ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

2014/2015-ÖS TANÉV

Kezdők és Haladók
(I., II. és III. kategória)

Feladatok és megoldások

A verseny az NTP-TV-14-A-0007 azonosító számú pályázat alapján a Nemzeti Tehetség Program, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő, valamint az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet támogatásával valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

Bolyai János Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
Kezdők I–II. kategória, I. forduló

Feladatok

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek néhány számjegyét a szám elejéről (ugyanabban a sorrendben) a szám végére helyezve visszakapható az eredeti szám? (Például az 1234 nem ilyen, mert a 2341, 3412, 4123 mind különböznek tőle.)

2. Melyek azok a p, q pozitív prímszámok, melyekre $p^2 - 1$ osztható q-val, és $q^2 - 1$ osztható p-vel?

3. Hányféleképpen helyezhető el egy 8×8-as sakktáblán egy 5×5-ös négyzet úgy, hogy a kisebb négyzet csúcsai a sakktábla mezőinek valamely csúcsára essenek?

4. Egy háromszög egyik oldala 2 egység hosszúságú, a rajta fekvő szögek 60° és 75°-osak. Igazold, hogy a háromszög területe $t = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$!

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek néhány számjegyét a szám elejéről (ugyanabban a sorrendben) a szám végére helyezve visszakapható az eredeti szám? (Például az 1234 nem ilyen, mert a 2341, 3412, 4123 mind különböznek tőle.)

Megoldás. Először számoljuk meg, hány olyan van, amelynek az első számjegyét áthelyezve a szám végére visszakapjuk az eredeti számot. Az eredeti $\overline{abcd}$ szám pontosan akkor egyezik meg $\overline{bcda}$-val, ha $a = b = c = d$, azaz pontosan az $\overline{aaaa}$ alakú számok ilyenek, ahol a $(= b = c = d)$ bármelyik 0-tól különböző számjegy lehet, vagyis 9 ilyen szám van. 1 pont

Ha az első két számjegy áthelyezésével lehet visszakapni az eredeti számot, akkor az eredeti $\overline{abcd}$ szám megegyezik $\overline{cdab}$-vel, ami pontosan akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$. Az a $(= c)$ számjegy 9 féle lehet (bármi, kivéve a 0-t), a b $(= d)$ számjegy pedig 10 féle lehet, így összesen 90 ilyen szám van. 2 pont

Ezek közül 9-et viszont már számoltunk: az $\overline{aaaa}$ alakúakat, így csak 81 új számot kapunk. 1 pont

Végül, ha az $\overline{abcd}$ szám első három számjegyét áthelyezve kapható vissza az eredeti szám, akkor $\overline{abcd} = \overline{dabc}$, ami pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c = d$, vagyis ismét csak az $\overline{aaaa}$ alakú számokat kapjuk meg, azaz nem kapunk új megoldást. 1 pont

Összesen tehát 90 ilyen szám van. 1 pont

2. Melyek azok a p, q pozitív prímszámok, melyekre p^2-1 osztható q-val, és q^2-1 osztható p-vel?

Megoldás. Mivel $q \mid p^2-1=(p-1)(p+1)$, ezért $q \mid p-1$ vagy $q \mid p+1$, mindkét esetben $q \leqq p+1$. 2 pont

Ugyanígy $p \leqq q+1$ is teljesül. Vagyis a p és q prímszámok különbsége legfeljebb 1. 1 pont

Ha $p=q$ lenne, akkor $p \mid p^2-1$ alapján $p \mid 1$ következne, ami ellentmondás. 1 pont

Tehát p és q prímszámok különbsége pontosan 1, így az egyik szám 2, a másik pedig 3. 1 pont

Ez valóban megoldás, mivel $2 \mid 3^2-1=8$ és $3 \mid 2^2-1=3$. 1 pont

3. Hányféleképpen helyezhető el egy 8×8-as sakktáblán egy 5×5-ös négyzet úgy, hogy a kisebb négyzet csúcsai a sakktábla mezőinek valamely csúcsára essenek?

Megoldás. Ha a sakktábla éleivel párhuzamosak az 5×5-ös négyzet élei, akkor illesszük először a kicsi négyzetet a sakktábla bal felső sarkába. Ezt jobbra vagy lefelé legfeljebb 3 egységgel mozgathatjuk el, így $4\cdot 4=16$ ilyen elrendezés van. 2 pont

Ha az 5×5-ös négyzet oldalai nem párhuzamosak a sakktábla oldalaival, akkor a 3, 4, 5 Pitagoraszi számhármas alapján négyszögünket egy 7×7-es négyzetbe illeszthetjük be az alábbiak szerint:

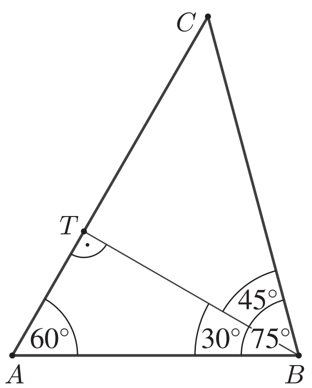
– a 7×7-es négyzet bal felső csúcsából elindulva az óramutató járásának megfelelő irányba egyik esetben 3, 4, másik esetben pedig 4, 3 egységekre osszuk fel az oldalakat. A kijelölt osztópontok adják az 5×5-ös négyzet csúcsait.

Az előzőek alapján a 7×7-es négyzetet $2\cdot 2=4$-féleképpen lehet a sakktáblán elhelyezni. Tehát $2\cdot 2\cdot 2=8$ ilyen elrendezés van. 3 pont

Azaz összesen $4\cdot 4+2\cdot 2\cdot 2=24$-féleképpen lehet az 5×5-ös négyzetet a feltételeknek megfelelően a sakktáblán elhelyezni. 1 pont

4. Egy háromszög egyik oldala 2 egység hosszúságú, a rajta fekvő szögek 60° és 75°-osak. Igazold, hogy a háromszög területe $t=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Rajzoljuk be a 75°-os szöghöz tartozó B csúcsból induló magasságot, és legyen a talppontja a szemközti oldalon T! 1 pont

Ez a magasság a háromszöget két derékszögű háromszögre bontja.

Az ABT derékszögű háromszög egy „fél" szabályos háromszög, ezért $AT=\dfrac{AB}{2}=1$ és $BT=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot AB=\sqrt{3}$. 2 pont

A BTC derékszögű háromszögben a B csúcsnál lévő szög nagysága $75^\circ-30^\circ=45^\circ$, így ez egy egyenlőszárú derékszögű háromszög, azaz $TC=BT=\sqrt{3}$. 2 pont

Így a háromszög területe: $t=\dfrac{b\cdot m_b}{2}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

Kezdők I–II. kategória, II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Mely x és y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x + y + xy \geqq x^2 + y^2 + 1? \qquad \text{(6 pont)}$$

2. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja $AB = 3$ cm hosszú. A BC átmérőjű kör átmegy az átlók metszéspontján és az AB alap B-hez legközelebbi negyedelőpontján. Mekkora a trapéz területe? (6 pont)

3. Jelölje $(a; b)$ az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját. Mennyi az alábbi 2015-tagú összeg értéke:

$$(1; 2015) + (2; 2015) + (3; 2015) + \ldots + (2014; 2015) + (2015; 2015)? \qquad \text{(8 pont)}$$

4. Egy különböző pozitív egész számokból álló háromszög alakú számtáblázatot „érdekesnek” nevezünk, ha bármely nem a felső sorban elhelyezkedő elemére igaz, hogy az előállítható a közvetlenül felette elhelyezkedő két szám hányadosaként. Pl. az alábbi 3-szintes táblázat „érdekes”:

7		42		14
	6		3	
		2		

Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely előfordulhat egy 4-szintes „érdekes” számtáblázat legnagyobb elemeként. (10 pont)

5. Legfeljebb mekkora lehet az $|a| + |b| + |c|$ kifejezés értéke, ha minden $-1 \leqq x \leqq 1$ esetén $\left|ax^2 + bx + c\right| \leqq 100$? (10 pont)

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely x és y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x + y + xy \geqq x^2 + y^2 + 1? \qquad \text{(6 pont)}$$

Megoldás. A tagokat egy oldalra rendezve és 2-vel megszorozva az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$2\left(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy\right) \leqq 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

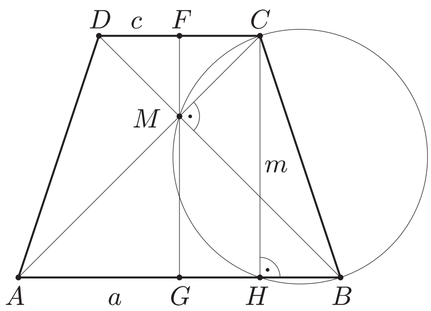
Ebből a baloldalt átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 0. \qquad \text{(3 pont)}$$

A baloldal mindhárom tagja nem negatív, ezért mindhárom értéke csak 0 lehet, tehát: $x = y$, $x = 1$ és $y = 1$. Így az egyenlőtlenség csak az $x = 1$ és $y = 1$ számokra teljesül. (2 pont)

2. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja $AB = 3$ cm hosszú. A BC átmérőjű kör átmegy az átlók metszéspontján és az AB alap B-hez legközelebbi negyedelőpontján. Mekkora a trapéz területe? (6 pont)

Megoldás.



