ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY
2015/2016-OS TANÉV

Kezdők és Haladók
(I., II. és III. kategória)

Feladatok és megoldások

A verseny az NTP-TV-15-0048 azonosító számú pályázat alapján a Nemzeti Tehetség Program, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, valamint az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

Bolyai János Matematikai Társulat

Kezdők I–II. kategória, I. forduló

Feladatok

1. Tekintsük az első 30 pozitív egész szám összegét, majd tetszőleges számú tag előjelét változtassuk meg. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy a kapott összeg 300 legyen?

2. Mi a $2015^{2015} + 2015^{2016}$ összeg utolsó 6 számjegye?

3. Egy hegyesszögű háromszöget 2 magasságvonala 4 részre bontja. Tudjuk, hogy ebből a 4 részből 2-2-nek egyenlő a területe. Mekkorák a háromszög szögei?

4. Egy 4×4-es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.

$a)$ Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?

$b)$ Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

Megoldások és javítási útmutató

1. Tekintsük az első 30 pozitív egész szám összegét, majd tetszőleges számú tag előjelét változtassuk meg. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy a kapott összeg 300 legyen?

Megoldás.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 30 = \frac{30(30+1)}{2} = 465.$$ 2 pont

Ha valamely szám előjele megváltozik, akkor az összeg a szám kétszeresével, 2 pont
azaz páros számmal csökken, így páratlan marad. 1 pont

Ezért soha nem kaphatunk eredményül 300-at. 1 pont

2. Mi a $2015^{2015} + 2015^{2016}$ összeg utolsó 6 számjegye?

Megoldás. Emeljünk ki 2015^{2015}-t!

$$2015^{2015} \cdot (1 + 2015) = 2015^{2015} \cdot 2016.$$ 1 pont

2015 osztható 5-tel. 1 pont

2016 osztható 2^5-nel. 1 pont

$$2015 = 5 \cdot 403; \qquad 2016 = 2^5 \cdot 63;$$
$$2015^{2015} \cdot 2016 = 5^{2015} \cdot 403^{2015} \cdot 2^5 \cdot 63.$$

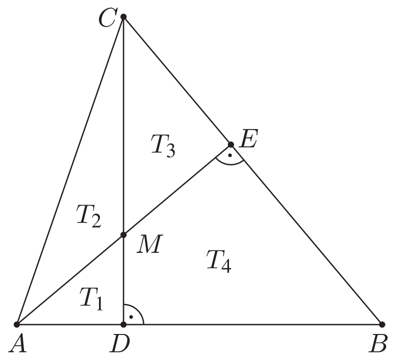
A szorzat tehát osztható 5^5-nel és 2^5-nel, ezért osztható 10^5-nel is, vagyis az utolsó 5 számjegye 00000. 2 pont

Ha a számot leosztanánk 10^5-nel, akkor egy 5-tel osztható páratlan számot kapnánk, ami ezért 5-re végződik. Tehát az eredeti szám utolsó 6 számjegye: 500 000 1 pont

Megjegyzés: Más megoldásmenet esetén minden megtalált (és megindokolt) számjegyért 1 pont jár.

3. Egy hegyesszögű háromszöget 2 magasságvonala 4 részre bontja. Tudjuk, hogy ebből a 4 részből 2-2-nek egyenlő a területe. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás.



Jelöljük az *ábra* szerint a kialakult 4 területet! 3 lehetőség van arra, hogy melyik 2 rész területe egyenlő:

$a)$ $T_1 = T_2$ és $T_3 = T_4$;
$b)$ $T_1 = T_4$ és $T_2 = T_3$;
$c)$ $T_1 = T_3$ és $T_2 = T_4$. 1 pont

Az $a)$ eset nem lehetséges, mert $T_1 = T_2$-ből az következik, hogy M felezi CD-t, mivel a két háromszög A-ból induló magassága megegyezik. Viszont ekkor T_4 biztosan nagyobb, mint T_3, mert ha M felezi CD-t, akkor $T_3 = T_{MED} < T_4$. Hasonlóan nem lehetséges a $b)$ eset sem. 2 pont

A $c)$ esetből $T_1 + T_2 = T_3 + T_4$, illetve $T_1 + T_4 = T_2 + T_3$ következik, vagyis a két magasságvonal egyben súlyvonal is. 1 pont

Ha egy háromszögben egybeesik egy magasságvonal a súlyvonallal, akkor a háromszög egyenlőszárú, mert a magasságvonal ekkor 2 egybevágó háromszögre bontja az eredeti háromszöget. 1 pont

Mivel most két magasságvonal is egybeesik egy-egy súlyvonallal, ezért a háromszög szabályos. A szögei tehát 60 fokosak. 1 pont

4. Egy 4×4-es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.

$a)$ Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?

$b)$ Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

Megoldás. $a)$ Igen, elérhető. Egy lehetséges elrendezés (a sorok mellett, illetve az oszlopok alatt az összegeket tüntettük fel):

1	1	1	1	4
1	1	2	3	7
1	1	3	3	8
2	3	3	3	11
5	6	9	10	

2 pont

b) Nem érhető el:

Egy sorban, oszlopban vagy átlóban az összeg legalább $4 \cdot 1 = 4$, és legfeljebb $4 \cdot 3 = 12$ lehet, azaz az összegzéskor legfeljebb 9-féle számot kaphatunk eredményül. 1 pont

A táblázatban 4 sor, 4 oszlop és 2 átló szerepel, ami összesen 10-féle összeget jelent. 1 pont

Mivel az összegek száma nagyobb, mint a lehetséges eredmények száma, a skatulyaelv értelmében kell lennie olyan eredménynek, ami legalább kétszer szerepel. 2 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző *indoklás nélkül* csak azt állapítja meg, hogy a) esetében lehetséges, a b) esetében pedig nem lehetséges a kitöltés, akkor összesen 1 pontot kaphat erre a feladatra.

Kezdők I–II. kategória, II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Hat különböző prímszámot összeszoroztunk és a szorzat értéke egy $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű szám lett. A hat darab prím közül az egyik a 29. Határozzuk meg az $\overline{ababab}$ szám értékét! (6 pont)

2. Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge derékszög. A CAB és ABC szögek belső szögfelezői a szemközti oldalakat a P és Q pontokban metszik. A P és Q pontokból az AB oldalra állított merőlegesek talppontjai legyenek az M és N pontok. Határozzuk meg az MCN szög nagyságát! (6 pont)

3. Egy osztályba 6 fiú jár, és közülük az egyik az alábbi történetet mesélte el:

Decemberben mindnyájan feleltünk történelemből. Minden számon kérő órán volt egy vagy több felelő közülünk, de olyan is akadt, akit nem kérdezett a tanárnő. Viszont mindegyikünk hallhatta a másik 5 személy feleletét (nem feltétlenül együtt) azon történelem órák valamelyikén, amikor ő éppen nem került kiválasztásra.

Adjuk meg, hogy legalább hány történelem órán volt felelés december hónapban ebben az osztályban! (8 pont)

4. Három réten tehenek legelnek, a rétek területének aránya 4:5:6. Az első, legkisebb réten 6 tehén 12 napig tud legelni, a másodikon 7 tehén 20 napig. A harmadik, legnagyobb réten hány napig tud legelni 12 tehén?

Mindhárom réten kezdetben egyforma magas volt a fű, a réteken egyforma gyorsan, egyenletesen nő a fű, és a tehenek megeszik mindazt a füvet, ami a réten volt, amikor odaérkeztek, és azt is, ami addig nőtt, amíg ott legeltek. (10 pont)

5. Az ABC egyenlőszárú háromszög AB szára a háromszög köré írt körének O középpontjától $\sqrt{19}$ egység távolságra van, a köré írt kör sugara 10 egység. A BC alap felezőmerőlegese a körülírt kört az F pontban metszi, az AB szár felezőmerőlegese és a körülírt kör metszéspontjai a D és E pontok (D a rövidebbik AB íven helyezkedik el). Az E-re illeszkedő BC-vel párhuzamos egyenes a DF szakaszt a H pontban metszi. Mennyi az AHE háromszög területe? (10 pont)

Megoldások és javítási útmutató

1. Hat különböző prímszámot összeszoroztunk és a szorzat értéke egy $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű szám lett. A hat darab prím közül az egyik a 29. Határozzuk meg az $\overline{ababab}$ szám értékét! (6 pont)

Megoldás.

$$\overline{ababab} = 10101 \cdot \overline{ab}, \qquad (2 \text{ pont})$$

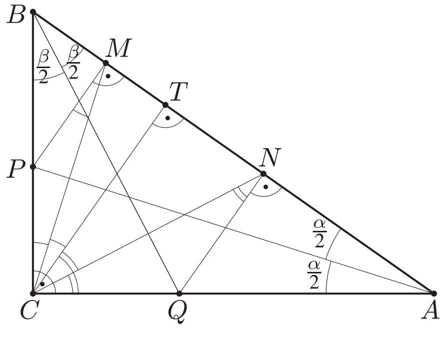
$$\overline{ababab} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab}. \qquad (1 \text{ pont})$$

Ha $\overline{ab}$ egyik prímtényezője a 29, akkor a másik tényező csak a 2 lehet, hiszen egyrészt $5{\cdot}29$ már háromjegyű, másrészt mivel különböző prímeket szoroztunk össze, a másik tényező nem lehet a 3. (2 pont)

Így a válasz: $\overline{ababab} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 29 = 585\,858$. (1 pont)

2. Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge derékszög. A CAB és ABC szögek belső szögfelezői a szemközti oldalakat a P és Q pontokban metszik. A P és Q pontokból az AB oldalra állított merőlegesek talppontjai legyenek az M és N pontok. Határozzuk meg az MCN szög nagyságát! (6 pont)

Megoldás.



Mivel P rajta van a CAB szögfelezőjén, ezért $PC = PM$, (1 pont)
és a PCM egyenlőszárú háromszögben $PCM\sphericalangle = PMC\sphericalangle$. (1 pont)

Legyen T az ABC háromszög C csúcsához tartozó magasságának talppontja. Ekkor $PM \parallel CT$ és így $PMC\sphericalangle = MCT\sphericalangle$. Ezt és a korábbi megállapításunkat figyelembe véve $PCM\sphericalangle = MCT\sphericalangle$. (1 pont)

Hasonló gondolatmenettel látható be, hogy $QCN\sphericalangle = NCT\sphericalangle$. (1 pont)

Így

$$90^\circ = BCA\sphericalangle = PCM\sphericalangle + MCT\sphericalangle + NCT\sphericalangle + QCN\sphericalangle =$$
$$= 2(MCT\sphericalangle + NCT\sphericalangle) = 2MCN\sphericalangle. \qquad \text{(1 pont)}$$

amiből $MCN\sphericalangle = 45^\circ$ adódik. (1 pont)

3. Egy osztályba 6 fiú jár, és közülük az egyik az alábbi történetet mesélte el:

Decemberben mindnyájan feleltünk történelemből. Minden számon kérő órán volt egy vagy több felelő közülünk, de olyan is akadt, akit nem kérdezett a tanárnő. Viszont mindegyikünk hallhatta a másik 5 személy feleletét (nem feltétlenül együtt) azon történelem órák valamelyikén, amikor ő éppen nem került kiválasztásra.

Adjuk meg, hogy legalább hány történelem órán volt felelés december hónapban ebben az osztályban! (8 pont)

Megoldás. Először azt fogjuk belátni, hogy legfeljebb 3 számon kérő órával a feladat feltételei nem teljesíthetők. Jelöljük a fiúkat A, B, C, D, E, F-fel! Három vagy annál kevesebb számon kérő óra esetén, mivel a 6 fiú mindegyike felelt legalább egyszer, ezért kellett lennie olyan alkalomnak, amikor legalább két fiú került kiválasztásra. (1 pont)

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az ezen alkalommal beszámoló két személy A és B volt. Ezen számon kérő órán kívül kellett lennie még két olyan másiknak is, amikor A nem felelt és hallhatta B feleletét, illetve ennek fordítottjaként egy másik esetben B nem került kiválasztásra és ő hallhatta A beszámolóját. (1 pont)

Ez a 3 számon kérő óra azért nem elegendő a feladat összes feltételének teljesítéséhez, mert ahhoz, hogy A illetve B nem felelőként hallgathassa meg a C, D, E, F társak beszámolóját, ahhoz a 4 felsorolt személynek az előbb említett két számon kérő órán felelnie kellett volna. Viszont 3 számonkérés esetén azon az órán, amikor A ésB együtt felelt, már nem kerülhetett kiválasztásra a C, D, E, F személyek egyike sem, hiszen akkor lett volna olyan személy, aki minden számonkérésnél szerepelt volna. Így viszont C, D, E, F tanulók közül egyik sem hallhatta volna a másik 3 személy feleletét akkor, amikor ő mentesült a számonkérés alól. (3 pont)

4 számon kérő óra esetén a feladat feltételei már megvalósíthatók, például az alábbi csoportok feleltetésével: $\{A, B, C\}$, $\{A, D, E\}$, $\{B, D, F\}$, $\{C, E, F\}$. (3 pont)

4. Három réten tehenek legelnek, a rétek területének aránya 4:5:6. Az első, legkisebb réten 6 tehén 12 napig tud legelni, a másodikon 7 tehén 20 napig. A harmadik, legnagyobb réten hány napig tud legelni 12 tehén?

Mindhárom réten kezdetben egyforma magas volt a fű, a réteken egyforma gyorsan, egyenletesen nő a fű, és a tehenek megeszik mindazt a füvet, ami a réten volt, amikor odaérkeztek, és azt is, ami addig nőtt, amíg ott legeltek. (10 pont)

Megoldás. Legyen a rétek területe 4, 5, illetve 6 területegység. Nevezzük egy adagnak azt a fűmennyiséget, amit 1 tehén 1 nap alatt megeszik.

Jelöljük x-szel azt, hogy egy egységnyi területen hány adag fű található, (1 pont)
illetve y-nal azt, hogy az egységnyi területen 1 nap alatt hány adag fű nő. (1 pont)

A feladat szövege alapján az első 2 rétre felírható az alábbi 2 egyenlet:

$$4 \cdot (x + 12y) = 6 \cdot 12, \qquad (1 \text{ pont})$$

$$5 \cdot (x + 20y) = 7 \cdot 20. \qquad (1 \text{ pont})$$

Ebből $y = 1{,}25$. (1 pont)
és $x = 3$. (1 pont)

Ha t-vel jelöljük, hogy a 12 tehén hány napig tud legelni a harmadik réten, akkor arra felírható az alábbi egyenlet:

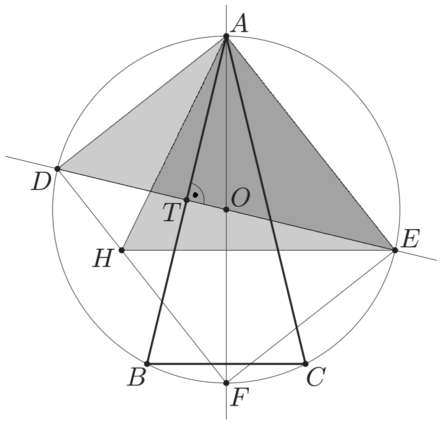
$$6 \cdot (3 + 1{,}25\,t) = 12\,t. \qquad (2 \text{ pont})$$

Ebből $t = 4$. (1 pont)

Vagyis 4 napig tud a legnagyobb réten 12 tehén legelni. (1 pont)

5. Az ABC egyenlőszárú háromszög AB szára a háromszög köré írt körének O középpontjától $\sqrt{19}$ egység távolságra van, a köré írt kör sugara 10 egység. A BC alap felezőmerőlegese a körülírt kört az F pontban metszi, az AB szár felezőmerőlegese és a körülírt kör metszéspontjai a D és E pontok (D a rövidebbik AB íven helyezkedik el). Az E-re illeszkedő BC-vel párhuzamos egyenes a DF szakaszt a H pontban metszi. Mennyi az AHE háromszög területe? (10 pont)

Megoldás.



Az $ADFE$ négyszög téglalap, mert átlói egyenlő hosszúak, és felezik egymást (vagy mivel a Thalész-tételt minden csúcsára és szemközti átlójára, mint átmérőre alkalmazhatjuk). (2 pont)

Az AHE háromszög területe ugyanakkora, mint az ADE háromszög területe, ugyanis az AE alapjuk azonos és az AE párhuzamos a DF-fel. Így ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk egyenlő. (2 pont)

Jelöljük az AB szár felezéspontját T-vel. Az ADE területe kétszerese az ADO területének, mert AT magasságuk egybeesik, és DO és OE egyenlő hosszú, mivel mindkettő sugara a körnek. (2 pont)

Tehát

$$T_{AHE} = 2\,T_{ADO} = 2\frac{AT \cdot OD}{2}. \qquad (1 \text{ pont})$$

Az ATO háromszög derékszögű, mert a T felezéspont talppontja az AB oldal felezőmerőlegesének. A Pithagorasz-tételt felírva az ATO háromszögre: (1 pont)

$$AT = \sqrt{100 - \left(\sqrt{19}\right)^2} = 9. \qquad (1 \text{ pont})$$

Tehát

$$T_{AHE} = 2\,T_{ADO} = 9 \cdot 10 = 90. \qquad (1 \text{ pont})$$

Kezdők I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Hány olyan $p > q > 0$ számpár van, amelynek tagjai prímszámok, és $p^4 - q^4$-nek 8-nál kevesebb pozitív osztója van?

2. Andris és Bence a következő játékot játsszák: feldobnak egy pénzérmét, és ha a dobás eredménye fej, akkor Andris, ha pedig írás, akkor Bence kap 1 pontot. A játékot az nyeri meg, aki legalább 5 pontot szerez, legalább 2 pont különbséggel. A játékot végül Andris nyerte meg $12 : 10$-re.

Hány különböző dobássorozat vezethetett ehhez az eredményhez?

3. Egy háromszög AB oldala 10 cm. Az A csúcsból kiinduló súlyvonal 9 cm, a B csúcshoz tartozó súlyvonal pedig 12 cm hosszú. Igazoljuk, hogy az AC oldal A-hoz közelebbi negyedelő pontja $\sqrt{13}$ cm-re van a háromszög súlypontjától!

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan $p > q > 0$ számpár van, amelynek tagjai prímszámok, és $p^4 - q^4$-nek 8-nál kevesebb pozitív osztója van?

Megoldás. $p^4 - q^4 = (p^2 - q^2)(p^2 + q^2) = (p - q)(p + q)(p^2 + q^2)$.

