorzattá alakítva:

$$\frac{(x^2 + y) + (y^2 + x)}{2} = \sqrt{(x^2 + y)(y^2 + x)}$$ 2 pont

Mivel a bal oldalon az $(x^2 + y)$ és az $(y^2 + x)$ tagok számtani közepe áll, míg jobb oldalon ugyanezen tagok mértani közepe, a bal oldal nagyobb vagy egyenlő, mint a jobb oldal, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a tagok egyenlőek. Jelen esetben:

$$x^2 + y = y^2 + x$$ 2 pont

Innen: $x^2 - y^2 + y - x = 0$, majd nevezetes szorzattal és kiemeléssel megint csak szorzattá alakítva:

$$(x - y)(x + y - 1) = 0$$ 1 pont

Azaz az egyenlet megoldásai az x és $y = x$, ahol $0 < x$, 1 pont

illetve az x és $y = 1 - x$, ahol $0 < x < 1$ alakú számpárok. 1 pont

Megjegyzés. Mindkét (nemnegatív) oldal négyzetre emelésével, 0-ra redukálással és szorzattá alakítással azt kapjuk, hogy

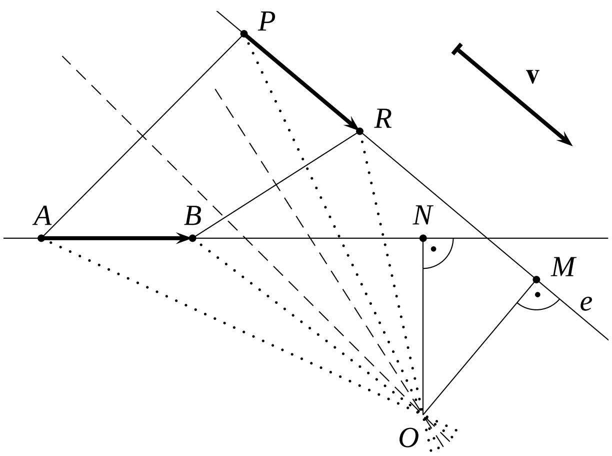
$$(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1) = 0 \Rightarrow (x - y)^2(x + y - 1)^2 = 0,$$

ami nyilván ugyanarra a végeredményre vezet, mint az iménti.

Összesen: **7 pont**

3. Adott egy rögzített AB szakasz, egy vele nem párhuzamos e egyenes, és egy $\mathbf{v}$ vektor, ami az e-vel párhuzamos és AB-vel egyenlő hosszú. Az egyenes egy tetszőleges P pontjához jelöljük ki azt az R pontot, amelyre $\overrightarrow{PR} = \mathbf{v}$. Az $\overrightarrow{AB}$ vektort a $\overrightarrow{PR}$ vektorba vivő elforgatás középpontja legyen O. Milyen ponthalmazt alkotnak az O pontok, ha P végigfut az egyenesen? **7 pont**

Megoldás.

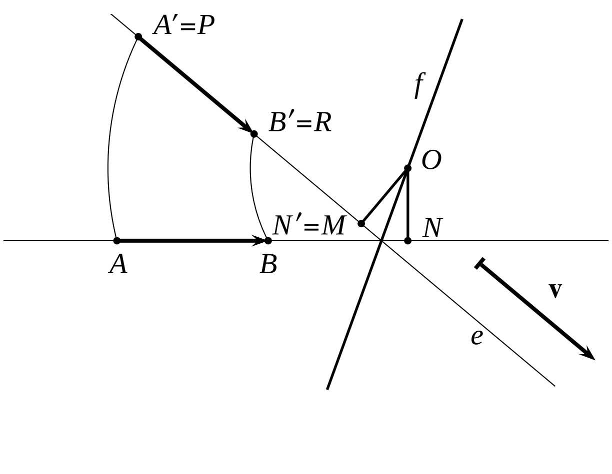


Az elforgatás során az A pont P-be, a B pont R-be kerül. A forgatás középpontja az AP szakasz felező merőlegesén és a BR szakasz felező merőlegesén is rajta kell legyen, így ezek metszéspontja az O pont. 1 pont

