Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév

Kezdők és Haladók
I., II. és II. kategória

Feladatok és megoldások

A verseny az NTP-TV-15-0048 azonosító számú pályázat alapján a Nemzeti Tehetség Program, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, valamint az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Bolyai János Matematikai Társulat

Tartalomjegyzék

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Feladatok

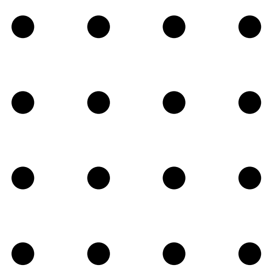
1. Számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2018}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\ldots-\frac{2}{2018}\right)+\left(-\frac{3}{4}+\ldots-\frac{3}{2018}\right)+\ldots+\left(-\frac{2017}{2018}\right).$$

6 pont

2. Az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak hány olyan hételemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege osztható 3-mal? **6 pont**

3. Egy 3×3-as négyzetrács rácspontjait kijelölve az alábbi 16 pontból álló ábrát kaptuk:



Legfeljebb hány pontot lehet kijelölni a 16 pontból úgy, hogy a pontok közül semelyik három ne essen egy egyenesre? **6 pont**

4. Egy e egyenesen felvesszük az A, B, C pontokat úgy, hogy $AB = 2$, $BC = 6$ és a B pont az AC szakasz belső pontja. Az e egyenes azonos partján az AC és BC szakaszokra olyan ACE és BCF háromszögeket rajzolunk, melyekre $AE = 6$ és $CE = 7$, illetve $BF = 8$ és $CF = 7$. Legyen D a BF és a CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg az $ABDE$ négyszög és a CDF háromszög területének arányát! **6 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2018}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\ldots-\frac{2}{2018}\right)+\left(-\frac{3}{4}+\ldots-\frac{3}{2018}\right)+\ldots+\left(-\frac{2017}{2018}\right).$$

6 pont

Megoldás: Rendezzük át az összeget a következőképpen:

$$-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\ldots-\left(\frac{1}{2018}+\frac{2}{2018}+\frac{3}{2018}+\frac{4}{2018}+\ldots+\frac{2017}{2018}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1+2}{3}-\frac{1+2+3}{4}+\frac{1+2+3+4}{5}+\ldots-\frac{1+2+3+\ldots+2017}{2018}$$ 3 pont

Használjuk az első n természetes szám összegére az $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ összefüggést! 1 pont

Ekkor a keresett összeg:

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}-\ldots-\frac{2017}{2}=\frac{1}{2}(-1+2-3+4-\ldots-2017)=\frac{1008-2017}{2}=-\frac{1009}{2}.$$

2 pont

2. Az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak hány olyan hételemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege osztható 3-mal? **6 pont**

Megoldás: Egy kilencelemű halmazban bármely hételemű részhalmaz és annak kételemű komplementere kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, ezért a hételemű részhalmazok helyett elegendő a kételemű részhalmazokkal foglalkozni. 2 pont

Mivel az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz elemeinek összege 45, amely 3-mal osztható, így ha egy hételemű részhalmazban az elemek összege osztható 3-mal, akkor a komplementerhalmaz két elemének összege is osztható 3-mal. 1 pont

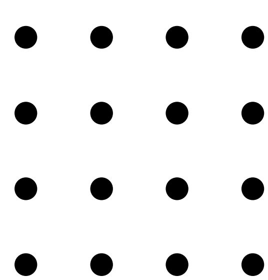
Két szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindkettő osztható 3-mal, vagy pedig az egyiknek 1, a másiknak 2 a 3-mal való osztási maradéka. Az első esetben a $3, 6, 9$ számok közül háromféleképpen készíthetünk kételemű halmazt; a második esetben az 1 maradékot adó és a 2 maradékot adó szám kiválasztására is 3 lehetőségünk van, így $3 \cdot 3 = 9$-féle részhalmaz készíthető. 2 pont

Összesen tehát 12 olyan részhalmaz van, amely megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Megjegyzések:

1. Ha a versenyző csak felsorolja a 12 megfelelő részhalmazt, de nem indokolja, hogy miért nincs több, akkor 3 pontot kaphat.
2. Hiányos felsorolás esetén a tanulónak nem adható pont!

3. Egy 3×3-as négyzetrács rácspontjait kijelölve az alábbi 16 pontból álló ábrát kaptuk:

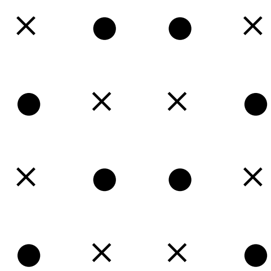


Legfeljebb hány pontot lehet kijelölni a 16 pontból úgy, hogy a pontok közül semelyik három ne essen egy egyenesre? **6 pont**

Megoldás:

a) Ha $4 \cdot 2 + 1 = 9$ pontot jelölünk ki, akkor a skatulyaelv értelmében pl. a 4 vízszintes helyzetű rácsegyenes valamelyikén lesz 3 olyan pont, amelyek egy rácsvonalra esnek. Így legfeljebb 8 pont jelölhető ki a kívánt feltételeknek megfelelően. 3 pont

b) 8 pont kijelölhető a feladat feltételének megfelelően. Az ábra egy ilyen esetet mutat be. (Vigyázni kell arra, hogy nemcsak a rácsegyenesek, hanem az átlós egyenesekre is legfeljebb két-két pont kerülhet!)

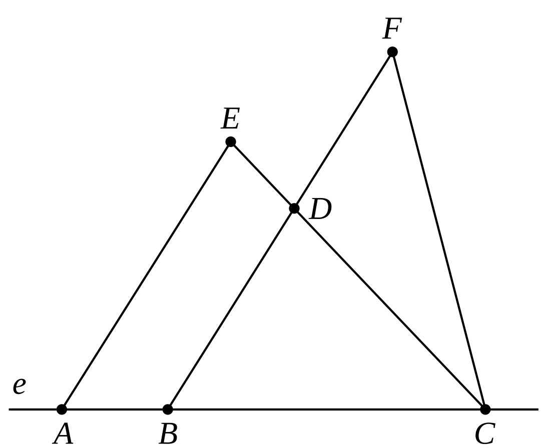


Megjegyzések:

1. Ha a versenyző csak azt mutatja meg, hogy az általa megadott 8 pontból álló konstrukció tovább nem bővíthető, akkor az első három pontot nem kaphatja meg, azaz összesen legfeljebb 3 pontot kaphat.
2. Ha a tanuló konstrukciója hibás, akkor a b) részre nem kaphat pontot.

4. Egy e egyenesen felvesszük az A, B, C pontokat úgy, hogy $AB = 2$, $BC = 6$ és a B pont az AC szakasz belső pontja. Az e egyenes azonos partján az AC és BC szakaszokra olyan ACE és BCF háromszögeket rajzolunk, melyekre $AE = 6$ és $CE = 7$, illetve $BF = 8$ és $CF = 7$. Legyen D a BF és a CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg az $ABDE$ négyszög és a CDF háromszög területének arányát! **6 pont**

Megoldás:



Az $AC = BF = 8$, $CE = CF = 7$ és $AE = BC = 6$ egyenlőségek alapján az ACE és BCF háromszögek egybevágók, így területük azonos. 3 pont

Mindkét alakzatból elvéve a BCD háromszöget, az $ABDE$ négyszöghöz, illetve a CDF háromszöghöz jutunk. 2 pont

Így ezek területe is azonos, vagyis a keresett területarány $t_{ABDE} : t_{CDF} = 1$. 1 pont

Kezdők I–II. kategória 2. forduló
Kezdők III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézban $AB \parallel CD$ és $AB \geq CD$. E és F a BC, illetve CD oldalak egy-egy belső pontja. Tudjuk, hogy $CE = CF$. Az EF egyenes az AD egyenest a G pontban metszi. Mekkorák a trapéz szögei, ha a DFG háromszög egyenlő szárú? **6 pont**

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén a következő számok között biztosan van legalább egy olyan, amelyik nem negatív: $4a^2 - 2b + 1$, $b^2 + 2c + 4$, és $c^2 - 8a + 1$. **8 pont**

3. Egy iskola igazgatója összehívta az osztályok küldöttjeit (összesen 32 tanulót), hogy választ kapjon az alábbi kérdésekre:

a) Kezdődjön-e fél órával később a tanítás?
b) Jó lenne-e, ha a testnevelés órák a tízórai szünet előtt lennének megtartva?
c) Szeretnék-e a tanulók, ha a rajzórák szerdánként lennének?

A szavazásról a következőket tudjuk. A korai testnevelés órákat csak 16-an támogatták, az első kérdésre 17, míg a harmadikra 25 igen szavazat érkezett. Az első kérdésre igennel válaszolók közül 8-an nem akartak korán tornázni, 6-an pedig szerdán rajzolni. Azok, akik a második és harmadik kérdésre is igennel válaszoltak 12-en voltak, de ennek a társaságnak a fele nem szerette volna, ha a tanítás később kezdődik. Hány küldött szavazott minden kérdésre igennel? Hányan szavaztak minden kérdésre nemmel? **8 pont**

4. Az osztály matematika órán a faktoriális fogalmát tanulta: egy n pozitív egész szám faktoriálisa az n-nél nem nagyobb pozitív egészek szorzatát jelenti, jelölése $n!$. Kiszámolták 1-től 20-ig a pozitív egész számok szorzatát, majd a kapott 19-jegyű számot felírták a táblára. Szünetben azonban valaki letörölt néhány számjegyet, így most a táblán a következő egyenlőség látható:

$$20! = 243290200\square1766\square\square\square\square\square,$$

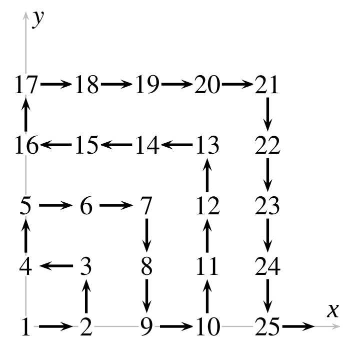
ahol a $\square$-ek helyén álló számjegyek már nem olvashatóak. **8 pont**

Határozd meg a hiányzó számjegyeket a szorzat kiszámolása nélkül!

5. Az első síknegyedben a $(0; 0)$ pontból kiindulva sorra vesszük az egész koordinátájú pontokat az ábra szerint. (Tehát például a $(2; 1)$ pont a 8-as sorszámot kapja.)

a) Határozd meg a $(12; 2017)$ pont sorszámát!

b) Melyik ponthoz rendeljük a 2018-as sorszámot?

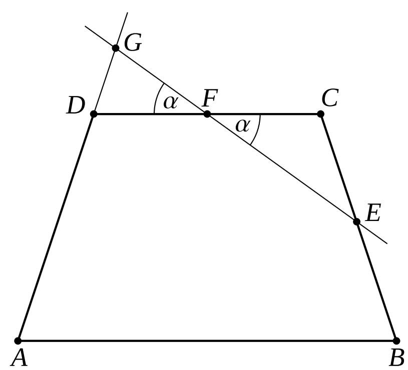


10 pont

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézban $AB \parallel CD$ és $AB \geq CD$. E és F a BC, illetve CD oldalak egy-egy belső pontja. Tudjuk, hogy $CE = CF$. Az EF egyenes az AD egyenest a G pontban metszi. Mekkorák a trapéz szögei, ha a DFG háromszög egyenlő szárú? **6 pont**

1. megoldás:



1 pont

$AB \parallel CD$ miatt az AB és CD oldalak közös felezőmerőlegese szimmetriatengelye az $ABCD$ trapéznak.

Használjuk fel, hogy a háromszög belső szögeinek összege $180°$, az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, továbbá azt, hogy az egyállású szögek azonos nagyságúak!

Legyen $DFG = \alpha$. Ekkor $CFE = DFG = \alpha$, mivel csúcsszögek. Három esetet vizsgálhatunk aszerint, hogy a DFG egyenlő szárú háromszögnek melyik oldal az alapja.

1. eset: Ha GD a háromszög alapja:

Ekkor a DFG egyenlő szárú háromszögben $FGD = FDG = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Tehát a trapézban $CDA = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

Az FEC egyenlő szárú háromszögben $ECF = 180° - 2\alpha$.

A szimmetria miatt a trapéz D, illetve C csúcsainál lévő belső szögek egyenlők tehát:

$$90° + \frac{\alpha}{2} = 180° - 2\alpha,$$

amiből $\alpha = 36°$.

Tehát a trapéz A, B, C, D csúcsainál lévő szögei $72°$, $72°$, $108°$, $108°$-osak. 2 pont

2. eset: Ha FG a háromszög alapja:

Ekkor a DFG egyenlő szárú háromszögben $GDF = 180° - 2\alpha$, így a trapézban $CDA = 2\alpha$.

Az FEC egyenlő szárú háromszögben a C csúcsnál $180° - 2\alpha$ nagyságú szög van.

A szimmetria miatt a trapéz D, illetve C csúcsainál lévő belső szögek egyenlők tehát:

$$2\alpha = 180° - 2\alpha,$$

amiből $\alpha = 45°$.

Tehát a trapéz szögei 90°-osak, vagyis a négyszög téglalap. 2 pont

3. eset: Ha DF a háromszög alapja:

Ekkor a DFG egyenlő szárú háromszögben $GDF = \alpha$, így a trapézban $CDA = 180° - \alpha$.

A CFE egyenlő szárú háromszögben $ECF = 180° - 2\alpha$.

A szimmetria miatt a trapéz D, illetve C csúcsainál lévő belső szögek egyenlők tehát:

$$180° - \alpha = 180° - 2\alpha.$$

Ebből $\alpha = 0°$ adódik.

Tehát ez az eset nem lehetséges, vagyis nem létezik a feltételeknek megfelelő trapéz. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás: Jelölje α az EFC szöget (ábra)! $CF = CE$ miatt $EFC\sphericalangle = FEC\sphericalangle$, így az EFC háromszögben $FCE\sphericalangle = 180° - 2\alpha$. 1 pont

Ebből – tekintetbe véve a szimmetrikus trapéz szögeire fennálló összefüggéseket – a trapéz minden szöge meghatározható α segítségével: $ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 180° - 2\alpha$, $ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 2\alpha$. 1 pont

Mivel $ADC\sphericalangle = 180° - 2\alpha$, így $FDG\sphericalangle = 2\alpha$. 1 pont

A DGF háromszögben $2\alpha \neq \alpha$, különben $\alpha = 0°$ lenne, ami lehetetlen, ezért csak $DGF\sphericalangle = \alpha$ vagy $DGF\sphericalangle = 2\alpha$ lehetséges. 1 pont

Az első esetben $\alpha + \alpha + 2\alpha = 4\alpha = 180°$, azaz a trapéz szögei 90°-osak (téglalap). 1 pont

A második esetben $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180°$, azaz a trapéz szögei 72°, 72°, 108°, 108°-osak. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén a következő számok között biztosan van legalább egy olyan, amelyik nem negatív: $4a^2 - 2b + 1$, $b^2 + 2c + 4$, és $c^2 - 8a + 1$. **8 pont**

Megoldás: Vizsgáljuk a három szám összegét:

$$S = 4a^2 - 2b + 1 + b^2 + 2c + 4 + c^2 - 8a + 1$$ 1 pont

Végezzük el az alábbi csoportosítást:

$$S = (4a^2 - 8a + 4) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 + 2c + 1)$$ 1 pont

Teljes négyzeteket kialakítva:

$$S = (2a - 2)^2 + (b - 1)^2 + (c + 1)^2$$ 3 pont

A kapott összeg biztosan nem negatív, mivel a tagok mindegyike legalább nulla. 1 pont

Ha a három szám összege nem negatív, akkor közöttük van legalább egy olyan, amelyik nem negatív, hiszen ha mindhárom szám negatív lenne, akkor az összegük is 0-nál kisebb lenne. 2 pont

Összesen: **8 pont**

3. Egy iskola igazgatója összehívta az osztályok küldöttjeit (összesen 32 tanulót), hogy választ kapjon az alábbi kérdésekre:

a) Kezdődjön-e fél órával később a tanítás?
b) Jó lenne-e, ha a testnevelés órák a tízórai szünet előtt lennének megtartva?
c) Szeretnék-e a tanulók, ha a rajzórák szerdánként lennének?

A szavazásról a következőket tudjuk. A korai testnevelés órákat csak 16-an támogatták, az első kérdésre 17, míg a harmadikra 25 igen szavazat érkezett. Az első kérdésre igennel válaszolók közül 8-an nem akartak korán tornázni, 6-an pedig szerdán rajzolni. Azok, akik a második és harmadik kérdésre is igennel válaszoltak 12-en voltak, de ennek a társaságnak a fele nem szerette volna, ha a tanítás később kezdődik. Hány küldött szavazott minden kérdésre igennel? Hányan szavaztak minden kérdésre nemmel? **8 pont**

1. megoldás: Tekintsük az alábbi táblázatban a lehetséges szavazatfajtákat!

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
i, i, i	i, i, n	i, n, i	i, n, n	n, i, i	n, i, n	n, n, i	n, n, n

A feltételek alapján:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 17 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &= 25 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 &= 16 \\ x_3 + x_4 &= 8 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_5 &= 12 \end{aligned}$$

4 pont

Az egyenletrendszert megoldva az egyes szavazattípusokra kapjuk, hogy:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 6, \quad x_6 = 1, \quad x_7 = 8$$

2 pont

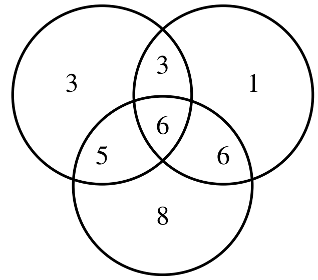
Tehát 6 küldött szavazott mindhárom kérdésre igennel. 1 pont

A kapott értékeket összeadva 32-t kapunk, tehát nem volt olyan küldött, aki minden kérdésre nemmel szavazott ($x_8 = 0$). 1 pont

Összesen: **8 pont**

2. megoldás: A feladat Venn-diagram felrajzolásával és kitöltésével is megoldható.

Az ábráról leolvasható, hogy 6 fő válaszolt mindhárom kérdésre igennel és nem volt olyan, személy aki minden kérdésre nemmel válaszolt volna.



Pontozás: Az ábrába **minden indoklással megadott helyesen beírt számért** 1 pont adható, további 1 pont jár annak megválaszolásáért, hogy nem volt olyan tanuló, aki minden kérdésre nemmel válaszolt. Az indoklás nélkül kitöltött Venn-diagramért és a feltett kérdések szöveges megválaszolásáért $3+1$ pont adható.