Ha $p > q > 0$ és $p - q \neq 1$, akkor

$$1 < p - q < p + q < p^2 - q^2 < p^2 + q^2 < (p - q)(p^2 + q^2) < (p + q)(p^2 + q^2) < p^4 - q^4.$$

Így felsoroltuk a $p^4 - q^4$ kifejezés 8 különböző pozitív osztóját.

Tehát ahhoz, hogy 8-nál kevesebb pozitív osztót kapjunk, szükséges feltétel, hogy $p - q = 1$ legyen. Ez egyetlen esetben lehetséges: ha $p = 3$ és $q = 2$.

Ekkor $p^4 - q^4 = 65$, aminek 4 pozitív osztója van. Ezek az $(1, 5, 13, 65)$ számok. Tehát a kapott megoldás megfelelő, és ez az egyetlen megoldása a feladatnak.

2. Andris és Bence a következő játékot játsszák: feldobnak egy pénzérmét, és ha a dobás eredménye fej, akkor Andris, ha pedig írás, akkor Bence kap 1 pontot. A játékot az nyeri meg, aki legalább 5 pontot szerez, legalább 2 pont különbséggel. A játékot végül Andris nyerte meg $12 : 10$-re.

Hány különböző dobássorozat vezethetett ehhez az eredményhez?

Megoldás. Mivel a játéknak korábban nem lett vége, így egyik játékos sem vezethetett 5 : 3-ra (vagy nagyobb mértékben) a játék során, tehát ki kellett alakulnia a 4 : 4-es állásnak.

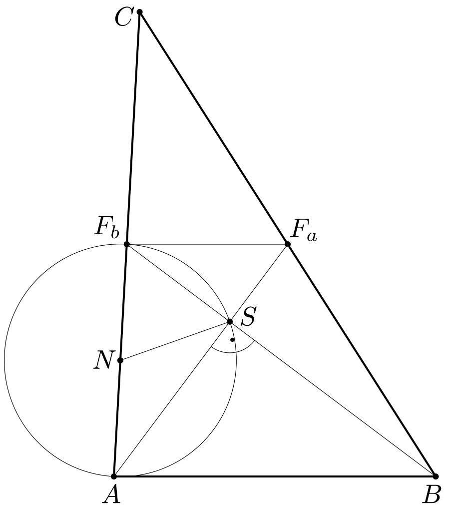
Ez azt jelenti, hogy az első 8 dobásból pontosan 4-4 lett fej, illetve írás, ez $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$-féleképpen történhetett. (Ez a részeredmény megkapható ismétléses permutációval, kombinációval, vagy akár leszámlálással is.)

4 : 4 után senki sem nyert két egymást követő pontot 10 : 10-ig, azaz bárki is nyert egyenlő állás után egy pontot, a következőt mindig a másik nyerte meg, és azzal kiegyenlített. Így 4 : 4-től 10 : 10-ig összesen $2^6 = 64$-féleképpen alakulhatott az eredmény. 10 : 10 után az utolsó két pontot Andris szerezte meg, és ezzel összességében a játékot is megnyerte.

Így összesen $70 \cdot 64 = 4480$-féle dobássorozat vezethetett a 12 : 10-es végeredményhez.

3. Egy háromszög AB oldala 10 cm. Az A csúcsból kiinduló súlyvonal 9 cm, a B csúcshoz tartozó súlyvonal pedig 12 cm hosszú. Igazoljuk, hogy az AC oldal A-hoz közelebbi negyedelő pontja $\sqrt{13}$ cm-re van a háromszög súlypontjától!

Megoldás.



A háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, így $AS = 6$ cm és $BS = 8$ cm, továbbá $SF_a = 3$ cm és $SF_b = 4$ cm.

Az ASB háromszög oldalai 10 cm, 6 cm és 8 cm hosszúak, így a Pitagorasz-tétel megfordításának értelmében a háromszög S csúcsánál derékszög található, azaz a háromszög súlyvonalai merőlegesek egymásra. (Ugyanerre a megállapításra juthatunk, ha berajzoljuk az F_aF_b középvonalat, amelynek hossza az AB oldal fele, azaz 5 cm. Ekkor az F_aSF_b háromszög oldalai 5 cm, 3 cm és 4 cm hosszúságúak.)

Tekintsük az AF_b szakasz fölé írt Thalész-kört, ennek középpontja az AC oldal A-hoz közelebbi negyedelő pontja: N. Mivel ASF_b szög derékszög, ezért a Thalész-tétel megfordításának értelmében S rajta van ezen a körön.

Az NS távolság így éppen a kör sugarának felel meg, így ennek hossza az AF_b szakasz hosszának fele.

Mivel az ASF_b háromszög derékszögű, így a Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk, hogy

$$AF_b = \sqrt{AS^2 + SF_b^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}\,.$$

Innen $NS = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 13}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}\,.$

Kezdők II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Melyek azok a pozitív természetes számok, amelyek reciprokának tizedes tört alakja véges, és a szám köbének 7-szer annyi osztója van, mint magának a számnak?

2. Az $ABCD$ négyzet belsejében egy P pontra teljesül, hogy $APB\sphericalangle = 90^\circ$ és $PA > PB$. Jelöljük d-vel PA és PB szakasz hosszának különbségét, a négyzet középpontját pedig O-val! Fejezzük ki az OP távolságot d segítségével!

3. Egy szabályos háromszög oldalait felosztjuk 6-6 egyenlő részre, és az osztópontokon keresztül az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével a háromszöget feldaraboljuk 36 egybevágó részre. Ezután a kis háromszögek minden csúcspontjában elhelyezünk egy-egy katicabogarat, amelyek elkezdenek mozogni a különböző éleken azonos sebességgel. Amikor egy csomópontba érnek, megváltoztatják a haladási irányukat 60 vagy 120°-kal. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan pillanat, amikor két katica ugyanabban a csúcsban találkozik. Igaz marad-e az állítás akkor is, ha kezdetben a háromszög oldalait csak 5-5 egyenlő részre osztjuk fel?

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok a pozitív természetes számok, amelyek reciprokának tizedes tört alakja véges, és a szám köbének 7-szer annyi osztója van, mint magának a számnak?

Megoldás. Jelöljük a keresett számot n-nel!

Mivel az $\dfrac{1}{n}$ szám tizedes tört alakja véges, ezért $n = 2^a \cdot 5^b$, ahol $ab \in \mathbb{N}$.

$$d(n) = (a+1)\cdot(b+1), \qquad d(n^3) = (3a+1)\cdot(3b+1),$$

ezért $7\cdot(a+1)\cdot(b+1) = (3a+1)\cdot(3b+1)$.

Rendezés után: $ab - 2a - 2b - 3 = 0$.

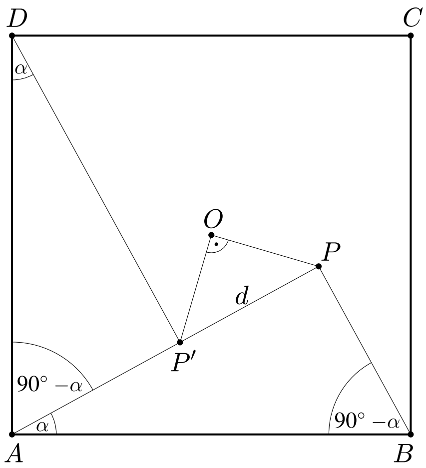
Szorzattá alakítva: $(a-2)\cdot(b-2) = 7$.

Mivel a 7 prím, ezért $a-2=1$ és $b-2=7 \longrightarrow a=3$ és $b=9$,
vagy $a-2=7$ és $b-2=1 \longrightarrow a=9$ és $b=3$.

Így a keresett számok: $n = 2^3\cdot 5^9 = 15\,625\,000$
vagy $n = 2^9 \cdot 5^3 = 64\,000$.

2. Az $ABCD$ négyzet belsejében egy P pontra teljesül, hogy $APB\sphericalangle = 90^\circ$ és $PA > PB$. Jelöljük d-vel PA és PB szakasz hosszának különbségét, a négyzet középpontját pedig O-val! Fejezzük ki az OP távolságot d segítségével!

I.a. megoldás.



Jelöljük a PAB szöget α-val! Ekkor a ABP szög $90^\circ - \alpha$. Forgassuk el az ABP háromszöget az O középpont körül -90°-kal! A APB háromszög képe ekkor a $DP'A$ háromszög lesz.

A P' pont rajta van az AP szakaszon, mert az $AP'D$ háromszögnek A-nál $90^\circ - \alpha$ nagyságú szöge van, és a két háromszög (APB és $AP'D$) két A-nál lévő szögének összege 90° ($90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$). A P' a PA szakasz belső pontja, mert $PA > PB = P'A$.

A PP' szakasz hossza a megadott d-vel egyenlő, mert $AP' = PB$.

A 90°-os forgatás miatt a POP' háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög.

Tehát a POP' háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $OP = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

I.b. megoldás. Osszuk fel AP szakaszt A-tól kezdve egy PB-vel egyenlő hosszú és egy d hosszúságú részre, a kapott osztópont legyen P'! .

A APB háromszög egybevágó az $AP'D$ háromszöggel, mert két-két oldaluk és a közbezárt szögük azonos, vagyis: $PB = P'A$, $AB = AD$ és a közbezárt szög $90^\circ - \alpha$.

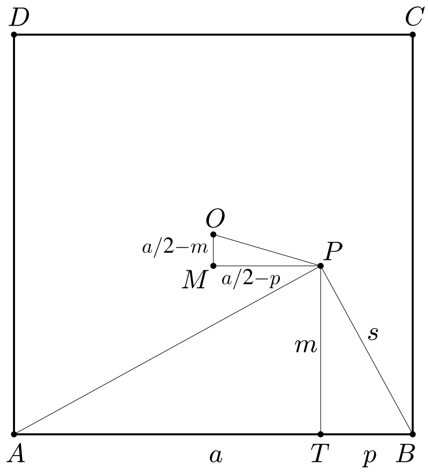
Az APB háromszög O pont körüli -90°-os elforgatottja a $DP'A$ háromszög (mert az AB oldal képe az AD oldal).

Tehát a P pont O körüli -90°-os elforgatottja P'.

A 90°-os forgatás miatt a POP' háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög.

Tehát a POP' háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $OP = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

II. megoldás.



A feladat feltételeiből következik, hogy P rajta van az AB átmérő fölé emelt Thalesz-körön, és annak a (kisebbik) OB ívén található. Vagyis a P pont közelebb van az AB és BC oldalakhoz, mint O.

Legyen M az O-ból az AB-re és P-ből az AD-re állított merőleges egyenesek metszéspontja!

Az OP távolságot az OPM háromszögből határozhatjuk meg.

Jelöljük az APB háromszög P-ből induló magasságát m-mel, talppontját T-vel, a BT szakaszt pedig p-vel! Ekkor az OPM háromszögben $OM = a/2 - m$ és $MP = a/2 - p$, ahol „a” a négyzet oldalát jelöli.

Pitagorasz-tétel alapján az OPM háromszögben:

$$OP^2 = OM^2 + MP^2,$$

$$OP^2 = \left(\frac{a}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - p\right)^2.$$

A műveleteket elvégezve:

$$OP^2 = \frac{a^2}{2} - am - ap + m^2 + p^2.$$

Végezzük el az alábbi helyettesítéseket:

Az ABP háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $a^2 = s^2 + (s+d)^2$.

Az ABP háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva: $am = s(s+d)$.

Az ABP háromszögben a befogótétel alapján: $ap = s^2$.

A BTP háromszögben a Pitagorasz-tételt felhasználva: $m^2 + p^2 = s^2$.

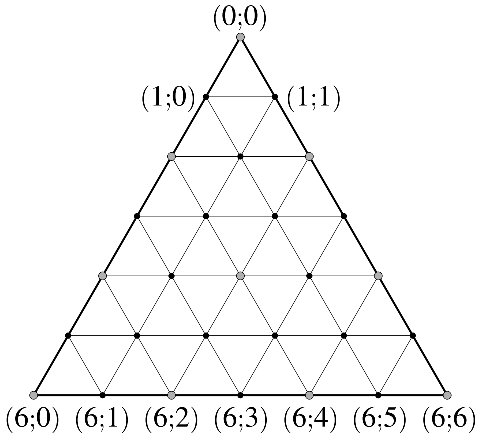
$$OP^2 = \frac{s^2 + (s+d)^2}{2} - s(s+d) - s^2 + s^2.$$

A műveletek elvégzése és az összevonások után:

$$OP^2 = \frac{d^2}{2} \quad \text{vagyis} \quad OP = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

3. Egy szabályos háromszög oldalait felosztjuk 6-6 egyenlő részre, és az osztópontokon keresztül az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével a háromszöget feldaraboljuk 36 egybevágó részre. Ezután a kis háromszögek minden csúcspontjában elhelyezünk egy-egy katicabogarat, amelyek elkezdenek mozogni a különböző éleken azonos sebességgel. Amikor egy csomópontba érnek, megváltoztatják a haladási irányukat 60 vagy 120°-kal. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan pillanat, amikor két katica ugyanabban a csúcsban találkozik. Igaz marad-e az állítás akkor is, ha kezdetben a háromszög oldalait csak 5-5 egyenlő részre osztjuk fel?

Megoldás. Rendeljünk a kis háromszögek csúcspontjaihoz rendezett számpárokat az alábbi ábra szerint.



Nevezzük kitüntetett csúcsoknak azokat, amelyekhez a $(0;0)$, $(2;0)$, $(2;2)$, $(4;0)$, $(4;2)$, $(4;4)$, $(6;0)$, $(6;2)$, $(6;4)$, $(6;6)$ számpárok tartoznak. Egy szakasznyi haladás után, ha semelyik két katica sem találkozik, akkor a kitüntetett csúcsokból induló 10 katica nem kitüntetett csúcsokba kerül, és 10 másik nem kitüntetett csúcsból induló katica foglalja el a megkülönböztetett helyeket.

Még egy szakasznyi haladás után ez a 20 katica mindegyike nem kitüntetett csúcsba fog eljutni.

Mivel a nem megkülönböztetett helyek száma csak 18, ezért a skatulya-elv alapján biztosan lesz két olyan bogár, amelyik találkozik egymással.

Ha az eredeti háromszög oldalainak felosztását 6-ról 5-re csökkentjük, akkor osszuk a csúcsokat a rendezett számpárok alapján az alábbi csoportokba:

$$\begin{gathered}\{(0;0),(1;0),(1;1)\},\\ \{(2;0),(3;0),(3;1)\},\\ \{(2;1),(3;2),(3;3),(2;2)\},\\ \{(4;0),(5;0),(5;1)\},\\ \{(4;1),(5;2),(5;3),(4;2)\},\\ \{(4;3),(5;4),(5;5),(4;4)\}.\end{gathered}$$

Ha minden katica a saját csoportjába tartozó pontok között mozog pozitív forgásirány szerint, akkor soha nem fog semelyik kettő találkozni.

Kezdők III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg a $p^\alpha = 2^\beta + 1$ egyenletet, ahol α, β 1-nél nagyobb egész számok, p^α pedig egy prímhatvány!

2. Az ABC egységoldalú szabályos háromszög, melynek BC oldalára kifelé olyan BDC egyenlőszárú háromszöget szerkesztünk, amelyben $DB = DC$ és $BDC\sphericalangle = 120°$. Az AB és AC oldalakon olyan M és N pontokat jelölünk ki, melyekre $MDN\sphericalangle = 60°$. Határozzuk meg az AMN háromszög kerületét.

3. Egy 2015×2016-os sakktábla minden négyzetében egy-egy nemnegatív egész szám áll (az i-edik sor j-edik mezőjében lévő számot $a_{i,j}$ jelöli). Ezután minden lépésben kiválasztunk egy 2×2-es négyzetet, és az ebben szereplő négy számhoz hozzáadunk egy tetszőlegesen megválasztott (a négy mező esetében azonos) k egész számot úgy, hogy a kapott számok ne legyenek negatívak. Adjunk meg egy olyan egyenletet az $a_{i,j}$ ($1 \leqq i \leqq 2015$, $1 \leqq j \leqq 2016$) számokra, mint változókra, ami pontosan akkor teljesül, ha véges sok lépéssel elérhető, hogy a táblán szereplő összes szám nullává váljon.

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a $p^\alpha = 2^\beta + 1$ egyenletet, ahol α, β 1-nél nagyobb egész számok, p^α pedig egy prímhatvány!

Megoldás. Ha α páros, azaz $\alpha = 2k$, akkor

$$2^\beta = \big(p^k - 1\big)\big(p^k + 1\big),$$

ahol a tényezők különbsége 2, és a szorzat 2-hatvány.

Ez nem teljesülhet másképpen, csak ha $p^k - 1 = 2$ és $p^k + 1 = 4$, azaz $p^k = 3$, így $p^\alpha = 9$, vagyis $p = 3$, $\alpha = 2$.

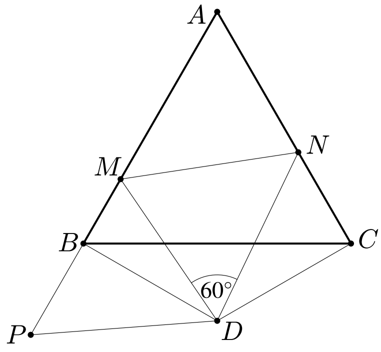
Ha α páratlan, akkor

$$2^\beta = (p - 1)\big(p^{\alpha-1} + p^{\alpha-2} + \ldots + p + 1\big),$$

amely szorzat második tényezőjében egy páratlan tagú összeg szerepel, melynek minden tagja páratlan. Így az az összeg, amely osztója a baloldalnak, csak az 1 lehet. Ez pedig nem lehetséges.

2. Az ABC egységoldalú szabályos háromszög, melynek BC oldalára kifelé olyan BDC egyenlőszárú háromszöget szerkesztünk, amelyben $DB = DC$ és $BDC\sphericalangle = 120°$. Az AB és AC oldalakon olyan M és N pontokat jelölünk ki, melyekre $MDN\sphericalangle = 60°$. Határozzuk meg az AMN háromszög kerületét.

I. megoldás.



A BDC egyenlőszárú háromszögben $DBC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 30°$, így $DB \perp AB$ és $DC \perp AC$. Jelöljük ki az AB oldal B-n túli meghosszabbításán azt a P pontot, amelyre $BP = CN$.

Ekkor $DCN\triangle \cong DBP\triangle$, mivel két-két oldaluk és az oldalak által közbezárt szög azonos. Az egybevágóság alapján $DP = DN$ és $PDB\sphericalangle = NDC\sphericalangle$.