Az ábrán az ABO és a PRO háromszögek egybevágók, mivel oldalaik hosszai rendre megegyeznek. 1 pont

Így megfelelő magasságaik hossza, az AB oldalhoz tartozó ON, illetve a PR oldalhoz tartozó OM is megegyeznek. 1 pont

Az $ON = OM$ egyenlőség azt jelenti, hogy O egyenlő távol van az AB egyenestől és az e egyenestől, tehát O rajta van a két egyenes által meghatározott szögtartományok egyik szögfelezőjén. (Ha $\mathbf{v}$-t ellentétesen irányítjuk, akkor O a másik szögfelezőn van.) 1 pont



Legyen O az f szögfelező egy tetszőleges pontja. Állítsunk merőlegest O-ból e-re és AB-re, ezek talppontjai M és N. Tekintsük azt az O körüli elforgatást, amely az N pontot M-be viszi. Ennél az AB egyenes képe éppen az e egyenes lesz, az AB-n lévő $\overrightarrow{AB}$ vektor képe az e egyenesen lévő vektor lesz, ennek a kezdőpontja lesz az a P, végpontja az az R pont, amelyre teljesül az, hogy O körül elforgatva $\overrightarrow{AB}$-t, éppen a $\overrightarrow{PR}$ vektort kapjuk. Tehát az f szögfelező összes pontja a keresett ponthalmazhoz tartozik. 3 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az, hogy az O pont a szögfelezőn van, így is indokolható:

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor képe az elforgatás során a $\overrightarrow{PR}$ vektor, ezért az AB egyenest az O pont körül elforgatva éppen a PR egyenest kapjuk. 1 pont

Ezért az O-ból az AB-re állított ON merőleges szakasz az elforgatáskor az O-ból a PR egyenesre állított OM merőleges szakaszba megy át, amely nyilván ON-nel egyenlő hosszúságú. 2 pont

Így O egyenlő távol van az AB és a PR egyenesektől, tehát rajta van a két egyenes egyik szögfelezőjén. 1 pont

4. Vegyünk egy tíz darab különböző pozitív egész számból álló halmazt. Képezzük minden nem üres részhalmaza esetén a részhalmazban szereplő számok összegét! Egyelemű halmaz esetén az összeg maga a szám. Igazoljuk, hogy a tíz szám megválasztható úgy, hogy 959 különböző összeg fordul elő! **7 pont**

Megoldás. Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ egészek esetén x-féle összeg lép fel, akkor ha az $n+1$-edik számot nagyobbnak választjuk, mint az n darab szám összege, például $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1$, akkor az x-féle összeghez ezt az $n+1$-edik számot hozzáadva újabb x darab összeget kapunk, ezek az összegek különböznek egymástól, mert az eredeti x-féle összeg is különböző volt. 2 pont

Ezek az új összegek különböznek az eredeti összegektől, mert nagyobbak náluk. 1 pont

Az a_{n+1} mint összeg is különbözik az eredetiektől, mert nagyobb náluk, valamint az a_{n+1}-et tartalmazó összegektől, mert kisebb náluk. Így $(2x+1)$-féle összegünk van. 1 pont

Ha azt akarjuk, hogy 959 darab összeg lépjen fel, akkor ezen a módon visszafelé lépegetve 9 szám esetén 479, 8 számnál 239, 7-nél 119, 6-nál 59, 5-nél 29, 4-nél 14-féle összeg szükséges. 1 pont

Ez pedig megoldható, ha a 4 szám egy számtani sorozat 4 egymást követő tagja, ahol az első tag és a differencia relatív prímek. Például: 1, 3, 5, 7 esetén könnyen ellenőrizhető, hogy itt az összegek között csak a $3+5=1+7$ egyezés lép fel. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. A pozitív egész számokból álló (p, a, b, c) számnégyest nevezzük különlegesnek, ha teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:

a) p páratlan prímszám,

b) a, b, c különböző számok,

c) $ab+1$, $bc+1$ és $ca+1$ is osztható p-vel.