Összesen: **8 pont**

4. Az osztály matematika órán a faktoriális fogalmát tanulta: egy n pozitív egész szám faktoriálisa az n-nél nem nagyobb pozitív egészek szorzatát jelenti, jelölése $n!$. Kiszámolták 1-től 20-ig a pozitív egész számok szorzatát, majd a kapott 19-jegyű számot felírták a táblára. Szünetben azonban valaki letörölt néhány számjegyet, így most a táblán a következő egyenlőség látható:

$$20! = 243290200\square1766\square\square\square\square\square,$$

ahol a $\square$-ek helyén álló számjegyek már nem olvashatóak. **8 pont**

Határozd meg a hiányzó számjegyeket a szorzat kiszámolása nélkül!

Megoldás:

A 20! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 4. 1 pont

A 2 kitevője: $\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{4}\right]+\left[\frac{20}{8}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]=18$ (elég annyi is, hogy legalább 7). 1 pont

Így $10^4 \mid 20!$, de $10^5 \nmid 20!$, vagyis 20! pontosan 4 db nullára végződik. 1 pont

$\frac{20!}{10^4}$ osztható 8-cal, így az utolsó 3 jegyéből álló háromjegyű szám, azaz a $66\square$ is osztható 8-cal. Az egyetlen ilyen szám a 664. 2 pont

Mivel 20! osztható 9-cel, így a számjegyeinek összege is osztható 9-cel. Ha a hiányzó számjegyet x-szel jelöljük, akkor ez az összeg: $2+4+3+2+9+2+x+1+7+6+6+4=46+x$.

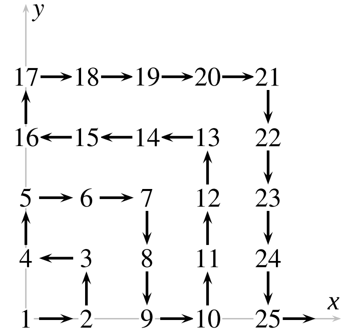
Ez alapján x egyetlen lehetséges értéke a 8. 2 pont

Tehát a keresett szám: 2 432 902 008 176 640 000. 1 pont

Összesen: **8 pont**

5. Az első síknegyedben a $(0;0)$ pontból kiindulva sorra vesszük az egész koordinátájú pontokat az ábra szerint. (Tehát például a $(2;1)$ pont a 8-as sorszámot kapja.)

a) Határozd meg a $(12;2017)$ pont sorszámát!
b) Melyik ponthoz rendeljük a 2018-as sorszámot?



10 pont

Megoldás:

a) Egy $(0; 2k-1)$ alakú pont sorszáma $(2k)^2$, mivel abba a pontba érve épp egy $2k-1$ élhosszúságú négyzet egész koordinátájú pontjait járjuk be. Tehát a $(0; 2017)$ pont sorszáma: $2018^2 = 4\ 072\ 324$. 3 pont

A $(12; 2017)$ pont pedig ennél 12-vel kisebb sorszámot kap, azaz $2018^2 - 12 = 4\ 072\ 312$-t. 2 pont

b) A legnagyobb 2018-nál kisebb négyzetszám a $44^2 = 1936$. A $(2k)^2$ alakú sorszámok az y-tengelyen helyezkednek el (lásd a) rész). Így az 1936-os sorszámot a $(0; 43)$ pont kapja. 2 pont

Emiatt a $(0; 44)$ pont sorszáma 1937, a $(44; 44)$ ponté pedig $1937 + 44 = 1981$. Innen még $2018 - 1981 = 37$-et kell lépni lefelé, így a 2018-as sorszámot a $(44; 7)$ ponthoz rendeljük. 3 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszögben az AB és BC oldalakra kifelé $ABDE$, illetve $BCFG$ négyzeteket szerkesztünk, majd megrajzoljuk a DG egyenest. Azt vesszük észre, hogy a DG egyenes párhuzamos az AC egyenessel.

Mekkora a háromszög BC oldala, ha tudjuk, hogy $AB = 10$ cm és $\alpha = 50°$? **10 pont**

2. Négy házaspár tagjait három csoportba osztjuk be úgy, hogy senki se kerüljön a párjával egy csoportba. Hányféleképpen tehető ez meg? (A személyeket megkülönböztetjük, a csoportokat nem. Csoport nem maradhat üresen.) **10 pont**

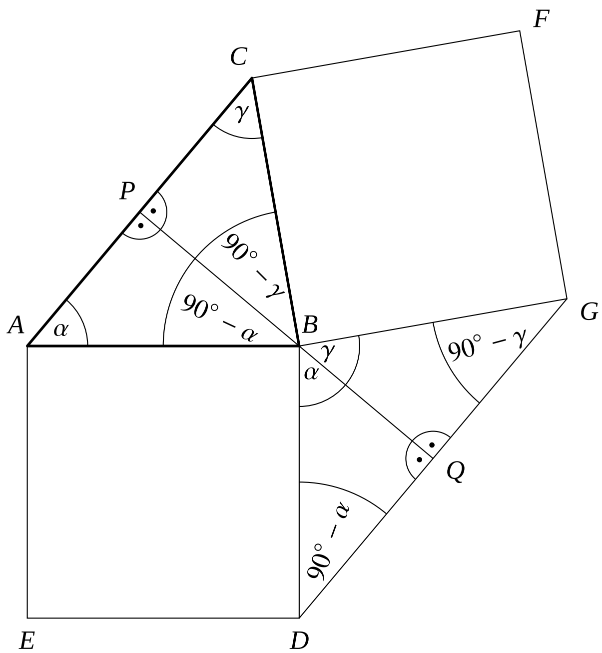
3. Dávid választ két különböző a és b pozitív egész számot, majd felírja a füzetébe az a, $a+2$, b, $b+2$ számokat. Ezután képezi az összes páronkénti szorzatot, és a kapott hat számot felírja a táblára. Hány négyzetszám kerülhet fel a táblára? **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszögben az AB és BC oldalakra kifelé $ABDE$, illetve $BCFG$ négyzeteket szerkesztünk, majd megrajzoljuk a DG egyenest. Azt vesszük észre, hogy a DG egyenes párhuzamos az AC egyenessel.

Mekkora a háromszög BC oldala, ha tudjuk, hogy $AB = 10$ cm és $\alpha = 50°$? **10 pont**

Megoldás: Készítsünk ábrát, és jelöljük a háromszög C-nél lévő szögét γ-val! 1 pont



A B csúcsból állítsunk merőlegest az AC oldalegyenesre! Az AC és DG egyenesek párhuzamossága miatt ez az egyenes a DG egyenesre is merőleges helyzetű. A kapott metszéspontokat az ábra szerint jelöljük P-vel és Q-val! 1 pont

Az ABP és BDQ derékszögű háromszögek átfogói $AB = BD$ miatt egyenlő hosszúak. Ezenkívül

$$QBD = 180^\circ - ABP - DBA =$$
$$= 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha$$

(itt hivatkozhatunk arra is, hogy $QBD\sphericalangle$ és $PAB\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek), így a szóban forgó két derékszögű háromszög szögei is megegyeznek, tehát a két háromszög egybevágó. 2 pont

Az egybevágóság alapján a $90^\circ - \alpha$ nagyságú szöggel szemközti befogók egyenlő hosszúak, ezért $PA = QB$. 1 pont

Hasonló gondolatmenettel látható, hogy a BCP és GBQ derékszögű háromszögekben $BC = GB$ és $GBQ\sphericalangle = \gamma$, így ez a két háromszög is egybevágó, ezért $PC = QB$. 2 pont

Az előbbiekből adódóan $PA = PC$, tehát az ABC háromszögben a BP magasságvonal és egyben oldalfelező merőleges is, ami azt jelenti, hogy a háromszög egyenlő szárú és $AB = CB$. 2 pont

A háromszög BC oldala tehát 10 cm hosszúságú. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Négy házaspár tagjait három csoportba osztjuk be úgy, hogy senki se kerüljön a párjával egy csoportba. Hányféleképpen tehető ez meg? (A személyeket megkülönböztetjük, a csoportokat nem. Csoport nem maradhat üresen.) **10 pont**

1. megoldás: Egy csoportot legfeljebb 4 személy alkothat, hiszen ellenkező esetben a skatulyaelv miatt valamely házaspár két tagja egy csoportba kerülne. 1 pont

A csoportlétszámok eloszlására így a következő lehetőségek vannak: $(4, 3, 1)$, $(4, 2, 2)$ vagy $(3, 3, 2)$. 1 pont

Az első esetben a 4-fős csoportba mindegyik házaspárból csak az egyik tagot választhatjuk be, és ezt $2^4 = 16$-féleképpen tehetjük meg. A megmaradt személyek között már nincsenek házaspárok, és közülük az egyfős csoportba bárkit kiválaszthatunk. Ezért összesen $16 \cdot 4 = 64$ lehetőség adódik. 2 pont

A második esetben a 4-fős csoport tagjait ismét 16-féleképpen választhatjuk ki, majd a további 4 személyt (akik között már nincs házaspár) 3-féleképpen oszthatjuk be két 2-fős csoportba. Tehát ebben az esetben összesen $16 \cdot 3 = 48$ lehetőség adódik. 2 pont

A harmadik esetben az első 3 tagú csoportot $4 \cdot 2^3 = 32$-féleképpen állíthatjuk össze, ugyanis a négy házaspárból 4-féleképpen választhatunk ki hármat, majd a három kiválasztott házaspárból

2^3-féleképpen képezhetünk egy háromtagú csoportot. A további csoportosításhoz még öten maradnak, akik közül ketten házaspárok. Egyiküknek kell a 2-fős csoportba kerülnie, és mellé már bárki kerülhet. Ez a kétfős csoport kialakítására $2 \cdot 3 = 6$ -féle lehetőséget biztosít. A megmaradó személyek között már nincsenek házaspárok, így ők fogják alkotni a másik 3-fős csoportot.

Mivel a 3-fős csoportok sorrendje nem számít, így ebben az esetben összesen $\frac{32 \cdot 6}{2} = 96$ lehetőség adódik. 3 pont

Összesen tehát $64 + 48 + 96 = 208$-féleképpen oszthatjuk csoportokba a házaspárokat a feladat követelményeinek megfelelően. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás: Legyenek az egyik házaspár tagjai A és A^*! A feladat feltétele szerint nekik külön csoportba kell kerülniük. A 8 személy részére kialakított 3 társaságot osztályozzuk az alábbiak szerint:

- A csoportja,
- A^* csoportja,
- A és A^*-ot sem tartalmazó csoport. 2 pont

A többi családnál a házaspár egyik másik tagjánál még szabadon eldönthetjük, hogy őt a három csoport közül melyikbe helyezzük el, de ezután a házaspár másik tagját már csak a maradék két csoportba oszthatjuk be. Így minden házaspár esetén $2 \cdot 3 = 6$, összesen pedig $6^3 = 216$ lehetőség adódik az emberek besorolására. 4 pont

Az így kiszámolt 216 eset között viszont vannak olyan esetek is, amikor a 3. csoport üres marad, mivel ekkor a házastársak felváltva az első két társaságban nyernek elhelyezést.

Ezen esetek száma $2^3 = 8$, mivel a házaspárok egyik tagjáról még eldönthetjük, hogy ő A vagy A^* mellé kerül, de a párja már csak a másik csoport tagja lehet. 2 pont

Tehát összesen $216 - 8 = 208$ megfelelő elosztás lehetséges. 2 pont

Összesen: **10 pont**

3. Dávid választ két különböző a és b pozitív egész számot, majd felírja a füzetébe az a, $a + 2$, b, $b + 2$ számokat. Ezután képezi az összes páronkénti szorzatot, és a kapott hat számot felírja a táblára. Hány négyzetszám kerülhet fel a táblára? **10 pont**

Megoldás: A táblára került négyzetszámok száma lehet:

0, például: $a = 1$ és $b = 5$ esetén: a 3, 5, 7, 15, 21, 35 szorzatok egyike sem négyzetszám. 1 pont

1, például: $a = 1$ és $b = 2$ esetén: a 2, 3, 4, 6, 8, 12 szorzatok közül a 4 az egyetlen négyzetszám. 1 pont

2, például: $a = 1$ és $b = 25$ esetén: a 3, 25, 27, 75, 81, 675 szorzatok közül a 25 és a 81 négyzetszám. 1 pont

A következőkben megmutatjuk, hogy kettőnél több négyzetszám nem kerülhet a táblára:

Tetszőleges $a \neq b$ pozitív számok esetén $a(a+2)$ és $b(b+2)$ egyike sem lehet négyzetszám, hiszen

$$a^2 < a^2 + 2a = a(a+2) < a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$
$$b^2 < b^2 + 2b = b(b+2) < b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$$ 2 pont

1. eset: ab négyzetszám.

Ekkor az $a(b+2)$ és $b(a+2)$ szorzatok közül egyik sem lehet négyzetszám.

Közülük bármelyik pontosan akkor lehetne négyzetszám, ha ab-vel vett szorzata is négyzetszám lenne (∗).

Viszont az $ab \cdot a(b+2) = a^2 b(b+2)$ átalakítás, és a korábbi gondolatmenet alapján a kapott kifejezés értéke nem lehet négyzetszám. 2 pont

2. eset: ab nem négyzetszám.

Ekkor az $a(b+2)$, $b(a+2)$, $(a+2)(b+2)$ számok közül legfeljebb kettő lehet négyzetszám.

Ennek igazolásához elég belátni, hogy például az $a(b+2)$ és $(a+2)(b+2)$ szorzatpárból legfeljebb az egyik lehet négyzetszám. Ha mindkettő négyzetszám lenne, akkor a szorzatuk is négyzetszám lenne. (∗)

Viszont az $a(b+2) \cdot (a+2)(b+2) = a(a+2)(b+2)^2$ átalakítás, és a korábbi gondolatmenet alapján a kapott kifejezés értéke nem lehet négyzetszám. 2 pont

A (∗)-gal jelölt gondolat megfogalmazása, és annak valamelyik részben történő helyes alkalmazása. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy osztályba 33 diák jár. Minden tanulót megkérdeztünk arról, hogy hány osztálytársának azonos vele a keresztnevének, illetve a vezetéknevének kezdőbetűje. Tanulónként a két-két választ felírva kiderült, hogy 0-tól 10-ig minden szám előfordult a válaszok között. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van az osztályban legalább két olyan diák, akinek ugyanazzal a betűvel kezdődik a vezetékneve és a keresztneve is! **10 pont**

2. Az (a_n) véges sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 20$, $a_2 = 5$, utolsó eleme $a_k = 0$ és $2 \leq n < k$ esetén

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{2}{a_n}.$$

Határozzuk meg azt a k indexet, amire $a_k = 0$! **10 pont**

3. Legyen $ABCD$ egység oldalú négyzet. Az AB, BC, CD, DA oldalakon jelöljünk ki olyan P, Q, R, S pontokat, hogy $AP + AS + CQ + CR = 2$. Bizonyítsuk be, hogy a PR és QS szakaszok merőlegesek egymásra! **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy osztályba 33 diák jár. Minden tanulót megkérdeztünk arról, hogy hány osztálytársának azonos vele a keresztnevének, illetve a vezetéknevének kezdőbetűje. Tanulónként a két-két választ felírva kiderült, hogy 0-tól 10-ig minden szám előfordult a válaszok között. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van az osztályban legalább két olyan diák, akinek ugyanazzal a betűvel kezdődik a vezetékneve és a keresztneve is! **10 pont**

Megoldás: Jelöljük m-mel ($m \in \mathbb{N}^+$) az osztály tanulói között előforduló vezetéknevek kezdőbetűinek számát, x_i-vel pedig az i-edik kezdőbetű előfordulásának gyakoriságát ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$)!

Hasonlóképpen jelöljük n-nel ($n \in \mathbb{N}^+$) a diákoknál előforduló keresztnevek kezdőbetűinek számát, y_j-vel pedig a j-edik kezdőbetű előfordulásának gyakoriságát ($j \in \{1; 2; \ldots; n\}$)!

Ekkor a tanulók száma alapján: $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 33$ és így $\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j = 66$. 1 pont

Használjuk fel, hogy amennyiben egy tanuló k számú ($k \in \mathbb{N}$) társáról nyilatkozik úgy, hogy egyik nevének megfelelő kezdőbetűje azonos az övével, akkor ezzel a vezeték- vagy keresztnév kezdettel összesen $k + 1$ diák rendelkezik. 1 pont

Mivel a diákok válaszai között a 0-tól 10-ig terjedő számok mind előfordultak, ezért az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 számok biztosan elemei az $\{x_i\} \cup \{y_j\}$ halmaznak. 1 pont

Viszont $66 = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j \geq 1 + 2 + \ldots + 11 = 66$ feltétel csak az egyenlőség fennállása esetén teljesülhet, ami azt jelenti, hogy az x_i, y_j számok az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 számok valamilyen sorrendjét adják és $m + n = 11$. 2 pont

Ekkor $m < 8$ és $m > 3$, hiszen $m \geq 8$ esetén $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1 + 2 + \ldots + 8 = 36 > 33$, illetve $m \leq 3$ esetén $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq 9 + 10 + 11 = 30 < 33$. 2 pont

Így a lehetséges $(m; n)$ párok: $(4; 7)$, $(5; 6)$, $(6; 5)$, $(7; 4)$, amelyek esetén a vezeték- és keresztnév kezdőbetű párosítások száma: 28, 30, 30, 28. 2 pont

Mivel a diákok száma (33) ezen esetek mindegyikénél több, ezért a skatulyaelv értelmében garantált, hogy legalább két tanuló monogramja teljesen azonos. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az (a_n) véges sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 20$, $a_2 = 5$, utolsó eleme $a_k = 0$ és $2 \le n < k$ esetén

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{2}{a_n}.$$

Határozzuk meg azt a k indexet, amire $a_k = 0$! **10 pont**

Megoldás: A rekurzív egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$a_{n+1}a_n = a_n a_{n-1} - 2. \qquad \text{2 pont}$$

Felírva ezt $n = 2, 3, \ldots, (k-1)$-re:

$$\begin{aligned} a_3a_2 &= a_2a_1 - 2 \\ a_4a_3 &= a_3a_2 - 2 \\ &\vdots \\ a_ka_{k-1} &= a_{k-1}a_{k-2} - 2 \end{aligned}$$

Adjuk össze a fenti egyenleteket! Ekkor

$$0 = a_ka_{k-1} = a_2a_1 - 2 \cdot (k-2), \qquad \text{6 pont}$$

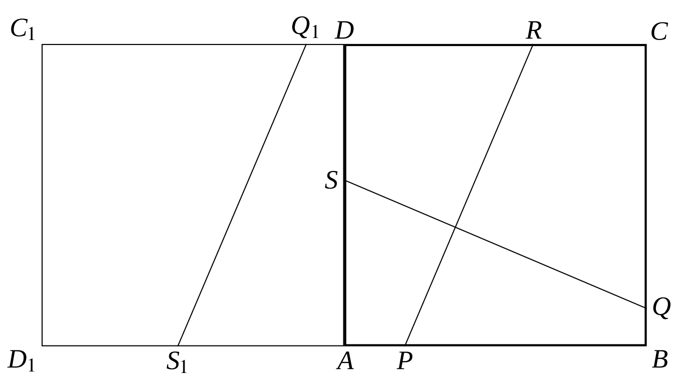
amiből

$$k = \frac{a_2a_1}{2} + 2 = 52. \qquad \text{2 pont}$$

Összesen: **10 pont**

3. Legyen $ABCD$ egység oldalú négyzet. Az AB, BC, CD, DA oldalakon jelöljünk ki olyan P, Q, R, S pontokat, hogy $AP + AS + CQ + CR = 2$. Bizonyítsuk be, hogy a PR és QS szakaszok merőlegesek egymásra! **10 pont**

Megoldás:



Mozgassuk el az AS és CQ szakaszokat úgy, hogy azok egy egyenesbe kerüljenek az AP és CR szakaszokkal! Ennek érdekében alkalmazzunk A középpontú $+90^\circ$-os elforgatást! A megfelelő képpontokat jelöljük azonos nagybetűvel és 1-es indexszel ellátva! 3 pont

Ekkor $AS_1 = AS$ és $CQ = C_1Q_1$.