Ezt felhasználva:

$$PDN\sphericalangle = PDB\sphericalangle + BDN\sphericalangle = CDN\sphericalangle + BDN\sphericalangle = BDC\sphericalangle = 120°$$

és így

$$PDM\sphericalangle = PDN\sphericalangle - MDN\sphericalangle = 120° - 60° = 60°.$$

A kapott eredmények alapján $PDM\triangle \cong NDM\triangle$, mivel két-két oldaluk és az oldalak által közbezárt szög azonos.

A két háromszög egybevágóságát felhasználva:

$$MN = MP = MB + BP = MB + NC.$$

Így

$$K_{AMN\triangle} = AM + AN + MN = AM + MB + AN + NC = AB + AC = 2$$

II. megoldás. Rajzoljuk meg a D középpontú $DB = DC$ sugarú k kört! Mivel $DBA\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 90°$, az AB és AC oldalegyenesek érintik k-t (a B, illetve C pontokban).

Húzzuk meg az M pontból k másik (AB-től különböző) érintőjét, ez érintse K-t a T pontban, és messe AC-t az N' pontban!

Az M pontból a k-hoz húzott érintők érintési pontjai tehát B és T, ezek a D középpontból az M-be húzott egyenesre szimmetrikusak, következésképp $MBDT$ deltoid. Ugyanígy $N'CDT$ is deltoid.

A deltoidokban a szimmetriaátlók felezik a rájuk eső szögeket, így $MDN'\sphericalangle = 60°$, ezért $N = N'$.

Ismét a deltoidok szimmetriáját felhasználva $MT{=}MB$ és $NT{=}NC$, tehát

$$AM+MN+NA = AM+MT+TN+NA = AM+MB+CN+NA = AB+CA = 2.$$

3. Egy 2015×2016-os sakktábla minden négyzetében egy-egy nemnegatív egész szám áll (az i-edik sor j-edik mezőjében lévő számot $a_{i,j}$ jelöli). Ezután minden lépésben kiválasztunk egy 2×2-es négyzetet, és az ebben szereplő négy számhoz hozzáadunk egy tetszőlegesen megválasztott (a négy mező esetében azonos) k egész számot úgy, hogy a kapott számok ne legyenek negatívak. Adjunk meg egy olyan egyenletet az $a_{i,j}$ ($1 \leqq i \leqq 2015$, $1 \leqq j \leqq 2016$) számokra, mint változókra, ami pontosan akkor teljesül, ha véges sok lépéssel elérhető, hogy a táblán szereplő összes szám nullává váljon.

Megoldás. Válasszunk ki egy tetszőleges sort (vagy oszlopot), és tekintsük az ezen belüli váltott előjelű összegét a számoknak: pl. az i-edik sor esetében ez az összeg $a_{i,1} - a_{i,2} + a_{i,3} - \ldots + \ldots$ lesz. Azt állítjuk, hogy a lépések ennek értékén nem változtatnak. Ha a kiválasztott 2×2-es négyzetnek egyetlen mezője sem esik ebbe a sorba (vagy oszlopba), akkor ez nyilvánvaló. Ellenkező esetben a 2×2-es négyzet az adott sorból (oszlopból) pontosan két, szomszédos mezőt fog tartalmazni, így a váltott előjelű összegben egy $+$ és egy $-$ előjellel szereplő tag fog k-val nőni, így a váltott előjelű összeg nem változik.

A végén minden számnak 0-nak kell lennie, így ilyenkor mind a $2015 + 2016 = 4031$ darab váltott előjelű összeg 0. Ha egy kiindulási helyzetből elérhető a csupa-0 állapot, akkor már kezdetben is mind a 4031 előjeles összegnek 0-nak kell lennie. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a 4031 darab előjeles összeg négyzetösszegének 0-nak kell lennie, hiszen valós számok négyzetének összege pontosan akkor 0, ha mindegyikük 0. Ez a négyzetösszeg tehát az a_{ij} változók egy homogén másodfokú polinomja lesz, vagyis a szükséges feltételként kapott egyenlet:

$$
\begin{aligned}
&(a_{1,1} - a_{1,2} + a_{1,3} - \ldots + \ldots)^2 + (a_{2,1} - a_{2,2} + a_{2,3} - \ldots + \ldots)^2 + \ldots + \\
&+ (a_{2015,1} - a_{2015,2} + a_{2015,3} - \ldots + \ldots)^2 + (a_{1,1} - a_{2,1} + a_{3,1} - \ldots + \ldots)^2 + \\
&+ (a_{1,2} - a_{2,2} + a_{3,2} - \ldots + \ldots)^2 + \ldots + (a_{1,2016} - a_{2,2016} + a_{3,2016} - \ldots + \ldots)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Egyelőre azt mutattuk meg, hogy ez a feltétel szükséges ahhoz, hogy elérhető legyen a csupa-0-állapot, most belátjuk, hogy elégséges is. Tegyük fel tehát, hogy a váltott előjelű összegek négyzetösszege 0, vagyis minden sorban és minden oszlopban 0 a váltott előjelű összeg. Fenti észrevételünk szerint ez akárhány lépés végrehajtása után is érvényben fog maradni.

Először megmutatjuk, hogy a csupa-0-állapot elérhető, ha megengedjük, hogy esetleg negatív számokat is kapjunk a lépések során. Kövessük a következő eljárást. A bal felső 2×2-es négyzetben lévő számokhoz adjunk annyit, hogy a bal felső elem 0-vá váljon. Ezután az ettől 1-gyel jobbra lévő 2×2-es négyzetben lévőkhöz adjunk annyit, hogy az 1. sor 2. eleme is 0-vá váljon, és így tovább, mindezt folytatjuk a jobb felső 2×2-es négyzetig, aminél annyit adunk a számokhoz, hogy az első sor utolsó előtti, 2015-ödik száma is 0-vá váljon. Mivel az 1. sorban az elemek váltott előjelű összege ekkor is 0, ezért a legutolsó, 2016-ik elem is kinullázódik ezáltal. Vagyis az 1. sort sikerült 0-vá tenni.

Ezután ugyanígy folytatjuk a 2. sorral, és így tovább, egészen a 2014. sorig minden elem 0-vá változtatható. Az utolsó, 2015. sorban ekkor 0-k lesznek, ugyanis az összes oszlopban 0 kell legyen a váltott előjelű összeg. Ezzel megmutattuk, hogy az egyenlet teljesülése esetén minden kinullázható, ám lehetséges, hogy közben a táblázatban negatív számok is előfordultak.

Ha ilyen nem volt, készen vagyunk, ha volt, akkor az eljárás során kapott negatív számok közül a legkisebbnek legyen az abszolútértéke m. Módosítsuk az eljárást a következő módon: mielőtt a fenti lépéssorozatba belekezdenénk, adjunk minden 2×2-es négyzet mezőihez m-et: így minden mezőben legalább m-mel nagyobb szám fog szerepelni (a sarkokban m-mel, a szélső, de nem sarokmezőkben $2m$-mel, a többi mezőben $4m$-mel nagyobb). Ezután végrehajtjuk a lépéseket, pontosan úgy, ahogy akkor tettük, amikor még nem figyeltünk arra, hogy csak nemnegatív számok kerüljenek a mezőkbe. Mivel az akkor kapott legkisebb szám $-m$ volt, ezért most nem kapunk negatív értékeket. A végén pedig minden 2×2-es négyzet mezőihez $-m$-et adunk, így megkapjuk a csupa-0 állapotot. A végén végrehajtott lépések során csak csökkennek az értékek, és a végén minden 0 lesz, így negatív értékeket ekkor sem állítunk elő. Ezzel állításunkat igazoltuk, valóban szükséges és elégséges feltételt kaptunk.

Haladók – I. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. Hány olyan 45-tel osztható $\overline{abcba}$ alakú ötjegyű szám van, ahol a, b és c különböző számjegyeket jelölnek?

2. Az $y \geqq 0$ félsíknak hány olyan rácspontja van, amelyeknek a koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőséget?

$$x^2 + 3y = 40.$$

(Rácspont a koordináta-rendszer olyan pontja, melynek mindkét koordinátája egész szám.)

3. Határozzuk meg azon a és b valós számokat, amelyekre igaz, hogy a és b is gyöke az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek!

4. Két, egy síkban lévő, egymást metsző kör középpontjainak távolsága 12 egység. Mindkét kör sugarának hossza egész szám. A metszéspontjukat összekötő egyenes a középpontjaik által meghatározott szakaszt 1 : 2 arányban osztja.

Mekkorák a körök sugarai?

5. Hány rendezett (x, y, z) valós számhármas megoldása van az alábbi egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66. \end{cases}$$

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan 45-tel osztható $\overline{abcba}$ alakú ötjegyű szám van, ahol a, b és c különböző számjegyeket jelölnek?

Megoldás. A 45-tel való oszthatósághoz a számnak oszthatónak kell lennie 5-tel. Mivel a nem lehet 0, a szám csak 5-re végződhet, azaz $a = 5$. 1 pont

A számnak oszthatónak kell lennie 9-cel, így a számjegyek összege, azaz $10 + 2b + c$ is osztható 9-cel. Mivel b és c különböző számjegyek, így $2b + c$ lehetséges maximális értéke 26. Így $10 + 2b + c$ lehetséges értékei: 18, 27 és 36. 1 pont

Ha $2b + c = 8$, akkor a lehetséges értékek:

b	4	3	2	1	0
c	0	2	4	6	8

(1 pont, de csak ha az összes lehetőség megvan.) 1 pont

Ha $2b + c = 17$, akkor a lehetőségek:

b	8	7	6	**5 nem lehet a miatt**	4
c	1	3	**5 nem lehet a miatt**	7	9

(1 pont az összes lehetőség megtalálásáért és 1 pont a $6; 5$ és $5; 7$ pár kizárásáért.) 2 pont

Ha $2b + c = 26$, akkor csak a $b = 9$, $c = 8$ lehetőség lesz jó. 1 pont

Összesen tehát 9 a feltételeknek megfelelő szám van. 1 pont

Az összes eset indoklás nélküli felsorolásáért maximum 2 pont adható.

Összesen: 7 pont

2. Az $y \geqq 0$ félsíknak hány olyan rácspontja van, amelyeknek a koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőséget?

$$x^2 + 3y = 40.$$

(Rácspont a koordináta-rendszer olyan pontja, melynek mindkét koordinátája egész szám.)

Megoldás. A hozzárendelési szabályt átalakítva:

$$x^2 = 40 - 3y,$$

$$x = \pm\sqrt{40 - 3y}\,.$$ 1 pont

A gyökjel alatti kifejezésre:

$$40 - 3y \geqq 0,$$
$$\frac{40}{3} \geqq y. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel y csak egész szám lehet, így: $0 \leqq y \leqq 13$, vagyis $0 \leqq 40 - 3y \leqq 40$. 1 pont

Ugyanakkor $40 - 3y$ értéke négyzetszám (0; 1; 4; 9; 16; 25; 36) lehet. 1 pont

A felsorolt esetek közül ez a következőknél teljesül (a 0 és 36 esetében y nem egész):

$$\begin{array}{llll} 40-3y=1, & \text{ekkor} & x=\pm 1 \text{ és } & y=13, \\ 40-3y=4, & \text{ekkor} & x=\pm 2 \text{ és } & y=12, \\ 40-3y=16, & \text{ekkor} & x=\pm 4 \text{ és } & y=8, \\ 40-3y=25, & \text{ekkor} & x=\pm 5 \text{ és } & y=5. \end{array}$$

A négy jó eset felismerése. 1 pont

Annak felismerése, hogy mindegyik esetben x-re két megoldás adódik. 1 pont

Tehát a grafikon 8 rácsponton halad át:

$$(1;13),\quad (-1;13),\quad (2;12),\quad (-2;12),\quad (4;8),\quad (-4;8),\quad (5;5),\quad (-5;5).$$

A rácspontok számának megadása. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Határozzuk meg azon a és b valós számokat, amelyekre igaz, hogy a és b is gyöke az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek!

Megoldás. Mivel a és b is megoldása az egyenletnek, ezért helyettesítsük be az egyenletbe a-t:

$$a^2 + a^2 + b = 0.$$

Ebből $b = -2a^2$. Most b-t behelyettesítve kapjuk, hogy $b^2 + ab + b = 0$. 1 pont

Utóbbiba behelyettesítve a $b = -2a^2$-et: $\left(-2a^2\right)^2 - 2a^3 - 2a^2 = 0$ adódik. 1 pont

$2a^2$-et kiemelve kapjuk, hogy $2a^2\left(2a^2 - a - 1\right) = 0$. 1 pont

Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Így megoldás, ha $a = 0$, $b = 0$, illetve ha $2a^2 - a - 1 = 0$. 1 pont

Ha a és b is nulla, akkor a másodfokú egyenletünk az $x^2 = 0$ alakot ölti, melynek az a és b valóban megoldásai. 1 pont

A $2a^2 - a - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei az $a_1 = 1$ és az $a_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Ha $a = 1$, akkor $b = -2$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk $x^2 + x - 2 = 0$, amelynek $a = 1$ és $b = -2$ valóban a megoldásai. 1 pont

Végül ha $a = -\dfrac{1}{2}$, akkor $b = -\dfrac{1}{2}$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$ alakú lesz. Ennek az egyenletnek a gyökei az $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ és $x_2 = 1$. Ebben az esetben $a = b = x_1$, tehát megint csak igaz, hogy a és b is megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összefoglalva a feladat megoldásai a következő $(a; b)$ számpárok: $(0; 0)$, $(1; -2)$ és $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

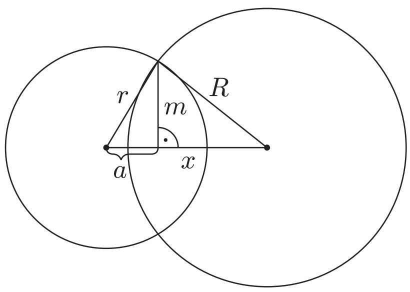
Összesen: 7 pont

4. Két, egy síkban lévő, egymást metsző kör középpontjainak távolsága 12 egység. Mindkét kör sugarának hossza egész szám. A metszéspontjukat összekötő egyenes a középpontjaik által meghatározott szakaszt 1 : 2 arányban osztja.

Mekkorák a körök sugarai?

Megoldás. Használjuk a következő ábra jelöléseit!

Helyes ábra használható jelölésekkel. 1 pont



Jelölje r és R a körök sugarát, x a középpontok távolságát, m pedig a metszéspontokat összekötő szakasz felét!

Nyilvánvaló, hogy a metszéspontokat összekötő szakasz merőleges a középpontokat összekötő szakaszra, így két derékszögű háromszög keletkezik.

Írjuk fel ezekre Pitagorasz tételét!

$$r^2 = a^2 + m^2,$$

$$R^2 = (x - a)^2 + m^2.$$ 1 pont

Az egyenleteket kivonva egymásból a következő összefüggéshez jutunk:

$$R^2 - r^2 = x^2 - 2ax,$$

$$(R - r)(R + r) = x(x - 2a).$$

Mivel: $x = 12$; $a = 4$; $x - a = 8$, behelyettesítés után adódik:

$$(R - r)(R + r) = 48.$$ 1 pont

A 48-at két tényezőre bontva öt eset adódik:

$$1 \cdot 48, \quad 2 \cdot 24, \quad 3 \cdot 16, \quad 4 \cdot 12 \quad \text{és} \quad 6 \cdot 8.$$

Az öt eset felismerése. 1 pont

$1 \cdot 48$ ekkor $R = 24{,}5$ és $r = 23{,}5$ (a sugarak nem egészek),

$2 \cdot 24$ ekkor $\underline{R = 13 \text{ és } r = 11}$,

$3 \cdot 16$ ekkor $R = 9{,}5$ és $r = 6{,}5$ (a sugarak nem egészek),

$4 \cdot 12$ ekkor $R = 8$ és $r = 4$ (a körök érintik egymást),

$6 \cdot 8$ ekkor $R = 7$ és $r = 1$ (a körök nem metszik egymást).

A megoldást nem jelentő esetek kizárása magyarázattal. 2 pont
(Ha magyarázat nélkül jelennek meg az esetek, illetve nem jelenik meg minden eset, akkor ez a 2 pont bontható.)

A feladat feltételeinek megfelelő megoldás tehát: $R = 13$ és $r = 11$.

A helyes megoldás megadása. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Hány rendezett (x, y, z) valós számhármas megoldása van az alábbi egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66. \end{cases}$$

Megoldás. Az első egyenletből fejezzük ki z-t, majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$z = 11 - x - y$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = x^2 + 2y^2 + 3(11 - x - y)^2 = 66, \qquad \text{1 pont}$$

$$x^2 + 2y^2 + 3\big(121 + x^2 + y^2 - 22x - 22y + 2xy\big) = 66,$$

$$4x^2 + 5y^2 + 297 - 66x - 66y + 6xy = 0. \qquad \text{1 pont}$$

Tekintsük ezt egy x-ben másodfokú y paraméterű egyenletnek. 1 pont

Rendezés után:

(I) $$4x^2 + 6(y - 11)x + \big(5y^2 - 66y + 297\big) = 0.$$

Ha az eredeti egyenletrendszernek van valós megoldása, akkor ennek a másodfokú egyenletnek is, ez utóbbi pontosan akkor áll fenn, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz

$$D = \big(6(y - 11)\big)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \big(5y^2 - 66y + 297\big) \geqq 0, \qquad \text{1 pont}$$

$$D = 36\big(y^2 - 22y + 121\big) - 16\big(5y^2 - 66y + 297\big) =$$

$$= 4 \cdot \Big(9\big(y^2 - 22y + 121\big) - 4\big(5y^2 - 66y + 297\big)\Big) =$$

$$= 4 \cdot \big(-11y^2 + 66y - 99\big) = -44 \cdot \big(y^2 - 6y + 9\big) = -44 \cdot (y - 3)^2 \geqq 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $(y - 3)^2 = 0$, azaz $y = 3$. 2 pont

Ezt (I)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $4x^2 - 48x + 144 = 0$, aminek egyetlen megoldása az $x = 6$.

Mindezek felhasználásával $z = 11 - x - y = 11 - 6 - 3 = 2$, tehát egyetlen ilyen valós számhármas létezhet, a $(6, 3, 2)$. 1 pont

A megoldás kielégíti az egyenletrendszert.

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. 2016-tól kezdve csökkenő sorrendben leírtuk egymás után a pozitív egész számokat, így megkaptuk a 201620152014. . . 10987654321 számot.

a) Hány jegyű ez a szám?

b) Bizonyítsuk be, hogy a szám osztható 3-mal!