Bizonyítsuk be, hogy $p+2 \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$, és adjunk példát arra, hogy mikor áll fenn az egyenlőség. **7 pont**

Megoldás. Mivel a megadott feltételek a, b, c-re szimmetrikusak, ezért feltehetjük, hogy $a < b < c$. $p \mid bc+1$ és $p \mid ca+1 \Longrightarrow p \mid c(b-a)$.

Hasonlóképpen: $p \mid ca+1$, és $p \mid ab+1 \Longrightarrow p \mid a(c-b)$ 1 pont

$p \nmid a$, és $p \nmid c$, hiszen pl. $p \mid a$ esetén $p \mid ab$ és $p \mid ab+1$ feltételekből a $p \mid 1$ ellentmondáshoz jutnánk. Így p prímtulajdonságát felhasználva: $p \mid b-a$ és $p \mid c-b$ 1 pont

Az utóbbi oszthatósági feltételeket felhasználva:

$$b-a \geqslant p \quad \Longrightarrow b \geqslant a+p, \tag{3}$$

$$c-b \geqslant p \quad \Longrightarrow c \geqslant b+p \geqslant a+2p. \tag{2}$$ 1 pont

Másrészt $a \geqslant 2$, hiszen $a = 1$ esetén $p \mid b + 1$ és $p \mid b - 1 \implies p \mid 2$, ami ellentmond annak, hogy p páratlan prímszám. 1 pont

Az (1), (2), majd később az $a \geqslant 2$ feltételek alapján:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a+(a+p)+(a+2p)}{3} = a + p \geqslant p + 2 \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenlőség feltételei: $a = 2$, $b = a + p$ és $c = a + 2p$.

A $p \mid ca + 1$ feltétel alapján $p \mid 4p + 5 \implies p \mid 5 \implies p = 5$. 1 pont

Így az egyetlen különleges számnégyes az (5, 2, 7, 12). 1 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

1. Tetszőleges n pozitív egész számra jelölje $f(n)$ az olyan $2n$-jegyű számok számát, amelyek megegyeznek az utolsó n számjegyükből alkotott szám négyzetével. Határozzuk meg az f függvény értékkészletét. **7 pont**

2. A különböző sugarú k_1 és k_2 körök az A és B pontokban metszik egymást. A k_1 kör A-beli érintője a C pontban metszi a k_2 kört, míg a k_2 kör A-beli érintője a D pontban metszi a k_1 kört. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelezője a k_1 kört az E a k_2 kört az F pontban metszi. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezője a k_1 kört az X a k_2 kört az Y pontban metszi. Igazoljuk, hogy az XY szakasz felező merőlegese érinti a BEF háromszög körülírt körét. **7 pont**

3. Kezdő és Második felírják az $1; 2; 3; \dots; 609; 610$ számokat egymás után egy papírra, majd a következő pasziánsz-játékot játszák:

- Kezdő a saját i-edik lépése során bekarikázza a legkisebb még be nem karikázott számot, majd
- Második a saját i-edik lépése során bekarikázza a Kezdő által utoljára bekarikázott számnál i-vel nagyobb számot.

  A játék elején a következő számokat karikázzák be rendre: $K \to 1$; $M \to 2$; $K \to 3$; $M \to 5$; $K \to 4$; $M \to 7$; $K \to 6$; $M \to 10$; $K \to 8$; $M \to 13$; ...

A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos már nem tud a szabályok betartásával újabb számot bekarikázni. Amikor a játék véget ér, hány szám lesz bekarikázva? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Tetszőleges n pozitív egész számra jelölje $f(n)$ az olyan $2n$-jegyű számok számát, amelyek megegyeznek az utolsó n számjegyükből alkotott szám négyzetével. Határozzuk meg az f függvény értékkészletét. **7 pont**

1. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az f függvény értékkészlete kétféle számot tartalmaz, az 1-et és a 2-t. $n = 1$ esetén két ilyen szám van, a 25 és a 36, $n = 2$ esetén pedig egy ilyen szám van, az 5776. 1 pont

Legyen n rögzített pozitív egész szám. Jelölje A egy, a feladat feltételeit kielégítő szám utolsó n számjegyéből alkotott számot. Ekkor a feladat feltételei alapján $A^2 - A = A(A-1)$ osztható 10^n-nel. Mivel A és $A-1$ relatív prím egymáshoz, és a 10^n prímtényezős felbontása $2^n \cdot 5^n$, ezért négyféle eset lehetséges:

1. eset: $10^n \mid A$ Mivel A legfeljebb n jegyű pozitív egész szám, ezért ez az eset nem lehetséges.