Legyen az átlók metszéspontja M, az AB oldal B-hez közelebbi negyedelőpontja H! Készítsünk ábrát! (1 pont)

Mivel a BC szakasz Thalész köre átmegy az M és a H ponton, ezért a $CMB\sphericalangle = CHB\sphericalangle = 90°$. (1 pont)

Így CH a szimmetrikus trapéz magassága.

Ebből következően $HB = \dfrac{a-c}{2}$, azaz $\dfrac{a}{4} = \dfrac{a-c}{2}$, így $c = \dfrac{3}{2}$cm. (1 pont)

Mivel a trapéz egyenlő szárú, ezért a CDM és az ABM háromszög egyenlő szárú és az előzőek alapján derékszögű is. (1 pont)

Emiatt $FM = \dfrac{c}{2} = \dfrac{3}{4}$ cm és $GM = \dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{2}$ cm, ahol F a CD oldal, G az AB oldal felezőpontja. (1 pont)

Így $CH = FG = FM + MG = \dfrac{9}{4}$ cm. Tehát a trapéz területe $T = \dfrac{a+c}{2}m = \dfrac{81}{16}$ cm^2. (1 pont)

3. Jelölje $(a; b)$ az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját. Mennyi az alábbi 2015-tagú összeg értéke:

$$(1; 2015) + (2; 2015) + (3; 2015) + \ldots + (2014; 2015) + (2015; 2015)? \qquad \text{(8 pont)}$$

Megoldás. Mivel $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, azt kell meghatároznunk, hogy hány olyan 2015-nél nem nagyobb x pozitív egész szám van, amelyre $(x; 2015)$ értéke 1; 5; 13; 31; $5 \cdot 13$; $5 \cdot 31$; $13 \cdot 31$ vagy 2015. (1 pont)

Az egyes oszthatósági feltételeket teljesítő x-ek száma:

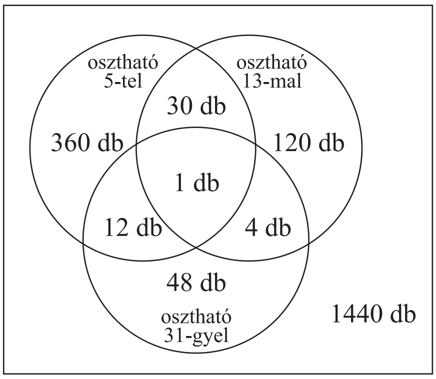
$$5 \mid (x;2015) \quad 403 \text{ db}, \qquad 13 \mid (x;2015) \quad 155 \text{ db}; \qquad 31 \mid (x;2015) \quad 65 \text{ db}, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$5\cdot 13 \mid (x;2015) \quad 31 \text{ db}, \quad 5\cdot 31 \mid (x;2015) \quad 13 \text{ db}, \quad 13\cdot 31 \mid (x;2015) \quad 5 \text{ db}, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$5\cdot 13\cdot 31 \mid (x;2015) \quad 1 \text{ db}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A meghatározott elemszámokat a halmazábrába beírva megállapíthatjuk, hogy
csak az $(x;2015)=5$ feltételt összesen $403-1-(31-1)-(13-1)=360$ db,
csak az $(x;2015)=13$ feltételt összesen $155-1-(31-1)-(5-1)=120$ db, végül
kizárólag az $(x;2015)=31$ egyenlőséget összesen $65-1-(13-1)-(5-1)=48$ db szám teljesíti.

Így a 2015-höz relatív prímek száma: 1440 db (ez utóbbi adat meghatározható az Euler-féle φ-függvénnyel is).



(3 pont)

A korábbi eredményeinket felhasználva a keresett összeg értéke:

$$1440\cdot 1+360\cdot 5+120\cdot 13+48\cdot 31+30\cdot(5\cdot 13)+12\cdot(5\cdot 31)+4\cdot(13\cdot 31)+1\cdot 2015$$
$$=13\,725. \qquad \text{(1 pont)}$$

4. Egy különböző pozitív egész számokból álló háromszög alakú számtáblázatot „érdekesnek” nevezünk, ha bármely nem a felső sorban elhelyezkedő elemére igaz, hogy az előállítható a közvetlenül felette elhelyezkedő két szám hányadosaként. Pl. az alábbi 3-szintes táblázat „érdekes”:

7		42		14
	6		3	
		2		

Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely előfordulhat egy 4-szintes „érdekes” számtáblázat legnagyobb elemeként. (10 pont)

Megoldás. A 4-szintes „érdekes” számtáblázat nem tartalmazhatja az 1-es számot, mert ekkor az elemek között biztosan lenne legalább két egyenlő. (1 pont)

Jelöljük az alsó sorban helyet foglaló számot a_1-gyel ($a_1 \in \mathbb{N}^+$, $a_1 \geqq 2$).

Ekkor alulról a 2. sorban helyet foglaló pozitív egész számok az a_2 és $a_1 a_2$, ahol $a_2 \neq a_1$. (1 pont)

Alulról a 3. sorban az $a_1 a_2$ szám felett közvetlenül (tetszőleges sorrendben) az a_3 és $a_1 a_2 a_3$ pozitív egész számok állnak, ahol $a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$. (1 pont)

Végül a felső sorban közvetlenül az $a_1 a_2 a_3$ szám felett (tetszőleges sorrendben) az a_4 és $a_1 a_2 a_3 a_4$ számok állnak, ahol $a_4 \neq a_1$, $a_4 \neq a_2$, $a_4 \neq a_3$. Ez viszont azt jelenti, hogy a felső sorban található legnagyobb szám legalább akkora, mint $a_1 a_2 a_3 a_4$. (1 pont)

Mivel az $a_1 a_2 a_3 a_4$ szorzat négy különböző pozitív egészből áll, melyek mindegyike legalább 2, ezért $a_1 a_2 a_3 a_4 \geqq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. (1 pont)

Ezzel a legnagyobb elemmel készíthető is 4-szintes „érdekes” táblázat, például az alábbi: (4 pont)

40		5		120		30
	8		24		4	
		3		6		
			2			

Tehát a feladat feltételeinek megfelelő szám a 120. (1 pont)

5. Legfeljebb mekkora lehet az $|a| + |b| + |c|$ kifejezés értéke, ha minden $-1 \leqq x \leqq 1$ esetén $\left|ax^2 + bx + c\right| \leqq 100$? (10 pont)

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk azt az esetet, amikor $a \geqq 0$. ($a < 0$ esetén a másodfokú kifejezést (-1)-gyel beszorozva továbbra is teljesülnek a feladat feltételei és az együtthatók abszolútértékeinek összege is változatlan marad.) (1 pont)

Másrészt $b < 0$ esetén az értelmezési tartomány 0-ra vonatkozó szimmetriája miatt x helyére $(-x)$-et helyettesítve nyilván teljesül az $\left|ax^2 - bx + c\right| \leqq 100$ feltétel, és az együtthatók abszolútértékeinek összege most is ugyanannyi marad. Így elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $b \geqq 0$. (1 pont)

Tekintsük ezután az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ x \in [-1; 1])$ függvényt. Mivel $f(0) = c$ és $f(1) = a + b + c$, ezért a megadott feltétel alapján

$$|c| \leqq 100 \qquad \text{és} \qquad |a + b + c| \leqq 100,$$

$$-100 \leqq c \leqq 100 \qquad \text{és} \qquad -100 \leqq a + b + c \leqq 100. \qquad (2 \text{ pont})$$

$c \geqq 0$ esetén:

$$|a| + |b| + |c| = a + b + c \leqq 100. \qquad (1 \text{ pont})$$

$c < 0$ esetén pedig:

$$|a| + |b| + |c| = a + b - c = (a + b + c) - 2c \leqq 100 + 200 = 300. \qquad (2 \text{ pont})$$

Ez utóbbi felső korlát elérhető például az $f(x) = 200x^2 - 100$ $x \in [-1; 1]$ függvény esetén, ahol a függvény grafikonja olyan parabola, melynek csúcspontja a $(0; -100)$ pont, áthalad a $(-1; 100)$, $(1; 100)$ pontokon és $R_f = [-100; 100]$. (2 pont)

Tehát a keresett kifejezés maximális értéke 300. (1 pont)

Kezdők I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy ötjegyű szám minden számjegye különböző. Erre a számra $n = 2$, 3, 4 és 5 esetén egyaránt teljesül, hogy bárhogyan választunk ki benne n db szomszédos számjegyet, az ezek összeolvasásával kapott n-jegyű szám osztható lesz n-nel. Melyek ezek az ötjegyű számok?