Így $PS_1 = AP + AS_1 = AP + AS = 2 - (CQ + CR) = CC_1 - (C_1Q_1 + CR) = RQ_1$. 3 pont

Mivel $PS_1 = RQ_1$, $PS_1 \parallel RQ_1$ alapján a $PQRS$ négyszög paralelogramma, és emiatt $PR \parallel S_1Q_1$. 2 pont

Másrészt a +90°-os elforgatás miatt az S_1Q_1 és SQ szakaszok merőlegesek egymásra, ezért a PR és SQ szakaszokra ugyanez teljesül. Ezzel az állítást beláttuk. 2 pont

Összesen: **10 pont**

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy egy valós számnak és reciprokának négyzetösszege kettővel kisebb egy négyzetszámnál. Bizonyítsuk be, hogy a szám tetszőleges páratlanadik hatványához hozzáadva reciprokának ugyanezen hatványát, egész számot kapunk! **10 pont**

2. Legyen az ABC háromszög körülírt köre k! Jelöljük a k kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját D-vel, B-t nem tartalmazó CA ívének felezőpontját E-vel és C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontját F-fel! ABC háromszög beírt köre érintse a BC, CA és AB oldalakat rendre a K, L, M pontokban! Bizonyítsuk be, hogy DK, EL és FM egyenesek egy pontban metszik egymást! **10 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy létezik $N > 1$ egész szám a következő tulajdonsággal: minden $n > N$ egész szám felbontható olyan pozitív egészek összegére, amelyeknek legkisebb közös többszöröse nagyobb, mint n^{2018}. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Tegyük fel, hogy egy valós számnak és reciprokának négyzetösszege kettővel kisebb egy négyzetszámnál. Bizonyítsuk be, hogy a szám tetszőleges páratlanadik hatványához hozzáadva reciprokának ugyanezen hatványát, egész számot kapunk! **10 pont**

Megoldás: A belátandó állítás:

Ha $x^2 + \frac{1}{x^2} = l^2 - 2$ valamely nullától különböző x esetén, akkor $x^{2k+1} + \frac{1}{x^{2k+1}}$ egész. 1 pont

Vegyük észre, hogy $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, amiből a feltételt felhasználva következik, hogy $x + \frac{1}{x}$ egész. 2 pont

Továbbá tudjuk, hogy

$$x^{2k+1} + \frac{1}{x^{2k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{2k} - x^{2k-1} + \ldots - 1 + \ldots - \frac{1}{x^{2k-1}} + \frac{1}{x^{2k}}\right) \qquad \text{3 pont}$$

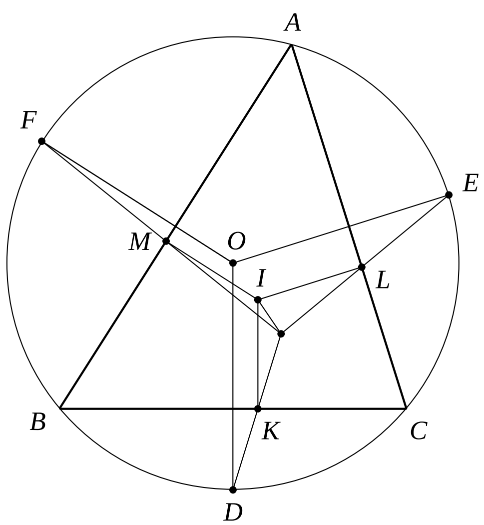
A második zárójel szimmetrikus összegének tagjait megfelelően párosítva és két tag összegének négyzeteként felírva egészek összegét kapjuk a második zárójelben is. 3 pont

Így egészek szorzataként állítottuk elő a kívánt összeget. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Legyen az ABC háromszög körülírt köre k! Jelöljük a k kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját D-vel, B-t nem tartalmazó CA ívének felezőpontját E-vel és C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontját F-fel! ABC háromszög beírt köre érintse a BC, CA és AB oldalakat rendre a K, L, M pontokban! Bizonyítsuk be, hogy DK, EL és FM egyenesek egy pontban metszik egymást! **10 pont**

1. megoldás: Jelöljük a körülírt kör középpontját O-val, a beírt kör középpontját pedig I-vel!



Az F-ben és E-ben húzott körérintők metszéspontját jelöle A', az F-ben és D-ben húzott körérintők metszéspontját B', az E-ben és D-ben húzott körérintők metszéspontját C'.

Az $A'B'C'$ háromszög beírt köre éppen az ABC körülírt köre. Mivel $A'B' \perp FO$ (a kör érintője merőleges az érintési pontba futó sugárra) és $AB \perp FO$ (szimmetria miatt a kör kerületén felvett két pont által meghatározott körív felezőpontját a kör középpontjával összekötő sugár merőlegesen felezi a két pont között húzott húrt), $A'B' \parallel AB$; hasonlóan $B'C' \parallel BC$; valamint $C'A' \parallel CA$. Mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak, így a szögeik egyenlők, vagyis $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$. 3 pont

$A'A$ és $B'B$ metszéspontját jelölje X. Belátjuk, hogy $C'C$ is átmegy X-en, amiből már következik, hogy az X középpontú, A-t A'-be, B-t B'-be vivő hasonlóság az ABC háromszöget (és annak minden pontját) az $A'B'C'$ háromszögbe (a pontot az annak megfelelő pontba) viszi. 1 pont

XA és XA' egy egyenesbe esik, $AC \parallel A'C'$, így XAC és $XA'C'$ párhuzamos szárú szögek, vagyis egyenlőek. A hasonlóság szögtartó, X képe X, A képe A', ezért az A-ból induló, XA-val XAC szöget bezáró félegyenes képe az A'-ből induló, XA'-vel $XAC = XA'C'$ szöget bezáró félegyenes. Erre illeszkedik C'. 2 pont

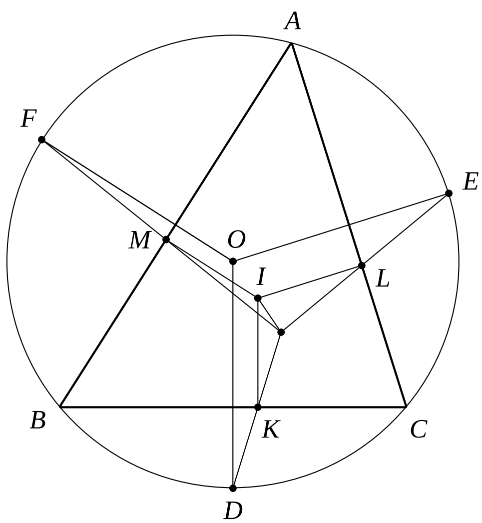
Hasonlóan, a B-ből induló, XB-vel XBC szöget bezáró félegyenes képe a B'-ből induló, XB'-vel $XBC = XB'C'$ szöget bezáró félegyenes, amelyre szintén illeszkedik C'. A hasonlóság illeszkedéstartó, így az AC és BC félegyenesek C metszéspontjának képe a megfelelő félegyenesek képének metszéspontja, C'. 2 pont

Mivel az X középpontú hasonlóság ABC-t $A'B'C'$-be viszi, az ABC háromszög minden pontját a neki megfelelő $A'B'C'$-beli pontba viszi. 1 pont

Esetünkben megfelelő pontpárok például a beírt kör oldalakkal vett érintési pontja is. Az ezeket összekötő egyenesek átmennek a hasonlóság középpontján, vagyis FM, DK és EL egy ponton, X-en mennek át. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás: Jelöljük a körülírt kör középpontját O-val, a beírt kör középpontját pedig I-vel! A körülírt kör sugarát jelölje ϱ, a beírt körét r.



$FO \perp AB$ (szimmetria miatt a kör kerületén felvett két pont által meghatározott körív felezőpontját a kör középpontjával összekötő sugár merőlegesen felezi a két pont között húzott húrt), $MI \perp AB$ (a beírt kör érintési pontja), azaz $FO \parallel MI$, hasonlóan $EO \parallel IL$, továbbá $FO = OE = \varrho$, $MI = IL = r$. $FOE\sphericalangle = MIL\sphericalangle$, mert párhuzamos szárú, ugyanolyan állású (körüljárású) szögek; mind az $FOE\triangle$, mind az $MIL\triangle$ egyenlő szárú, ugyanakkora a szárszögük, tehát a két háromszög hasonló (a hasonlóság egyik alapesete: két oldal aránya és a közbezárt szög), azaz a harmadik oldalpárjuk is párhuzamos. 3 pont

Ugyanígy teljesül, hogy $DOE\triangle \sim KIL\triangle$ és $DE \parallel KL$, illetve $FOD\triangle \sim MIK$ és $FD \parallel MK$. 2 pont

Mivel megfelelő oldalpárjaik párhuzamosak, $KLM\triangle \sim DEF\triangle$. 1 pont

Legyen DK és FM egyenesének metszéspontja X. Ekkor (párhuzamos oldalpárjaik miatt) $XKM\triangle \sim XDF\triangle$, és a hasonlóság középpontja X. Tekintsük ezt a hasonlóságot. 1 pont

Megmutatjuk, hogy az L pontot E-be viszi, amiből már következik, hogy X illeszkedik EL-re is.

Ehhez felhasználjuk, hogy a hasonlóság szögtartó.

$XKL\sphericalangle = XDE\sphericalangle$, $XML\sphericalangle = XFE\sphericalangle$, mert párhuzamos szárú azonos állású (körüljárású) szögpárok. Eszerint ha a hasonlóság során K képe D, akkor a K kezdőpontú, vele XKL szöget bezáró félegyenes képe a D kezdőpontú, XD-vel ugyanekkora (XDE) szöget bezáró félegyenes; illetve az M kezdőpontú, XM-mel XML szöget bezáró félegyenes képe az F kezdőpontú, XE-vel ugyanekkora (XFE) szöget bezáró félegyenes: KL félegyenes képe DE félegyenes, ML félegyenes képe pedig FE félegyenes. 2 pont

Mivel pedig (fél)egyenesek metszéspontjának képe a (fél)egyenesek képének metszéspontja, a hasonlóság az L-et az E-be viszi. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. megoldás: Jelölje a beírt kört b. Bármely két kör hasonló, így b és k is. 1 pont

Tekintsük azt a h hasonlóságot, amely b-t k-ba viszi. Legyen a hasonlóság középpontja X. 1 pont

Legyen a K, L, M pontok h szerinti képe rendre K', L', M'. Mivel b kör pontjainak képe k körre illeszkedik, K', L', M' illeszkedik k-ra. 1 pont

Szerkesszünk érintőt k-hoz a kapott pontokban.

Legyen a három érintő által közrezárt háromszög $A'B'C'$ (megfelelően az A, B, C pontoknak). 1 pont

Mivel az $A'B'C'$ és az ABC háromszög beírt körei érintési pontjai a h hasonlóság szerint egymásnak megfelelő pontpárok, ezért az ABC háromszög h szerinti képe éppen az $A'B'C'$ háromszög. 2 pont

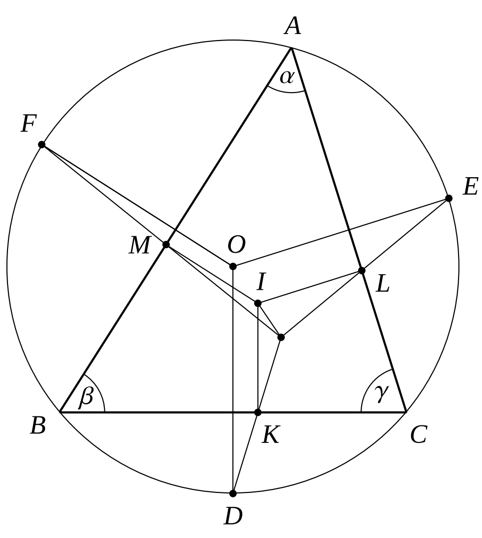
A hasonlóság során egyenes képe vele párhuzamos egyenes, ezért $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $AC \parallel A'C$. 1 pont

Mivel $M'O \perp A'B'$, azaz $A'B' \parallel AB$ miatt $M'O \perp AB$, továbbá $M'O$ a k egy sugara, ez csak úgy lehet, ha $M'O$ az AB szakaszfelező merőlegese (ha egy sugár merőleges egy húrra, akkor azt a szimmetria miatt felezi), ami azt jelenti, hogy az M' pont felezi az AB húrhoz tartozó íve(ke)t is, vagyis M' egybeesik F-fel. Ugyanígy, L' egybeesik E-vel, K' egybeesik D-vel. 2 pont

Mivel pedig $M'M$, $K'K$ és $L'L$ egyenesei egy pontban, az X-ben metszik egymást, így FM, EK, DK egyenesei egy ponton mennek át. 1 pont

Összesen: **10 pont**

4. megoldás: Jelöljük a körülírt kör középpontját O-val, a beírt kör középpontját pedig I-vel! Az ABC háromszög A, B és C csúcsánál lévő szögeket jelölje rendre α, β, γ! Az OFE háromszög egyenlő szárú, és $OF \perp AB$ valamint $OE \perp CA$ miatt $EOF\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$. 1 pont



Hasonlóan, az IML háromszög is egyenlő szárú, és $IM \perp AB$, valamint $IL \perp CA$ miatt $LIM\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$. 1 pont

Tehát $OEF\triangle \sim IML\triangle$, így $\dfrac{OF}{IM} = \dfrac{OE}{IL} = \lambda$. 2 pont

Ugyanígy megmutatható, hogy $ODE\triangle \sim IKL\triangle$, ezért $\dfrac{OE}{IL} = \dfrac{OD}{IK} = \lambda$. 2 pont

Legyen $DK \cap OI = P$, $EL \cap OI = Q$, $FM \cap OI = R$!

$OD \parallel IK$, így a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $\dfrac{PO}{PI} = \lambda$.

Hasonlóan látható, hogy $\dfrac{RO}{RI}$ és $\dfrac{QO}{QI}$ értéke szintén λ. 2 pont

Tehát $P = Q = R$, és ez a pont rajta van a DK, EL és FM egyenesek mindegyikén. 2 pont

Összesen: **10 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy létezik $N > 1$ egész szám a következő tulajdonsággal: minden $n > N$ egész szám felbontható olyan pozitív egészek összegére, amelyeknek legkisebb közös többszöröse nagyobb, mint n^{2018}. **10 pont**

Megoldás: Az állítást általánosabban, a 2018 helyére tetszőleges k pozitív egész számot írva bizonyítjuk be. **(Általánosítás: 0 pont, mivel tetszőleges kitevőre a bizonyítás hasonló elveken alapul.)**

Legyen $p_1(=2) < p_2(=3) < p_3(=5) < \ldots < p_{k+1}$ az első $k+1$ prímszám (mivel végtelen sok prímszám van, ezeket minden k-ra megválaszthatjuk), és bebizonyítjuk, hogy

$$N = 2^{k+1} p_1^{k+1} p_2^k \ldots p_k^2 p_{k+1}$$

megfelel. A későbbiekhez jegyezzük fel, hogy ez maga után vonja azt, hogy

$$N > 2 p_1 p_2 \ldots p_k p_{k+1}.$$

(Megfelelő korlát megadása: 2 pont, más gondolatmenetek más korlátokhoz vezethetnek. A 2 pont akkor is jár, ha a tanuló explicite nem számol ki korlátot, de a levezetéséből világos, hogy ilyen korlát létezik. Ez befejező lépés is lehet.)

Legyen $n > N$ rögzített. Az alábbiakban előállítjuk n egy pozitív egészek összegére történő felbontását, majd megmutatjuk, hogy az előálló legkisebb közös többszörös nagyobb, mint n^k.

Legyen a_1 az a legnagyobb 2-hatvány, amely nem nagyobb $\frac{n}{2}$-nél (ekkor a_1 nagyobb, mint $\frac{n}{4}$), a_2 az a legnagyobb 3-hatvány, amely nem nagyobb $\frac{n}{4}$-nél (ekkor a_2 nagyobb, mint $\frac{n}{12}$), és általában, minden $k+1$-nél nem nagyobb j pozitív egészre legyen a_j az a legnagyobb hatványa p_j-nek, amely nem nagyobb $\frac{n}{2p_1 \ldots p_{j-1}}$-nél (ekkor a_j nagyobb, mint $\frac{n}{2p_1 \ldots p_j}$).

Állítjuk, hogy az így kapott $a_1, \ldots, a_{k+1}$ számok összege kisebb, mint n. Valóban, kihasználva, hogy minden szóban forgó prím legalább 2, az összegük legfeljebb

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2p_1} + \frac{n}{2p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{2p_1 \ldots p_k} < n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2}}\right) < n$$

a mértani sorozat tagjainak összegzéséből.

Vegyük tehát n-nek a következő felbontását:

$$n = a_1 + \ldots + a_{k+1} + 1 + \ldots + 1,$$

annyi 1-essel kiegészítve, amennyi kell.