2. eset: $10^n \mid A - 1$. Az előzőekhez hasonlóan itt csak $A = 1$ jön szóba, ez szintén nem ad megoldást.

3. eset: $2^n \mid A$, $5^n \mid A - 1$. Megmutatjuk, hogy pontosan egy olyan pozitív legfeljebb n-jegyű A szám van, amely teljesíti ezt a feltételt. Vegyük a $2^n, 2 \cdot 2^n, \ldots, 5^n \cdot 2^n$ számokat. Mivel a 2^n és az 5^n relatív prímek egymáshoz, ezért ezek teljes maradékrendszert alkotnak mod 5^n. Ez azt jelenti, hogy pontosan egy van köztük, amely 5^n-nel osztva 1 maradékot ad. Ez az egyetlen szóbajövő érték A-ra, mert A többszöröse 2^n-nek, és $2^n \cdot 5^n$ már $n+1$ jegyű. Azt kell még látni, hogy a felsorolt többszörösök között az utolsó kivételével az összes legfeljebb n jegyű pozitív egész szám, de az utolsó osztható 5^n-nel, így nem az lesz az A. Ezzel az esettel is készen vagyunk. 2 pont

4. eset: $5^n \mid A$, $2^n \mid A - 1$. Ez az eset visszavezethető az előzőre. Legyen $B = 10^n - (A - 1)$. Ekkor B-re teljesül, hogy $2^n \mid B$, $5^n \mid B - 1$, továbbá $2 \leqslant B \leqslant 10^n$. Az előző eset alapján kijön, hogy pontosan egy ilyen B szám létezik. Ez éppen az előző esetben kapott szám, mert különben $A = 1$ lenne, amire nem teljesül $5^n \mid A$. 2 pont

Kijött tehát, hogy rögzített n pozitív egészre legfeljebb két olyan legfeljebb n-jegyű pozitív egész A szám van, hogy $10^n \mid A^2 - A$. A^2 akkor fogja kielégíteni a feladat feltételeit, ha $2n$-jegyű. Azt kell még megmutatnunk, hogy a 3. és a 4. esetben kapott két megoldás legalább egyikére teljesül, hogy A^2 $2n$-jegyű szám.

A 4. esetben leírtak alapján a 3. és a 4. esetben kapott két számra, A_1-re és A_2-re teljesül, hogy $A_1 + A_2 = 10^n + 1$. Így a két szám közül az egyik több, mint $\frac{10^n}{2}$. Ennek a négyzete legalább $\frac{10^{2n}}{4} = 25 \cdot 10^{2n-2}$, amely egy $2n$-jegyű szám. Viszont $2n$-nél több jegyből nem állhat egy n-jegyű szám négyzete (hiszen kisebb, mint 10^{2n}), így a feladat megoldását befejeztük. (Az itt leírtakból látszik, hogy miért csak egy megoldás van $n = 2$: a két szóbajövő megoldás a 25 és a 76, de a 25 négyzete csak háromjegyű.) 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. (vázlat) Azt mutatjuk meg, hogy pontosan két olyan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^k$ alakú A szám van, hogy $A^2 = A$.

$n = 1$-re két ilyen szám van, az 5 és a 6.

Akár az 5, akár a 6-ból indulunk ki, ha megvan már a 10-adikus számunk első pár jegye pl. (visszafelé és az 5-ből indulva) $A = 52609\ldots$ (most $a = 90625$-tel jelölöm A kezdőszeletének tényleges értékét), az azt jelenti, hogy $a^2 = a + c \cdot 10^5 \pmod{10^{5+1}}$ is igaz valamely egyértelműen meghatározott $0 \leqslant c \leqslant 9$ számjegyre.