2. Adott 10 olyan különböző 2-hatvány, amelyek mindegyikében a 2 kitevője egy 100-nál kisebb pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy biztosan ki lehet közülük választani néhányat (esetleg az összeset) úgy, hogy a kiválasztott számok két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a számok szorzata ugyanannyi. (Ha valamelyik csoportba csak egyetlen szám kerül, akkor abban a csoportban szorzat értéke maga a szám.)

3. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög C csúcsához tartozó magasságvonalának az AB oldallal alkotott metszéspontja T. Tükrözzük a T pontot a BC oldal egyenesére, a kapott pont legyen R. Húzzunk az R ponton keresztül párhuzamost a CT magassággal, az így kapott egyenes az AC oldal egyenesét metssze Q, a BC oldal egyenesét P pontban.

Bizonyítsuk be, hogy a PT egyenes pontosan akkor merőleges az AC egyenesre, ha az ABC háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AB és AC oldalai egyenlő hosszúságúak.

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy ötjegyű szám minden számjegye különböző. Erre a számra $n = 2$, 3, 4 és 5 esetén egyaránt teljesül, hogy bárhogyan választunk ki benne n db szomszédos számjegyet, az ezek összeolvasásával kapott n-jegyű szám osztható lesz n-nel. Melyek ezek az ötjegyű számok?

Megoldás. Legyen az ötjegyű szám: $\overline{abcde}$.

Ekkor a feladat feltételei szerint $2 \mid \overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ és $\overline{de}$. Így b, c, d és e páros számjegyek és $5 \mid \overline{abcde}$, így e csak 0 lehet.

$4 \mid \overline{bcde}$ bármilyen páros d számjegy választása mellett teljesülne, de $4 \mid \overline{abcd}$-nek is teljesülnie kell, ami pontosan akkor teljesül, ha $4 \mid \overline{cd}$. Mivel c-ről korábban már megállapítottuk, hogy páros, így d értéke csak 4 vagy 8 lehet, azaz $\overline{cd}$ értéke 24, 28, 48, 64, 68 vagy 84 lehet.

Tehát a szám végződése a $3 \mid \overline{cde}$ feltételt is figyelembe véve csak 240 vagy 840 vagy 480 lehet.

Emellett $3 \mid \overline{bcd}$, tehát $3 \mid b + 6$ vagy $3 \mid b + 12$, amiből b értékére az egyetlen lehetőség: $b = 6$. Tehát a szám végződése 6240 vagy 6480 vagy 6840.

Végül csak azt kell biztosítani, hogy $3 \mid \overline{abc}$ teljesüljön. Ez pontosan akkor teljesül, ha $3 \mid a+b+c = a+6+c$, tehát $3 \mid a+c$, azaz $c = 2$ esetén $a = 1$ vagy 7, $c = 4$ esetén $a = 2$ vagy 5 és $c = 8$ esetén $a = 1$ vagy 7.

Tehát a keresett számok: 16 240, 16 840, 26 480, 56 480, 76 240 és 76 840.

	a	b	c	d	e
1.	1	6	2	4	0
2.	7	6	2	4	0
3.	2	6	4	8	0
4.	5	6	4	8	0
5.	1	6	8	4	0
6.	7	6	8	4	0

2. Adott 10 olyan különböző 2-hatvány, amelyek mindegyikében a 2 kitevője egy 100-nál kisebb pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy biztosan ki lehet közülük választani néhányat (esetleg az összeset) úgy, hogy a kiválasztott számok két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a számok szorzata ugyanannyi. (Ha valamelyik csoportba csak egyetlen szám kerül, akkor abban a csoportban szorzat értéke maga a szám.)

Megoldás. A hatványozás azonosságai miatt a feladat átfogalmazható:

Tegyük fel, hogy adott tíz 100-nál kisebb pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy biztosan ki lehet közülük választani néhányat (esetleg az összeset) úgy, hogy a kiválasztott számok két olyan csoportra oszthatók, amelyekben a számok összege ugyanannyi. (Ha valamelyik csoportba csak egyetlen szám kerül, akkor abban a csoportban az összeg értéke ez a szám.)

Egy 10 elemű halmaznak 2^{10} $(= 1024)$ részhalmaza van.

10 darab 100-nál kisebb pozitív egész szám összege legalább 55 és legfeljebb 945 lehet, azaz a 10 számból képzett összegek legfeljebb 891 különböző értéket vehetnek fel. (Az is elég, ha helyesen indokolja, hogy a lehetséges összegek száma kevesebb, mint 1024.)

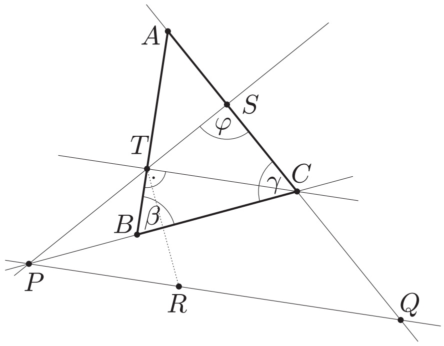
Mivel a lehetséges értékek száma kevesebb, mint a részhalmazok száma, így a skatulyaelv értelmében kell lennie két olyan részhalmaznak, amelyekben szereplő számok összege ugyanannyi.

Hagyjuk el ennek a két halmaznak a közös elemeit! Az így kapott halmazok közül egyik sem lehet üres, mivel ez azt jelentené, hogy az egyik halmaz tartalmazza a másikat, ami lehetetlen, hiszen elemeik összege egyenlő. Az így kapott halmazokban szereplő számok összege továbbra is egyenlő lesz, azaz ezek a számok megfelelnek a feladat követelményeinek.

3. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög C csúcsához tartozó magasságvonalának az AB oldallal alkotott metszéspontja T. Tükrözzük a T pontot a BC oldal egyenesére, a kapott pont legyen R. Húzzunk az R ponton keresztül párhuzamost a CT magassággal, az így kapott egyenes az AC oldal egyenesét metssze Q, a BC oldal egyenesét P pontban.

Bizonyítsuk be, hogy a PT egyenes pontosan akkor merőleges az AC egyenesre, ha az ABC háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AB és AC oldalai egyenlő hosszúságúak.

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Jelölje a PT és AC egyenesek metszéspontját S, és vezessük be a $\beta = ABC\sphericalangle$, $\gamma = BCA\sphericalangle$ és $\varphi = PSC\sphericalangle$ jelöléseket! Megmutatjuk, hogy $\varphi = 90°$ pontosan akkor teljesül, ha $\beta = \gamma$, vagyis az ABC háromszögben $AB = AC$.

A CT és PR egyenesek párhuzamossága miatt $TCB\sphericalangle$ és $CPR\sphericalangle$ váltószögek, továbbá a T és R pontoknak a PC egyenesre való szimmetriája alapján $CPS\sphericalangle = CPR\sphericalangle$. Mivel $CTB\sphericalangle = 90°$, ezért azt kapjuk, hogy $CPS\sphericalangle = TCB\sphericalangle = 90° - \beta$.

Ekkor a CPS háromszögben $\varphi = 180° - (90° - \beta) - \gamma = 90° - (\gamma - \beta)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\varphi = 90°$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\beta = \gamma$.

Kezdők II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^3 - 9\big(y^2 - 3y + 3\big) = 0, \tag{1}$$

$$y^3 - 9\big(z^2 - 3z + 3\big) = 0, \tag{2}$$

$$z^3 - 9\big(x^2 - 3x + 3\big) = 0. \tag{3}$$

2. Az ABC háromszög AD, BE és CF súlyvonalai az S pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy ha az AES, BDS és CDS háromszögek beírt köreinek sugara azonos nagyságú, akkor az ABC háromszög szabályos!

3. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból úgy, hogy semelyik két különbözőnek a szorzata ne legyen négyzetszám?

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^3 - 9\bigl(y^2 - 3y + 3\bigr) = 0, \tag{1}$$

$$y^3 - 9\bigl(z^2 - 3z + 3\bigr) = 0, \tag{2}$$

$$z^3 - 9\bigl(x^2 - 3x + 3\bigr) = 0. \tag{3}$$

Megoldás. Írjuk fel az egyenletrendszert az alábbi alakban:

$$(y-3)^3 = y^3 - x^3,$$
$$(z-3)^3 = z^3 - y^3,$$
$$(x-3)^3 = x^3 - z^3.$$

Az egyenleteket összeadva:

$$(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0. \tag{4}$$

A kapott egyenlet baloldalán szereplő kifejezések valamelyikének nemnegatívnak kell lennie, ezért az egyenlet szimmetriája miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \geqq 3$.

Ekkor a (3)-as egyenlet átrendezésével

$$z^3 - 27 = 9x(x-3).$$

Ebből az x-re tett feltétel alapján $z^3 - 27 \geqq 0$, azaz $z \geqq 3$.

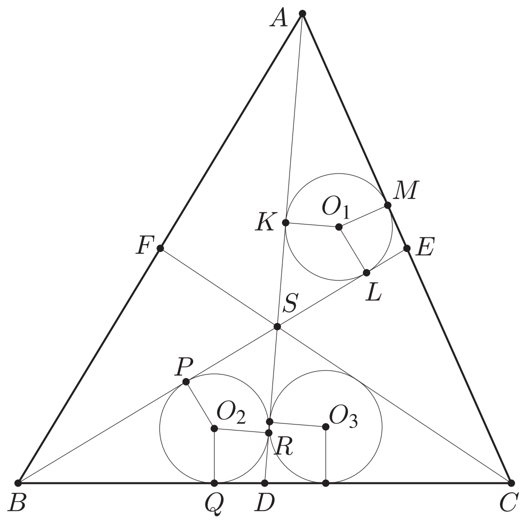
Hasonlóképpen adódik a (2)-es egyenletből, hogy $y \geqq 3$.

Mivel 3 nemnegatív szám összege pontosan akkor 0, ha minden tag értéke 0, ezért a (4)-es egyenlet figyelembevételével az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = y = z = 3$.

A kapott értékeket ellenőrizve azok teljesítik a feladat feltételeit.

2. Az ABC háromszög AD, BE és CF súlyvonalai az S pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy ha az AES, BDS és CDS háromszögek beírt köreinek sugara azonos nagyságú, akkor az ABC háromszög szabályos.

Megoldás. A feladatban szereplő körök sugarát, középpontjait és érintési pontjait jelöljük az ábra szerint.



A BDS és CDS háromszögek területe megegyezik, mivel az S-ből induló magasságuk közös és az S-sel szemközti oldaluk egyenlő hosszú.

A BDS háromszög felosztható az O_2BD, O_2DS és O_2SB, a CDS háromszög pedig az O_3DC, O_3CS és O_3SD háromszögekre.

Az O_2BD háromszög területe megegyezik az O_3DC háromszög területével, mivel az egyik oldaluk és a hozzá tartozó magasságuk egyenlő. Hasonlóképpen az O_2DS és az O_3DS háromszögek területe is azonos. Emiatt az O_2SB háromszög és az O_3CS háromszög területe is megegyezik.

Mivel ezen két háromszögnek van két egyenlő hosszúságú magassága, ezért a hozzátartozó egy-egy-oldaluk is megegyezik, azaz $BS = CS$.

Tudjuk, hogy $BD = DC$, tehát $BDS\triangle \cong CDS\triangle$, mivel oldalaik páronként egyenlők.

Az egybevágóság alapján $BDS\sphericalangle = CDS\sphericalangle$ és $BDS\sphericalangle + CDS\sphericalangle = 180^\circ$ alapján $BDS\sphericalangle = CDS\sphericalangle = 90^\circ$.

Mivel az AD súlyvonal egyben magasság is az ABC háromszögben, ezért az ABC háromszög egyenlőszárú és $AB = AC$.

Mivel az O_1 és O_2 az $ASE\sphericalangle$ és a $BSD\sphericalangle$ szögfelezőjén helyezkednek el és $ASE\sphericalangle = BCD\sphericalangle$, ezért $O_2SR\sphericalangle = O_1SL\sphericalangle$. Továbbá $O_1L = O_2R$ és $O_1LS\sphericalangle = O_2RS\sphericalangle = 90^\circ$ alapján $O_1SL\triangle \cong O_2SR\triangle$ és $SL = SR$.

Az ASE és BSD háromszögek 3-3 egybevágó háromszögpárra bonthatók fel ($O_1SL\triangle \cong O_1SK\triangle$, $O_1EL\triangle \cong O_1EM\triangle$, $O_1AM\triangle \cong O_1AK\triangle$, illetve $O_2SR\triangle \cong O_2SP\triangle$, $O_2BP\triangle \cong O_2BQ\triangle$, $O_2DQ\triangle \cong O_2DR\triangle$).

Felhasználva, hogy az ABC háromszöget súlyvonalai 6 egyenlő területű részre bontják:

$$t(ASE\triangle) = t(BSD\triangle), \qquad \text{azaz}$$

$$2\left(\frac{SL \cdot r}{2} + \frac{AM \cdot r}{2} + \frac{ME \cdot r}{2}\right) = 2\left(\frac{SP \cdot r}{2} + \frac{BQ \cdot r}{2} + \frac{QD \cdot r}{2}\right).$$

Mivel $SL = SP$,

$$AM + ME = BQ + QD,$$
$$AE = BD,$$
$$\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC,$$
$$AC = BC.$$

Ezzel beláttuk, hogy az ABC háromszög szabályos.

3. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból úgy, hogy semelyik két különbözőnek a szorzata ne legyen négyzetszám?

Megoldás. Egy pozitív egész számról azt mondjuk, hogy négyzetmentes, ha nincs 1-nél nagyobb négyzetszám osztója, másképpen szólva: a prímtényezős felbontásában minden prímszám 1 kitevővel szerepel. Jelöljük $M(n)$-nel az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazban levő négyzetmentes számok számát. Belátjuk, hogy legfeljebb $M(n)$ szám választható ki az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból úgy, hogy semelyik kettő szorzata nem négyzetszám, és hogy ennyi kiválasztható.

Egyrészt ennyi kiválasztható: válasszuk ki az összes négyzetmentes számot. Ha veszünk két különbözőt, akkor van olyan p prímszám, ami pontosan az egyiknek a prímtényezős felbontásában szerepel (és abban az első hatványon). Ekkor a szorzatukban is az első hatványon szerepel, vagyis a szorzatuk nem négyzetszám.

Másrészt több nem választható ki. Ehhez szükségünk lesz az alábbi segédtételre: minden k pozitív egész szám felírható $k = a^2 b$ alakban, ahol a, b pozitív egész számok, és b négyzetmentes. Ennek bizonyítása a következő. Legyen a^2 a k szám legnagyobb négyzetszám osztója, és legyen $b = \dfrac{k}{a^2}$. Nyilván b is egész szám, állítjuk, hogy négyzetmentes. Legyen c^2 a b egy négyzetszám osztója, ahol c pozitív egész. Be kell látnunk, hogy $c = 1$. Nyilván $k = (ac)^2 \dfrac{b}{c^2}$, és mivel b/c^2 egész, ezért $(ac)^2$ a k egy négyzetszám osztója. Mivel a^2-et úgy választottuk, hogy k legnagyobb osztója legyen, nyilván $c = 1$. Ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

Most térjünk vissza a feladathoz. Tegyük fel, hogy $M(n)$-nél több számot választottunk ki az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból. Minden kiválasztott számot írjunk fel *négyzetszám* $\cdot$ *négyzetmentes* alakban, ami a segédtétel értelmében megtehető. A négyzetmentes részek az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból kerülnek ki. Mivel ebben a halmazban $M(n)$ darab négyzetmentes szám van, a kiválasztott számok pedig $M(n)$-nél többen vannak, a skatulya-elv értelmében van két olyan, amelyeknek a négyzetmentes része megegyezik, legyenek ezek $a_1^2 b$ és $a_2^2 b$. Ekkor ezek szorzata $(a_1 a_2 b)^2$, ami négyzetszám.