(A korláthoz tartozó felbontás kidolgozása: 5 pont.)

Mivel $a_1, \ldots, a_{k+1}$ különböző prímhatványok, a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk, ami tehát így

$$a_1 \ldots a_{k+1} > \left(\frac{n}{2p_1}\right) \cdot \left(\frac{n}{2p_1p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n}{2p_1 \ldots p_{k+1}}\right) = \frac{n^{k+1}}{N} > n^k,$$

ezzel a bizonyítás kész.

(Annak igazolása, hogy a megadott felbontás elég nagy legkisebb közös többszöröst ad: 3 pont.)

Összesen: **10 pont**

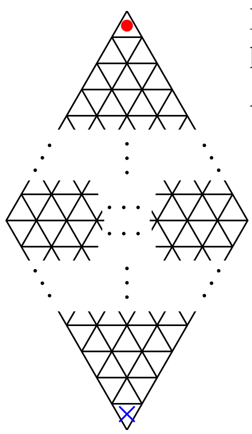
Haladók I. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb minden élének hossza egész szám. A hasábnak van 30 és 13 területegységű lapja (alaplap vagy oldallap). Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? **7 pont**

2. Állítsuk elő az 1-et 2017 négyzetszám reciprokának összegeként, ahol a négyzetszámok között legalább 600 különböző szám fordul elő! **7 pont**

3.



Egy rombusz alakú játéktáblát felosztunk az alábbi ábra alapján $2n^2$ szabályos háromszögre. (*A rombusznak* 60° *és* 120°*-os szögei vannak!*) A két játékos, Anna és Balázs, a táblán a következő szabályok szerint játszanak:

- Anna kezd a saját kör alakú bábujával, amely a rombusz megjelölt „fölső csúcsában” van.
- Egy lépésével egy élben szomszédos mezőre lép.
- Majd Balázs lép hasonlóan a saját „alsó csúcsnál” lévő $\times$ alakú bábujával, és ezután a játékosok felváltva lépnek a saját bábuikkal.
- A játékot az nyeri…
  - … aki a másik bábuját leüti (vagyis arra a mezőre lép a saját bábujával, ahol épp a másiké áll),
  - … vagy aki a saját bábuját eljuttatja az ellenfél kezdő pozíciójára.

Okos játék esetén Anna, vagy Balázs nyer? **7 pont**

4. Zsuzsi különleges karácsonyi ajándékkal lepte meg Petit. Szerencsesütiket sütött és ezeket felfűzte három cérnaszálra, minden cérnaszálon egymás alá négyet, majd a cérnákat egy hurkapálcára kötötte, az ábrán látható módon. Minden szerencsesütiben más-más jókívánság található. Az a szabály, hogy Peti egy adott cérnaszálról mindig csak a legalsó sütit eheti meg. Ha Peti elfogyaszt egy szerencsesütit, a jókívánságot kiragasztja a falra, sorban egymás mellé. Peti úgy gondolja, hogy a jókívánságok legalább 35 000-féle sorrendben követhetik egymást, Zsuzsi viszont azt állítja, hogy a jókívánságok lehetséges sorrendjeinek száma kevesebb, mint 35 000.

Kinek van igaza? **7 pont**

5. Egy r sugarú kör átmérőjét 45°-os szögben metszi a kör AB húrja a C pontban. Bizonyítsuk be, hogy $AC^2 + BC^2 = 2r^2$! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb minden élének hossza egész szám. A hasábnak van 30 és 13 területegységű lapja (alaplap vagy oldallap). Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? **7 pont**

Megoldás: Az alaplap derékszögű háromszög oldalainak pitagoraszi számhármasoknak kell lenni. 1 pont

Ha a 13 területű lap alaplap lenne, akkor $ab = 26$-nak kellene teljesülni, ahol a és b a derékszögű háromszög befogói. 1 pont

26 kétféle módon írható fel két egész szorzataként: $1 \cdot 26$ vagy $2 \cdot 13$, de sem az 1, sem a 2 nem lehet pitagoraszi számhármas tagja. 1 pont

Tehát a 13 oldallap, $13 = 1 \cdot 13$, ezek közül csak a 13 lehet a derékszögű háromszög oldala, ezért a hasáb magassága 1 egység. 1 pont

A 30 nem lehet oldallap területe, mert akkor az 1 egység magasság miatt az alapél lenne 30, és ez a 13-mal nem alkot pitagoraszi számhármast. 1 pont

Így az alap derékszögű háromszög területe 30. Ez meg is valósul 5 és 12 egység befogókkal és 13 egység hosszú átfogóval. 1 pont

A felszín 90, a térfogat 30 egység. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Állítsuk elő az 1-et 2017 négyzetszám reciprokának összegeként, ahol a négyzetszámok között legalább 600 különböző szám fordul elő! **7 pont**

Megoldás: Először előállítjuk az 1-et négy darab $\frac{1}{4}$ összegeként. 1 pont

Az egyik $\frac{1}{4}$-et helyettesítjük 4 darab $\frac{1}{16}$-dal, majd az egyik $\frac{1}{16}$-ot 4 darab $\frac{1}{64}$-del és így tovább. 2 pont

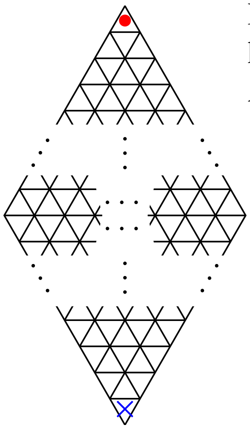
A törtek száma minden lépésnél hárommal nő. 1 pont

Mivel a 4 és a 2017 hárommal osztva 1 maradékot ad, ezért eljuthatunk ezekkel a lépésekkel 2017 négyzetszámig. 1 pont

A lépések száma legyen k. Felírható az alábbi egyenlet: $4 + 3k = 2017$, $k = 671$. 1 pont

Így 672 különböző négyzetszámot kaptunk, azaz megfeleltünk a feltételeknek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. 

Egy rombusz alakú játéktáblát felosztunk az alábbi ábra alapján $2n^2$ szabályos háromszögre. (*A rombusznak* 60° *és* 120°*-os szögei vannak!*) A két játékos, Anna és Balázs, a táblán a következő szabályok szerint játszanak:

- Anna kezd a saját kör alakú bábujával, amely a rombusz megjelölt „fölső csúcsában” van.
- Egy lépésével egy élben szomszédos mezőre lép.
- Majd Balázs lép hasonlóan a saját „alsó csúcsnál” lévő $\times$ alakú bábujával, és ezután a játékosok felváltva lépnek a saját bábuikkal.
- A játékot az nyeri…
  - … aki a másik bábuját leüti (vagyis arra a mezőre lép a saját bábujával, ahol épp a másiké áll),
  - … vagy aki a saját bábuját eljuttatja az ellenfél kezdő pozíciójára.

Okos játék esetén Anna, vagy Balázs nyer? **7 pont**

Megoldás: Színezzük ki a táblát „sakktáblaszerűen”! Vagyis két, élben szomszédos mező kapjon különböző (fekete vagy fehér) színt. Ekkor a játék minden lépése során ellentétes színű mezőre léphetünk csak.

A két start-pozíció különböző színű, így mindig Anna lép olyan színű mezőre, ahol éppen akkor Balázs áll, míg Balázs mindig más színű mezőre lép, mint akkor éppen Anna színe, így csak Anna tudja leütni Balázs bábuját. 4 pont

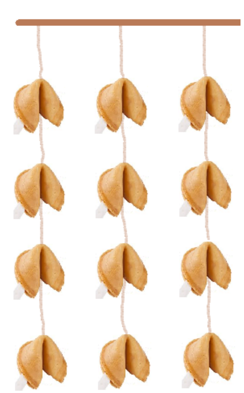
(Ha ez a fenti gondolat – *Balázs, ha összejátszanának sem tudná leütni Anna bábuját, így Balázs nem tudja akadályozni Annát semmilyen lépésében* – nincs bizonyítva, összesen legfeljebb 3 pont adható.)

Bár Balázs el tud menekülni azelől, hogy Anna leüsse a bábuját, ekkor viszont Anna belép Balázs start-pozíciójába pontosan $4n-3$ lépés alatt, és Balázs nem tudja ennél kevesebb lépés alatt elérni a saját célját. 2 pont

Vagyis okos játék esetén *Anna nyer*. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Zsuzsi különleges karácsonyi ajándékkal lepte meg Petit. Szerencsesütiket sütött és ezeket felfűzte három cérnaszálra, minden cérnaszálon egymás alá négyet, majd a cérnákat egy hurkapálcára kötötte, az ábrán látható módon. Minden szerencsesütiben más-más jókívánság található. Az a szabály, hogy Peti egy adott cérnaszálról mindig csak a legalsó sütit eheti meg. Ha Peti elfogyaszt egy szerencsesütit, a jókívánságot kiragasztja a falra, sorban egymás mellé. Peti úgy gondolja, hogy a jókívánságok legalább 35 000-féle sorrendben követhetik egymást, Zsuzsi viszont azt állítja, hogy a jókívánságok lehetséges sorrendjeinek száma kevesebb, mint 35 000.



Kinek van igaza? **7 pont**

Megoldás: A 12 jókívánságot 12!-féle sorrendben lehetne felragasztani, ha nem lenne a szabály. 1 pont

A szabály miatt az egymás felett lévő jókívánságok csak egyféle sorrendben követhetik egymást, így minden esetet annyiszor számoltunk, ahányszor az egymás felett lévő 4-4 jókívánságot sorba rakhatjuk. 2 pont

Így a lehetőségek száma: $\dfrac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$ 2 pont

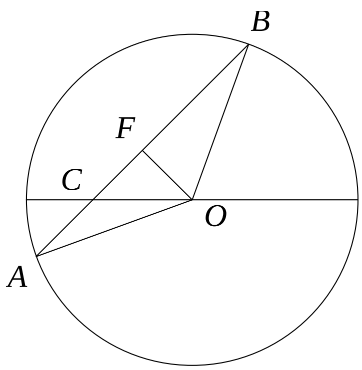
A számolás alapján a lehetőségek száma: 34 650. 1 pont

Tehát Zsuzsinak van igaza. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Egy r sugarú kör átmérőjét $45°$-os szögben metszi a kör AB húrja a C pontban. Bizonyítsuk be, hogy $AC^2 + BC^2 = 2r^2$! **7 pont**

Megoldás: Legyen F az AB húr felezőpontja.



Mivel FO merőleges AB-re, ezért a COF háromszög egyenlő szárú és derékszögű, tehát $CF = OF$. 1 pont

$$AC^2 + BC^2 = (AF - CF)^2 + (BF + CF)^2 = \qquad \text{1 pont}$$

$$= (AF - OF)^2 + (BF + OF)^2 = \qquad \text{1 pont}$$

$$= AF^2 + OF^2 - 2 \cdot AF \cdot OF + BF^2 + OF^2 + 2 \cdot BF \cdot OF \qquad \text{1 pont}$$

Mivel $AF = BF$, ezért $AC^2 + BC^2 = AF^2 + OF^2 + BF^2 + OF^2$. 1 pont

Felhasználva Pitagorasz tételét az AOF és BOF háromszögekben: $AC^2 + BC^2 = 2r^2$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 2. forduló

Feladatok

1. 2 018 000 Ft-ot szeretnénk 1000, 2000, és 5000 Ft-os papírpénzek felhasználásával kifizetni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik pénzből elegendően sok van a pénztárcánkban? **7 pont**

2. Adott egy egyenlő szárú háromszög, továbbá egy olyan kör, amelynek középpontja rajta van a háromszög egyik szárán, és érinti a háromszög alapját. A körre illeszkedik a háromszög alappal szemközti csúcsa és a súlypontja is. Határozzuk meg a háromszög szögeit! **7 pont**

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$x^2 \le \{x + 2018\} \cdot (2[x] + \{x\})$$

(Az $[a]$ kifejezés az a szám egészrészét adja meg, amely definíció szerint az a számnál nem nagyobb legnagyobb egész számot jelenti. Az $\{a\}$ szám az a szám törtrészét határozza meg, amelyet úgy kaphatunk meg, hogy az a valós számból kivonjuk ez egészrészét.) **7 pont**

4. Tekintsük azt a legbővebb halmazt, amelynek az elemei olyan pozitív egész számok, amelyek prímtényezős felbontásában csak az első 2018 darab prímszám közül fordulhatnak elő prímszámok, és mindegyik előforduló prím az első hatványon szerepel. Igazoljuk, hogy ennek a halmaznak megadható 2^{2017} elemű részhalmaza úgy, hogy a részhalmazból bármely két elemnek 1-nél nagyobb a legnagyobb közös osztója, de $\left(2^{2017}+1\right)$-elemű ilyen tulajdonságú részhalmaza már nincs! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. 2 018 000 Ft-ot szeretnénk 1000, 2000, és 5000 Ft-os papírpénzek felhasználásával kifizetni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik pénzből elegendően sok van a pénztárcánkban? **7 pont**

Megoldás: A feladat a $2018 = a + 2b + 5c$ diofantoszi egyenlet nemnegatív megoldásainak számát kéri. A c értékei szerint vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket. 1 pont

a	3	1	8	6	4	2	0	13	11	9	...	1
b	0	1	0	1	2	3	4	0	1	2	...	6
c	403	403	402	402	402	402	402	401	401	401	...	401
esetek száma		2					5					7

a	18	...	0	23	...	1	...	2013	...	1	2018	...	0
b	0	...	9	0	...	11	...	0	...	1006	0	...	1009
c	400	...	400	399	...	399	...	1	...	1	0	...	0
esetek száma			10			12				1007			1010

2 pont

Megfigyelhető, hogy az egymást követő esetek (c paritásától függően) 2-vel, illetve 3-mal növelik a lehetőségek számát. 2 pont

Így

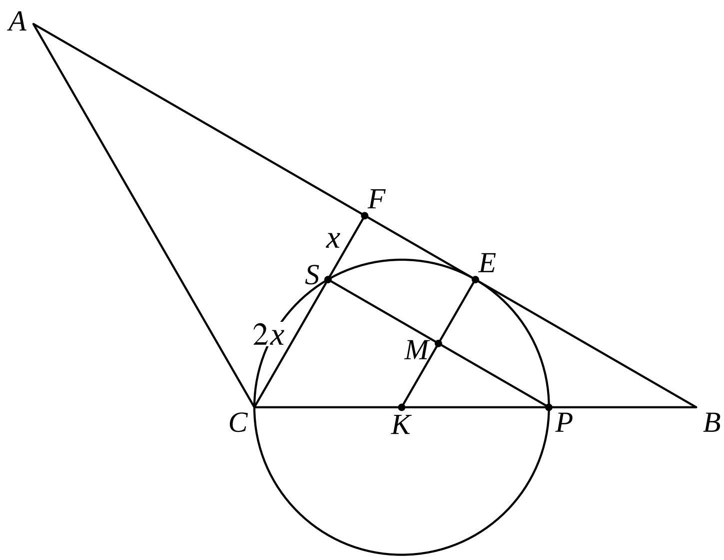
$$2 + 5 + 7 + 10 + 12 + \ldots + 1007 + 1010 =$$
$$= \frac{(2 + 1007) \cdot 202}{2} + \frac{(5 + 1010) \cdot 202}{2} = 101 \cdot (1009 + 1015) = 204\,424$$

lehetőség adódik. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Adott egy egyenlő szárú háromszög, továbbá egy olyan kör, amelynek középpontja rajta van a háromszög egyik szárán, és érinti a háromszög alapját. A körre illeszkedik a háromszög alappal szemközti csúcsa és a súlypontja is. Határozzuk meg a háromszög szögeit! **7 pont**

Megoldás: A háromszög csúcsai legyenek A, B, C (AB az alap), a súlypont S, a kör középpontja K, a kör C-vel átellenes pontja P, az alap felezőpontja F, a kör és az alap érintési pontja E, a KE és az SP szakaszok metszéspontja M.



Az FC súlyvonal egyben magasság is, így FC merőleges AB-re. Legyen $SF = x$, ekkor $SC = 2x$. 1 pont

Thalész tétele szerint $CSP\sphericalangle = 90^\circ$, így SP párhuzamos FB-vel. 1 pont

KE merőleges AB-re, ezért a KM szakasz merőleges SP-re. 1 pont

Az MKP háromszög és az SCP háromszög hasonlók, a hasonlóság aránya $KP : CP = 1 : 2$. Így $KM = \frac{1}{2}SC = x$. 1 pont

Az $SFEM$ négyszög téglalap, így $ME = SF = x$, így a kör sugara $KP = KE = KM + ME = 2x$. 1 pont

Tehát az MKP háromszög KP átfogója kétszerese az MK befogónak, ezért $MPK\sphericalangle = 30^\circ$, 1 pont

mivel a $CBA\sphericalangle$ egyállású az $MPK\sphericalangle$-gel, ezért ez utóbbi is 30°.