Innen, ha tovább akarunk lépni és megkeresni A újabb, mondjuk b-vel jelölt számjegyét, ($A = 52609b\ldots$), akkor a

$$(10^5 \cdot b + a)^2 = (10^5 \cdot b + a) \pmod{10^{5+1}}$$

egyenletet kell megoldanunk, ahol b számjegy.

Adódik:

$$10^{10} \cdot b^2 + 2 \cdot 10^5 \cdot b \cdot a + a^2 = (2 \cdot 10^5 \cdot b \cdot a + a + c \cdot 10^5) = (10^5 \cdot b + a) \pmod{10^{5+1}}$$

egyenletet jelenti, innen adódik (10^5-nel egyszerűsítve), hogy $b \cdot (2a - 1) + c = 0 \pmod{10}$ a megoldandó (a ismert és vége 5, c ismert) $\rightarrow$ $c - b = 0 \pmod{10}$ a megoldandó, azaz $b = c$ automatikusan.

Innen minden állításunk azonnal következik, és egyszerűen generálhatóak a további jegyek: az 5-ből induló sorozatnál a meglévő számot négyzetre kell emelni, és venni a hátulról számított $n + 1$-edik jegyet, a 6-ból induló sorozatnál pedig a kapott jegyet ki kell egészíteni 10-re.

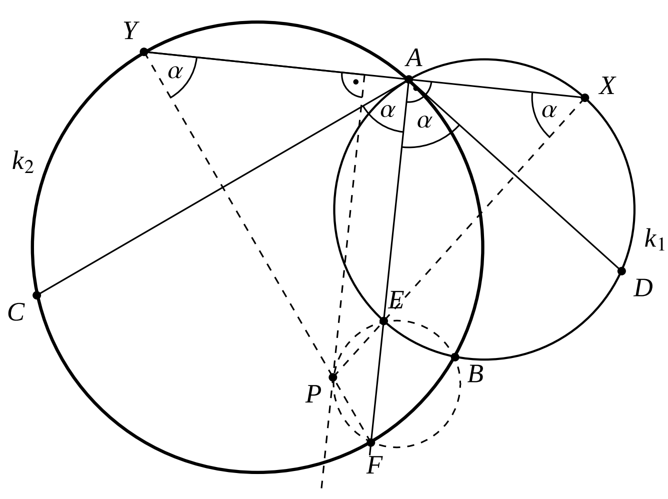
Az 5-tel kezdődő sorozat néhány jegye: $A = 52609821281995266 52293\ldots$

A 6-tal kezdődő sorozat néhány jegye: $B = 67390178718004734 7706\ldots$

Összesen: **7 pont**

2. A különböző sugarú k_1 és k_2 körök az A és B pontokban metszik egymást. A k_1 kör A-beli érintője a C pontban metszi a k_2 kört, míg a k_2 kör A-beli érintője a D pontban metszi a k_1 kört. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelezője a k_1 kört az E a k_2 kört az F pontban metszi. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezője a k_1 kört az X a k_2 kört az Y pontban metszi. Igazoljuk, hogy az XY szakasz felező merőlegese érinti a BEF háromszög körülírt körét. **7 pont**

Megoldás.



Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a k_1 kör sugara a kisebb. Jelölje α a CAD háromszög A-nál lévő szögének felét. Az érintő szárú kerületi szögek tétele alapján

$AXE\sphericalangle = CAE\sphericalangle = \alpha$ és $AYF\sphericalangle = DAF\sphericalangle = \alpha$. Mivel a kisebb körben ugyanakkora kerületi szöghöz (α) rövidebb húr tartozik, így a C, E és F pontok sorrendje valóban az ábrának megfelelő. Jelölje k a BEF háromszög körülírt körét.