2. Milyen a és b valós értékekre lesz a $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=2016$ egyenletnek végtelen sok megoldása a valós számok halmazán?

3. A 100-nál kisebb prímszámok közül válasszunk ki ötöt úgy, hogy ezek számjegyei között az 1-től 9-ig terjedő számjegyek mindegyike pontosan egyszer forduljon elő. Hányféleképpen lehetséges ez?

4. Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzetben a BC és CD oldalak egy-egy belső pontja P, illetve Q. Az $APCQ$ négyszögbe olyan kör írható, amelynek K középpontjára $KA : KC = 5$ teljesül. Mekkora az $APCQ$ négyszög területe?
(*In memoriam Bartha Gábor*)

Megoldások és javítási útmutató

1. 2016-tól kezdve csökkenő sorrendben leírtuk egymás után a pozitív egész számokat, így megkaptuk a 201620152014. . . 10987654321 számot.

a) Hány jegyű ez a szám?

b) Bizonyítsuk be, hogy a szám osztható 3-mal!

Megoldás. a) Leírtunk 9 db 1 jegyű, 90 db 2 jegyű, 900 db 3 jegyű és $2016-999=$ $=1017$ db 4 jegyű számot. 1 pont

Így a felírt szám $9+180+2700+4068=6957$ számjegyből áll. 1 pont

b) A 3-mal való oszthatóságot, illetve az esetleges maradékokat a számjegyek összege mutatja meg. 3 egymás utáni szám közül az egyik 0, a másik 1, a harmadik 2 maradékot ad 3-mal osztva, és ugyanezt adják a számjegyeik összegei is. 1 pont

Így ha 3 egymást követő számot egymás után leírunk, a kapott szám jegyeinek összege 3-mal osztva $0+1+2$ maradékával egyezik meg, ami 0, azaz a szám mindig osztható lesz 3-mal. 2 pont

A feladatban kitűzött szám számjegyeit hármas csoportokba lehet úgy osztani, hogy minden csoportban a számjegyek összege 0 maradékot adjon, mivel 2016 osztható 3-mal. Így az összes számjegy összege osztható 3-mal, azaz az eredeti szám is. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a tanuló csupán 1-től 2016-ig összeadja a számokat, és ennek az összegnek nézi a hármas maradékát, de nem bizonyítja be, hogy a számok egymás után írásával kapott szám hármas maradéka egyenlő a számok összegének hármas maradékával, akkor a $b)$ rész 5 pontjából két pontot kaphat.

2. Milyen a és b valós értékekre lesz a $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=2016$ egyenletnek végtelen sok megoldása a valós számok halmazán?

Megoldás. Átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}=2016-\sqrt{x}.$$

Mivel a bal oldalon nemnegatív szám áll, ezért a jobb oldal is nemnegatív, így $x \leqq 2016^2$. A négyzetgyök értelmezhetősége miatt $x \geqq 0$. Tehát $0 \leqq x \leqq 2016^2$ esetén van megoldása az egyenletnek. 2 pont

Négyzetre emelve kapjuk, hogy:

$$x+a\sqrt{x}+b=2016^2-2\cdot 2016\cdot\sqrt{x}+x.$$ 1 pont

Rendezzük át $\sqrt{x}$-re:

$$(a+2\cdot 2016)\sqrt{x}=2016^2-b.$$ 1 pont

Csak akkor kapunk végtelen sok megoldást, ha $\sqrt{x}$ együtthatója és a jobb oldal is nulla. Ebben az esetben $a=-2\cdot 2016=-4032$ és $b=2016^2=4\,064\,256$. 2 pont

A kapott a és b értéket behelyettesítve ellenőrizhetjük a megoldásunkat, amennyiben feltesszük, hogy $0 \leqq x \leqq 2016^2$:

$$\sqrt{x-2\cdot 2016\sqrt{x}+2016^2}+\sqrt{x}=\sqrt{\left(2016-\sqrt{x}\right)^2}+\sqrt{x}=\left|2016-\sqrt{x}\right|+\sqrt{x}=$$
$$=2016-\sqrt{x}+\sqrt{x}=2016.$$ 1 pont

Azaz minden $0 \leqq x \leqq 2016^2$ valós x megoldása az egyenletnek.

Összesen: 7 pont

3. A 100-nál kisebb prímszámok közül válasszunk ki ötöt úgy, hogy ezek számjegyei között az 1-től 9-ig terjedő számjegyek mindegyike pontosan egyszer forduljon elő. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. Az öt számban szereplő számjegyek száma csak úgy lehet egyenlő a rendelkezésre álló számjegyek számával, 9-cel, ha köztük 4 két jegyű és 1 egyjegyű van. 1 pont

A kétjegyűek utolsó számjegye nem lehet páros és nem lehet az 5-ös, tehát csak az 1, 3, 7, 9 számok közül kerülhet ki. Eszerint a négy kétjegyű szám utolsó jegye – valamilyen sorrendben – éppen a fenti négy szám, és emiatt ezek másutt nem szerepelhetnek. Az egyjegyű prímszámok közül így csak a 2 és az 5 jöhet szóba. 1 pont

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a kiválasztott egyjegyű szám a 2, ekkor a négy kétjegyű első jegye a 4, 5, 6, 8 közül kerül ki; és a szóba jövő prímek a következők (jegyeik szerint elrendezve):

41	–	61	–
43	53	–	83
47	–	67	–
–	59	–	89

Azt kell meghatároznunk, hányféleképpen választhatunk ki a fenti alakba rendezett számok közül négyet úgy, hogy mindegyik sorból és mindegyik oszlopból pontosan egyet válasszunk. 1 pont

Ha az első sorból a 41-et választjuk, akkor a harmadik sorból már csak a 67-et választhatjuk, és a másik két szám választására két lehetőségünk marad: az 53, 89 pár és az 59, 83 pár. Ez eddig két eset. Ha az első sorból a 61-et választjuk, a harmadik sorból csak a 47-et választhatjuk, és a másik két szám megválasztására ugyanaz a két lehetőségünk van, mint az előbb. Itt tehát 4-féleképpen választhatjuk meg a 4 kétjegyű számot. 2 pont

Ugyanennyi a lehetőségek száma, ha egyjegyűnek a 5-öt választjuk, hiszen a másik négy számra szóba jöhető számok ugyanúgy rendezhetők, mint az előbb:

41	–	61	
43	23	–	83
47	–	67	–
–	29	–	89

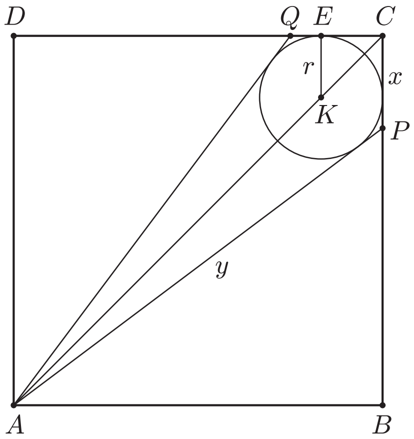
(csak az előbbi második oszlop helyére léptek a 2-essel kezdődő prímek), és itt ugyanaz a feladatunk, mint előbb. Ebben az esetben is a 4 a megfelelő választások száma. 1 pont

Tehát összesen 8-féleképpen választhatjuk ki a számokat. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzetben a BC és CD oldalak egy-egy belső pontja P, illetve Q. Az $APCQ$ négyszögbe olyan kör írható, amelynek K középpontjára $KA : KC = 5$ teljesül. Mekkora az $APCQ$ négyszög területe?
(*In memoriam Bartha Gábor*)

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit!

Mivel a kör érinti a négyzet oldalait, ezért középpontja rajta van az AC átlón, és a tengelyes szimmetria miatt a keletkező négyszög deltoid.

ACD és KCE hasonló háromszögekből:

$$\frac{r}{AD} = \frac{KC}{AC} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{6}.$$ 1 pont

Mivel az érintő merőleges a sugárra, ezért APK, PCK, CQK, QAK háromszögek magassága a beírt kör sugara.

Felírjuk a négyszög területét a háromszögek területének összegeként:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (2yr + 2xr), \quad \text{ebből} \quad r = \frac{T}{x+y}.$$ 1 pont*

Pitagorasz tétele alapján a deltoid átlói: $QP = \sqrt{2} \cdot x$; $AC = \sqrt{2}$.

Így a deltoid területe:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} = x.$$ 1 pont

Pitagorasz tételéből:

$$y = \sqrt{1^2 + (1-x)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,.$$ 1 pont

Így a sugárra felírt képlet alapján:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}\,, \\
x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} &= 6x, \\
\sqrt{x^2 - 2x + 2} &= 5x, \\
x^2 - 2x + 2 &= 25x^2, \\
24x^2 + 2x - 2 &= 0, \\
x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$ 2 pont

A negatív gyök nem tekinthető helyes megoldásnak, mivel x egy szakasz hossza, de a második gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

Tehát a négyszög területe $\frac{1}{4}$ területegység. 1 pont

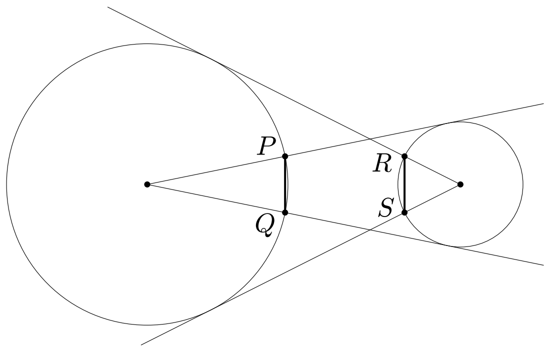
Összesen: 7 pont

* Ez a pont jár akkor is, ha a vizsgázó a függvénytáblázatban található képletre hivatkozik.

Haladók I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Két, nem metsző kör középpontjaiból érintőket húzunk a másik körhöz (lásd ábra). P, Q és R, S azok a pontok, ahol ezek az érintők metszik a köröket. Bizonyítsuk be, hogy $PQ = RS$.



2. Egy hatjegyű szám számjegyeinek szorzata 190 512.

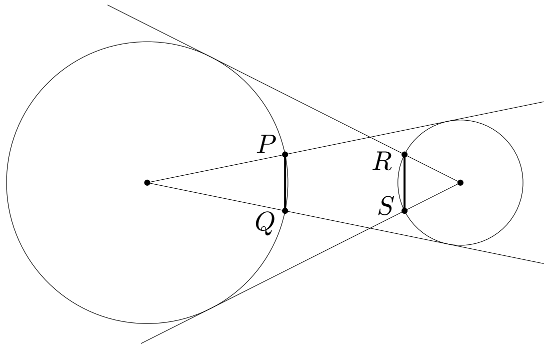
$a)$ Hány ilyen szám van?

$b)$ Melyek ezek közül a négyzetszámok?

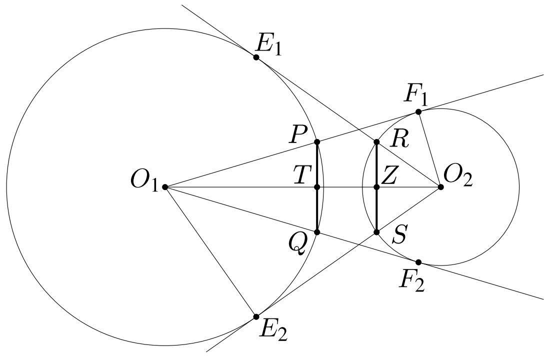
3. 2016 db pozitív szám mindegyike a további 2015 négyzetösszegével egyenlő. Mekkora lehet a legkisebb szám értéke?

Megoldások és javítási útmutató

1. Két, nem metsző kör középpontjaiból érintőket húzunk a másik körhöz (lásd ábra). P, Q és R, S azok a pontok, ahol ezek az érintők metszik a köröket. Bizonyítsuk be, hogy $PQ = RS$.



Megoldás. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit.



Legyen T és Z rendre az O_1 és O_2 szakasz PQ-val és RS-sel vett metszéspontja. PTO_1 háromszög hasonló az $O_2F_1O_1$ háromszöghöz, mert PO_1T szögük megegyezik, és $PTO_1\sphericalangle =$ $= O_2F_1O_1\sphericalangle = 90°$. 2 pont

Ezért felírható, hogy

$$\frac{PT}{PO_1} = \frac{F_1O_2}{O_1O2}.$$

$PO_1 = r_1$ és $F_1O_2 = r_2$ jelölést bevezetve

$$PT = \frac{r_1r_2}{O_1O_2}.$$ 1 pont

Hasonlóan a ZSO_2 háromszög hasonló az $E_2O_1O_2$ háromszöghöz, mivel ZO_2S szögük megegyezik, és $SZO_2\sphericalangle = O_1E_2O_2\sphericalangle = 90°\sphericalangle$. 2 pont

Ezért felírható, hogy

$$\frac{ZS}{SO_2} = \frac{O_1E_2}{O_1O_2}.$$

A fenti jelöléssel ZS értéke:

$$ZS = \frac{r_2r_1}{O_1O_2}.$$ 1 pont

Azaz $PT = ZS$.

Mivel az O_1O_2 szimmetriatengely felezi a PQ és RS szakaszokat, ezért $PQ = 2 \cdot PT$ és $RS = 2 \cdot ZS$. Így $PQ = RS$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy hatjegyű szám számjegyeinek szorzata 190 512.

$a)$ Hány ilyen szám van?

$b)$ Melyek ezek közül a négyzetszámok?

Megoldás. A szorzat prímtényezős felbontása: $190\,512 = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2$.

A felbontásból következik, hogy a keresett számban kell lenni két darab 7-es számjegynek, mert a 7 után következő, héttel osztható szám a 14, ami már nem lehet számjegy. Ekkor a maradék négy számjegy szorzatának prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3^5$.

A maradék négy számjegy közül legalább egynek 9-esnek kell lenni, mert ha mindegyik csak hárommal osztható, de kilenccel nem, akkor a szorzatuk prímtényezős felbontásában a három, legfeljebb a negyedik kitevőn szerepelhetne. 1 pont

Ekkor a maradék három számjegy szorzatának prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3^3$. Ez csak úgy lehetséges, ha az egyik számjegy újra a kilenc, vagy mindhárom számjegy osztható hárommal. De ekkor a 2^4 prímtényező miatt mindháromnak hatosnak kellene lenni, hiszen a 12 már nem számjegy, ekkor viszont a szorzatban a kettő csak a harmadik hatványon lenne. Ebből következően még egy kilences számjegy van.

Ekkor a maradék két számjegy szorzatának prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3$. Ez csak úgy lehetséges, ha az egyik számjegy osztható hárommal, de kilenccel nem, így ez csak hat lehet.

Tehát a szám számjegyei: 6, 7, 7, 8, 9, 9 1 pont

Az ismétléses permutációk számának képlete szerint: $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$ darab ilyen szám van. 1 pont

Felírva a számjegyekből képezhető legnagyobb és legkisebb számot:

$$677\,899 \leqq N = n^2 \leqq 998\,776.$$

Ebből

$$824 \leqq n \leqq 999 \quad (824^2 = 678\,976 \text{ és } 999^2 = 998\,001).$$ 1 pont

Mivel N négyzetszám, ezért csak 6-ra, vagy 9-re végződhet, így n 4-re, 6-ra, 3-ra, vagy 7-re végződhet. Nézzük meg, mi lehet N utolsó két számjegye, n utolsó két számjegyétől függően:

n	04	14	24	34	44	54	64	74	89	94	06	16	26	36	46	56	66	76	86	96
N	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36	36	56	76	96	16	36	56	76	96	16

n	03	13	23	33	43	53	63	73	83	93	07	17	27	37	47	57	67	77	87	97
N	09	69	29	89	49	09	69	29	89	49	49	89	29	69	09	49	89	29	69	09

A megjelölt lehetőségek alapján n lehetséges értékei:

$$\begin{matrix} 824, & 826, & 833, & 836, & 837, & 863, & 864, & 867, & 874, & 876, & 883, & 886, & 887, \\ 924, & 926, & 933, & 936, & 937, & 963, & 964, & 967, & 974, & 976, & 983, & 986, & 987. \end{matrix}$$ 1 pont

Az N szám számjegyeinek összege 46, ami 9-cel osztva egyet ad maradékul, ezért n 9-cel osztva 1-et, vagy 8-at ad maradékul.

Ennek alapján a következő lehetőségek maradnak:

$$836, \quad 863, \quad 883, \quad 926, \quad 937, \quad 964.$$ 1 pont

Ezek négyzete 698 896, 744 769, 779 689, 857 476, 877 969, 929 296.

Tehát a lehetséges megoldások: $779\,689 = 883^2$ és $877\,969 = 937^2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. 2016 db pozitív szám mindegyike a további 2015 négyzetösszegével egyenlő. Mekkora lehet a legkisebb szám értéke?

1. megoldás. Jelölje a 2016 db számot $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$. Írjuk fel a feltételt az első két számra: $a_1 = a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2$ és $a_2 = a_1^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2$. Ezeket egymásból kivonva

$$a_1 - a_2 = a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2 - \left(a_1^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2\right) = a_2^2 - a_1^2$$

adódik. A jobb oldalt szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy $a_1 - a_2 = (a_2 - a_1)(a_2 + a_1)$. 2 pont

Ha $a_1 \neq a_2$ lenne, akkor végigoszthatjuk az egyenletet $a_2 - a_1$-gyel, ekkor $-1 = a_2 + a_1$-et kapunk, ami lehetetlen, hisz a_1 és a_2 pozitív számok. 2 pont

Tehát $a_1 = a_2$. Ugyanezt a gondolatmenetet végigkövetve a 2016 szám közül bármely kettőre kiderül, hogy a feladat feltétele csak úgy teljesülhet, ha $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{2016}$. 1 pont

Ekkor tetszőleges $1 \leqq i \leqq 2016$-ra fennáll az $a_i = 2015a_i^2$ egyenlőség. 1 pont

Mivel $a_i \neq 0$, ezért mind a 2016 szám, így a legkisebb értéke is $\dfrac{1}{2015}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Jelölje a 2016 db számot $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$, ezek négyzetösszegét pedig A.