Most $n = 100$-ra specializálunk, $M(100) = 61$, azaz ennyi a kiválasztható számok maximális száma.

Kezdők III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Két egységsugarú kör metszi egymást az A, B pontokban. Húzzuk meg a két kör egyik közös külső érintőjét, a keletkező érintési pontok legyenek E és F, ekkor $EBFA$ egy konkáv négyszög.

Legfeljebb mekkora lehet ennek a négyszögnek a területe?

Milyen messze van a két kör középpontja egymástól, ha a négyszög területe maximális?

2. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ az $1, 2, \ldots, 200$ számok valamilyen sorrendben. Adjuk meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ számokat úgy, hogy az $(a_i - b_j)^2$ ($1 \leqq i \leqq 100$, $1 \leqq j \leqq 100$) számok összege a lehető legkisebb legyen!

3. Egy 16 tagú összejövetelen a vendégek kézfogással üdvözölték egymást (de nem biztos, hogy mindenki mindenkivel kezet fogott). Valaki észrevette, hogy bármelyik két vendéghez található két másik, akik mindkettejükkel kezet fogtak.

a) Bizonyítsuk be, hogy van olyan vendég, aki legalább 6 másik vendéggel fogott kezet!

b) Biztosan van-e olyan vendég, aki 7 másik vendéggel fogott kezet?

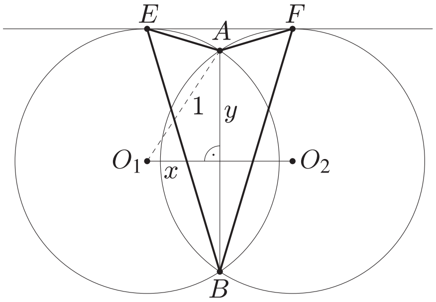
Megoldások és javítási útmutató

1. Két egységsugarú kör metszi egymást az A, B pontokban. Húzzuk meg a két kör egyik közös külső érintőjét, a keletkező érintési pontok legyenek E és F, ekkor $EBFA$ egy konkáv négyszög.

Legfeljebb mekkora lehet ennek a négyszögnek a területe?

Milyen messze van a két kör középpontja egymástól, ha a négyszög területe maximális?

Megoldás.



Készítsünk ábrát, a körök középpontjait jelöljük O_1, O_2-vel.

Szimmetria okokból $EBFA$ egy deltoid, a keresett területet pedig EBF és EAF egyenlőszárú háromszög területének különbsége adja meg. A körközéppontok távolságát jelöljük $2x$-szel ($0 < x < 1$, hiszen 2 metszéspont van), a körök metszéspontjainak távolságát pedig $2y$-nal, s mivel egységkörökről van szó, így $x^2 + y^2 = 1$.

Mindkét háromszög alapja $2x$, az egyik magassága $1+y$, a másiké $1-y$, így a területeik különbsége:

$$t_{EBFA} = \frac{2x(1+y)}{2} - \frac{2x(1-y)}{2} = 2xy.$$

A mértani és a négyzetes közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{xy} \leqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Vagyis $\sqrt{xy}$ nem haladhatja meg $\sqrt{\frac{1}{2}}$-et, s ezt pontosan akkor veszi fel, ha $x = y = 1/\sqrt{2}$.

Ekkor $xy = 1/2$, azaz a kérdéses terület 1 területegység. Ekkor a körközéppontok távolsága $2 \cdot 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

2. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ az $1, 2, \ldots, 200$ számok valamilyen sorrendben. Adjuk meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ számokat úgy, hogy az $(a_i - b_j)^2$ $(1 \leqq i \leqq 100$, $1 \leqq j \leqq 100)$ számok összege a lehető legkisebb legyen!

Megoldás. A kérdéses összeget írjuk át a következő módon:

$$S = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} (a_i - b_j)^2 =$$

$$= 100\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{100}^2\right) -$$

$$- 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}) =$$

$$= 100\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 200^2\right) - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}).$$

Ez azt jelenti, hogy S akkor minimális, ha az $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100})$ szorzat maximális.

A számtani–mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}) \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + 2 + \ldots + 200}{2}\right)^2,$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}$.

Ez pontosan akkor fordulhat elő, ha az első 200 pozitív egész számot szét lehet osztani két darab 100-as csoportba úgy, hogy azokban a számok összege megegyezzen. Ez persze megtehető, alkossa például az $\{1; 200\}$, $\ldots$, $\{100; 101\}$ párok közül 50 az egyik csoportot, 50 a másikat. Azaz például, az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_{50} = 50$, $a_{51} = 151$, $a_{52} = 152$, $\ldots$, $a_{100} = 200$, $b_1 = 51$, $b_2 = 52$, $\ldots$, $b_{100} = 150$, egy jó megoldás.

3. Egy 16 tagú összejövetelen a vendégek kézfogással üdvözölték egymást (de nem biztos, hogy mindenki mindenkivel kezet fogott). Valaki észrevette, hogy bármelyik két vendéghez található két másik, akik mindkettejükkel kezet fogtak.

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy van olyan vendég, aki legalább 6 másik vendéggel fogott kezet!

$b)$ Biztosan van-e olyan vendég, aki 7 másik vendéggel fogott kezet?

Megoldás. $a)$ Indirekt tegyük fel, hogy minden vendég csak legfeljebb 5 másikkal fogott kezet.

Legyen A és B két vendég. Az összes olyan vendégnek, aki kezet fogott A-val és B-vel, adjunk egy cédulát azzal a felirattal, hogy „Te kezet fogtál A-val és B-vel". Ezután tegyük ezt meg A és B helyett a vendégekből alkotott összes párral. Most számoljuk le a kiosztott cédulákat kétféleképp.

Egyrészt bármely A, B-hez két olyan ember is van, akinek róluk szóló cédulát adtunk: azoknak, akik A-val és B-vel is kezet fogtak. A 16 emberből $16 \cdot 15/2 = 120$ pár alkotható, páronként legalább két cédulát kiosztottunk, így a kiosztott cédulák száma $120 \cdot 2 = 240$.

Másrészt egy rögzített embernél pontosan annyi cédula van, ahány párt lehet alkotni azokból az emberekből, akikkel kezet fogott (minden egyes a vele kezet fogott emberekből alkotott párról szóló cédula van nála, és másmilyen nincs). Mivel egy rögzített ember legfeljebb 5 másikkal fogott kezet, összesen legfeljebb $5 \cdot 4/2 = 10$ cédula lehet nála. Ez a 16 emberre összesen legfeljebb $16 \cdot 10 = 160$ cédula.

Azaz a kiosztott cédulák száma egyrészt legalább 240, másrészt legfeljebb 160, ami ellentmondás.

$b)$ Nem. Jegyezzük fel a 16 vendég nevét egy 4×4-es táblázatba, és fogjon mindenki kezet a vele egy sorban vagy egy oszlopban állókkal.

A feltétel teljesül: ha két ember egy sorban (illetve egy oszlopban) van, akkor az a két ember, aki velük egy sorban (illetve egy oszlopban) van, mindkettejükkel kezet fogott; ha két ember nincs sem egy sorban, sem egy oszlopban, akkor vegyük fel a rajtuk átmenő sorokat és oszlopokat, ezeknek rajtuk kívüli két metszéspontjában álló emberek mindkettejükkel kezet fogtak.

Világos azonban, hogy mindenki pontosan 6 emberrel fogott kezet (a sorában és az oszlopában is 3-3 ember van rajta kívül).

Haladók – I. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^2 - y^2 = 2(x + y),$$

$$x^2 + y^2 = 5(x - y).$$

2. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amire

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)<0{,}51?$$

3. Van-e olyan számrendszer, amelyben az $\overline{572}$ alakú szám osztható a $\overline{275}$ alakú számmal?

4. Az egyenlőszárú ABC háromszög b szára kétszer olyan hosszú, mint az a alapja. Az AC szárra mint átmérő fölé kört rajzolunk. Ez a kör a AB alapot P, az BC szárat Q pontban metszi. Hanyad része a PQB háromszög területe az ABC háromszög területének?

5. Hány olyan szám van 0 és 9999 között, amelyikben több 2-es van a jegyek között, mint 1-es? (Pl. 2012 ilyen, de 2014 nem.)