Legyen az YF szakasz és az XE egyenes E-n túli meghosszabbításának metszéspontja P. Az előző szakaszban leírtak alapján a PXY háromszög XY oldalán fekvő mindkét szög nagysága α, így ez a háromszög egyenlőszárú, tehát $PX = PY$. 2 pont

Most azt mutatjuk meg, hogy a P pont rajta van k-n. Ehhez kiszámoljuk az $EBF\sphericalangle$ és az $EPF\sphericalangle$ szögeket. Az utóbbi egyszerű: ez az XYP háromszög külső szöge, tehát egyenlő $\alpha + \alpha = 2\alpha$-val.

$EBF\sphericalangle = ABF\sphericalangle - ABE\sphericalangle = (180^\circ - \alpha - \alpha = 108^\circ - 2\alpha)$, ahol a számolás során a k_2 körben húrnégyszögek tételét és a k_1 körben pedig a kerületi szögek tételét alkalmaztuk.

Látható, hogy $EBF\sphericalangle + EPF\sphericalangle = 180^\circ$, így a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján P, B, E és F egy körön van. 3 pont

Mivel a P pont rajta van az XY szakasz felezőmerőlegesén, azt kéne még megmutatni, hogy a felezőmerőleges érinti P-ben a k kört. Mivel a felezőmerőleges és AF párhuzamos (mindkettő merőleges XY-ra), ezért azt kell csak megmutatni, hogy P felezi a k körön a megfelelő EF ívet, azaz $PE = PF$, vagyis EFP egyenlőszárú háromszög. Ez pedig egyszerű szögszámolással kijön (kihasználva, hogy YFA és XEA derékszögű háromszögek): $PFE\sphericalangle = YFA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$ és $PEF\sphericalangle = XEA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. Kezdő és Második felírják az $1; 2; 3; \ldots; 609; 610$ számokat egymás után egy papírra, majd a következő pasziánsz-játékot játszák:

- Kezdő a saját i-edik lépése során bekarikázza a legkisebb még be nem karikázott számot, majd
- Második a saját i-edik lépése során bekarikázza a Kezdő által utoljára bekarikázott számnál i-vel nagyobb számot.

  A játék elején a következő számokat karikázzák be rendre: $K \to 1$; $M \to 2$; $K \to 3$; $M \to 5$; $K \to 4$; $M \to 7$; $K \to 6$; $M \to 10$; $K \to 8$; $M \to 13$; $\ldots$

A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos már nem tud a szabályok betartásával újabb számot bekarikázni. Amikor a játék véget ér, hány szám lesz bekarikázva? **7 pont**

Megoldás.

Jelöljük a_i-vel a Kezdő, míg b_i-vel a Második által az i-edik lépésben bekarikázott számot. A feladat alapján $b_i = a_i + i$. Nyilván mindkét sorozat szigorúan monoton nő. Mivel $a_i + 1 \leqslant a_{i+1} \to \quad b_{i+1} = a_{i+1} + i + 1 \geqslant a_i + i + 2 = b_i + 2$, azaz Második két lépése között legalább 2 a különbség. Innen adódik, hogy amikor Kezdő jön, akkor az a_i-t követő, vele szomszédos számok között legfeljebb a legelsőt jelölhette már meg Második, azaz $a_{i+1} \leqslant a_i + 2$. Összefoglalva: $a_i + 1 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 2$

Ez a gondolat valamilyen formában. 1 pont

Most írjuk fel Kezdő és Második első pár lépését, és tegyünk megfigyeléseket (ezeket majd bizonyítjuk is)!

i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Kezdő lépése	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	4	6	$\boxed{8}$	9	11	12	14	16	17	19	$\boxed{21}$
Második lépése	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	7	10	$\boxed{13}$	15	18	20	23	26	28	31	$\boxed{34}$

A következők figyelhetőek meg: $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$ és $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$, valamint $a_{f_{2k}} = f_{2k+1} - 1$ és $b_{f_{2k}} = f_{2k+2} - 1$, ahol f_k a k-adik Fibonacci-szám. ($f_1 = f_2 = 1$; $f_3 = 2$; $f_4 = 3$; $f_5 = 5\ldots$)

A képletek $a_{f_{2k-1}}, b_{f_{2k-1}}$-re, illetve $a_{f_{2k}}, b_{f_{2k}}$-ra. 1+1 pont

A fenti állításokat (egyszerre, mivel külön-külön nehézkesen menne!) teljes indukcióval bizonyítjuk.