Tehát az ABC háromszög alapon fekvő szögei 30°-osak, a szárak szöge pedig 120°. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Másik megoldás: Mivel CS a kör húrja, így a kör középpontja (K) illeszkedik CS szakaszfelező merőlegesére. 1 pont

Ez a merőleges egyrészt felezi CS-t, azaz átmegy a súlyvonal C-hez közelebbi harmadolópontján, 1 pont

másrészt párhuzamos a CF-re ugyancsak merőleges alappal. 1 pont

Emiatt K harmadolja a CB oldalt. 1 pont

Eszerint $KB = 2CK = 2r = 2KE$. 1 pont

Azaz $KBE\sphericalangle = 30^\circ$, ezért az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge 30°. 1 pont

A háromszög szögei 30°, 30°, 120°. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$x^2 \le \{x + 2018\} \cdot (2[x] + \{x\})$$

(Az $[a]$ kifejezés az a szám egészrészét adja meg, amely definíció szerint az a számnál nem nagyobb legnagyobb egész számot jelenti. Az $\{a\}$ szám az a szám törtrészét határozza meg, amelyet úgy kaphatunk meg, hogy az a valós számból kivonjuk ez egészrészét.) **7 pont**

Megoldás: A definíció alapján észrevehetjük, hogy $\{x + 2018\} = \{x\}$. 1 pont

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához $[x]^2$-et adva és a jobb oldali zárójelet felbontva az

$$[x]^2 + x^2 \leq \{x\}^2 + 2[x]\{x\} + [x]^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. 2 pont

Az azonosságot észrevéve

$$[x]^2 + x^2 \leq (\{x\} + [x])^2. \qquad \text{1 pont}$$

A zárójelben lévő kifejezés éppen az x valós számot jelenti, 1 pont
így az $[x]^2 \leq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, 1 pont
ami $x \in [0; 1[$ esetén teljesül. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Tekintsük azt a legbővebb halmazt, amelynek az elemei olyan pozitív egész számok, amelyek prímtényezős felbontásában csak az első 2018 darab prímszám közül fordulhatnak elő prímszámok, és mindegyik előforduló prím az első hatványon szerepel. Igazoljuk, hogy ennek a halmaznak megadható 2^{2017} elemű részhalmaza úgy, hogy a részhalmazból bármely két elemnek 1-nél nagyobb a legnagyobb közös osztója, de $\left(2^{2017} + 1\right)$-elemű ilyen tulajdonságú részhalmaza már nincs! **7 pont**

Megoldás: Minden prímszám esetén kétféleképpen dönthetünk, vagy szerepeltetjük egy szám felbontásában, vagy nem, ezért a legbővebb halmaznak 2^{2018} eleme van. 1 pont

Vegyük az összes számot, amelynek a felbontásában szerepel a 2. A többi prím esetén kétféleképpen dönthetünk, ezért 2^{2017} ilyen szám van. Ezek közül bármely kettőnek legalább 2 a legnagyobb közös osztója. 2 pont

Rendezzük a halmaz elemeit párokba. Egy szám párja az a szám legyen, amelynek prímtényezős felbontásában pont azok a prímszámok szerepelnek, amelyek az eredeti számban nem szerepelnek. 2 pont

Így 2^{2017} (rendezett) pár keletkezik. Ha $2^{2017} + 1$ számot veszünk az alaphalmazból, akkor biztos lesz egy pár, amelynek mindkét tagja szerepel, de ezek legnagyobb közös osztója 1. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy minden irányban végtelen négyzethálós papírlap mindegyik mezőjébe egy-egy pozitív egész számot kell írnunk a következő feltételekkel:

- Az n szám éppen n-szer forduljon elő (azaz 1 darab 1-es, 2 darab 2-es stb. szerepeljen a lapon).
- Két tetszőleges, közös oldalú mezőbe kerülő számok különbsége kisebb legyen egy előre megadott k számnál.

Mi az a legkisebb egész k, amelyre a kitöltést el lehet végezni? **7 pont**

2. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. Legyenek A' a BCD, B' az ACD, C' az ABD és D' az ABC háromszög súlypontjai, míg F az AB, G a BC, H a CD és I a DA oldal felezőpontja.

Igazoljuk, hogy a $C'FD'GA'HB'I$ nyolcszög területe az $ABCD$ négyszög területének és az $A'B'C'D'$ négyszög területének mértani közepe! **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy a 2018 elemű $H = \{1!; 2!; 3!; \ldots; 2017!; 2018!\}$ halmazból elhagyhatunk két elemet úgy, hogy a megmaradó 2016 darab elem szorzata négyzetszám legyen! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy minden irányban végtelen négyzethálós papírlap mindegyik mezőjébe egy-egy pozitív egész számot kell írnunk a következő feltételekkel:

- Az n szám éppen n-szer forduljon elő (azaz 1 darab 1-es, 2 darab 2-es stb. szerepeljen a lapon).
- Két tetszőleges, közös oldalú mezőbe kerülő számok különbsége kisebb legyen egy előre megadott k számnál.

Mi az a legkisebb egész k, amelyre a kitöltést el lehet végezni? **7 pont**

Megoldás: Az 1-est tartalmazó mezőnek négy másik mezővel van közös oldala, de csak 2 darab 2-esünk van. Így az 1-es mellé 2-nél nagyobb szám is kerül majd, tehát különbségük legalább 2 lesz, így k legalább 3 lesz. 1 pont

$k = 3$ esetén a kitöltés elvégezhető: A négyzetháló egyik egyenesével a papírlapot két félsíkra osztjuk. Az egyik félsík mezőibe csak páratlan, a másik félsík mezőibe csak páros számokat írunk. Az 1-est és a 2-eseket a határegyenes mentén helyezzük el úgy, hogy az egyik 2-esnek legyen szomszédos oldala az 1-essel és a másik 2-essel is. Az 1-es fölé és mellé 3-asokat írunk, ezek fölé és mellé 5-ösöket és így tovább. Hasonlóan helyezzük el a páros számokat a másik félsíkban.

			7			
		7	5	7		
	7	5	3	5	7	
7	5	3	1	3	5	7
6	4	2	2	4	6	
	6	4	4	6		
		6	6			

4 pont

Az egyező számokat tartalmazó ék alakú rétegben mindig kettővel nagyobb számok vannak, mint az előző rétegekben, az egyes rétegekben található számok száma is mindig 2-vel nő. Így ha 1 db 1-esből és 2 db 2-esből indulunk ki, akkor tetszőleges pozitív egész n is éppen n-szer fog előfordulni. 1 pont

A kitöltés módjából következik, hogy egy félsíkon belül közös oldallal rendelkező mezőkben lévő számok különbsége 2 vagy 0. A különböző félsíkokból való, közös oldallal rendelkező mezőkben lévő számok pedig szomszédosak. A leírt kitöltés alapján $k = 3$ a legkisebb szám, melyre el lehet végezni a kitöltést. 1 pont

Összesen: **7 pont**

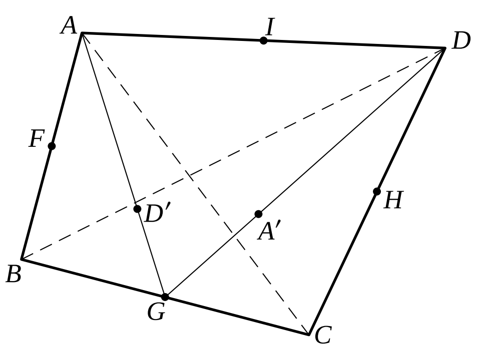
2. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. Legyenek A' a BCD, B' az ACD, C' az ABD és D' az ABC háromszög súlypontjai, míg F az AB, G a BC, H a CD és I a DA oldal felezőpontja.

Igazoljuk, hogy a $C'FD'GA'HB'I$ nyolcszög területe az $ABCD$ négyszög területének és az $A'B'C'D'$ négyszög területének mértani közepe! **7 pont**

Megoldás: Jelölje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ rendre az A, B, C, D pontok, míg $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}'$ rendre az A', B', C', D' pontok helyvektorait! A súlypontokra ismert tétel miatt: $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$, valamint $\mathbf{d}' = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.

Ekkor $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$, míg $\overrightarrow{A'D'} = \mathbf{d}' - \mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3} - \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3} = \dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{3} = -\dfrac{\overrightarrow{AD}}{3}$.

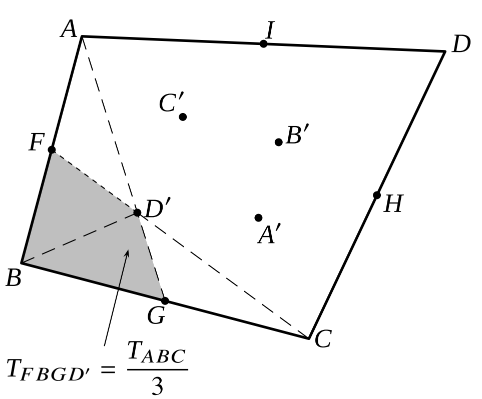
Hasonló igaz az összes többi vesszős és eredeti $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ oldalvektorokra. Azaz az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyszögek egymáshoz hasonlóak, és a hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{1}{3}$.



Legyen $T_{ABCD} = T$, ekkor $T'_{A'B'C'D} = \dfrac{T}{9}$

(Ez a rész párhuzamos szelők tételével is könnyedén elintézhető: lásd ábra!

Az ABC háromszögben D', míg a BCD háromszögben A' súlypontok, ezért rendre az AG, illetve a DG súlyvonalak G-hez közelebbi harmadolópontjai. De akkor $D'A'$ a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján párhuzamos AD-vel, és harmadolyan hosszú.) 3 pont



A nyolcszög területének meghatározásához tekintsük az ABC háromszöget és ennek D' súlypontját. Legyen $T_{ABC} = t$, ekkor $T_{ABD'} = T_{BCD'} = T_{CAD'} = \dfrac{t}{3}$, mivel D' súlypont. Mivel F, G felezőpontok az AB-n, illetve a BC-n, ezért $T_{FBD'} = T_{BGD'} = \dfrac{t}{6}$, vagyis $T_{FBGD'} = \dfrac{t}{3}$.

Ugyanezt végigjátszva a B csúccsal szemben lévő $(T - t)$ területű CDA háromszöggel és B' súlypontjával kapjuk, hogy $T_{HDIB'} = \dfrac{T-t}{3}$, vagyis $T_{FBGD'} + T_{HDIB'} = \dfrac{T}{3}$.

Hasonlóan $T_{IAFC'} + T_{GCHA'} = \frac{T}{3}$.

Mivel éppen azon négy négyszög területét számoltuk, amelyeket az eredeti négyszögből elhagyva a keresett nyolcszöget kapjuk, ezért

$$T_{C'FD'GA'HB'I} = T - 2 \cdot \frac{T}{3} = \frac{T}{3}.$$ 3 pont

Azaz $T_{C'FD'GA'HB'I} = \frac{T}{3} = \sqrt{T \cdot \frac{T}{9}} = \sqrt{T_{ABCD} \cdot T_{A'B'C'D'}}$ és éppen ezt akartuk igazolni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy a 2018 elemű $H = \{1!; 2!; 3!; \ldots ; 2017!; 2018!\}$ halmazból elhagyhatunk két elemet úgy, hogy a megmaradó 2016 darab elem szorzata négyzetszám legyen! **7 pont**

Megoldás: A páros számok faktoriálisait alakítsuk át így:

$$2! = 1! \cdot 2; \quad 4! = 3! \cdot 4; \quad 6! = 5! \cdot 6; \quad \ldots ; \quad 2018! = 2017! \cdot 2018$$ 2 pont

Szorozzuk össze a H halmaz elemeit:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2017! \cdot 2018! = 1! \cdot 1! \cdot 2 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5! \cdot 5! \cdot 6 \cdot \ldots 2017! \cdot 2017! \cdot 2018 =$$

$$= 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 5! \cdot \ldots 2017! \cdot 2017! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2018 =$$ 1 pont

$$= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1009 =$$ 1 pont

$$= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2 \cdot 2^{1009} \cdot 1009! =$$ 1 pont

$$= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2 \cdot 2^{1008} \cdot 1009! \cdot 2 =$$

$$= \left(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017! \cdot 2^{504}\right)^2 \cdot 1009! \cdot 2!$$ 1 pont

Tehát az 1009! és a 2! elhagyása után a H többi elemének szorzata négyzetszám. 1 pont

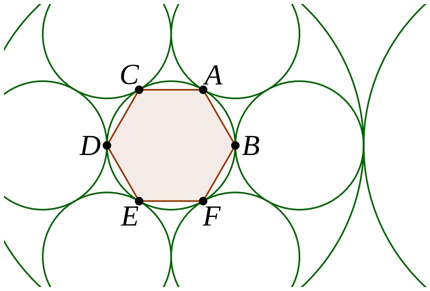
Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy 7 egymást követő szám négyzetének az összege nem lehet négyzetszám! **7 pont**

2.



Az egységnyi oldalú szabályos hatszög köré kört írunk, majd ezt a kört kívülről érintő 6 egybevágó, egymást páronként érintő kört, mint ahogy az ábrán látható. Ezt követően e hat kört kívülről érintő nagyobb kört rajzolunk, majd ismét kifelé ezt érintő hat, egymást is páronként érintő kört rajzolunk. Az eljárást addig folytatjuk, míg nem keletkezik 2018-nál nagyobb sugarú kör. Hány kört rajzoltunk összesen? **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = 2 \\ 2\sqrt{x} + y = 2 \end{cases}$$

7 pont

4. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} = 2\sqrt{x}$$

7 pont

5. Egy paralelogramma oldalai a és b ($a \neq b$). Mekkorák annak a négyszögnek az átlói, amelyet a paralelogramma szögfelezői alkotnak? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsa be, hogy 7 egymást követő szám négyzetének az összege nem lehet négyzetszám! **7 pont**

Megoldás: A középső számot n-nel jelölve $n-3$, $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ és $n+3$ négyzetre emelését és az összeadást elvégezve az $S = 7(n^2+4)$ kifejezést kapjuk. 2 pont

(Ez a pont akkor is jár, ha $n, n+1, n+2, \dots, n+6$ négyzetre emelését végzi el helyesen, összevon és kiemeli a 7-et.)

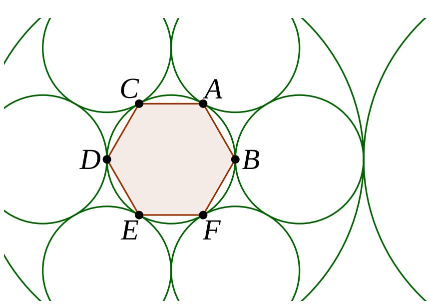
Mivel a 7 prím, így ahhoz, hogy négyzetszámot kapjunk, (n^2+4)-nek is oszthatónak kell lennie 7-tel. 2 pont

Ehhez az kellene, hogy n^2 maradéka 3 legyen 7-tel osztva. 1 pont

A lehetséges maradékok 0, 1, 2 és 4 (ennek megállapítása és igazolása 2 pont), így az összeg soha nem lesz 7-tel osztható. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2.



Az egységnyi oldalú szabályos hatszög köré kört írunk, majd ezt a kört kívülről érintő 6 egybevágó, egymást páronként érintő kört, mint ahogy az ábrán látható. Ezt követően e hat kört kívülről érintő nagyobb kört rajzolunk, majd ismét kifelé ezt érintő hat, egymást is páronként érintő kört rajzolunk. Az eljárást addig folytatjuk, míg nem keletkezik 2018-nál nagyobb sugarú kör. Hány kört rajzoltunk összesen? **7 pont**

Megoldás: A szabályos hatszög köré írt köre $r_1 = 1$ sugarú, az ezt érintő 6 darab kör is $r_1 = 1$ sugarú kör. 1 pont

Ennek a hat körnek a „burkoló” köre $r_2 = 3$ sugarú ugyanúgy, mint az ezt érintő körök: $r_2 = r_1 + d_1 = r_1 + 2r_1 = 3r_1$. 1 pont

Ezt folytatva észrevehető, hogy $r_n = 3r_{n-1}$. 1 pont

Felírogatva a körök sugarait táblázatban

r_i	1	3	9	27	81	243	729	2487	...
db	7	7	7	7	7	7	7	7	...

, 1 pont

megállapítható, hogy $r_8 > 2018$. 1 pont

Minden kör hétszer szerepel, tehát $7 \cdot 7 = 49$ kört rajzoltunk eddig. 1 pont

Az első 2018-nál nagyobb kör rajzolásakor éppen 50 körünk van. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = 2 \\ 2\sqrt{x} + y = 2 \end{cases}$$

7 pont

Megoldás: Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, majd alakítsunk szorzattá:

$$x - y + 2\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\right) = 0$$

2 pont

I. eset: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, ekkor $x = y$, $x + 2\sqrt{x} - 2 = 0$.

Mivel $\sqrt{x} \geq 0$, egyetlen megoldás adódik: $\sqrt{x_1} = -1 + \sqrt{3}$, azaz $x_1 = \left(-1 + \sqrt{3}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ 2 pont

II. eset: $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{y}$

$2\left(2 - \sqrt{y}\right) + y = 2$

$(\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y} + 2 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, így nincs megoldása. 2 pont

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = y = 4 - 2\sqrt{3}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} = 2\sqrt{x}$$

7 pont

Megoldás: A négyzetgyök miatt $x \in \mathbf{R}_0^+$. (A nevezőben lévő másodfokú kifejezés értéke minden x-re pozitív.) Mivel az $x = 0$ nem felel meg az egyenletnek, oszthatunk $\sqrt{x}$-szel. 1 pont

$$\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 3}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2 - 3x + 3}} = 2$$

2 pont

A számtani és mértani közepek közötti összefüggésből adódóan egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, s 2-vel éppen akkor egyenlő, amikor a két szám megegyezik.

$$\left(\sqrt{\frac{x^2-3x+3}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x^2-3x+3}} \geq 2\cdot\sqrt{\frac{x^2-3x+3}{x}\cdot\frac{x}{x^2-3x+3}}=2\right)$$ 2 pont

A szélsőértékét akkor veszi fel, ha a két szám egyenlő:

$$\sqrt{\frac{x^2-3x+3}{x}}=\sqrt{\frac{x}{x^2-3x+3}},$$

amiből

$$x = x^2-3x+3$$

következik. Ez szorzattá alakítva

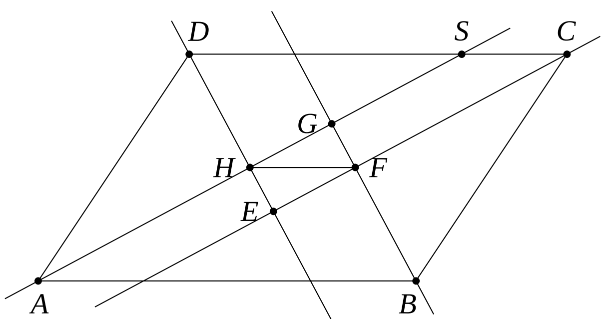
$$0=(x-1)(x-3)$$ 1 pont

lesz, ami pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Így $x = 1$, illetve $x = 3$ a két lehetséges megoldás, melyek ki is elégítik a fenti egyenletet. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Egy paralelogramma oldalai a és b ($a \neq b$). Mekkorák annak a négyszögnek az átlói, amelyet a paralelogramma szögfelezői alkotnak? **7 pont**

Megoldás: A paralelogramma középpontosan szimmetrikus, a megfelelő belső szögfelezők egymás tükörképei, tehát párhuzamosak. Így az $EFGH$ négyszög paralelogramma. 2 pont



Az A és D csúcsoknál lévő szögek összege $180°$, így $ADH\sphericalangle + HAD\sphericalangle = 90°$, ezáltal $AHD\sphericalangle = 90°$, azaz $EFGH$ téglalap. 1 pont

A téglalap átlói egyenlő hosszúságúak, ezért elegendő pl. a HF átló hosszát meghatároznunk. A H pont illeszkedik az A és a D csúcsokhoz tartozó belső szögfelezőre is, így egyenlő távolságra van az AB és AD, valamint az AD és DC oldalaktól is, így rajta van az $ABCD$ paralelogramma AB-vel párhuzamos középvonalán. Ugyanez elmondható az F pontról is, így HF párhuzamos CD-vel. 2 pont

Mivel HS párhuzamos FC-vel, ezért $HFCS$ paralelogramma. ADS háromszög egyenlő szárú, így $HF = SC = |DC - DS| = |DC - DA| = |a - b|$. Az $EFGH$ négyszög átlóinak hossza megegyezik az $ABCD$ paralelogramma két szomszédos oldalának különbségével. 2 pont

Összesen: **7 pont**

Haladók II. kategória 2. forduló

Feladatok

1. Egy tanár kijavította egy 12 fős csoport dolgozatait. A kijavított dolgozatok egymás felett helyezkednek el. A tanár készül felírni a jegyeket egy papírlapra, amelyen a tanulócsoport tagjainak neve van ábécé rendben felsorolva. A lap egyik oldalán tíz név szerepel, a másik oldalon pedig kettő. A lapnak kezdetben az az oldala van felül, amelyiken tíz név szerepel. A tanár először a legfelül lévő dolgozat jegyét írja a megfelelő diák neve mellé, majd az alatta levőét és így tovább. (Természetesen az utolsó jegy beírása után már nem fordítja meg a lapot.)