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^2-y^2=2(x+y),$$
$$x^2+y^2=5(x-y).$$

Megoldás. Alakítsuk szorzattá az első egyenlet bal oldalát:

$$(x+y)(x-y)=2(x+y).$$ 1 pont

Bal oldalra rendezve, és $(x+y)$-t kiemelve kapjuk, hogy

$$(x+y)(x-y-2)=0.$$

Szorzat akkor nulla, ha az egyik tényezője nulla. Így két lehetőségünk van:

I. $x+y=0$. 1 pont

Ebből $x-$et kifejezve és az $x^2+y^2=5(x-y)$ egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$2y^2=-10y.$$

Egy oldalra rendezve és szorzattá alakítva:

$$y^2+5y=0,$$
$$y(y+5)=0,$$

amiből $y_1=0$ vagy $y_2=-5$ adódik. 1 pont

Ennek megfelelően $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 5$. 1 pont

II. $x - y - 2 = 0$. 1 pont

Ebből x-et kifejezve és a másik egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$(2 + y)^2 + y^2 = 5 \cdot 2,$$
$$2y^2 + 4y - 6 = 0. \qquad 1 \text{ pont}$$

Aminek megoldásai az $y_3 = 1$ és az $y_4 = -3$. A nekik megfelelő x-ek: $x_3 = 3$ és az $x = -1$. 1 pont

Tehát az egyenletet négy számpár elégíti ki, nevezetesen a $(0; 0)$, $(5; -5)$, $(3; 1)$, $(-1; -3)$.

Összesen: 7 pont

2. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amire

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < 0{,}51?$$

Megoldás. Közös nevezőre hozzuk a zárójelekben lévő kifejezéseket:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4-1}{4} \cdot \frac{9-1}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2}. \qquad 1 \text{ pont}$$

A számlálókat és a nevezőket is szorzattá alakítjuk:

$$\frac{4-1}{4} \cdot \frac{9-1}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2) \cdot n}{(n-1) \cdot (n-1)} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot n}. \qquad 2 \text{ pont}$$

Az összes lehetséges egyszerűsítés elvégzése után a következő alakot kapjuk:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}. \qquad 1 \text{ pont}$$

Keressük tehát a legkisebb n értéket, amire $\frac{n+1}{2n} < 0{,}51$. 1 pont

Egyszerű átalakításokkal:

$$\frac{n+1}{2n} < 0{,}51 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 2n > 100 \Leftrightarrow n > 50. \qquad 1 \text{ pont}$$

A legkisebb érték, amire teljesül az egyenlőtlenség $n = 51$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Van-e olyan számrendszer, amelyben az $\overline{572}$ alakú szám osztható a $\overline{275}$ alakú számmal?

Megoldás. Tegyük fel, hogy van ilyen számrendszer. Legyen a számrendszer alapszáma x. Tudjuk, hogy ekkor $x > 1$ egész szám.

Térjünk át 10-es számrendszerre! Az oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan a feltételeknek megfelelő n, amelyre az $\dfrac{5x^2+7x+2}{2x^2+7x+5}$ értéke egész szám. 1 pont

A törtet átalakítva:

$$\frac{5x^2+7x+2}{2x^2+7x+5} = \frac{(5x+2)(x+1)}{(2x+5)(x+1)} = \frac{5x+2}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+x-8}{2x+5} = 2+\frac{x-8}{2x+5}.$$ 2 pont

Vizsgáljuk az $\dfrac{x-8}{2x+5} < 1$ egyenlőtlenséget. Mivel a $2x+5>0$, ezért

$$x-8 < 2x+5$$
$$-13 < x,$$

ezért az egyenlőtlenség minden 1-nél nagyobb egész szám esetén teljesül. 2 pont

Emiatt csak az $x = 8$ esetben lehet megoldás 1 pont

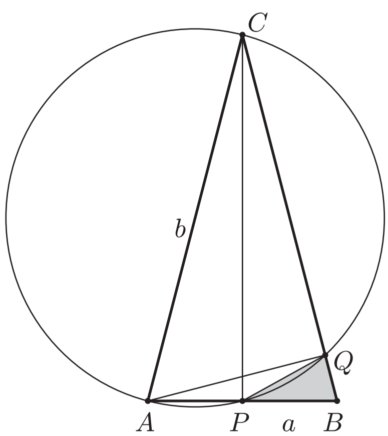
A 8-as számrendszerben valóban teljesül az oszthatóság. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző megtalálja a helyes alapszámot, de nem bizonyítja, hogy más lehetőség nincs, legfeljebb 3 pontot kaphat.

4. Az egyenlőszárú ABC háromszög b szára kétszer olyan hosszú, mint az a alapja. Az AC szárra mint átmérő fölé kört rajzolunk. Ez a kör a AB alapot P, az BC szárat Q pontban metszi. Hanyad része a PQB háromszög területe az ABC háromszög területének?

Megoldás.



Mivel AC, mint átmérő fölé rajzoltunk kört, így ez AC Thálesz köre: $APC\sphericalangle = AQC\sphericalangle = 90°$.

Így P az alaphoz tartozó magasság talppontja, Q pedig a BC szárhoz tartozó magasság talppontja. 1 pont

APC háromszög hasonló a BQA háromszöghöz, mivel megegyeznek a szögeik: $APC\sphericalangle = AQC\sphericalangle = 90°$, illetve az ABC háromszög alapon fekvő szögei:

$$ABQ\sphericalangle = CAP\sphericalangle.$$ 1 pont

Ezért a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{QB}{AB} = \frac{AP}{AC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{QB}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{2a},$$

mivel $b = 2a$, ezért $QB = \frac{a}{4}$. 1 pont

Az APC háromszög és a BQA háromszög hasonlóságának aránya, így

$$\lambda = \frac{QB}{AP} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{2}.$$ 1 pont

A hasonló alakzatok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg:

$$\frac{T_{ABQ}}{T_{APC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

(i) $$T_{APC} = 4 \cdot T_{ABQ}.$$ 1 pont

Az APC háromszög területe az ABC háromszög területének fele, mivel az ABC egyenlőszárú háromszögben a PC magasságvonal egyben tükörtengely is:

$$T_{APC} = \frac{T_{ABC}}{2}.$$

Az ABQ háromszögben QP az AB oldalhoz tartozó súlyvonal. A súlyvonal felezi a területet, (mivel azonos magasság mellett az alap hossza feleződik) így a PQB háromszög területe fele az ABQ háromszögének: $T_{ABQ} = 2 \cdot T_{PBQ}$. 1 pont

Ezeket behelyettesítve (i)-be kapjuk, hogy

$$\frac{T_{ABC}}{2} = 4 \cdot 2 \cdot T_{PBQ},$$

$$\frac{T_{PBQ}}{T_{ABC}} = \frac{1}{16}.$$

Azaz a PBQ háromszög az ABC háromszög területének 16-a. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

5. Hány olyan szám van 0 és 9999 között, amelyikben több 2-es van a jegyek között, mint 1-es? (Pl. 2012 ilyen, de 2014 nem.)

Megoldás. 0–9999-ig összesen 10 000 darab szám van.

Minden számot négyjegyűként fogunk kezelni (pl. a 13-at → 0013-ként).

Az alapötlet: megszámolom az összes olyan számot, amelyikben ugyanannyi darab 1-es és 2-es jegy szerepel.

A „maradék” számok: azok, ahol vagy az 1-esből van több, mint a 2-es jegyből, vagy fordítva.

A „maradék” számnak éppen a fele lesz az, ahol több 2-es jegy van, mint 1-es, mert a „maradék” számok párokba rendezhetőek úgy, hogy

$a)$ az egy párba kerülők közül az egyikben az 1-es jegy, a másikban a 2-es jegyből van több,

$b)$ minden „maradék” szám pontosan egy párba kerül.

(Egy lehetséges párosítás: egy „maradék” szám párja: az a „maradék” szám, amelyet úgy kapok, hogy az eredeti szám 1-es jegyeit 2-esre, 2-es jegyeit 1-esre cserélem. Vagyis pl. $2012 \leftrightarrow 1021$, vagy $110 = 0110 \leftrightarrow 0220 = 220$.) 2 pont

Most lássuk a számolást!

Olyan szám, amelyben 0 darab 1-es és 0 darab 2-es jegy van: $8^4 = 4096$ darab van. 1 pont

Olyan, ahol 1 darab 1-es, és 1 darab 2-es van: $4 \cdot 3 \cdot 8^2 = 768$ darab van. 1 pont

(Hiszen pl. az 1-es jegy 4 helyre, a 2-es már csak 3 helyre tehető, a maradék 2 jegy pedig 8-8 féleképp tölthető ki!)