Ekkor a feladat feltétele szerint

$$\begin{cases} a_1 = A - a_1^2, \\ a_2 = A - a_2^2, \\ \ldots \\ a_{2016} = A - a_{2016}^2, \end{cases}$$

vagyis minden $1 \leqq i \leqq 2016$ esetén $a_i = A - a_i^2$, azaz $a_i^2 + a_i = A$. 2 pont

Tekintsük az $f(x) = x^2 + x$ függvényt, ezzel az előző 2016 db egyenlet $f(a_i) = a_i^2 + a_i = A$ alakba írható. 1 pont

Mivel azonban az $f(x)$ függvény az $x \in]0; \infty]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, ezért az $f(x) = x^2 + x = A$ egyenletnek ezen a halmazon csak egy megoldása lehet, ezzel az értékkel kell egyenlőnek lennie minden a_i-nek, tehát $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{2016}$. 2 pont

Ekkor tetszőleges $1 \leqq i \leqq 2016$-ra fennáll az $a_i = 2015a_i^2$ egyenlőség. 1 pont

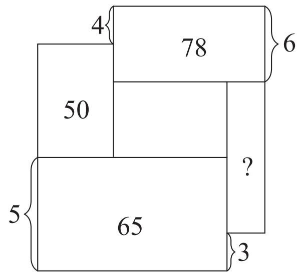
Mivel $a_i \neq 0$, ezért mind a 2016 szám, így a legkisebb értéke is $\dfrac{1}{2015}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók – II. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

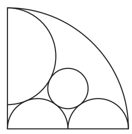
1. Naoki Inaba japán matematikus rejtvényeiben bizonyos téglalapok területét és néhány szakasz hosszát ismerjük, és ez alapján kell egy másik területet vagy távolságot meghatároznunk. A képen látható fejtörőben a ?-lel jelölt területet kell kiszámolnunk. (Vigyázzunk, az ábra nem arányos!)



2. Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre az $x^3 - x + p = 0$ egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1!

3. A 2025-re igaz, hogy $2025 = (20 + 25)^2$. Van-e még ilyen négyjegyű szám?

4. Egy négy egység sugarú negyedkörbe félköröket írtunk az ábrán látható módon. A két kisebb félkör sugara egyenlő. Ezután megrajzoltuk azt a kört, ami mindhárom félkört érinti. Mekkora ennek a körnek a sugara?



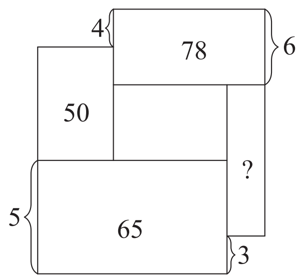
5. Adjuk meg az összes olyan pozitív prímekből álló (p, q, r) számhármast, ahol

$a)$ $q \neq r$, valamint

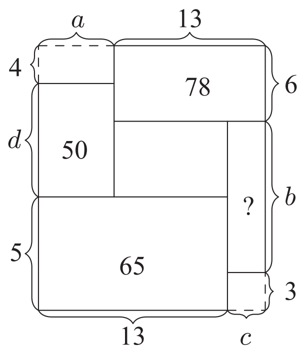
$b)$ $p^q + p^r$ négyzetszám.

Megoldások és javítási útmutató

1. Naoki Inaba japán matematikus rejtvényeiben bizonyos téglalapok területét és néhány szakasz hosszát ismerjük, és ez alapján kell egy másik területet vagy távolságot meghatároznunk. A képen látható fejtörőben a ?-lel jelölt területet kell kiszámolnunk. (Vigyázzunk, az ábra nem arányos!)



Megoldás.



Egészítsük ki az ábrát egy nagy téglalappá, és számoljuk ki a 78 és 65 egység területű téglalap vízszintes oldalának hosszát. 3 pont

Mivel a téglalap szemközti oldalai egyenlők, ezért $a + 13 =$ $= c + 13$ és $6 + b + 3 = 5 + d + 4$, vagyis $a = c$ és $b = d$. 2 pont

Az 50 egység területű téglalapból $ad = 50$, tehát $bc = da = 50$ is igaz. A keresett terület 50 egység. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre az $x^3 - x + p = 0$ egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1!

Megoldás. Legyen a két gyök c és $c + 1$. Ha ezeket az egyenletbe behelyettesítjük, teljesül, hogy $c^3 - c + p = 0$ és $(c + 1)^3 - (c + 1) + p = 0$. 1 pont

A második egyenletből vonjuk ki az elsőt, közben végezzük el a köbre emelést, így a $3c^2 + 3c = 0$ egyenlethez jutunk. 2 pont

Ennek megoldásai: $c_1 = -1$ és $c_2 = 0$. 1 pont

Ezeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve mindkét esetben a $p = 0$ értékeket kapjuk. 1 pont

Az $x^3 - x = 0$ egyenlet gyökei -1, 0 és 1, tehát valóban van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1, ezért $p = 0$ jó megoldás. 2 pont

Megjegyzések

1. Az ellenőrzés más módja is elfogadható, de az ellenőrzés igényének és módszerének egyértelműen meg kell jelennie.
2. Ha a versenyző a $p = 0$ megoldást csak észreveszi, majd bizonyítja, hogy jó, legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: 7 pont

3. A 2025-re igaz, hogy $2025 = (20 + 25)^2$. Van-e még ilyen négyjegyű szám?

Megoldás. Keressük azokat a négyjegyű számokat, melyekre igaz, hogy $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$. Legyen:

$$x = \overline{ab} = 10a + b,$$
$$y = \overline{cd} = 10c + d. \qquad 1 \text{ pont}$$

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\overline{abcd} = 100x + y,$$
$$\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2 = (x+y)^2. \qquad \text{1 pont}$$

A keresett számra vonatkozó egyenlőséget felírva, majd átalakítva:

$$\begin{aligned} 100x + y &= (x+y)^2, \\ 99x &= (x+y)^2 - (x+y), \\ 99x &= (x+y)(x+y-1). \end{aligned} \qquad \text{1 pont}$$

Vagyis két szomszédos egész szám szorzatának oszthatónak kell lennie 11-gyel és 9-cel úgy, hogy az x kétjegyű szám legyen. 1 pont

Ez három esetben teljesül: $45 \cdot 44$, $55 \cdot 54$ és $99 \cdot 98$ esetében. 1 pont

A többi esetben ($10 \cdot 11$, $11 \cdot 12$, $21 \cdot 22$, $22 \cdot 23$, $32 \cdot 33$, $33 \cdot 34$, $43 \cdot 44$, $55 \cdot 56$, $65 \cdot 66$, $66 \cdot 67$, $76 \cdot 77$, $77 \cdot 78$, $87 \cdot 88$, $88 \cdot 89$) nem teljesül a 9-cel való oszthatóság, a $99 \cdot 100$ után pedig az x háromjegyű. 1 pont

Tehát a keresett számok:

$$\begin{aligned} &2025 \quad (45 \cdot 44, \quad \text{ekkor} \quad x = 20 \quad \text{és} \quad y = 25), \\ &3025 \quad (55 \cdot 54, \quad \text{ekkor} \quad x = 30 \quad \text{és} \quad y = 25), \\ &9801 \quad (99 \cdot 98, \quad \text{ekkor} \quad x = 98 \quad \text{és} \quad y = 01). \end{aligned} \qquad \text{1 pont}$$

Megjegyzés

Ha a versenyző találgatással rálel az egyik megoldásra (például $3025 = (30 + 25)^2$), de nem törekszik arra, hogy minden lehetséges esetet megtaláljon, legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: 7 pont

A megadott javítókulcs és a hozzáfűzött kiegészítés kapcsán több észrevétel érkezett.

Többen kritizálták, hogy a feladat megfogalmazása („Van-e még ilyen négyjegyű szám?") nem precíz. A feladat kitűzésekor a bizottság úgy gondolta, hogy ez a pontatlanság megengedhető, mert így természetesebb a kérdés, és nem tűnik életszerűnek, hogy valaki az $\overline{abcd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2$ helyett mondjuk az $\overline{abcd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^a$ feladattal próbálkozna. Szintén többen nehezményezték, hogy nem volt direkt kimondva az az igény, miszerint az összes ilyen szám megtalálása jelenti a teljes értékű megoldást. Itt is arra alapozott a bizottság, hogy a versenyzők számára ez természetes lesz, a versenyek hagyománya kellő eligazítást nyújt az értelmezéshez.

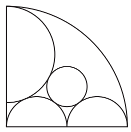
Az észrevételt tevő kollégák úgy ítélték meg, hogy az eredetileg megadott pontozás nem lenne igazságos, mert a megoldók teljes jóhiszeműséggel gondolhatták azt, hogy ha rátaláltak egy a mintának megfelelő négyjegyű számra, akkor bizonyították, hogy a feltett kérdésre „igen” a válasz, ezért nem indokolható a pontveszteség. Ugyanakkor az is elvárható, hogy az összes megfelelő négyjegyű számot előállító megoldás többet érjen, mint az, amely csak egy jó példát mutat.

A fentiek alapján a 3. feladat pontozása az alábbiak szerint módosul:

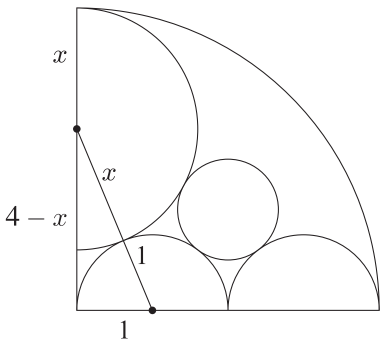
- Akik akár levezetéssel, akár próbálgatással rátaláltak egy jó négyjegyű számra, és megmutatták, hogy a szám valóban megfelel a mintának, **megkaphatják a maximális pontszámot a feladatra.**

- Azok a versenyzők pedig, akik megkeresték – az útmutató szerint, vagy más gondolatmenet alapján – az összes jó számot, és bizonyították, hogy listájuk teljes, **a maximális hét pont mellet kapják meg az általánosításért járó további három pontot is.**

4. Egy négy egység sugarú negyedkörbe félköröket írtunk az ábrán látható módon. A két kisebb félkör sugara egyenlő. Ezután megrajzoltuk azt a kört, ami mindhárom félkört érinti. Mekkora ennek a körnek a sugara?

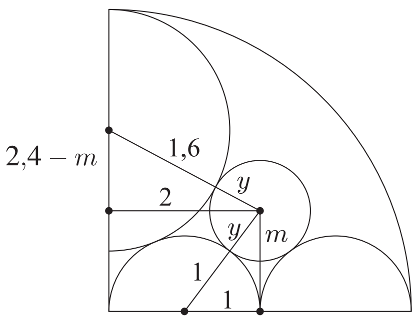


Megoldás.



A nagyobb félkör sugarát jelölje x. A középpontok összekötésével derékszögű háromszöget kapunk.

Felírva a Pitagorasz-tételt $(4-x)^2+1^2=(1+x)^2$, ahonnan $16-8x=2x$, tehát $x=1{,}6$. 2 pont



A kis kör középpontja legyen m távol az alsó sugártól, és a kis kör sugara legyen y.

A kis kör középpontjában találkozó derékszögű háromszögekből:

$$(2{,}4-m)^2+2^2=(1{,}6+y)^2,$$

$$m^2+1^2=(1+y)^2.$$ 2 pont

Kivonással $2{,}4^2-4{,}8m+3=1{,}6^2-1+1{,}2y$, ahonnan $7{,}2=4{,}8m+1{,}2y$, majd $6=y+4m$ adódik. A második egyenletbe visszahelyettesítve az $y=6-4m$ kifejezést kapjuk a $15m^2-56m+48=0$ egyenletet, amelynek gyökei $m_{1,2}=\dfrac{56\pm16}{30}$, vagyis $m_1=2{,}4$ és $m_2=\dfrac{4}{3}$. 1 pont

A két gyök közül csak a kisebbik lehet jó, mert a kis kör középpontja „lejjebb” van, mint a nagy félköré. 1 pont

Ha $m = \dfrac{4}{3}$ akkor $y = 6 - 4m = \dfrac{2}{3}$. A kis kör sugara $\dfrac{2}{3}$ egység. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Adjuk meg az összes olyan pozitív prímekből álló (p, q, r) számhármast, ahol

$a)$ $q \neq r$, valamint

$b)$ $p^q + p^r$ négyzetszám.

Megoldás. Legyen az általánosság megszorítása nélkül $q < r$.

(Természetesen, ha megkapunk így egy (p, q, r) jó számhármast, akkor (p, r, q) is megoldás lesz.)

Ekkor kiemelve p^q-t: $p^q + p^r = p^q(1 + p^{r-q}) = n^2$ valamely egész n-re. 1 pont

A p^q-nak csak p a prímosztója, de $1 + p^{r-q}$ p-vel osztva 1 maradékot ad, emiatt p^q, illetve $1 + p^{r-q}$ relatív prímek. 1 pont

De mivel n^2 prímfelbontásában a prímhatványosztók páros kitevővel szerepelnek, ezért q is páros, vagyis (mivel q prím is) $\rightarrow$ $q = 2$. 1 pont

Vagyis $n^2 = p^q(1 + p^{r-q}) = p^2\big(1 + p^{r-2}\big)$. Ezt osztva p^2-tel $\rightarrow$ $1 + p^{r-2} = \dfrac{n^2}{p^2} = m^2$ valamely egész m-re.

Innen mindkét oldalból 1-t elvéve, és szorzattá alakítva:

$$p^{r-2} = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1).$$ 1 pont

Innen két eset lehetséges: vagy $p \mid m - 1$, vagy $1 = m - 1$.

Ha $1 = m - 1$, akkor $2 = m$, és innen $(m + 1)(m - 1) = 3 = 3^1 = p^{r-2}$. Ekkor $p = 3$, és $r = 3$. Vagyis ekkor a lehetséges számhármasok: $(3; 2; 3)$ és $(3; 3; 2)$. 1 pont

Ha pedig $p \mid m-1$, akkor $p \mid m+1$ miatt $p \mid (m+1)-(m-1) = 2$ is teljesül. Vagyis ekkor $p = 2$.

Mivel ekkor $m - 1$, és $m + 1$ olyan kettőhatványok (hisz $2^{r-2} = (m + 1)(m - 1)$), melyek különbsége 2, emiatt $m - 1 = 2$, és $m + 1 = 4$ lehet csak.

Vagyis $2^{r-2} = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$. Innen $r = 5$.

Vagyis ekkor a lehetséges számhármasok: $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

Összefoglalva: 4 darab rendezett számhármas felel meg a feltételeknek: $(3; 2; 3)$; $(3; 3; 2)$; $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy p és q pozitív egészek, továbbá $p > q$. Bizonyítsuk be, hogy az $1+\sqrt{2}$ a $\frac{p}{q}$ és a $\frac{p+q}{p-q}$ közé esik.

2. Két, egymást nem tartalmazó, közös ponttal nem rendelkező kör közös szimmetriatengelye a köröket rendre az A, B, C, D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a közös külső illetve belső érintőszakaszok felírhatók két-két olyan szakasz mértani közepeként, amelyek végpontjai az A, B, C, D pontok közül valók!

3. Egy halmaz elemei olyan pozitív egész számok, amelyek oszthatóak az 5, 11, 23, 31 prímszámok mindegyikével, de más prímszámokkal nem. A halmaz bármely két elemének a szorzata nem négyzetszám. Mennyi az ilyen halmazok elemszámának maximuma?

4. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2016\sqrt{x_{2016} - 2016^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}}{2}.$$

Megoldások és javítási útmutató

1. Tegyük fel, hogy p és q pozitív egészek, továbbá $p > q$. Bizonyítsuk be, hogy az $1+\sqrt{2}$ a $\frac{p}{q}$ és a $\frac{p+q}{p-q}$ közé esik.

Megoldás. Legyen $\frac{p}{q} = r$. Ekkor $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}-1} = \frac{r+1}{r-1}$, ahol r 1-nél nagyobb racionális szám. 2 pont

További átalakításokkal

$$r = (r-1)+1 \quad \text{és} \quad \frac{r+1}{r-1} = \frac{r-1+2}{r-1} = 1 + \frac{2}{r-1}.$$

Tehát elegendő belátni, hogy az $1+\sqrt{2}$ az $1+(r-1)$ és az $1+\frac{2}{r-1}$ közé esik. 2 pont

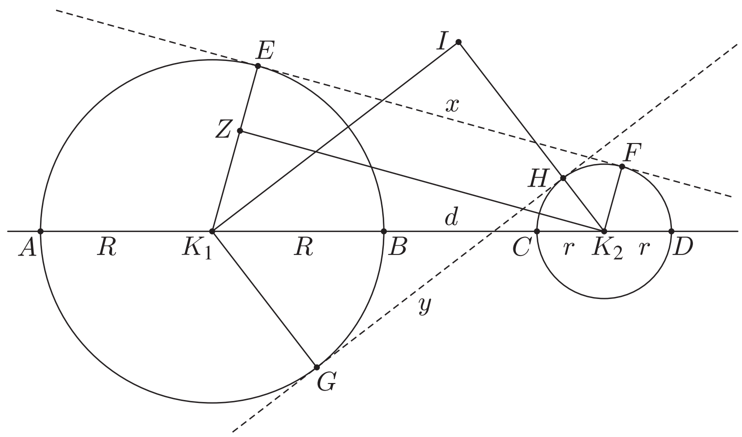
Ez pontosan akkor igaz, ha a $\sqrt{2}$ az $r-1$ és a $\frac{2}{r-1}$ közé esik. 1 pont

Ez pedig igaz, mert az $r-1$ és a $\dfrac{2}{r-1}$ pozitív számok mértani közepe pontosan $\sqrt{2}$, és két szám mértani közepe nyilván a két szám között van. Az is teljesül, hogy $r-1 \neq \dfrac{2}{r-1}$, mert $r-1$ racionális, $\sqrt{2}$ pedig irracionális. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Két, egymást nem tartalmazó, közös ponttal nem rendelkező kör közös szimmetriatengelye a köröket rendre az A, B, C, D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a közös külső illetve belső érintőszakaszok felírhatók két-két olyan szakasz mértani közepeként, amelyek végpontjai az A, B, C, D pontok közül valók!

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit! A külső érintőszakasz $x := EF$, a belső érintőszakasz $y := GH$, a körök távolsága $d := BC$, a nagyobb kör sugara R, a kisebb kör sugara r. (A leírt számolások $R = r$ esetben is működnek, ilyenkor az egyik Pitagorasz-tétel trivialitássá egyszerűsödik.)