Döntsük el, hogy minek nagyobb az esélye: annak, hogy a tanár a lapot legalább négyszer megfordítja a jegyek beírása során, vagy annak, hogy legfeljebb háromszor? **7 pont**

2. Egy osztály túrázás közben azt játszotta, hogy egyikük összeadta a természetes számokat egy általa kiválasztott n természetes számig, és megmondta az eredményt a többieknek. Az mondhatta a következő összeget, aki először eltalálta n értékét.

Levente a 2273-at adta fel.

Péter közbeszólt: „Biztosan hibáztál összeadás közben, mert a természetes számok összege sohasem végződhet 73-ra!”

Bizonyítsuk be Péter állítását, azaz: Az első n természetes szám összege nem végződhet 73-ra! **7 pont**

3. Egy kör metszi egy adott O csúcsú ($\alpha < 180°$) szög szárait, egyiket az A és B, másikat a C és D pontban. (Az A pont O és B között, a C pont O és D között van.) Az adott szög felezője a kört az M és az N pontban metszi. (O-hoz az M van közelebb.)

Bizonyítsuk be, hogy az $\widehat{AM}$ ív és az $\widehat{ND}$ ív összege egyenlő az $\widehat{MC}$ ív és a $\widehat{BN}$ ív összegével (a szóbanforgó négy ív az α szárai között van)! **7 pont**

4. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \tag{2}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (3) egyenletnek pontosan egy gyöke van a]0; 1[intervallumban, akkor a (4) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy tanár kijavította egy 12 fős csoport dolgozatait. A kijavított dolgozatok egymás felett helyezkednek el. A tanár készül felírni a jegyeket egy papírlapra, amelyen a tanulócsoport tagjainak neve van ábécé rendben felsorolva. A lap egyik oldalán tíz név szerepel, a másik oldalon pedig kettő. A lapnak kezdetben az az oldala van felül, amelyiken tíz név szerepel. A tanár először a legfelül lévő dolgozat jegyét írja a megfelelő diák neve mellé, majd az alatta levőét és így tovább. (Természetesen az utolsó jegy beírása után már nem fordítja meg a lapot.)

Döntsük el, hogy minek nagyobb az esélye: annak, hogy a tanár a lapot legalább négyszer megfordítja a jegyek beírása során, vagy annak, hogy legfeljebb háromszor? **7 pont**

Megoldás: Nevezzük a lap hátoldalának azt az oldalát, amelyen két név szerepel. A lapot legfeljebb négyszer kell a tanárnak megfordítania, és pontosan akkor fogja négyszer megfordítani, ha a hátoldalon szereplő két diák neve nincs közvetlenül egymás alatt a névsorban, továbbá az egyik ilyen név nem legalul szerepel. 2 pont

A 12 diák dolgozata 12!-féle sorrendben jöhet egymás után. 1 pont

Most számoljuk meg azokat az eseteket, ahol a hátoldalon lévő két diák neve közvetlenül egymás alatt van, vagy a két név közül az egyik legalul van. Ha az egyik név alul van, az $2 \cdot 11!$ darab eset, mert 2-féle módon választhatjuk ki az alul lévő nevet, és a maradék 11 nevet 11!-féle módon rakhatjuk sorba. 1 pont

Azokat az eseteket kell még megszámolni, amikor a két név egyike sincs legalul, de közvetlenül egymás alatt vannak. A lejjebb lévő név lehet a 2., 3., ..., 11. helyen: ez 10 lehetőség. Ez így tehát összesen $10 \cdot 2 \cdot 10! = 20 \cdot 10!$ lehetőség. 1 pont

Az olyan esetek száma tehát, ahol legfeljebb háromszor kell megfordítania a tanárnak a lapot, $2 \cdot 11 \cdot 10! + 2 \cdot 10 \cdot 10! = 42 \cdot 10!$. Mivel az összes eset száma $12! = 132 \cdot 10!$, így annak nagyobb az esélye, hogy a tanárnak meg kell négyszer fordítani a lapot (hiszen ez $90 \cdot 10!$ darab eset). 2 pont

Összesen: **7 pont**

Másik megoldás: Gondolatban írjuk fel sorban a tanulók nevét abban a sorrendben, amelyben a dolgozataik szerepelnek, majd írjunk egy 1-est a tanuló neve helyére, ha a névsort tartalmazó lapon az elöl lévő oldalon, illetve egy 2-est, ha a hátul lévő oldalon szerepel. 1 pont

Vizsgáljuk a nevek helyére írt, tíz darab 1-es és két darab 2-es számból álló sorozatot.

Legfeljebb négyszer kell megfordítani a lapot: a két 2-es előtt és után.

Pontosan négyszer pedig akkor kell megfordítani a lapot, ha mindkét 2-es után 1-es jön (ekkor ugyanis mindkét 2-es előtt is és után is fordítunk). 1 pont

Vonjuk össze a 2-eseket az utánuk következő 1-essel, és tekintsük 21-esnek. Eszerint négy fordítás abból a sorrendből alakulhat ki, amikor nyolc darab 1-es és két darab 21-es szerepel a sorban, vagyis tíz pozíción szerepel nyolc 1-es és két 21-es. 1 pont

Ez $\binom{10}{2} = 45$-féleképpen fordulhat elő. 1 pont

Az összes lehetséges számsorozat esetében 12 helyen szerepel tíz 1-es és két 2-es, ami $\binom{12}{2} = 66$ lehetőséget jelent. 1 pont

A megmaradó $66 - 45 = 21$ esetben elég legfeljebb háromszor fordítani. 1 pont

Ezért annak nagyobb az esélye, hogy négyszer kell megfordítani a lapot. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Többféle jó számolás elképzelhető, ahol más és más az összes eset száma. Ezekért természetesen jár a teljes pontszám, ha kihozza a két eset számainak helyes arányát (7 : 15).

2. Egy osztály túrázás közben azt játszotta, hogy egyikük összeadta a természetes számokat egy általa kiválasztott n természetes számig, és megmondta az eredményt a többieknek. Az mondhatta a következő összeget, aki először eltalálta n értékét.

Levente a 2273-at adta fel.

Péter közbeszólt: „Biztosan hibáztál összeadás közben, mert a természetes számok összege sohasem végződhet 73-ra!"

Bizonyítsuk be Péter állítását, azaz: Az első n természetes szám összege nem végződhet 73-ra! **7 pont**

1. megoldás: Használjuk fel, hogy a természetes számok összege: $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 1 pont

Ezt átalakítva:

$$2S_n = n^2 + n$$
$$8S_n = 4n^2 + 4n$$
$$8S_n + 1 = (2n+1)^2$$

2 pont

Indirekt tegyük fel, hogy $S_n = 100k + 73$, ahol k természetes szám.

Ekkor $8S_n + 1 = 800k + 584 + 1 = 100(8k+5) + 85$ alakú, tehát 85-re végződik. 1 pont

Az 5-re végződő négyzetszámok $(10l+5)^2$ alakban írhatók fel, ahol l természetes szám. 1 pont

De $(10l+5)^2 = 100l^2 + 100l + 25 = 100(l^2+l) + 25$, tehát egy 5-re végződő négyzetszám csak 25-re végződhet. 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát hamis volt a felvetésünk, azaz S_n nem végződhet 73-ra. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás: Írjuk fel az első tíz végződést!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

1 pont

Képezzük az S_n-ből az S_{n+10}-et! Mivel a hozzáadott tíz tag végén minden számjegy pontosan egyszer fordul elő és ezek összege 45, ezért S_{n+10} utolsó számjegye 5-tel nagyobb vagy 5-tel kisebb S_n utolsó számjegyénél. 1 pont

Ezek alapján S_{20}-ig S_2 és az előbbiek alapján $S_{17} = 153$ végződik háromra, de egyik sem végződik 73-ra. 1 pont

Az előbbiekből következik, hogy S_{n+20} utolsó számjegye megegyezik S_n utolsó számjegyével, tehát csak S_{20k+2} és S_{20k+17} végződhet háromra. 1 pont

Az S_n-hez adott 20 szám összege: $(n+1) + (n+2) + \ldots + (n+20) = 20n + 210$. 1 pont

Ez $n = 20k + 2$ esetén $400k + 250$, $n = 20k + 17$ esetén $400k + 550$ alakú. 1 pont

Viszont így a 03 és 53 végződések váltogatják egymást, tehát nem lehet a végződés 73. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy kör metszi egy adott O csúcsú ($\alpha < 180°$) szög szárait, egyiket az A és B, másikat a C és D pontban. (Az A pont O és B között, a C pont O és D között van.) Az adott szög felezője a kört az M és az N pontban metszi. (O-hoz az M van közelebb.)

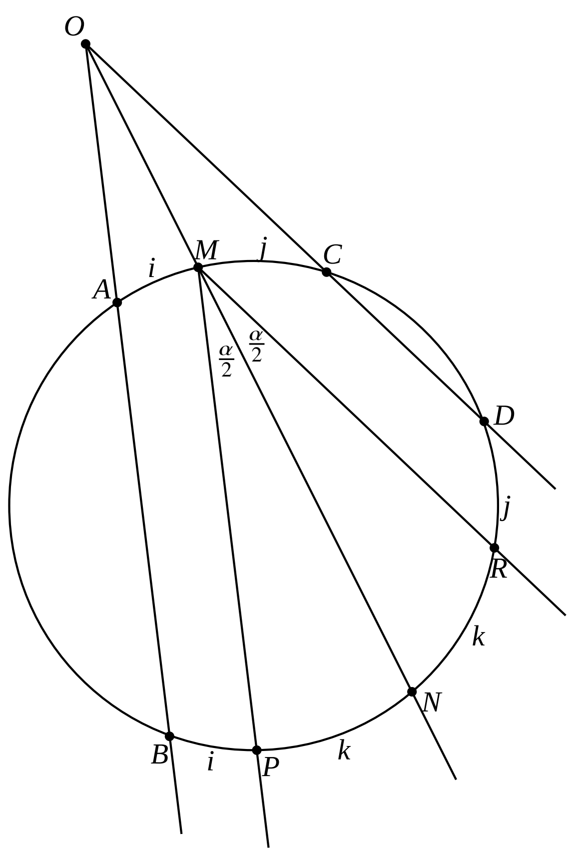
Bizonyítsuk be, hogy az $\overset{\frown}{AM}$ ív és az $\overset{\frown}{ND}$ ív összege egyenlő az $\overset{\frown}{MC}$ ív és a $\overset{\frown}{BN}$ ív összegével (a szóbanforgó négy ív az α szárai között van)! **7 pont**

Megoldás:

Az M ponton át húzzunk párhuzamos félegyeneseket az adott O csúcsú α szög száraival, az így kapott szög szárai a kör $\overset{\frown}{BN}$ ívét a P, $\overset{\frown}{ND}$ ívét az R pontban metszik. 2 pont

Az $\overset{\frown}{AM}$ ív és a $\overset{\frown}{BP}$ ív a körnek két párhuzamos egyenes közé eső ívei, ezért egyenlők, e két ív hossza legyen i. Hasonlóan az $\overset{\frown}{MC}$ ív és az $\overset{\frown}{RD}$ ív is egyenlők, ezek hossza legyen j. 2 pont

A $\overset{\frown}{PN}$ és az $\overset{\frown}{RN}$ ívek pedig a körnek ugyanakkora kerületi szögekhez tartozó ívei, ezért egyenlők, ezek hossza legyen k. 2 pont



$\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{ND} = i + k + j = \overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{BN}$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \tag{4}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (3) egyenletnek pontosan egy gyöke van a]0; 1[intervallumban, akkor a (4) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív. **7 pont**

Megoldás: Mivel az (3) egyenletnek pontosan egy gyöke van a]0; 1[intervallumban, ezért az $f(x) = x^2 + px + q = 0$ másodfokú függvény helyettesítési értékei a 0 és az 1 helyen különböző előjelűek. 1 pont

$f(0) = q$ és $f(1) = 1 + p + q$. 1 pont

A (4) egyenletet átalakítva az $(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. 2 pont

Ennek gyökei pontosan akkor különböző előjelűek, ha $x_1 \cdot x_2 < 0$. 1 pont

A gyökök és együtthatók összefüggései alapján: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2q}{1+p+q} < 0$. 1 pont

Mivel q és $1 + p + q$ különböző előjelűek, ezért $\dfrac{2q}{1+p+q} < 0$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Az első egyenletből kapott $q(1 + p + q) < 0$ összefüggés az alábbi módon is megkapható:

A gyökök elhelyezkedésére két lehetőség van.

1. $0 < \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ és $\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} < 1$ és $1 \le \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

Mivel két valós gyök van, ezért $p^2 - 4q > 0$. Az első egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p < 0$ és $q > 0$.

A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $-2 < p$, vagy ha ($p \le -2$ és $p+q+1 < 0$).

A harmadik egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p \le -2$, vagy ha ($p > -2$ és $p+q+1 \le 0$). 1 pont

2. $\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \le 0$ és $0 < \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ és $\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} < 1$

Az első egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p > 0$, vagy ha ($p \le 0$ és $q < 0$).

A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p < 0$, vagy ha ($p \ge 0$ és $q < 0$)

A harmadik egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p \ge -2$ és $0 < p + q + 1$. 1 pont

Az első egyenlőtlenség-rendszer tehát pontosan akkor teljesül, ha $q > 0$, és $p \le -2$ esetén $p + q + 1 < 0$; valamint $-2 < p < 0$ esetén $p + q + 1 < 0$. Összefoglalva: $q(1 + p + q) < 0$.

A második egyenlőtlenség-rendszer pontosan akkor teljesül, ha $p \ge -2$ és $0 < p+q+1$, valamint $p > 0$ esetén $q < 0$ vagy $p \le 0$ esetén $q < 0$. Összefoglalva: $q(1 + p + q) < 0$. 1 pont

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyen adott az $1 < n \in \mathbb{N}^+$, és definiáljuk $k \in \{2; \dots; n\}$ esetén az $a_k, b_k \in \mathbb{N}^+$ számokat a következőképpen:

a_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $k^{a_k} \leq n$, míg

b_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $b_k^k \leq n$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n-re teljesül:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n$$ **7 pont**

2. Adott $n \geq 3$ darab pont a síkon. Nincs közöttük három, amely egy egyenesre illeszkedne. Válasszunk ki az összes lehetséges módon három pontot az adott pontok közül. Az így kapott háromszögek közül a legnagyobb területű területét jelöljük T-vel, a legkisebb területű területét t-vel. Tudjuk, hogy $\frac{T}{t} \leq 2$! Mely n értékekre valósulhat ez meg? **7 pont**

3. Melyek azok a $b > 1$ pozitív egész számok, amelyekre bármely k pozitív egész szám esetén van olyan n pozitív egész, hogy az n^2 négyzetszám b-alapú számrendszerben felírt jegyeinek az összege éppen k? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen adott az $1 < n \in \mathbb{N}^+$, és definiáljuk $k \in \{2; \dots; n\}$ esetén az $a_k, b_k \in \mathbb{N}^+$ számokat a következőképpen:

a_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $k^{a_k} \leq n$, míg

b_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $b_k^k \leq n$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n-re teljesül:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n$$ **7 pont**

Megoldás: Próbálkozzunk kicsi n-ekkel! $n = 2, 3, \ldots, 7$-re teljesül az állítás, ezen n-ek esetén $a_k = b_k$ minden k-ra.

Az első nemtriviális eset ($n = 8$) a következő a_k, b_k-kat adja: $a_2 = 3$ (mert $2^3 \leq 8$, de $2^4 > 8$); $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1$ ($3^2 > 8$),

míg $b_2 = 2$ (mert $2^2 \leq 8$, de $3^2 > 8$); $b_3 = 2$ (mert $2^3 \leq 8$, de $3^3 > 8$); $b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 1$ ($2^4 > 8$), innen

$$a_2 + \ldots + a_8 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = b_2 + \ldots + b_8$$

valóban teljesül. 1 pont

Innen teljes indukciót fogunk alkalmazni.