Olyan szám, amelyben 2-2 1-es, és 2-es jegy van, $\binom{4}{2} = 6$ darab van. 1 pont

Vagyis összesen $4096 + 768 + 6 = 4870$ darab olyan szám van, amelyikben azonos számú 1-es, és 2-es van.

Vagyis a „maradék” számok száma: $10\,000 - 4870 = 5130$.

Innen a nekünk jó számok száma: $\dfrac{5130}{2} = 2565$. 1 pont

Vagyis 2565 darab olyan legfeljebb négyjegyű szám van, amelyikben több 2-es jegy van, mint 1-es. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x^3 - [x] = 3.$$

($[x]$: az x valós szám egész része. Az x valós szám egész részén azt a legnagyobb egészet értjük, amely nem nagyobb x-nél. Ez magával x-szel egyenlő, ha x egész.)

2. Az $ABCD$ négyzet A csúcsán átmenő egyenes a DC oldalt E, a BC oldal meghosszabbítását F pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

3. A 49 szám két számjegye közé beírjuk a 48 számot, majd a belső 4-es és 8-as közé újra beírjuk a 48-at, majd ezt néhányszor megismételjük (44 . . . 48 . . . 89). Igaz-e, hogy így mindig négyzetszámot kapunk?

4. Egy téglatest éleinek mérőszámai egészek. A téglatest térfogatának, fél felszínének, és az egy csúcsból kiinduló élek hosszának mérőszámait összeadva 2014-et kapunk. Mekkorák a téglalap élei?

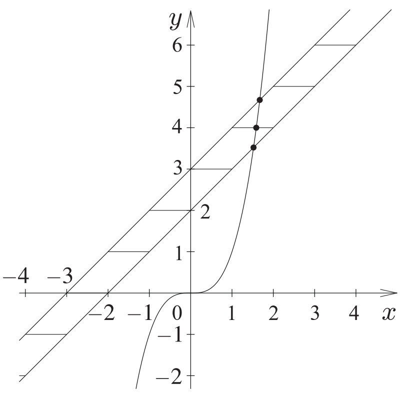
Megoldások és javítási útmutató

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x^3 - [x] = 3.$$

($[x]$: az x valós szám egész része. Az x valós szám egész részén azt a legnagyobb egészet értjük, amely nem nagyobb x-nél. Ez magával x-szel egyenlő, ha x egész.)

Megoldás. Grafikus megoldás:



Az egyenlet átrendezése: $x^3 = [x] + 3$ alakba.

Közös koordinátarendszerben való ábrázolása a jobb és a baloldali kifejezésnek, mint függvénynek: $f(x) = x^3$ és $g(x) = [x] + 3$. 2 pont

A metszéspont második koordinátájának megállapítása a grafikonról: $y = 4$. 1 pont

Az x értékének meghatározása: $x^3 = 4$, $x = \sqrt[3]{4}$. 2 pont

Annak magyarázata, hogy nincs több metszéspont, így ez az egyetlen megoldás.

Például egy lehetséges indoklás:

Illesszünk egyeneseket a $g(x) = [x] + 3$ függvényhez: $y = x + 3$ és $y = x + 2$. Vizsgáljuk, hogy hány metszéspontja van a két egyenesnek az $f(x) = x^3$ függvénnyel.

$x^3 = x + 2$, $x^3 = x + 3$. Átrendezve a következő alakba hozhatóak:

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 2, \quad x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 3.$$

A baloldali szorzat $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ helyeken előjelet vált, illetve ezekben a pontokban a baloldal értéke nulla, tehát itt nincs metszéspont. Vizsgáljuk a lehetséges megoldásokat a következő intervallumokon:

$x < -1$	A baloldali szorzat negatív, nincs metszéspont.
$-1 < x < 0$	A baloldali szorzat értéke pozitív és kisebb, mint 2, nincs metszéspont.
$0 < x < 1$	A szorzat értéke negatív, nincs metszéspont.
$1 < x \leqq 2$	Biztosan van egy metszéspont, mivel $x = 1$ helyen $x^3 < x + 2$, és $x = 2$ helyen $x^3 > x + 3$.
$2 < x$	A szorzat értéke nagyobb, mint 6, nincs metszéspont.

2 pont

Az egyenlet átrendezhető a következő alakba is: $x^3 - 3 = [x]$, ekkor $f(x) = x^3 - 3$ és $g(x) = [x]$, $y = 1$.

A részpontok az előbb leírtaknak megfelelően adhatóak.

Ha próbálgatással megtalálja a helyes megoldást, akkor maximum 3 pont adható.

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ négyzet A csúcsán átmenő egyenes a DC oldalt E, a BC oldal meghosszabbítását F pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

Megoldás. Felhasználjuk, hogy $ADE_\triangle \sim ABF_\triangle$, mert mindkettő derékszögű, továbbá $DAE\sphericalangle$ és $AFB\sphericalangle$ váltószögek. 2 pont

Legyen a négyzet oldalának hossza $AB = 1$ és vezessük be a $DE = x$ jelölést. Ekkor $EC = 1 - x$. A fenti hasonlóságból $\dfrac{BF}{1} = \dfrac{1}{x}$, vagyis $BF = \dfrac{1}{x}$ következik. 2 pont

A Pitagorasz-tételt az ADE és ABF háromszögekre alkalmazva a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1.$$

1 pont

A második törtet bővíthetjük x^2-tel, és így kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

ami nyilván igaz. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. A 49 szám két számjegye közé beírjuk a 48 számot, majd a belső 4-es és 8-as közé újra beírjuk a 48-at, majd ezt néhányszor megismételjük ($44\ldots48\ldots89$). Igaz-e, hogy így mindig négyzetszámot kapunk?

Megoldás. Ha $n-1$-szer elvégezzük a 48 középre írását, akkor egy $2n$-jegyű számot kapunk, ami a következő alakban is írható:

$$4\cdot 11\ldots1\cdot10^n+8\cdot11\ldots1+1,$$

ahol $11\ldots1$ egy csupa 1-esekből álló n-jegyű szám. 1 pont

Legyen most $x=11\ldots1=\dfrac{1}{9}\cdot99\ldots9=\dfrac{1}{9}\cdot\big(10^n-1\big)$, ahol x n-jegyű szám. 2 pont

Ekkor $10^n=9x+1$. 2 pont

Így

$$44\ldots488\ldots89=4x\cdot(9x+1)+8x+1=36x^2+12x+1=(6x+1)^2.$$

Tehát igaz, hogy mindig négyzetszámot kapunk. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy téglatest éleinek mérőszámai egészek. A téglatest térfogatának, fél felszínének, és az egy csúcsból kiinduló élek hosszának mérőszámait összeadva 2014-et kapunk. Mekkorák a téglalap élei?

Megoldás. Legyenek a téglatest egy csúcsból kiinduló élei a, b és c. A feladat szövege szerint $abc+ab+ac+bc+a+b+c=2014$. 1 pont

Az egyenlet bal oldala a következőképp alakítható át:

$$abc+ac+bc+c+ab+a+b=c(ab+a+b+1)+ab+a+b=$$
$$=c(ab+a+b+1)+(ab+a+b+1)-1=(ab+a+b+1)(c+1)-1=$$
$$=(a+1)(b+1)(c+1)-1.$$
2 pont

Innen $(a+1)(b+1)(c+1)-1=2014$, tehát $(a+1)(b+1)(c+1)=2015=5\cdot13\cdot31$. 1 pont

A bal oldalon minden tényező 1-nél nagyobb egész szám, 1 pont
ezért egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha ezek valamilyen sorrendben megegyeznek a jobb oldali 5, 13 és 31 számokkal. 1 pont

A téglatest élei tehát 4, 12 és 30 egység hosszúak. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja D. Tudjuk, hogy az ABD és ADC háromszögek hasonlóak, továbbá a hasonlóság aránya $\sqrt{3}$. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

2. A pozitív egészek mindegyikét vagy zöldre vagy pirosra színezzük. Ha teljesül, hogy két különbözőképpen színezett szám összege piros, szorzata zöld, akkor az egész számok ezen színezését *kaméleon színezésnek* hívjuk.

Mi a színe egy *kaméleon színezés* esetén két zöld szám szorzatának?

Egy bizonyos *kaméleon színezés* esetén tudjuk, hogy az 1-es piros, a 77-es zöld színű. Milyen színű lesz ekkor a 2015?