A feladat feltételeit helyesen feltüntető ábra. 1 pont

Mivel az érintő merőleges a sugárra, K_1E szakasz párhuzamos K_2F szakasszal. Legyen K_2Z párhuzamos EF-fel, így $K_2Z = x$ és $K_1Z = R - r$. Mivel $K_1ZK_2\sphericalangle = 90°$, 1 pont
ezért Pitagorasz tétele alapján:

$$x^2 = (R+d+r)^2 - (R-r)^2 = d^2 + 2dR + 2dr + 4Rr = d(d+2R) + 2r(d+2R) =$$
$$= (d+2R)(d+2r).$$ 1 pont

Tehát
$$x = \sqrt{AC \cdot BD}\,.$$ 1 pont

Hasonló módon: $K_1I = y$, $K_2I = R + r$ és $K_1IK_2\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Pitagorasz tétele alapján:

$$y^2 = (R+d+r)^2 - (R+r)^2 = d^2 + 2dR + 2dr = d(d+2R+2r).$$ 1 pont

Tehát

$$y = \sqrt{BC \cdot AD}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont

3. Egy halmaz elemei olyan pozitív egész számok, amelyek oszthatóak az 5, 11, 23, 31 prímszámok mindegyikével, de más prímszámokkal nem. A halmaz bármely két elemének a szorzata nem négyzetszám. Mennyi az ilyen halmazok elemszámának maximuma?

Megoldás. Vegyük a halmaz minden elemének prímtényezős felbontását. Két elem szorzata akkor lesz négyzetszám, ha a szorzatban minden kitevő páros. 1 pont

Páros számot két páros vagy két páratlan összegeként kaphatunk. 1 pont

Ezért ha két elemben mind a négy kitevőnek megegyezik a paritása, akkor a szorzat négyzetszám. 2 pont

Ha két elem esetén legalább egy kitevőnek más a paritása, akkor a szorzat nem négyzetszám. 1 pont

Ezért minden elemben a kitevőknél kétféleképpen dönthetünk, lehet páros vagy páratlan. 1 pont

Ezért az ilyen halmazok elemszámának maximuma $2^4 = 16$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2016\sqrt{x_{2016} - 2016^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}}{2}.$$

Megoldás. Tekintsük az egyenlet bal oldalán álló kifejezés k. tagját:

$$k\sqrt{x_k - k^2} = \sqrt{k^2\left(x_k - k^2\right)}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenlőség jobb oldala a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján kisebb vagy egyenlő, mint $\dfrac{k^2 + \left(x_k - k^2\right)}{2} = \dfrac{x_k}{2}$, 2 pont

egyenlőség pontosan akkor áll fent, ha $x_k = 2k^2$. 1 pont

(A felírt becslések akkor is igazak maradnak, ha valamelyik k-ra $x_k = k^2$. Ilyenkor a gyökös kifejezés értéke 0, $\dfrac{x_k}{2}$ pedig pozitív.)

Ha összeadjuk a tagokat $k = 1$-től 2016-ig, azt kapjuk, hogy egyenlőség csak akkor lehet, ha $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_3 = 18$, $\ldots$, $x_{2016} = 2 \cdot 2016^2$. 2 pont

Ezek a számok valóban kielégítik az egyenletet. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 60°$, $ACB\sphericalangle = 100°$ és $AB = 4$ cm. Tudjuk még, hogy a BC oldal felezőpontja F, továbbá D az AB oldal olyan pontja, amelyre $BFD\sphericalangle =$ $= 80°$. Bizonyítsuk be, hogy $T_{ABC} + 2 \cdot T_{BFD} = \sqrt{24}$ cm^2, ahol T_{XYZ} az XYZ háromszög területét jelöli.

2. Adjuk meg azt a négy valós számot, melyekre igaz, hogy bármelyikhez hozzáadva a másik három szorzatát, eredményül mindig 10-et kapunk!

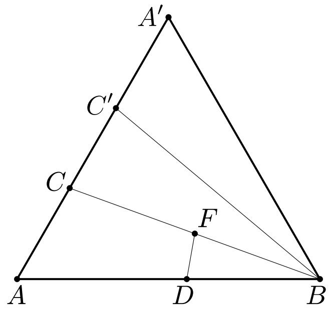
3. Hány olyan 1-nél nagyobb egész szám van, amelyet bármely nála kisebb pozitív egész számmal osztva véges tizedestörtet (vagy egész számot) kapunk eredményül?

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 60°$, $ACB\sphericalangle = 100°$ és $AB = 4$ cm. Tudjuk még, hogy a BC oldal felezőpontja F, továbbá D az AB oldal olyan pontja, amelyre $BFD\sphericalangle =$ $= 80°$. Bizonyítsuk be, hogy $T_{ABC} + 2 \cdot T_{BFD} = \sqrt{24}$ cm^2, ahol T_{XYZ} az XYZ háromszög területét jelöli.

Megjegyzés: *A feladat sajnos hibásan lett kitűzve. A pontos érték helyesen $\sqrt{12}$ és nem $\sqrt{24}$. A döntőben 8 versenyző észrevette a hibát, és a helyes megoldást adta meg. Az összes beadott dolgozat átnézése után úgy láttuk, hogy a legtöbben nem jutottak el odáig, ahol a hibás kitűzés problémát okozott volna. Ezért a döntő végeredményének kialakításakor a Bizottság úgy döntött, hogy azokra a dolgozatokra jár maximális pont, amelyekben a helyes $\left(\sqrt{12}\right)$ érték szerepel. Amennyiben egy versenyzőt a hibás kitűzés megzavart, azt nagyon sajnáljuk, elnézést kérünk.*

1. megoldás.



Készítsünk ábrát, amin az ABC háromszöget kiegészítjük egy szabályos háromszöggé, a következő módon. Az AC oldal C-n túli meghosszabbításán úgy vesszük fel az A' pontot, hogy $AB = AA'$ legyen. Ekkor nyilván ABA' szabályos. Vegyük fel továbbá a CA' szakaszon azt a C' pontot, amelyre $AC = C'A'$. Ekkor ABC és $A'BC'$ egybevágó háromszögek, hiszen $AB = A'B$, $AC = A'C'$ és $BAC\sphericalangle =$ $BA'C'\sphericalangle = 60°$. 3 pont

Egyszerű szögszámítással kapjuk, hogy $BFD_\triangle \sim BC'C_\triangle$ (szögeik: 20°, 80°, 80°), és mivel F a BC felezőpontja, továbbá a háromszögek egyenlő szárúak, ezért a hasonlóság aránya 1 : 2. 1 pont

A hasonlóság miatt $T_{BCC'} = 4T_{BFD}$. 1 pont

Az $AA'B$ háromszög területe most már kifejezhető az ABC és BFD háromszögek területével

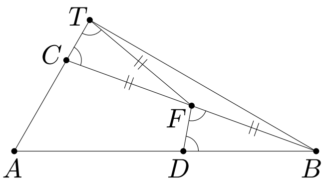
$$T_{AA'B} = T_{ABC} + T_{BCC'} + T_{BC'A'} = 2T_{ABC} + T_{BCC'} = 2T_{ABC} + 4T_{BFD}.$$ 1 pont

Tehát a keresett mennyiség éppen az $AA'B$ szabályos háromszög területének fele:

$$2T_{BFD} + T_{ABC} = \frac{1}{2}T_{AA'B} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 4^2}{4} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás vázlata (*Dobák Dávid dolgozata alapján*): Jelölje T a B-ből induló magasság talppontját. Ekkor a BCT háromszögre alkalmazva a Thalész-tételt: $FT = FC = FB$. A BAT háromszög egy szabályos háromszög fele, innen $FBT\sphericalangle = FTB\sphericalangle = 10°$, vagyis $CFT\sphericalangle = 20°$.



Azt kaptuk, hogy $DBF_\triangle \equiv CFT_\triangle$. A TF szakasz súlyvonal a CBT háromszögben, így $2T_{BFD}$ éppen annyi, mint T_{CTB}. A keresett összeg pedig $T_{ABC} + 2\cdot T_{BFD} = T_{ABC} + {}$ $+ T_{CTB} = T_{ABT}$. Végül a szabályos háromszög területének fele: $\dfrac{\sqrt{3}\cdot 4^2}{8} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

2. Adjuk meg azt a négy valós számot, melyekre igaz, hogy bármelyikhez hozzáadva a másik három szorzatát, eredményül mindig 10-et kapunk!

Megoldás. Jelöljük a négy számot x, y, z, v-vel, szorzatukat p-vel. Írjuk fel például az x-re és y-ra vonatkozó egyenleteket:

$$x + yzv = 10,$$
$$y + xzv = 10.$$

Az elsőt x-szel, a másodikat y-nal szorozva következőket kapjuk:

$$x^2 + p = 10x,$$
$$y^2 + p = 10y.$$

Vonjuk ki az elsőből a másodikat és rendezzünk nullára:

$$x^2 - y^2 - 10x + 10y = 0.$$ 1 pont

$(x-y)(x+y-10) = 0$, ahonnan $x = y$ vagy $x + y = 10$. Ez bármely két ismeretlenről elmondható, azaz bármely kettő vagy egyenlő vagy az összegük 10. Az ismeretlenek között csak 2-féle szám lehet: y, z és v vagy x-szel vagy $10 - x$-szel egyenlő. 1 pont

Ezért 3 eset lehetséges:

A. A négy szám egyenlő, ekkor az ismeretlenek közös értéket x-szel jelölve egy egyenletünk van: $x + x^3 = 10$, $x^3 - 8 + x - 2 = 0$.

$x^3 - 8$-at szorzattá alakítva és $x - 2$-t kiemelve 1 pont
$(x - 2)\big(x^2 + 2x + 5\big) = 0$, $D < 0$ miatt $x = 2$, azaz mind a 4 szám 2. 1 pont

B. Két-két szám egyenlő, például $x = z$ és $y = v$, valamint $x + y = 10$. Ekkor 2 egyenletünk van: $x + xy^2 = 10$ és $y + x^2y = 10$. E kettőt egymásból kivonva:

$$x - y + xy^2 - x^2y = 0,$$
$$x - y - xy(x - y) = 0,$$
$$(x - y)(1 - xy) = 0.$$

$x \neq y$ miatt $xy = 1$. 1 pont

Az $xy = 1$, $x + y = 10$ egyenletrendszert megoldva a két számra $5 + \sqrt{24}$ és $5 - \sqrt{24}$ adódik,ezek megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. Tehát 2 szám $5 + \sqrt{24}$, a másik kettő $5 - \sqrt{24}$. Ezek megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. 1 pont

C. 3 szám egyenlő ($x = z = v$, a negyedik ezektől különbözik és $x + y = 10$). Az eredeti 4 egyenlet ekkor így néz ki:

$$x + x^2y = 10,$$
$$y + x^3 = 10.$$

Kivonás után:

$$x - y + x^2y - x^3 = 0,$$
$$x - y - x^2(x - y) = 0,$$
$$(x - y)\big(1 - x^2\big) = 0,$$
$$(x - y)(1 - x)(1 + x) = 0.$$

$x \neq y$ miatt $x = 1$ vagy $x = -1$, ahonnan $y = 9$ vagy $y = 11$, azaz 3 szám 1, a negyedik 9, vagy 3 szám -1, a negyedik 11. Ezek valóban megoldásai az eredetinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Hány olyan 1-nél nagyobb egész szám van, amelyet bármely nála kisebb pozitív egész számmal osztva véges tizedestörtet (vagy egész számot) kapunk eredményül?

1. megoldás. A feltételeknek $n \leqq 6$ esetén pontosan a 2, a 3 és a 6 számok felelnek meg, és bizonyítjuk, hogy több megoldás nincs is. 1 pont

A továbbiakban tehát tegyük fel, hogy $n > 6$.

Egy racionális szám tizedestört alakja pontosan akkor véges, ha a tört legegyszerűbb alakjában (melyben a számláló és a nevező egymáshoz relatív prímek) a nevező prímtényezői között csak a 2 és az 5 szerepel. 1 pont

Mivel $(n, n-1) = 1$ és $\dfrac{n}{n-1}$ tizedestört alakja is véges, ezért $n-1 = 2^a \cdot 5^b$ alakú.

Mivel $(n, n-2) =1$ vagy 2, és $\dfrac{n}{n-2}$ tizedestört alakja is véges, ezért $n-2 = 2^c \cdot 5^d$ alakú. 1 pont

Mivel $(n-1, n-2) = 1$, az előző két eredmény és $n > 6$ miatt $n-1$ és $n-2$ közül az egyik az 5-nek a másik pedig a 2-nek valódi (pozitív egész kitevőjű) hatványa (n paritásától függően).

Vizsgáljuk az $n-3$-at. Ez egyrészt biztosan nem osztható 5-tel, másrészt biztosan osztható 3-mal, amiért n is osztható 3-mal. Ekkor $(n, n-3) = 3$, s így mivel $\dfrac{n}{n-3}$ tizedestört alakja is véges, $n-3 = 2^e \cdot 3$ alakú. 1 pont

Ha n páros, akkor $n-3 = 2^e \cdot 3$ páratlan, vagyis $e = 0$ és $n-3 = 3$ miatt $n = 6$, ami ellentmond $n > 6$-nak. 1 pont

Ha n páratlan, akkor $n-1$ páros, sőt 2-hatvány, legyen $n-1 = 2^f$, ahol $f \geqq 2$. Ebből $n-3 = 2^f - 2$, amit összevetve $n-3 = 2^e \cdot 3$-mal azt kapjuk, hogy $2^f - 2 = 2 \cdot \left(2^{f-1} - 1\right) = 2^e \cdot 3$. 1 pont

A zárójelben levő kifejezés páratlan, így a számelmélet alaptétele miatt $e = 1$ és $f = 3$, azaz $n = 9$, ami mégsem megoldás, mert a $\dfrac{9}{7}$ tizedestört alakja nem véges. 1 pont

Tehát más megoldás tényleg nincs, csak 3 szám (a 2, a 3 és a 6) teljesíti a feladat feltételeit.

Összesen: 7 pont

2. megoldás vázlata (*Villányi Soma dolgozata alapján*): Két pozitív egész hányadosa akkor és csak akkor egész, ha az osztandó többszöröse az osztónak. Ha nem ez a helyzet, akkor a hányados csak úgy lehet véges tizedestört, ha az osztó prímtényezős felbontásában a 2-től és 5-től különböző prímtényezők legfeljebb akkora kitevőn szerepelnek, mint az osztandó prímtényezős felbontásában.

Az $n \leqq 9$ számokat egyszerűen végignézhetjük, és azt találjuk, hogy csak $n = 2$, $n = 3$ és $n = 6$ jó.

Most tegyük fel, hogy létezik $n > 9$ egész, amely megfelel a feladat feltételeinek. Legyen 3^a a legnagyobb háromhatvány, amely kisebb n-nél, így $3^a < n \leqq 3^{a+1}$. Mivel a feltétel szerint $\dfrac{n}{3^a}$ egész vagy véges tizedestört, ezért n osztható 3^a-nal. Hasonlóan $\dfrac{n}{7}$ egész vagy véges tizedestört, ezért n osztható 7-tel.

Az eddigiek alapján $n = 3^a \cdot 7 \cdot m$, ahol m pozitív egész. De $3^a \cdot 7 \cdot m > 3^{a+1}$, ami ellentmond az $n \leqq 3^{a+1}$ feltevésünknek. Tehát a 9-nél nagyobb egészek között nincsen megfelelő n szám, így az összes megoldást megtaláltuk.

Haladók III. kategória, 1. forduló

Feladatok

1. Az a és b befogójú derékszögű háromszögnek megrajzoltuk a köré írt körét. Fejezzük ki a és b segítségével annak a körnek a sugarát, amely érinti a háromszög befogóit és a köré írt kört belülről.

2. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{3}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \quad (n \geqq 1). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a_n egész minden n-re, viszont nem teljes hatvány semmilyen n-re (vagyis nem egy egész szám valamely 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa)!

3. Egy téglalapot akkor nevezünk egy másik téglalapba *beírtnak,* ha csúcsai a másik téglalap különböző oldalainak belső pontjai. Egy $ABCD$ téglalapba két téglalapot írtunk, amelyeknek van egy közös csúcsa. Mutassuk meg, hogy a két beírt téglalap területének összege egyenlő az $ABCD$ téglalap területével!

4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_7$ nemnegatív számok összege 1. Tekintsük az alábbi öt mennyiséget: $a_1 + a_2 + a_3$, $a_2 + a_3 + a_4$, $a_3 + a_4 + a_5$, $a_4 + a_5 + a_6$, $a_5 + a_6 + a_7$. Jelölje ezen öt érték maximumát M. Mekkora lehet M legkisebb értéke?

5. Két pozitív egész szám hasonló, ha

– a két szám (*tízes számrendszerbeli alakjában*) ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza;

– a két számban a közös számjegyek darabszáma azonos;

– valamint egyik szám sem tartalmazza a 0-s számjegyet.

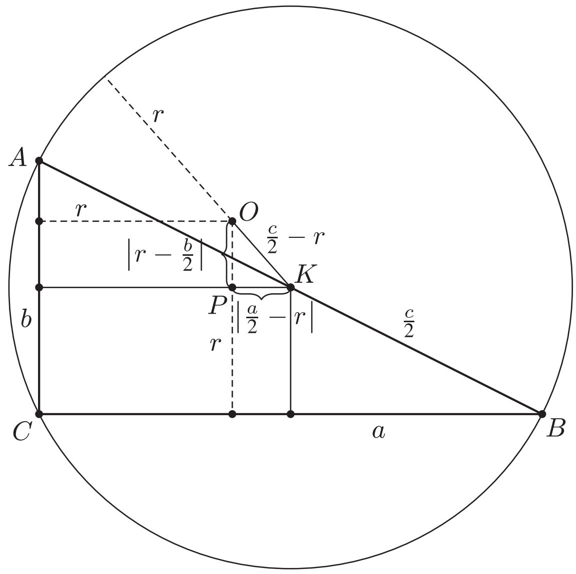
(Pl. hasonlóak a 1454412, és a 4441125, de hozzájuk nem hasonló az 1245 szám.)

Van-e három olyan 2016-jegyű A, B, C szám, hogy A hasonló B-vel, A hasonló C-vel, és $C = A + B$?

Megoldások és javítási útmutató

1. Az a és b befogójú derékszögű háromszögnek megrajzoltuk a köré írt körét. Fejezzük ki a és b segítségével annak a körnek a sugarát, amely érinti a háromszög befogóit és a köré írt kört belülről.

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit.