• (Bázis): Mint láttuk az állítás $n \leq 8$ esetén teljesül. 1 pont

•• (Indukciós feltevés): Tegyük fel, hogy n-ig minden nála nem nagyobb pozitív (1-nél nagyobb) egészre igaz az állítás (a későbbi használat miatt jelöljük ezen n esetén a_k, b_k-t $a_{n,k} = a_k$; $b_{n,k} = b_k$-val), azaz

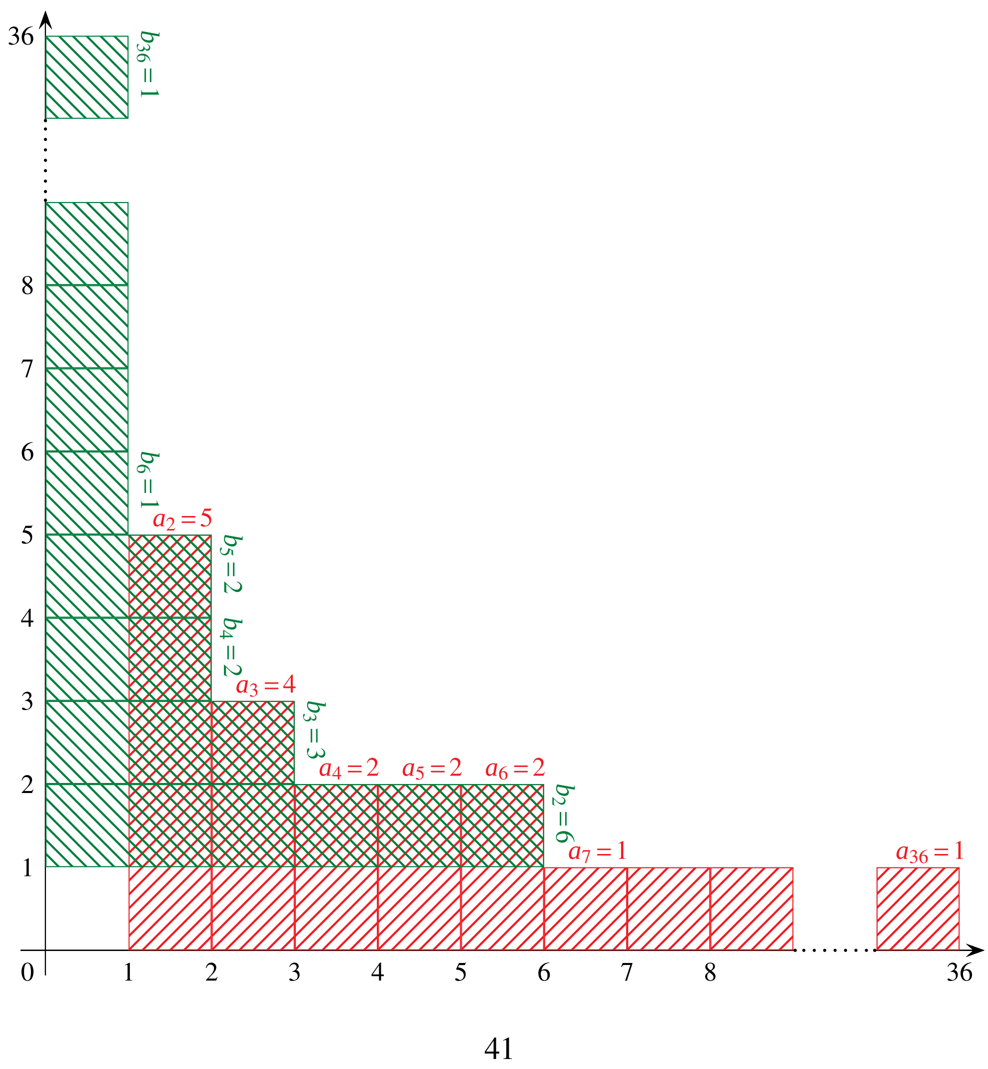
$$a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,n-1} + a_{n,n} = b_{n,2} + b_{n,3} + \ldots + b_{n,n-1} + b_{n,n}.$$ 1 pont

• • • (Lényegi vizsgálat): Vajon igaz marad-e az állítás $(n+1)$-re is, azaz (újra csak „dupla indexelést” használva) teljesül-e

$$a_{n+1,2} + a_{n+1,3} + \ldots + a_{n+1,n-1} + a_{n+1,n} + a_{n+1,n+1} = b_{n+1,2} + b_{n+1,3} + \ldots + b_{n+1,n-1} + b_{n+1,n} + b_{n+1,n+1}?$$

Nyilván $a_{n+1,n+1} = b_{n+1,n+1} = 1$, valamint $a_{n+1,m} \geq a_{n,m}$ és $b_{n+1,m} \geq b_{n,m}$.

Másfelől vizsgáljuk meg, mikor teljesül $a_{n+1,m} > a_{n,m}$, illetve mikor teljesül $b_{n+1,l} > b_{n,l}$! $a_{n+1,m} > a_{n,m}$ akkor és csak akkor, ha $n+1 = m^x$ valamely $x \in \mathbb{N}^+$ esetén, míg $b_{n+1,l} > b_{n,l}$ akkor és csak akkor, ha $n+1 = y^l$ valamely $y \in \mathbb{N}^+$ esetén. Azaz, ha $(n+1)$ nem teljes (1-nél nagyobb kitevős) hatvány, akkor az n-ről $(n+1)$-re lépés során a vizsgált egyenlet mindkét oldalát ($a_{n+1,n+1} = b_{n+1,n+1} = 1$ miatt) pontosan 1-gyel növeltük, azaz az egyenlőség megmarad. 1 pont



Másfelől viszont, ha $(n+1)$ teljes hatvány, például $n+1 = m^l$, akkor $a_{n+1,m} - a_{n,m} = b_{n+1,l} - b_{n,l} = 1$, azaz a bal oldalon minden olyan m indexhez, ahol növelünk $a_{n,m}$-hez képest (pontosan 1-gyel) egyértelműen hozzárendelhető a jobb oldalon egyetlen olyan l index, ahol szintén (pontosan 1-gyel) növelünk $b_{n,l}$-hez képest (és természetesen, ha $n+1$ többféleképpen is felírható teljes hatványként, akkor ez a párosítás minden ilyen hatvány-alakra különböző párokat jelent).

Ezzel megvagyunk, hiszen ezek szerint ha $(n+1)$ teljes hatvány, akkor is igaz, hogy ugyanannyival növeltük a bal oldalt, és a jobb oldalt az indukciós feltevésben szereplő egyenlő oldalakhoz képest. 3 pont

Ezzel a teljes indukciós bizonyítási séma értelmében készen vagyunk, a bizonyítandó állítás valóban igaz.

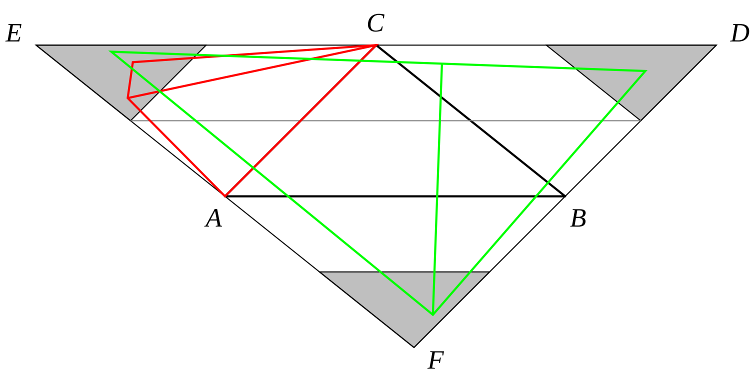
Összesen: 7 pont

2. Adott $n \geq 3$ darab pont a síkon. Nincs közöttük három, amely egy egyenesre illeszkedne. Válasszunk ki az összes lehetséges módon három pontot az adott pontok közül. Az így kapott háromszögek közül a legnagyobb területű területét jelöljük T-vel, a legkisebb területű területét t-vel. Tudjuk, hogy $\frac{T}{t} \leq 2$! Mely n értékekre valósulhat ez meg? **7 pont**

Megoldás: Megmutatjuk, hogy $n < 6$. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy van 6 olyan pont, amelyre teljesül a feltétel. Tekintsünk egy maximális területű háromszöget, csúcsai legyenek A, B, C.

Az ABC háromszög belsejében nem lehet pont, mert akkor ezt a pontot A-val, B-vel, C-vel összekötve három olyan háromszöget kapunk, amelyek közül valamelyiknek a területe legfeljebb ABC területének harmada. 1 pont

Húzzunk párhuzamosokat mindhárom csúcson keresztül a szemközti oldallal, így egy, az eredetihez hasonló háromszöget kapunk. Nem lehet pont, amely e háromszögön kívül van, mert ekkor T-nél nagyobb területet kapnánk. 1 pont

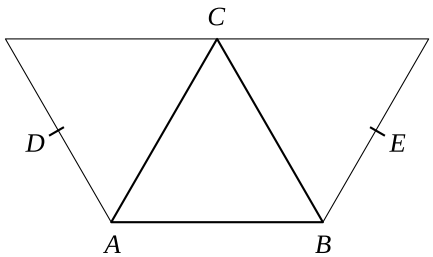


Húzzunk párhuzamosokat mindegyik oldallal az oldalhoz tartozó magasság felével a háromszöghöz képest kifelé. Pontunk csak ezeken a párhuzamosokon túl lehet! Az eddigieket összefoglalva újabb pontok csak a szürke háromszögekben lehetnek. 1 pont

Ha egy szürke háromszögben két pontunk van, akkor ezeket a közelebbi két csúccsal összekötve egy olyan nem hurkolt négyszöget kapunk (pirossal), amelynek területe kisebb, mint ABC területe. Ezt egy átlóval két háromszögre bontva, az egyik háromszög területe legfeljebb a négyszög területének fele, így kisebb mint ABC területének fele, ami nem lehet. 1 pont

Ha minden szürke háromszögbe egy pontunk esik, akkor azok egy zöld színnel jelölt háromszöget alkotnak. Húzzuk be ennek egyik legnagyobb szögének csúcsából induló magasságát, ami biztos, hogy a zöld háromszögön belül halad. Ezen magasság hossza legalább az ABC háromszög megfelelő magassága, az ábrán m_c, hiszen ez a magasság áthalad egy olyan sávon, amelynek szélessége m_c. 1 pont

A zöld magassághoz tartozó oldal hossza legalább akkora, mint az ABC háromszög c oldala. Egyszerre nem érhető el, hogy a zöld magasság egyenlő legyen m_c-vel és a zöld oldal egyenlő legyen c-vel, ezért a zöld háromszög területe nagyobb ABC területénél, ami ellentmondás. 1 pont



Öt pont esetén például egy szabályos háromszög csúcsai és a két oldalra rajzolt két szabályos háromszög oldalfelező pontjai megfelelők, azaz $n \leq 5$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Melyek azok a $b > 1$ pozitív egész számok, amelyekre bármely k pozitív egész szám esetén van olyan n pozitív egész, hogy az n^2 négyzetszám b-alapú számrendszerben felírt jegyeinek az összege éppen k? **7 pont**

Megoldás: Megmutatjuk, hogy $b = 2$ jó, és csak ez a jó (alapszám). 1 pont

Kicsit kísérletezve bináris számrendszerben a következő látszódik:

- $n = 2^1 - 1 = 1 \Rightarrow n^2 = 1 = 1_2$ a jegyösszeg: 1.
- $n = 2^2 - 1 = 3 \Rightarrow n^2 = 9 = 1001_2$ a jegyösszeg: 2.
- $n = 2^3 - 1 = 7 \Rightarrow n^2 = 49 = 110001_2$ a jegyösszeg: 3.
- $n = 2^4 - 1 = 15 \Rightarrow n^2 = 225 = 11100001_2$ a jegyösszeg: 4.

Innen természetes a sejtés, hogy $n = 2^k - 1$ szám négyzete binárisan k jegyösszeget ad. Lássuk be!

$$n^2 = (2^k - 1)^2 = 2^{2k} - 2 \cdot 2^k + 1 = 2^{2k} - 2^{k+1} + 1 =$$
$$= \left(2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+2} + 2^{k+1} + 2^{k+1}\right) - 2^{k+1} + 1 = 2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+2} + 2^{k+1} + 1 =$$
$$= \underbrace{11\ldots1}_{k-1}\underbrace{00\ldots00}_{k}1,$$ 2 pont

ezzel megvagyunk, $b = 2$ jó választás.

Legyen most $b > 3$! ($b = 3$ a végén lesz elintézve.) Ismert, hogy b alapú számrendszerben a $(b-1)$-gyel oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha a szám jegyeinek összege osztható $(b-1)$-gyel (és ugyanez igaz arra, hogy mikor ad $(b-1)$-gyel osztva egy szám $1, 2, \ldots, b-2$ maradékot.) Vizsgáljuk a b-alapú számrendszerben a számokat, és nézzük meg, hogy $\pmod{b-1}$ milyen maradékot ad egy négyzetszám!

Egy n egész $\pmod{b-1}$ vizsgálva $0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\left[\frac{b}{2}\right]$ maradékot adhat $\Rightarrow$ n^2 így kevesebb, mint $(b-1)$ féle maradékot vehet fel, azaz n^2 *számjegyeinek összege nem lehet bármennyi* $b(> 3)$ *alapú számrendszerben*.

(Ha például $b = 4$, akkor (mod 3) $0, 1, -1$ a lehetséges maradékok, és így $0, 1, 1$ a négyzetes maradékok, azaz nincs négyzetszám, ami $3k + 2$-alakú $\Leftrightarrow$ nincs négyzetszám, ami 4-es számrendszerben $2, 5, 8, \ldots$ jegyösszegű.) 2 pont

Már csak $b = 3$ van hátra. Azt mutatjuk meg, hogy $b = 3$ esetén nincs négyzetszám pontosan 3 jegyösszeggel.

Tegyük fel, hogy van olyan négyzetszám, aminek pontosan 3 a jegyösszege 3-as számrendszerben. Ekkor ez a szám a következő háromféle alakú lehet: $2\ldots1\ldots$ vagy $1\ldots2\ldots$ vagy $1\ldots1\ldots1\ldots$, ahol a $\ldots$-ok helyén néhány (esetleg 0 db) 0-s számjegy lehet.

Mindegyik esetet hasonlóan intézzük el. Vegyük a legkisebb olyan négyzetszámot, ami a három lehetséges alak közül előfordulhat. Egy ilyen négyzetszám végén nem állhat két darab 0, mert különben 9-cel osztva újra csak ilyen alakú négyzetszámot kapunk (szemben azzal, hogy a számunk a lehető legkisebb). Vagyis a lehetséges alakok:

$$2\ldots1, \quad 2\ldots10, \quad 1\ldots2, \quad 1\ldots20, \quad 1\ldots1\ldots1, \quad 1\ldots1\ldots10.$$

Egy 3-mal osztható négyzetszám 9-cel is osztható, azaz nem végződhet 1 darab 0-ra, illetve egy négyzetszám 3-mal osztva nem adhat 2 maradékot sem, a 6 potenciális alak közül marad kettő: $2\ldots1$ és $1\ldots1\ldots1$.

Ha az alak $n^2 = 2\ldots1 = 2 \cdot 3^m + 1$, akkor $2 \cdot 3^m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Ez nem lehet, mert vagy $4 \mid (n-1)(n+1)$, vagy $2 \nmid (n-1)(n+1)$.

Ha pedig az alak $n^2 = 1\ldots1\ldots1 = 3^{m+l} + 3^m + 1$, akkor $3^m(3^l + 1) = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. A bal oldal páros, tehát a jobb oldal is, azaz $2 \mid (n-1) \Rightarrow 8 \mid (n-1)(n+1) \Rightarrow 8 \mid 3^l + 1$.

Ez viszont nem lehet, mert a 3^l hatvány 1 vagy 3 maradékot ad 8-cal osztva, $3^l + 1$ pedig 2 vagy 4 maradékot ad 8-cal osztva. Azaz b 3 sem lehet!

Ezzel megvagyunk, a kérdéses számrendszer alapszám valóban csak $b = 2$ lehet! 2 pont

Összesen: **7 pont**

Feladatok

1. Anna matematika házi feladatára ráfolyt a tinta. A lapon egy másodfokú egyenlet volt

$$x^2 + bx + c = 0$$

alakban, de sajnos most csak a következő látszódik:

$$x^2 + \ldots x + \ldots = 0$$

az elsőfokú és a konstans b, c együtthatók „összetintázódtak”. Az egyenletről a következőket tudjuk:

- a két hiányzó b, c együttható egy-egy olyan egész szám, amelyek összege 2018,
- az egyenlet megoldásai egész számok.

Milyen számok lehettek a tintás b, c együtthatók? **7 pont**

2. Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz alapjai AB és CD ($AB > CD$), az alapokra merőleges szár AD. A trapézba írt kör az AB alapot P-ben, a CD alapot R-ben érinti. A szárakon lévő érintési pontokat összekötő szakasz a PR szakaszt M-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy A, M és C egy egyenesbe esik! **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletet! (p; q pozitív prímek, míg a természetes szám)

$$p^2 + p^2q^2 + q^2 = a^2$$ **7 pont**

4. Rajzoljunk a koordináta-rendszer origója mint középpont köré 1, illetve 4 egység sugarú köröket. Tekintsük a két kör közötti zárt körgyűrű tartomány pontjait. Mely pontokra lesz a következő kifejezés értéke a legkisebb, illetve a legnagyobb?

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + xy$$ **7 pont**

5. Egy 2018×2018 egységnégyzetből álló négyzet alakú táblázat néhány (egységnégyzetnyi) mezőjének középpontját pirosra színezzük. Legfeljebb hány középpont színezhető ki, ha azt szeretnénk, hogy ne legyen olyan derékszögű háromszög a táblázatunkban, amelynek csúcsait a középpontok közül választjuk és minden csúcsa piros. **7 pont**

Haladók III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Anna matematika házi feladatára ráfolyt a tinta. A lapon egy másodfokú egyenlet volt

$$x^2 + bx + c = 0$$

alakban, de sajnos most csak a következő látszódik:

$$x^2 + \ldots x + \ldots = 0$$

az elsőfokú és a konstans b, c együtthatók „összetintázódtak”. Az egyenletről a következőket tudjuk:

- a két hiányzó b, c együttható egy-egy olyan egész szám, amelyek összege 2018,
- az egyenlet megoldásai egész számok.

Milyen számok lehettek a tintás b, c együtthatók? **7 pont**

Megoldás: Legyen az egyenlet két egész megoldása: x_1, x_2. A Viète-formulák alapján

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b \qquad \text{és} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c.$$ 1 pont

Vonjuk ki a második formulából az elsőt:

$$x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = c + b = 2018 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 2019.$$

Innen szorzattá alakítva:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2019 = 3 \cdot 673 \qquad \text{(673 prím!)}$$ 2 pont

Innen a lehetséges $x_1 - 1$, $x_2 - 1$ egész számpárok ($x_1 - 1$ értékét választva a nagyobbnak):

$$(x_1 - 1; x_2 - 1) \longrightarrow (2019; 1); \quad (673; 3); \quad (-2019; -1); \quad (-673; -3),$$ 1 pont

így innen: $(x_1; x_2) \longrightarrow (2020; 2); (674; 4); (-2018; 0); (-672; -2)$, 1 pont

és végül újra csak a Viète-formulák alapján:

$(b; c) = (-(x_1 + x_2); x_1 \cdot x_2) \longrightarrow (-2022; 4040); \quad (-678; 2696); \quad (2018; 0); \quad (674; 1344)$ 2 pont

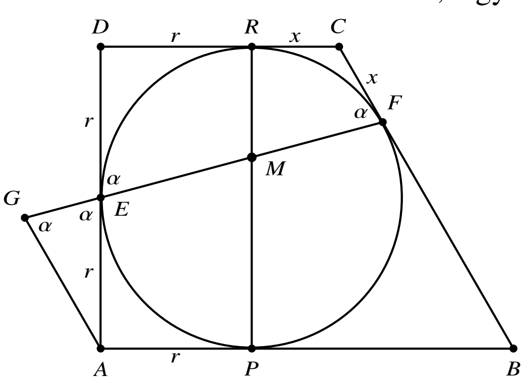
Vagyis ez a négy számpár lehetett a tintás számok helyén.