I. (Bázis) Mint látható az első pár k-ra igaz az állítás.

II. (Indukciós feltevés) Tegyük fel, hogy valamely k-ig $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$ és $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$, valamint $a_{f_{2k}} = f_{2k+1} - 1$ és $b_{f_{2k}} = f_{2k+2} - 1$ is teljesül.

III. (Indukciós lépés) Igaz-e, hogy ekkor $a_{f_{2k+1}} = f_{2k+2}$ és $b_{f_{2k+1}} = f_{2k+3}$, valamint $a_{f_{2k+2}} = f_{2k+3} - 1$ és $b_{f_{2k+2}} = f_{2k+4} - 1$ is teljesül?

Mivel az indukciós feltevés miatt $b_{f_{2k}} = f_{2k+2} - 1$, ezért amikor Második a saját f_{2k}-adik számát bekarikázza, akkor az ettől nem nagyobb számok közül pontosan $2f_{2k}$ van bekarikázva, azaz a nem bekarikázott számok száma (felhasználva $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$-t):

$$f_{2k+2} - 1 - 2f_{2k} = (f_{2k+2} - f_{2k}) - f_{2k} - 1 = f_{2k+1} - f_{2k} - 1 = f_{2k-1} - 1$$

Ezeket a nem bekarikázott számokat pontosan újabb $f_{2k-1} - 1$ lépés során rendre Kezdő fogja bekarikázni.

Másfelől mivel $b_{i+1} - b_i \geqslant 2$, ezért az $f_{2k+2} = b_{f_{2k}} + 1$ számot Második nem karikázhatja be, de akkor Kezdő újabb egy lépés (összesen f_{2k-1} lépés) után pontosan ezt a számot karikázza be, azaz $a_{f_{2k}+f_{2k-1}} = a_{f_{2k+1}} = f_{2k+2}$ és innen b_n képzési szabálya szerint $b_{f_{2k+1}} = f_{2k+2} + f_{2k+1} = f_{2k+3}$ (ahogy a bizonyítandó első pár állítja).

Tovább vizsgálódva (teljesen hasonlóan, mint az előbb) adódik, hogy amikor Második a saját f_{2k+1}-edik számát bekarikázza, akkor az ettől nem nagyobb számok közül pontosan $2f_{2k+1}$ van bekarikázva, azaz a nem bekarikázott számok száma:

$$f_{2k+3} - 2f_{2k+1} = (f_{2k+3} - f_{2k+1}) - f_{2k+1} = f_{2k+2} - f_{2k+1} = f_{2k}.$$

Ezeket a nem bekarikázott számokat pontosan újabb f_{2k} lépés során rendre Kezdő fogja bekarikázni.

Másfelől mivel $f_{2k+3} = b_{f_{2k+1}}$ számot Második már bekarikázta, a tőle eggyel kisebb ($f_{2k+3} - 1$) szám a legnagyobb még be nem karikázott szám f_{2k+3}-ig, azaz Kezdő az újabb f_{2k} lépése után pontosan ezt a számot karikázza be, azaz $a_{f_{2k+1}f_{2k}} = a_{f_{2k+2}} = f_{2k+3} - 1$ és innen b_n képzési szabálya szerint $b_{f_{2k+2}} = f_{2k+3} - 1 + f_{2k+2} = f_{2k+4} - 1$ (ahogy a bizonyítandó második pár állítja).

Ezzel a teljes indukciós bizonyítási séma helyessége miatt az állításunkat beláttuk.

A teljes indukciós bizonyításért. 3 pont

Mivel $233 = f_{13}$; $377 = f_{14}$; $610 = f_{15}$, ezért $b_{233} = 610$, azaz (mivel Kezdőnek van még egy lépése) Kezdő 233 + 1, Második 233 számot, vagyis ketten összesen $2f_{13} + 1 = 467$ számot karikáznak be.

A helyes válaszért. 1 pont

Összesen: **7 pont**