Legyen a derékszögű háromszög átfogójának hossza $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Thalész-tételének megfordítása miatt a köré írt kör középpontja az átfogó K felezőpontja, sugara pedig $\dfrac{c}{2}$. 1 pont

Jelölje a keresett kör középpontját O, sugarát pedig r. Ez belülről érint a köré írt kört, ezért az érintési pont és a körök középpontjai egy egyenesre esnek, vagyis $OK=\dfrac{c}{2}-r$. 1 pont

Az O-ból a-ra állított merőleges egyenes és a K-ból b-re állított merőleges egyenes metszéspontját jelölje P. K pontnak a befogóktól vett távolsága $\dfrac{a}{2}$, illetve $\dfrac{b}{2}$, O pedig mindkét befogótól r távolságra van (hisz a keresett kör érinti azokat), ezért az OPK derékszögű háromszögben $PK=\left|\dfrac{a}{2}-r\right|$ és $OP=\left|r-\dfrac{b}{2}\right|$. (Az előjel attól függően változik, hogy az O pont hová esik K-hoz képest.) 1 pont

Ebben a háromszögben Pitagorasz-tétele szerint:

$$\left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(r-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{c}{2}-r\right)^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{a^2}{4}-ar+r^2+r^2-br+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2}{4}-cr+r^2,$$

ami rendezés után:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}+r^2-r(a+b-c)=0.$$ 2 pont

Az első tag $c=\sqrt{a^2+b^2}$ miatt 0, tehát az r-ben másodfokú $r^2-r(a+b-c)=0$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Ennek két megoldása $r = 0$ és $r = a + b - c$, előbbi nyilván nem megoldás, tehát a keresett kör sugara $r = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$. 1 pont

Megjegyzés: Mivel a derékszögű háromszög beírt körének sugaráról tudjuk, hogy éppen $\dfrac{a+b-c}{2}$, eredményünkből az is következik, hogy a keresett kör épp a derékszögű csúcsból a háromszög beírt körének kétszeresére nagyított képe.

Összesen: 7 pont

2. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{3}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \quad (n \geqq 1). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a_n egész minden n-re, viszont nem teljes hatvány semmilyen n-re (vagyis nem egy egész szám valamely 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa)!

Megoldás. A sorozat első néhány tagja:

$$a_2 = \frac{3}{1} \cdot 2 = 2 \cdot 3, \quad a_3 = \frac{3}{2} \cdot (2 + 6) = 12 = 3 \cdot 4, \quad a_4 = \frac{3}{3} \cdot (2 + 6 + 12) = 20 = 4 \cdot 5.$$

A tagok felírása után adódhat az a sejtés, hogy a sorozat megadható direkt módon is, és a képzési szabály: $a_n = n \cdot (n + 1)$. 1 pont

Ezt a részeredményt bebizonyítjuk (mondjuk teljes indukcióval).

Lemma: $a_n = n \cdot (n + 1)$.

I.) (*Bázis.*) $n = 1$ (2, 3, 4) esetén igaz az állítás, korábban már megvizsgáltuk.

II.) (*Indukciós feltétel.*) Tegyük fel, hogy egy bizonyos pozitív egész k-ig már igazoltuk az állítást, vagyis $a_k = k \cdot (k + 1)$.

III.) Kérdés, hogy következik-e, hogy ekkor igaz az állítás $n = k + 1$-re is?

Ekkor

$$a_{k+1} = \frac{3}{k} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = \frac{3}{k} \cdot \big((a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + a_k\big).$$

Innen – mivel a definíció szerint $a_k = \dfrac{3}{k-1} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})$ – a belső zárójel helyettesíthető, vagyis:

$$a_{k+1} = \frac{3}{k} \cdot \left(\left(\frac{k-1}{3} \cdot a_k\right) + a_k\right) = \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{k+2}{3} \cdot a_k\right) =$$

$$= \frac{3}{k} \cdot \frac{k+2}{3} \cdot k \cdot (k + 1) = (k + 1)(k + 2).$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. 3 pont

Mivel $a_n = n \cdot (n+1)$ két pozitív egész szám szorzata, nyilván maga is egész. 1 pont

Másfelől $a_n = n \cdot (n+1)$ két egymást követő pozitív egész szorzata. Két egymást követő pozitív egész viszont egymáshoz relatív prím. 1 pont

Vagyis, ha egy p prímre $p \mid n$, akkor $p \nmid (n+1)$, és ez fordítva is igaz.

Azaz, ahhoz, hogy $a_n = n \cdot (n+1)$ egy pozitív egész teljes m-edik ($m > 1$) hatványa legyen, az kellene, hogy mind n, mind $(n+1)$ teljes m-edik hatvány legyen.

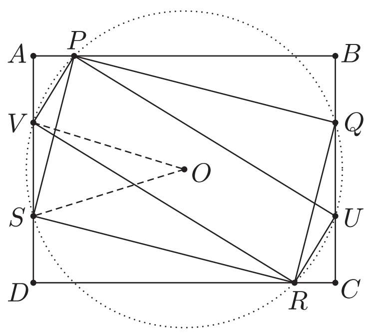
Viszont két szomszédos pozitív m-edik hatvány között legalább három a különbség, vagyis a_n valóban nem teljes hatvány. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Egy téglalapot akkor nevezünk egy másik téglalapba *beírtnak,* ha csúcsai a másik téglalap különböző oldalainak belső pontjai. Egy $ABCD$ téglalapba két téglalapot írtunk, amelyeknek van egy közös csúcsa. Mutassuk meg, hogy a két beírt téglalap területének összege egyenlő az $ABCD$ téglalap területével!

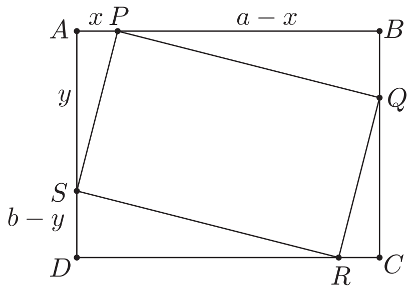
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a beírt téglalapok középpontja szükségszerűen egybeesik az $ABCD$ téglalap középpontjával. Legyen a beírt téglalap AB-re eső pontja P, CD-re eső pontja pedig R. A beírt téglalap középpontja a PR szakasz felezőpontja, ezért rajta van AB és CD középpárhuzamosán. Hasonló érveléssel kapjuk, hogy a szóban forgó középpont BC és DA középpárhuzamosán is rajta van. A két észrevétel együtt azt adja, hogy a beírt téglalap középpontja az $ABCD$ téglalap középpontjával azonos. 2 pont

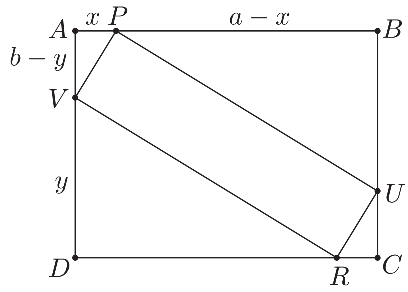


Legyen a feltételben megadott közös csúcs az AB oldal P belső pontja. Az előző észrevételünk alapján ekkor az az R pont is csúcsa mindkét beírt téglalapnak, amelyet úgy kapunk, hogy P-t tükrözzük az $ABCD$ téglalap O középpontjára.

Thalész tétele miatt a beírt téglalapok csúcsai a PR szakasz, mint átmérő fölé írt körre esnek. Mivel ez a kör legfeljebb két pontban metszheti az AD oldalt, így legfeljebb két különböző beírt téglalap létezik, amelynek P az egyik csúcsa. Továbbá az is igaz, hogy ha a két beírt téglalap AD-re eső csúcsa S és V, akkor SVO egyenlő szárú, ezért S és V az AD oldal felezőpontjára szimmetrikus. 2 pont

Vezessük be az alábbi ábra jelöléseit, és fejezzük ki a beírt téglalapok területét úgy, hogy az $ABCD$ téglalapból levágott derékszögű háromszögek területét összegezzük ($AB = a$, $BC = b$, $AP = RC = x$, $AS = CQ = DV = BU = y$).





A szemközt levágott derékszögű háromszögeket téglalappá egyesítve kapjuk az alábbiakat:

$$T_{PQRS} = ab - xy - (a-x)(b-y) \quad \text{és} \quad T_{PURV} = ab - x(b-y) - y(a-x).$$ 1 pont

Összegezve:

$$\begin{aligned} T_{PQRS} + T_{PURV} &= ab - xy - (a-x)(b-y) + ab - x(b-y) - y(a-x) \\ &= 2ab - \big(xy + (a-x)y + x(b-y) + (a-x)(b-y)\big) \\ &= 2ab - \big(x + (a-x)\big)\big(y + (b-y)\big) \\ &= 2ab - ab = ab = T_{ABCD}. \end{aligned}$$ 2 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_7$ nemnegatív számok összege 1. Tekintsük az alábbi öt mennyiséget: $a_1 + a_2 + a_3$, $a_2 + a_3 + a_4$, $a_3 + a_4 + a_5$, $a_4 + a_5 + a_6$, $a_5 + a_6 + a_7$. Jelölje ezen öt érték maximumát M. Mekkora lehet M legkisebb értéke?

1. megoldás. $a_1 = a_4 = a_7 = \frac{1}{3}$, $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$ választással mind az öt összeg értéke $\frac{1}{3}$, ekkor tehát $M = \frac{1}{3}$. 2 pont

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy M értéke ennél kisebb nem is lehet:

Tegyük fel, hogy léteznek olyan, a feltételeknek eleget tevő $a_1, a_2, \ldots, a_7$ számok, melyek esetén $M < \frac{1}{3}$, vagyis mind az öt vizsgált összeg kisebb $\frac{1}{3}$-nál. 1 pont

Ekkor az $a_1 + a_2 + a_3 < \frac{1}{3}$, $a_3 + a_4 + a_5 < \frac{1}{3}$ és $a_5 + a_6 + a_7 < \frac{1}{3}$ egyenlőtlenségek összeadásával az $a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + 2a_5 + a_6 + a_7 < 1$ egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

Tudjuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1$, ennek figyelembevételével az előző egyenlőtlenségből $a_3 + a_5 < 0$ adódik, 1 pont
ami azonban lehetetlen, hisz nemnegatív számok összege nem lehet negatív. 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát $M < \frac{1}{3}$ valóban nem lehetséges, tehát M legkisebb értéke $\frac{1}{3}$ lehet. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Írjuk fel a két „hiányzó” összeget is, vagyis $a_6 + a_7 + a_1$-et és $a_7 + a_1 + a_2$-t. Ezekre teljesülnek az

$$a_6 + a_7 + a_1 \leqq (a_5 + a_6 + a_7) + (a_1 + a_2 + a_3) \leqq 2M$$

és az

$$a_7 + a_1 + a_2 \leqq (a_5 + a_6 + a_7) + (a_1 + a_2 + a_3) \leqq 2M$$

becslések. 2 pont

Ezekkel együtt a hét összeg összege egyrészt

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_5 + a_6 + a_7) +$$
$$+ (a_6 + a_7 + a_1) + (a_7 + a_1 + a_2) = 3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) = 3$$ 1 pont

másrészt

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_5 + a_6 + a_7) +$$
$$+ (a_6 + a_7 + a_1) + (a_7 + a_1 + a_2) \leqq M + M + M + M + M + 2M + 2M = 9M,$$

ahonnan $3 \leqq 9M$, tehát $\frac{1}{3} \leqq M$. 2 pont

Az egyenlőség meg is valósítható, ugyanis az $a_1 = a_4 = a_7 = \frac{1}{3}$, $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$ választással mind az öt összeg, tehát M értéke is $\frac{1}{3}$, vagyis M legkisebb értéke valóban $\frac{1}{3}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

5. Két pozitív egész szám hasonló, ha

– a két szám (*tízes számrendszerbeli alakjában*) ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza;

– a két számban a közös számjegyek darabszáma azonos;

– valamint egyik szám sem tartalmazza a 0-s számjegyet.

(Pl. hasonlóak a 1454412, és a 4441125, de hozzájuk nem hasonló az 1245 szám.)

Van-e három olyan 2016-jegyű A, B, C szám, hogy A hasonló B-vel, A hasonló C-vel, és $C = A + B$?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy vannak a feltételeknek megfelelő A, B, C számok.

Először keressünk „kicsi” ilyen számokat. A feltételek miatt B is hasonló C-vel. Ha A, B, C 9-es maradékait vizsgáljuk, adódik, hogy – a 9-cel való oszthatósági szabály miatt – a három szám azonos maradékot ad 9-cel osztva. 1 pont

Mivel $A + B = C$, ez csak úgy lehet, ha mind a három szám 9-cel osztható. 1 pont

Könnyen látható, hogy egyjegyű, és kétjegyű ilyen számok nincsenek. 1 pont

Háromjegyű számokat már találhatunk. Először próbálkozzunk olyan háromjegyű számokkal, ahol a számjegyösszeg: $a + b + c = 9$.

Legyenek A, B, C jegyei valamilyen sorrendben a, b, c (a jegyek között lehetnek azonosak is akár)!

Konkrétan: $A = \overline{abc}$, $B = \overline{a'b'c'}$ és $C = \overline{a''b''c''}$, ahol a $'$-s, és $''$-s jegyek az a, b, c jegyek valamilyen permutációi.

Mivel a jegyek összege 9, ezért $c = 9 - a - b$, $c' = 9 - a' - b'$, $c'' = 9 - a'' - b''$.

A, B utolsó jegyeinek összege vagy C utolsó jegye, vagy attól 10-zel több, vagyis

$$18 - a - b - a' - b' \equiv 9 - a'' - b'' \pmod{10}, \quad \text{innen}$$
$$18 - a - b - a' - b' - c'' \equiv 9 - a'' - b'' - c'' = 0 \pmod{10}, \quad \text{majd}$$
$$18 \equiv a + b + a' + b' + c'' \pmod{10} \quad \text{adódik.}$$

Innen két eset lehet, az egyik, hogy a, b, a', b', c'' között A, B, C mind a három jegye előfordul, ekkor – mivel ezek összege 9 – a maradék két számjegy (az általánosság megszorítása nélkül mondjuk a, b') összege is $a + b' = 9$. Mivel az összeg páratlan, ezért itt két különböző jegyről van szó, viszont ekkor a harmadik jegy okvetlenül 0, ami ellentmondás.

A másik eset, hogy a, b, a', b', c'' között A, B, C három jegye közül pontosan kettő fordul elő, egyik 3-szor, a másik 2-szer. Ez azt jelenti – megint az általánosság megszorítása nélkül –, hogy $18 \equiv 3a + 2b \pmod{10}$. Vagyis $3a + 2b$ vagy 8 vagy 18 vagy 28 vagy 38.

Ha $8 = 3a + 2b \to$ a páros csak $a = 2$, $b = 1 \to c = 6$ lehet, ez nem ad eredményt.

Ha $18 = 3a + 2b \to 3 \mid b$ csak $b = 3 \to a = 4$, $c = 2$ és $b = 6 \to a = 2$, $c = 1$ lehet, ezek sem adnak eredményt.

Ha $28 = 3a + 2b \to 27 < 28 = 3a + 2b < 3(a + b) \to 9 < a + b$ vagyis ekkor már túl nagy lenne a számjegyek összege. (A 38-as eset ugyanígy!)

Vagyis nincsenek olyan háromjegyű számok, ahol a számjegyösssszeg 9. 1 pont

Végül, ha a számaink háromjegyűek, és a számjegyösszeg 18, akkor már találunk megoldást:

$$18 = 9 + 8 + 1 = 9 + 7 + 2 = 9 + 6 + 3 = 9 + 5 + 4 = 8 + 8 + 2 = 8 + 7 + 3 =$$
$$= 8 + 6 + 4 = 8 + 5 + 5 = 7 + 7 + 4 = 7 + 6 + 5 = 6 + 6 + 6$$

felbontások lehetnek jók.

Ezek közül (a számjegyek további vizsgálatával – pl. a végződések, illetve a számok első jegyeinek a vizsgálatával) csak a $18 = 9 + 5 + 4$ jöhet szóba.

Kis próbálkozás után $A = 459$, $B = 495$, és $C = 954$ három megfelelő szám. 1 pont

Az $A = 459$, $B = 495$, és $C = 954$ számokból többféle módon tudunk megfelelő 2016-jegyű számokat csinálni.

I.) Pl. (mivel $2016 = 3 \cdot 672$)

$$A = 459459459\ldots459, \quad B = 495495\ldots495 \quad \text{és} \quad C = 954954\ldots954$$

megfelelő három szám (minden szám 672 blokkból áll).

II.) Pl.

$$A = 499\ldots9959, \quad B = 499\ldots995 \quad \text{és} \quad C = 99\ldots9954$$

is megfelelő (mind a három számban pontosan 2014 darab 9-es jegy van). 2 pont

Ha a diák megtalál megfelelő számokat, és az A, B, C számokról meg is mutatja, hogy megfelelnek a feltételeknek, kapja meg a 7 pontot, puszta eredményközlésért – ha a kapott eredményt nem ellenőrzi – csak az utolsó rész 2 pontját kapja.

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adott ABC háromszög esetén a QRS háromszöget nevezzük az ABC háromszög *kölyök-háromszögének,* ha az igaz, hogy

– QP_1 felezőpontja R,

– RP_2 felezőpontja S,

– SP_3 felezőpontja Q, ahol a P_1, P_2, P_3 pontok valamilyen sorrendben az A, B, C pontok.

Igazoljuk, hogy minden ABC háromszögnek két kölyök-háromszöge van, és a két kölyök-háromszög metszetének a területe az ABC háromszög területének az 1/10-e.

2. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem konstans függvényről azt tudjuk, hogy minden valós x esetén

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = c,$$

ahol c rögzített egész konstans.

Igazoljuk, hogy ha $f(x)$-nek van egész fixpontja, akkor van két olyan fixpontja is, amely nem egész.

(z fixpontja $f(x)$-nek, ha $f(z) = z$.)

3. Egy kör alakú asztal körül 20 diák ül. Minden diák előtt van néhány cukorka, kezdetben 2, 4, 6, 8, ..., 38, 40, valamilyen tetszőleges sorrendben. A diákok – tanáruk vezetésével – a következőt teszik. Egy lépésben minden diák odaadja a tőle jobbra ülő diáknak cukorkái felét, majd ha így páratlan sok cukorkája maradna, akkor a tanártól kap még egyet. Ezt a lépést ismételgetik újra és újra. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után minden diáknak ugyanannyi cukorkája lesz.

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott ABC háromszög esetén a QRS háromszöget nevezzük az ABC háromszög *kölyök-háromszögének,* ha az igaz, hogy

– QP_1 felezőpontja R,

– RP_2 felezőpontja S,

– SP_3 felezőpontja Q, ahol a P_1, P_2, P_3 pontok valamilyen sorrendben az A, B, C pontok.

Igazoljuk, hogy minden ABC háromszögnek két kölyök-háromszöge van, és a két kölyök-háromszög metszetének a területe az ABC háromszög területének az 1/10-e.