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Fogadjuk el jó megoldásnak azt is, ha a versenyző kizárja a (2018; 0) esetet arra hivatkozva, hogy 0 elé nem írunk előjelet.

2. Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz alapjai AB és CD ($AB > CD$), az alapokra merőleges szár AD. A trapézba írt kör az AB alapot P-ben, a CD alapot R-ben érinti. A szárakon lévő érintési pontokat összekötő szakasz a PR szakaszt M-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy A, M és C egy egyenesbe esik! **7 pont**

Megoldás: A beírt kör az AD szárat az E, a CB szárat az F pontban érinti, a kör sugara legyen r. Ekkor $DR = DE = AE = AP = r$, legyen $CR = CF = x$. 1 pont



A trapéz szárai a beírt kör EF húrjának két végpontjához húzott érintők, így e húrral egyenlő szögeket zárnak be. Legyen $DEF\sphericalangle = CFE\sphericalangle = \alpha$. 1 pont

Az A csúcson átmenő, BC szárral párhuzamos egyenes és az EF egyenes metszéspontja legyen G.

Az AEG háromszög E-nél lévő szöge a $DEF\sphericalangle$ csúcsszöge, ezért α-val egyenlő. 1 pont

Az AEG háromszög G-nél lévő szöge és a $CFE\sphericalangle$ váltószögek, így az $AGE\sphericalangle$ is éppen α. Ezért az AGE háromszög egyenlő szárú, tehát $AG = AE = r$. 1 pont

Nyilván a PGA háromszög is egyenlő szárú, $AG = AP = r$. Az RFC háromszög C-nél lévő szöge és a PGA háromszög A-nál lévő szöge váltószögek, így e két egyenlő szárú háromszög hasonló. 1 pont

Sőt, mivel a megfelelő oldalaik párhuzamosak, ezért középpontosan hasonlók. E hasonlóságnál R és P, illetve a G és F megfelelő pontok, így az RP és a GF egyenesek M metszéspontja megadja a hasonlóság centrumát. 1 pont

Mivel A és C szintén megfelelő pontok, az őket összekötő AC egyenes is átmegy M-en, ezt kellett belátni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletet! (p; q pozitív prímek, míg a természetes szám)

$$p^2 + p^2q^2 + q^2 = a^2$$ **7 pont**

Megoldás: Vizsgálódjunk (mod 4) szerint!

Ha p, q páratlan számok, akkor $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod 4$ miatt $a^2 \equiv 3 \pmod 4$ lenne, ami lehetetlen. Vagyis valamelyik prím páros. 2 pont

Legyen $q = 2$. Ekkor $p^2 + p^2q^2 + q^2 = a^2 \longrightarrow 5p^2 + 4 = a^2 \longrightarrow 5p^2 = (a-2)(a+2)$. 2 pont

Mivel p pozitív prím, a nemnegatív egész ($a - 2 < a + 2$ miatt), a következő lehetőségek vannak:

$a - 2 = 1$, $a + 2 = 5p^2 (= 1 + 4 = 5) \Rightarrow p = 1$ nem megoldás.

$a - 2 = 5$, $a + 2 = p^2 (= 9) \Rightarrow p = 3$ megoldás.

$a - 2 = p$, $a + 2 = 5p \Rightarrow 4 = (a + 2) - (a - 2) = 5p - p = 4p \Rightarrow p = 1$ nem megoldás.

$a - 2 = p^2$, $a + 2 = 5 \Rightarrow a - 2 = 5 - 4 = 1 = p^2 \Rightarrow p = 1$ nem megoldás. 2 pont

Vagyis az egyenlet megoldásai: $p = 2$; $q = 3$ és $p = 3$; $q = 2$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Rajzoljunk a koordináta-rendszer origója mint középpont köré 1, illetve 4 egység sugarú köröket. Tekintsük a két kör közötti zárt körgyűrű tartomány pontjait. Mely pontokra lesz a következő kifejezés értéke a legkisebb, illetve a legnagyobb?

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + xy$$ **7 pont**

Megoldás: A koordináta-rendszer $P(x; y)$ pontjaira a feltétel szerint teljesül, hogy

$$1 \le x^2 + y^2 \le 16.$$ 1 pont

Ezenkívül a geometriai és kvadratikus közepek összehasonlításából tudjuk, hogy

$$|xy| \le \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Ha az első vagy harmadik negyedben vagyunk, akkor $xy \le \frac{x^2 + y^2}{2}$, ha pedig a második vagy negyedik negyedben, akkor $xy \geqslant -\frac{x^2 + y^2}{2}$. 1 pont

Az egyenlőség $x = y$, illetve $x = -y$ esetén áll fenn. 1 pont

Így a maximális értéket kapjuk, ha

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + xy \le x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) = 24,$$ 1 pont

és a minimális értéket, ha

$$f(x;y) = x^2 + y^2 + xy \geqslant x^2 + y^2 - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{1 pont}$$

ami $x = y$, illetve $x = -y$ esetén áll fenn.

A legnagyobb értéket a legnagyobb sugarú kör és az $x = y$ egyenes metszeteként kapjuk: $M_1\left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, illetve $M_2\left(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$.

A legkisebb értéket pedig a legkisebb sugarú kör és az $x = -y$ egyenes metszeteként határozhatjuk meg: $M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, illetve $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Egy 2018×2018 egységnégyzetből álló négyzet alakú táblázat néhány (egységnégyzetnyi) mezőjének középpontját pirosra színezzük. Legfeljebb hány középpont színezhető ki, ha azt szeretnénk, hogy ne legyen olyan derékszögű háromszög a táblázatunkban, amelynek csúcsait a középpontok közül választjuk és minden csúcsa piros. **7 pont**

Megoldás: Az első sor és az első oszlop összes mezőjének (kivéve a metszet bal-felső mezőnek) a középpontját pirosra színezve nyilván nincs az ábrában tiltott piros derékszögű háromszög.

Vagyis $2 \cdot 2018 - 2 = 4034$ mező kiválasztható. (Általában $n \times n$ méret esetén $2n - 2$ a maximum.)

Egy helyes konstrukcióra: 2 pont

Megmutatjuk, hogy általában $2n - 1$ (vagyis most 4035) színezett pont esetén már van piros derékszögű háromszög.

Csak olyan derékszögű háromszögeket fogunk vizsgálni, amelyek befogói vízszintesek és függőlegesek (még ilyenből is lesz piros)! Ezeket hívjuk *standard* háromszögeknek! 1 pont

Ennek igazolásához teljes indukciót használunk.

I) A bázis-állítás: 2×2-es méretű táblázatban kiválasztva (a 4 lehetséges pont közül) 3 pontot nyilván van a táblázatban piros derékszögű háromszög.

II) Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy $k \times k$ méretű táblázat és $2k - 1$ kiválasztott pont estén mindig van piros standard derékszögű háromszög.

III): Ezek után legyen $(k + 1) \times (k + 1)$ méretű a táblázat és $2k + 1$ kiválasztott piros pont!

Ha két sort megcserélünk vagy két oszlopot megcserélünk, az a piros standard háromszögek számát nem változtatja. 2 pont

Mivel a kiválasztott pontok száma kevesebb, mint $2(k + 1)$ (azaz a sorok/oszlopok számának duplája), ezért van olyan sor, és van olyan oszlop is, amelyben legfeljebb 1 pontot színeztünk be. 1 pont

Sor és oszlopcserékkel vigyünk a legfelső sorba és a bal szélső oszlopba egy-egy ilyen „kevés pontos” (összesen legfeljebb $1+1 = 2$ beszínezett pontos) sort/oszlopot. Ekkor a táblázat maradék $k \times k$-as részében túl sok, legalább $2k - 1$ színezett pont van, ami az indukciós feltevés miatt azt jelenti, hogy van tiltott (standard) háromszög.

Ezzel az állítás bizonyítottuk, $n \times n$ méretű táblázatban $2n - 1$ (vagyis most 4035) piros pont esetén már van piros derékszögű háromszög.

Válasz: vagyis legfeljebb 4034 piros pontot lehet kiválasztani. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Indukció nélkül is bebizonyítható, hogy ha nincsen csupa piros csúcspontú derékszögű háromszög (így standard sincs) az $n \times n$-es táblán, akkor legfeljebb $2n - 2$ középpont lehet pirosra színezve.

Ha csak n piros középpont van, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.

Ha n-nél több piros középpont van, akkor van olyan sor is és oszlop is, amelyben két piros pont is van, például az i-edik sor és a j-edik oszlop.

Nem megy az általánosság rovására, ha a i-edik sort az első (fölső) sornak és a j-edik oszlopot az utolsó (jobb szélső) oszlopnak vesszük.

Megállapíthatjuk, hogy:

1. Az első sor utolsó oszlopában lévő középpont nem lehet piros, ellenkező esetben lenne piros (standard) háromszög.

2. Az első sorban lévő piros négyzet-középpontok oszlopában sem lehet több piros négyzet-középpont, ellenkező esetben lenne piros (standard) háromszög.

3. Ugyanígy, az utolsó oszlopban lévő piros négyzet-középpontok sorában sem lehet további piros négyzet-középpont.

Ezek után minden olyan sort, amelyben legalább két piros középpont van, „vetítsünk” az első sorra, illetve minden olyan oszlopot, amelyben legalább két piros középpont van, „vetítsünk” az utolsó oszlopra.

A 2. megállapítás alapján világos, hogy az első sor minden négyzet-középpontjába legfeljebb egy piros pont eshet. illetve a 3. megállapítás alapján az utolsó oszlopban hasonlóan, minden négyzet-középpontba legfeljebb egy piros pont eshetett.

A további piros négyzet-középpontok egyedüli pontok a sorukban/olszopukban, így akár az első sorra, akár az utolsó oszlopra vetítjük, ott olyan négyzet-középpontba esnek, amely még nem piros.

Ebből következik, hogy a piros négyzet-középpontok száma legfeljebb annyi, mint az első sorban és az utolsó oszlopban (de nem mindkettőben) található négyzet-középpontok száma, $2(n - 1)$.

Tehát legfeljebb $2n - 2$ négyzet-középpont lehetett piros.

A piros négyzet-középpontok száma akkor nem éri el a $(2n - 2)$-t, azaz az első sor és utolsó oszlop – közös elem nélküli – teljes kitöltését, ha van olyan oszlop/sor, amelyet mindkettőre vetíthettünk volna, azaz van olyan sor/olszop, amelyben csak egy középpont piros; továbbá ha több sort is vetítünk az első sorra (ekkor az utolsó oszlopban a soroknak megfelelő helyre nem vetítünk pontot), vagy fordítva, ha több oszlopot is vetítünk az utolsó oszlopra. Vagyis a $2n - 2$ piros középpont *csak* a megoldásban látott konstrukcióhoz hasonló elrendezéssel érhető el.

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adjuk meg az összes a, b, c pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy $[a, b, c] = a + b + c$. ($[a, b, c]$ az a, b, c számok legkisebb közös többszörösét jelöli.) **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja M, a magasságok a szokásos jelöléssel m_a, m_b, m_c. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 2!$$

7 pont

3. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy végtelen sok négyzetszám van, amely előáll n darab páronként különböző kettőhatvány összegeként (kettőhatványon kettőnek természetes szám kitevőjű hatványát értve)! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Adjuk meg az összes a, b, c pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy $[a, b, c] = a + b + c$. ($[a, b, c]$ az a, b, c számok legkisebb közös többszörösét jelöli.) **7 pont**

Megoldás: Feltehető, hogy $a \leq b \leq c$. Ekkor $a+b+c \leq 3c$, ezért mivel c többszöröse, $[a, b, c]$, értéke $2c$ vagy $3c$ lehet (c nem lehet, mert $a + b + c > c$). 1 pont

1. eset: $[a, b, c] = 2c$. Ekkor $a\,|\,2c$, $b\,|\,2c$, $a + b = c$. Az utóbbit $2c$-vel osztva $\frac{a}{2c} + \frac{b}{2c} = \frac{1}{2}$, azaz elő kell állítani az $\frac{1}{2}$-et két törzstört (1 számlálójú tört) összegeként. Egyik törzstört nevezője se lehet 2, mert akkor az összegük több, mint $\frac{1}{2}$. Ha mindkét törzstört nevezője legalább 4, akkor összegük legfeljebb $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, egyenlőség csak akkor áll fenn, ha mindkettő $\frac{1}{4}$. Ha viszont $\frac{a}{2c} = \frac{b}{2c} = \frac{1}{4}$, akkor $a = b = \frac{c}{2}$, viszont ekkor $[a, b, c] = c$, azaz így nem kapunk megoldást. Ha pedig mondjuk (a és b szimmetriája miatt) $\frac{a}{2c} = \frac{1}{3}$ akkor $\frac{b}{2c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, tehát a második lehetőség ebben az esetben az, hogy $a = \frac{2c}{3}$ és $b = \frac{c}{3}$. Mivel $2c$ osztható 3-mal is, ezért c osztható 6-tal. Legyen $c = 6k$, így $a = 4k$ és $b = 2k$. Ez könnyen láthatóan jó megoldás, ha k pozitív egész. 3 pont

2. eset: $[a, b, c] = 3c$. Ekkor tehát $a \mid 3c$, $b \mid 3c$, $a + b = 2c$. Az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy $\frac{a}{3c} + \frac{b}{3c} = \frac{2}{3}$, tehát most a $\frac{2}{3}$-ot kell törzstörtek összegeként előállítani. A törzstörtek nevezője legalább 3, mert $a \leq c$ és $b \leq c$. Ekkor viszont az összegük legfeljebb $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, tehát csak az lehet, hogy mindkettő $\frac{1}{3}$. Ekkor $\frac{a}{3c} = \frac{b}{3c} = \frac{1}{3}$, vagyis $a = b = c$, de ez nem jó megoldás, mert ekkor a legkisebb közös többszörösük c, nem pedig $3c$. 2 pont

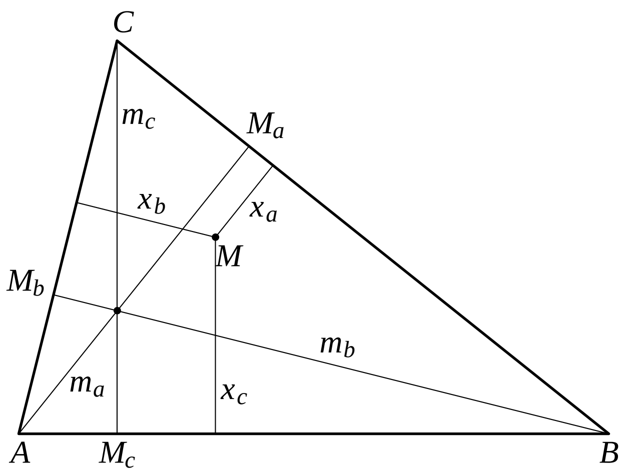
Összefoglalva, az összes megoldást úgy kapjuk, hogy választunk egy k pozitív egész számot, és vesszük a $2k$, $4k$, $6k$ számokat valamilyen sorrendben. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja M, a magasságok a szokásos jelöléssel m_a, m_b, m_c. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 2!$$ **7 pont**

Megoldás:



Bocsássunk merőlegeseket M-ből az a, b, c oldalakra, és a keletkező merőleges szakaszokat jelölje rendre x_a, x_b, x_c.

Mivel ABC hegyesszögű, az A, B, C csúcsokból a szemközti oldalakhoz húzható merőleges legfeljebb olyan hosszú, mint bármely, a csúcsot az oldal valamely pontjával összekötő töröttvonal hossza. 1 pont

Így

$MA+x_a \geq m_a$, $MB+x_b \geq m_b$, $MC+x_c \geq m_c$.

Ezért

$$MA \geq m_a - x_a, \qquad MB \geq m_b - x_b, \qquad MC \geq m_c - x_c,$$ 1 pont

ahonnan

$$\frac{MA}{m_a} \geq 1 - \frac{x_a}{m_a}, \qquad \frac{MB}{m_b} \geq 1 - \frac{x_b}{m_b}, \qquad \frac{MC}{m_c} \geq 1 - \frac{x_c}{m_c}.$$ 1 pont

Összeadva ezeket:

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 3 - \left(\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c}\right)$$ 1 pont

Itt

$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c} = \frac{ax_a}{am_a} + \frac{bx_b}{bm_b} + \frac{cx_c}{cm_c} = \frac{ax_a}{2T_{ABC}} + \frac{bx_b}{2T_{ABC}} + \frac{cx_c}{2T_{ABC}} = \frac{ax_a + bx_b + cx_c}{2T_{ABC}}$$ 1 pont

Másrészt viszont $ax_a + bx_b + cx_c = 2T_{BCM} + 2T_{ACM} + 2T_{ABM} = 2T_{ABC}$. 1 pont

Eszerint

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 3 - \left(\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c}\right) = 3 - \frac{2T_{ABC}}{2T_{ABC}} = 2.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy végtelen sok négyzetszám van, amely előáll n darab páronként különböző kettőhatvány összegeként (kettőhatványon kettőnek természetes szám kitevőjű hatványát értve)! **7 pont**

Megoldás: Tekintsük a következő összeget: $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. 2 pont

Határozzuk meg ennek négyzetét! $\left(2^{n+1} - 1\right)^2 = 2^{2n+2} - 2^{n+2} + 1 = 2^{n+2}(2^n - 1) + 1$. 1 pont

Mivel $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, mindkét oldalt 2^{n+2}-nel szorozva kiderül, hogy $2^{n+2}(2^n - 1)$ n darab különböző kettőhatvány összege. 1 pont

Ehhez 1-et hozzáadva kapjuk, hogy $\left(2^{n+1} - 1\right)^2$ $(n + 1)$ darab kettőhatvány összege. 1 pont

Egy ilyen négyzetszámot 2 páros kitevőjű hatványával szorozva újra négyzetszámot kapunk, amely előáll $n + 1$ kettőhatvány összegeként, azaz végtelen sok négyzetszám van, amely előáll adott, de legalább két darab kettőhatvány összegeként. 1 pont

Kettőnek páros kitevőjű hatványait nézve kiderül, hogy végtelen sok kettőhatvány van, amely négyzetszám. 1 pont

Összesen: **7 pont**