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a P_1 pont az A ponttal egyezik meg. Innen valóban két lehetőség van P_2, P_3 választására: vagy $P_3 = B$, $P_2 = C$, vagy fordítva: $P_3 = C$, $P_2 = B$.

(Természetesen ezzel még nem igazoltuk, hogy egyáltalán van-e ilyen kölyök-háromszög.) 1 pont

Most megmutatjuk, hogy a $P_1 = A$, $P_2 = B$, $P_3 = C$ esethez egyértelműen tartozik QRS kölyök-háromszög, és megadjuk QRS „helyzetét”.

Legyen az A, B, C csúcsokkal szemben az a, b, c oldal, az ezekhez tartozó magasságok pedig legyenek rendre: m_a, m_b, m_c!

Legyen a Q csúcs távolsága az a, b, c oldaltól x, y, z!

(*Megjegyzés:* Ezeket a távolságokat előjeles távolságnak fogjuk érteni, ami azt jelenti, hogy, pl. ha az a oldalegyenese által meghatározott közös félsíkban van Q, és A, akkor $x > 0$, ha ellentétes félsíkban, akkor $x < 0$, illetve, ha Q az a oldalegyenesen, akkor $x = 0$.)

Ekkor nyilván A, B, C csúcsok távolsága a rájuk illeszkedő oldalaktól 0, míg a szemben lévő oldalaktól rendre: m_a, m_b, m_c.

A felezőpont tulajdonságai miatt számolható Q, R, S távolsága az oldalaktól:

Mivel QA felezőpontja R, ezért R távolsága az a oldaltól: $\dfrac{x + m_a}{2}$,

távolsága a b oldaltól: $\dfrac{y}{2}$,

távolsága a c oldaltól: $\dfrac{z}{2}$, Mivel RB felezőpontja S, ezért S távolsága az a oldaltól: $\dfrac{x+m_a}{4}$.

távolsága a b oldaltól: $\dfrac{\frac{y}{2}+m_b}{2}=\dfrac{y+2m_b}{4}$,

távolsága a c oldaltól: $\dfrac{z}{4}$,

Mivel SC felezőpontja Q, ezért Q távolsága az a oldaltól: $\dfrac{x+m_a}{8}$,

távolsága a b oldaltól: $\dfrac{y+2m_b}{8}$,

távolsága a c oldaltól: $\dfrac{\frac{z}{4}+m_c}{2}=\dfrac{z+4m_c}{8}$.

Másfelől az utóbbi távolságok éppen megegyeznek x, y, z-vel, vagyis

$$\frac{x+m_a}{8}=x \quad\longrightarrow\quad \frac{m_a}{7}=x,$$
$$\frac{y+2m_b}{8}=y \quad\longrightarrow\quad \frac{2m_b}{7}=y,$$
$$\frac{z+4m_c}{8}=z \quad\longrightarrow\quad \frac{4m_c}{7}=z.$$

Vagyis Q távolsága az oldalaktól: $\left(\dfrac{m_a}{7};\dfrac{2m_b}{7};\dfrac{4m_c}{7}\right)$.

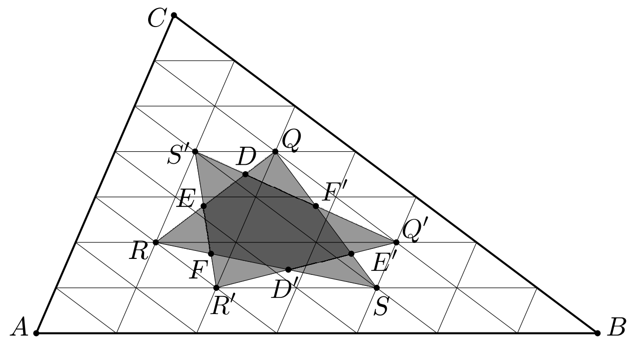
Hasonlóan R távolsága az oldalaktól: $\left(\dfrac{4m_a}{7};\dfrac{m_b}{7};\dfrac{2m_c}{7}\right)$, és

S távolsága az oldalaktól: $\left(\dfrac{2m_a}{7};\dfrac{4m_b}{7};\dfrac{m_c}{7}\right)$.

Vagyis ebben az esetben a QRS kölyök-háromszög valóban egyértelműen létezik, illetve a távolságok pozitív volta pedig egyúttal azt is jelenti, hogy a QRS háromszög teljes egészében az ABC belsejében van.

(*Megjegyzés:* Vektorokkal egyszerűbben kijönnek ugyanezek az eredmények.) 2 pont

Az eddigi eredményeink alapján használjuk a következő ábrát, és a jelöléseit!

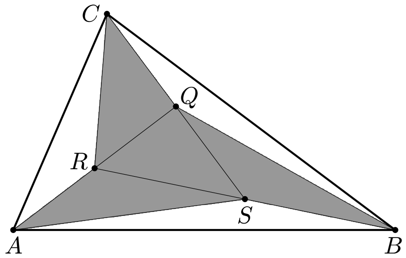


Az ábra elkészítésénél minden oldal összes hetedelőpontját vettük, és azokon keresztül párhuzamosokat húzva a megfelelő oldallal 49 egybevágó (*a továbbiakban egységnyi területűnek tekintett* $\to$ *így* ABC *területét* 49-*nek tekintjük*), az ABC-hez hasonló kisebb háromszögre bontottuk az ABC háromszöget.

QRS, és $Q'R'S'$ a két kölyök-háromszög, míg nekünk a $DEFD'E'F'$ hatszög területét kell meghatároznunk.

(*Megjegyzés:* Mivel Q, R, S, Q', R', S' az ábrán rácspontok, a rácsbeli koordinátáik miatt D, E, F, D', E', F' pontok léteznek, és az ábrán „felrajzolt módon, sorrendben” léteznek, hiszen mindegyikük egy megfelelő rácstrapéz átlós pontja.) 1 pont

Először megmutatjuk, hogy bármely kölyök-háromszög területe az ABC területének éppen 1/7-e (vagyis, ha ABC területe 49, akkor pontosan 7).



Ugyanis $T_{QRS} = T_{RAS} = T_{SBQ} = T_{QCR}$ hiszen (Q, R, S felezőpont volta miatt) azonos oldalú, és magasságú háromszögek mind a QRS-sel.

Másfelől $T_{RAS} = T_{SAB}$, $T_{SBQ} = T_{QBC}$, és $T_{QCR} = T_{RCA}$ hiszen itt is rendre azonos oldalú, és magasságú háromszögekről van szó.

Innen adódik, hogy $T_{QRS} = \dfrac{T_{ABC}}{7}$. 1 pont

Innen a $DEFD'E'F'$ hatszög területe számolható például a következőképpen:

$$T_{DEFD'E'F'} = T_{DRD'Q'} + T_{ER'E'Q} + T_{FSF'S'} - T_{QRS} - T_{Q'S'R'},$$

hiszen a jobboldali összeg mind az öt tagjában a $DEFD'E'F'$ hatszög területét egyszer-egyszer vettük (háromszor pozitív, kétszer negatív előjellel), míg az ERF, $FR'D'$, …, $DS'E$ háromszögek területét egyszer negatív, egyszer pozitív előjellel vettük. Innen

$$T_{DRD'Q'} = T_{DRQ'} + T_{D'Q'R} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right) + 3 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 1\right) = \frac{9}{2} + \frac{9}{5} = \frac{63}{10},$$

ahol a $T_{DRQ'} = 3 \cdot \left(\dfrac{3}{4} \cdot 2\right)$ képletben a 3 az RQ' távolságot jelenti (*ez* 3-*szor annyi, mint valamely egységnyi területűnek tekintett rácsháromszög vízszintes oldala*), míg a $\left(\dfrac{3}{4} \cdot 2\right)$ az RQ' oldalhoz tatozó magasságot (*ez éppen* $3/2$-*szer annyi, mint az egységnyi területűnek tekintett rácsháromszög vízszintes oldalához tartozó magasság*), ez utóbbi az $RQ'D$, illetve a $QS'D$ háromszögek hasonlóságából jön ki, illetve abból, hogy a hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{RQ'}{QS'} = 3$.

$T_{D'Q'R} = 3 \cdot \left(\dfrac{3}{5} \cdot 1\right)$ pont ugyanígy számolható.

$T_{ER'E'Q}$, és $T_{FSF'S'}$ pontosan ugyanúgy számolható, mint $T_{DRD'Q'}$, és mindre:

$$T_{DRD'Q'} = T_{ER'E'Q} = T_{FSF'S'} = \frac{63}{10}$$

adódik.

Emiatt

$$T_{DEFD'E'F'} = 3 \cdot \frac{63}{10} - 2 \cdot 7 = \frac{189 - 140}{10} = \frac{49}{10}.$$

Mivel $T_{ABC} = 49$, emiatt a két kölyök-háromszög metszetének területe valóban pontosan 1/10-e az ABC háromszög területének. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem konstans függvényről azt tudjuk, hogy minden valós x esetén

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = c,$$

ahol c rögzített egész konstans.

Igazoljuk, hogy ha $f(x)$-nek van egész fixpontja, akkor van két olyan fixpontja is, amely nem egész.

(z fixpontja $f(x)$-nek, ha $f(z) = z$.)

Megoldás. Először határozzuk meg $f(x)$ értékét $x = 0$ esetén! Helyettesítsünk be x helyére 1-et! Ekkor

$$f(1-1) + (1-1)f(1) = f(0) = c.$$

Ha $x \neq 0$, akkor szorozhatjuk az egyenletünket x-szel:

(1) $$xf(1-x) + x(1-x)f(x) = cx.$$

Valamint az $f(1-x) + (1-x)f(x) = c$ képletbe x helyére $1-x$ helyettesítésével:

(2) $$f(x) + xf(1-x) = c.$$ 1 pont

$(1) - (2) \longrightarrow (-x^2 + x - 1)f(x) = c(x-1)$. Mivel $-x^2 + x - 1 < 0$ minden x-re, ezért oszthatunk vele: $f(x) = \dfrac{c(x-1)}{-x^2+x-1}$. Ezzel megkaptuk az $f(x)$ hozzárendelési szabályát (ha $x \neq 0$).

Mivel ez a képlet $x = 0$ esetén: $f(0) = \dfrac{c(0-1)}{-0^2+0-1} = c$, ezért minden x-re megadja $f(x)$-et. 2 pont

Legyen most már z fixpontja $f(x)$-nek!

Ha $z = 0 \longrightarrow f(0) = 0 = c \longrightarrow f(x) = 0$ konstans, ami nem megfelelő.

Ha $z = 1 \longrightarrow f(1) = \dfrac{c(1-1)}{-1^2+1-1} = 0$, vagyis ez sem lehet fixpont.

Vagyis $z = 0; 1$ nem fixpont. 1 pont

Legyen most már $z \neq 0; 1$ tetszőleges egész fixpont, vagyis

$$z = f(z) = \frac{c(z-1)}{-z^2+z-1}.$$

Az egyenletet rendezve:

$$c(z-1) = -z^3 + z^2 - z \longrightarrow c = \frac{-z^3+z^2-z}{z-1} = -z^2 - 1 - \frac{1}{z-1}$$

adódik. Mivel c, z egészek, innen $(z-1) \mid 1 \longrightarrow z_1 = 0$; $z_2 = 2$ adódik.

A $z = 0$-t elintéztük már, az nem lehet fixpont, marad, hogy $z = 2$ a fixpont. 1 pont

Innen adódik, hogy $c = \dfrac{-2^3 + 2^2 - 2}{2 - 1} = -6$.

Vagyis a függvényem: $f(x) = \dfrac{-6(x-1)}{-x^2 + x - 1}$.

Lássuk, ennek vannak-e egyéb fixpontjai! Ehhez az kell, hogy $x = \dfrac{-6(x-1)}{-x^2 + x - 1}$ legyen, innen: $-6(x-1) = -x^3 + x^2 - x$, majd $0 = x^3 - x^2 - 5x + 6$ adódik. Mivel tudjuk, hogy ennek az egyenletnek 2 a gyöke, több módon szorzattá alakíthatjuk, végül:

$$0 = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x^2 + x - 3)$$

adódik.

Az $x^2 + x - 3 = 0$ két valós, de irracionális megoldása adja az $f(x)$ két egyéb fixpontját: $z_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ a két nemegész fixpont (a $z = 2$ mellett). 2 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Egy kör alakú asztal körül 20 diák ül. Minden diák előtt van néhány cukorka, kezdetben 2, 4, 6, 8, …, 38, 40, valamilyen tetszőleges sorrendben. A diákok – tanáruk vezetésével – a következőt teszik. Egy lépésben minden diák odaadja a tőle jobbra ülő diáknak cukorkái felét, majd ha így páratlan sok cukorkája maradna, akkor a tanártól kap még egyet. Ezt a lépést ismételgetik újra és újra. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után minden diáknak ugyanannyi cukorkája lesz.

1. megoldás. Általánosabban azt bizonyítjuk, hogy ha az $n \geqq 3$ diák előtt kezdetben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cukor van (a_i páros minden i-re), akkor a folyamat véges lépésben elér abba az állapotba, ahol minden diák előtt azonos számú cukorka van.

Néhány kis n-re végzett kísérlet után megfogalmazható az alábbi két sejtés:

1. Ha egy lépés előtt $\max\{a_i\} = M$, akkor a lépés után is legfeljebb M a maximum.
2. Ha egy lépés előtt $\min\{a_i\} = m$, akkor a lépés után is legalább m a minimum. 2 pont

Az első sejtést bizonyítjuk, a második ugyanúgy megy. Legyen három szomszédos diák előtt rendre a, b és c cukor egy lépés előtt. Tudjuk, hogy $a, b, c \leqq M$. A lépés után $\dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2}$ vagy $\dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} + 1$ cukor lesz a középső diák előtt. (A b cukor felét továbbadja, a c cukor felét megkapja, és esetleg eggyel ki kell egészíteni párosra.) Az első esetben $\dfrac{b+c}{2} \leqq \dfrac{M}{2} + \dfrac{M}{2} = M$. A második eset csak úgy állhat elő, ha $\dfrac{b+c}{2} < M$, hiszen M páros. Tehát ekkor is $\dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} + 1 \leqq M$ cukor lesz a középső diák előtt. Az érvelés bármelyik diákkal – mint középsővel – elmondható, ezért a lépés után nem növekedhetett a maximális cukorszám. 1 pont

A másik lényeges észrevétel a következő. Ha $\min\{a_i\} = m$ és egy pillanatban $k > 0$ diáknak van pontosan m cukorkája (és még van legalább két különböző cukorszám), akkor a lépés után az m cukorkával rendelkező diákok száma k-nál kevesebb. 1 pont

Ugyanis ha egy minimális számú (m) cukorkával bíró diák egy a cukorkával bíró diáktól kap cukorkákat, akkor $\frac{m+a}{2}$ vagy $\frac{m+a}{2}+1$ cukorkája lesz a lépés után. $a \geqq m$ miatt csak akkor nem növekedett cukorkái száma, ha $a = m$. Tehát csak azok a minimális darabszámok maradnak meg, amelyektől balra is minimális a cukorkák száma. Ez pedig legalább az egyik minimumra nem teljesül, ha nem minden cukorkaszám egyenlő. Az is világos, hogy ha valakinél kezdetben a m-nél több cukor volt, annál egy lépés után is m-nél több cukorka lesz. 1 pont

Az eddigi észrevételekből már egyszerűen következik a feladat állítása. Legyen $\max\{a_i\} = M$ és $\min\{a_i\} = m$. Ha $M = m$, akkor vége a folyamatnak. Ha $m < M$, akkor minden lépésben csökken az m cukorkával rendelkező diákok száma, ezért véges sok lépés után $m' > m$ lesz a cukorkaszám minimuma. Mivel a darabszámok pozitív egészek, így véges sok lépésben eljutunk oda, hogy a minimum és a maximum megegyezik, vagyis minden diáknak ugyanannyi cukorkája van. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás vázlata: Az előző megoldásban már láttuk, hogy a maximális cukorkaszám nem nőhet az eredeti érték felé. Emiatt csak véges sok különböző cukorka-eloszlás fordulhat elő, vagyis csak akkor tarthatna a végtelenségig a folyamat, ha egy idő után „ciklizál”. Továbbá a ciklusban már nem fordulhat elő, hogy a tanár új cukrot „tesz a rendszerbe”, hiszen a periódus végén ugyanannyi cukor van, mint a kezdetekor.

Indirekt tegyük tehát fel, hogy ki tud alakulni egy ilyen ciklus! Ennek kezdetekor a cukorkaszám legyen $a_0, a_1, \ldots, a_{19}$, és az átadás iránya legyen $a_{i+1} \to a_i$. Mivel a ciklusban már nem kerül új cukor a rendszerbe, ezért egy lépésben mindig a következő módon változik a cukorkaszám:

$$a_i \leftarrow \frac{a_i + a_{i+1}}{2},$$

ahol az indexelés (mod 20) értendő.

Vizsgáljuk most meg, hogy egy kiszemelt diáknak hogyan változik a cukorkaszáma 19 lépés során. $\mathcal{A}_i$ jelölje a kiszemelt diák cukorkaszámát a ciklus i. lépése után.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= a_0, \\
\mathcal{A}_1 &= \frac{a_0 + a_1}{2}, \\
\mathcal{A}_2 &= \frac{a_0 + 2a_1 + a_2}{4}, \\
\mathcal{A}_3 &= \frac{a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3}{8}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{19} = \frac{\binom{19}{0}a_0 + \binom{19}{1}a_1 + \binom{19}{2}a_2 + \ldots + \binom{19}{19}a_{19}}{2^{19}}.$$

Ha a ciklus elején a maximális cukorkaszám M volt, és nem mindegyik diák előtt volt M cukor, akkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{19} &= \frac{\binom{19}{0}a_0 + \binom{19}{1}a_1 + \binom{19}{2}a_2 + \ldots + \binom{19}{19}a_{19}}{2^{19}} \\
&< \frac{\binom{19}{0}M + \binom{19}{1}M + \binom{19}{2}M + \ldots + \binom{19}{19}M}{2^{19}} \\
&= M \cdot \frac{\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} + \ldots + \binom{19}{19}}{2^{19}} = M \cdot 1
\end{aligned}$$

Ez viszont azt jelentené, hogy 19 lépés után csökkent a maximális cukorkaszám, ami ellentmond a periodicitás feltevésének, hiszen a maximum nem tud növekedni, ezért nem tudnánk a kiinduló állapotba visszatérni.