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

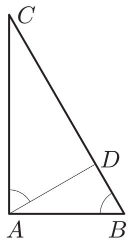
$$\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}}}=x.$$

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja D. Tudjuk, hogy az ABD és ADC háromszögek hasonlóak, továbbá a hasonlóság aránya $\sqrt{3}$. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

Megoldás. Először meghatározzuk, hogy az ABD és ADC háromszögek mely szögei felelnek meg egymásnak.

Mivel $ADB\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 180^\circ$, ezért $ADB\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ nem lehetnek hasonló háromszögek különböző szögei, tehát egyenlőknek kell lenniük. 1 pont



Ez csak úgy lehetséges, ha $ADB\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 90^\circ$. 1 pont

Két lehetőség maradt: $ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$ vagy $ABD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$. Az első esetben $ABD_\triangle \equiv ADC_\triangle$, amit kizárhatunk, mert a hasonlóság aránya egytől különbözik. 1 pont

Tehát $ABD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$, és emiatt $BAD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$.

Azt kaptuk, hogy az ABC háromszög belső szögeinek összege

$$\begin{aligned}180^\circ &= ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle + CAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle + (ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle) = \\ &= 2(ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle),\end{aligned}$$

tehát $ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle = 90^\circ$, az ABC háromszög (A-nál) derékszögű. 2 pont

Az ABD és ADC hasonló háromszögpárban AB és AC felel meg egymásnak. Ezek az oldalak az ABC derékszögű háromszög befogói, és a feladat feltétele szerint $AC = \sqrt{3}AB$. Az pedig ismert, hogy ha egy derékszögű háromszög befogóinak aránya $1 : \sqrt{3}$, akkor a háromszög szögei 30°, 60° és 90°. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. A pozitív egészek mindegyikét vagy zöldre vagy pirosra színezzük. Ha teljesül, hogy két különbözőképpen színezett szám összege piros, szorzata zöld, akkor az egész számok ezen színezését *kaméleon színezésnek* hívjuk.

Mi a színe egy *kaméleon színezés* esetén két zöld szám szorzatának?

Egy bizonyos *kaméleon színezés* esetén tudjuk, hogy az 1-es piros, a 77-es zöld színű. Milyen színű lesz ekkor a 2015?

Megoldás. A kaméleon színezés szabályát csak a színek rövidítésével leírva kapjuk:

$$p + z = p,$$

$$p \cdot z = z.$$

Tegyük fel hogy m és n zöld színű számok. Vegyünk egy k számot, ami piros színű. Ekkor kaméleon színezés esetén $m + k$ piros lesz.

Ha az összeget szorozzuk a zöld színű n-nel, akkor az$(m + k) \cdot n$, mivel két különböző színű szám szorzata, ezért zöld lesz.

Átalakítva a szorzatot a szorzat színe nem változik, azaz zöld marad:

$$(m + k) \cdot n = mn + kn.$$

Mivel k és n különböző színűek, ezért kn zöld.

Ha mn piros lenne, akkor az $mn + kn$ összeg két különböző színű szám összege lenne, így az összeg színe piros lenne. De mivel tudjuk, hogy ez az összeg zöld, ezért mn csak zöld lehet. 3 pont

Tegyük fel, hogy a p legkisebb zöld szám. Az előbbiek alapján tetszőleges többszöröse is zöld lesz.

Lemma. *Nincs más zöld szám, csak a p többszörösei.*

Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy a, ami zöld színű, de nem p többszöröse.

Ekkor felírható $a = b \cdot p + r$ alakban, ahol a, b, r pozitív egészek, és $0 < r < p$.

Mivel p zöld, ezért $b \cdot p$ is zöld lesz. Ha r piros lenne, akkor $b \cdot p + r$-nek a kaméleon színezés értelmében pirosnak kellene lennie. De mivel a zöld, ezért r csak zöld lehet. Ez viszont ellentmond annak, hogy p a legkisebb zöld szám.

Használjuk fel ezt az eredményt! Ha az 1 piros, és a 77 zöld, akkor következtethetünk arra, hogy a 7 vagy a 11 többszörösei, és csak azok lesznek zöld színűek. 3 pont

$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, ezért ez se nem a 7, se nem a 11 többszöröse. Így nem lehet zöld. Tehát 2015 piros színű lesz. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x + 2014\sqrt{x + 2014\sqrt{x + 2014\sqrt{x + 2014\sqrt{2015\,x}}}}} = x.$$

Megoldás. Az $x = 0$ megoldása az egyenletnek, hiszen a legbelső gyök felől kezdve a számolást

$$\sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014\sqrt{2015 \cdot 0}}}}} =$$

$$= \sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014 \cdot 0}}}} =$$

$$= \sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014 \cdot 0}}} = \sqrt{0 + 2014\sqrt{0 + 2014 \cdot 0}} = \sqrt{0 + 2014 \cdot 0} = 0. \quad \text{1 pont}$$

Hasonlóan az $x = 2015$ is megoldás, hisz

$$\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015^2}}}}} =$$

$$= \sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014 \cdot 2015}}}} =$$

$$= \sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015^2}}}} = \ldots = \sqrt{2015 + 2014\sqrt{2015^2}} =$$

$$= \sqrt{2015 + 2014 \cdot 2015} = \sqrt{2015^2} = 2015. \quad \text{1 pont}$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza, így az $x < 0$ eset nem ad megoldást. 1 pont

Ha $0 < x < 2015$, akkor

$$\sqrt{2015\,x} > \sqrt{x^2} = x.$$

Ezt a lépést belülről kifelé haladva egymás után többször alkalmazva az egyenlet bal oldala

$$\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}}} >$$

$$> \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\,x}}}} =$$

$$= \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}} > \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\,x}}} =$$

$$= \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}} > \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\,x}} =$$

$$= \sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}} > \sqrt{x+2014\,x} =$$

$$= \sqrt{2015\,x} > x.$$

Tehát az egyenlet bal oldala x-nél nagyobb, míg jobb oldala x, egyenlőség tehát nem teljesülhet. 2 pont

Ha $x > 2015$, akkor $\sqrt{2015\,x} < \sqrt{x^2} = x$ teljesül, amit az előző esettel azonos módon többször felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}}} < x,$$

tehát egyenlőség ebben az esetben sem teljesülhet.

Más lehetőség nincs, tehát az egyenlet megoldásai $x = 0$ és $x = 2015$. 2 pont

Összesen: 7 pont

Haladók – II. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. Adott az alábbi két egyenletrendszer:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1)+2y=1, \\ \text{II.} & b(x-1)+cy=3; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1)+2y=1, \\ \text{II.} & b|x-1|+cy=3. \end{cases}$$

Tudjuk, hogy az első egyenletrendszernek nincs megoldása, a második egyenletrendszert viszont kielégíti a $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$ számpár. Határozza meg az a, b, c paraméterek értékét!

2. Hányféle módon lehet felmenni egy 25 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha mindig csak 2-t vagy 3-at lépünk? (Más esetnek tekintjük azt, ha az alján lépünk 3-at, utána mindig 2-t, vagy az elejétől kettesével lépünk és a végén 3-at.)

3. Jelöljön x, y, z olyan pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $2xy^2 = 3z^3$. Mennyi az xyz szorzat minimuma?

4. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja H, BC oldalának felezőpontja F, és DA oldalának A-hoz legközelebb levő negyedelő pontja G. Bizonyítandó, hogy FG, CH és DB egy ponton mennek át!

5. Két szám szorzata $a \cdot b = -1$. Ugyanezen két szám összege $a + b = 1$. Bizonyítsd be, hogy az $S = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + a^4 + b^4 + \ldots + a^8 + b^8$ kifejezés egy egész szám, és add meg a pontos értékét!

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott az alábbi két egyenletrendszer:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1) + 2y = 1, \\ \text{II.} & b(x-1) + cy = 3; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1) + 2y = 1, \\ \text{II.} & b|x-1| + cy = 3. \end{cases}$$

Tudjuk, hogy az első egyenletrendszernek nincs megoldása, a második egyenletrendszert viszont kielégíti a $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$ számpár. Határozza meg az a, b, c paraméterek értékét!

Megoldás. A megoldást a második egyenletrendszer első egyenletébe helyettesítve:

$$-\frac{1}{4}a + \frac{5}{4} = 1,$$

$$a = 1. \qquad \text{1 pont}$$

A második egyenletrendszer második egyenletéből a

$$(1) \qquad 2b + 5c = 24$$

összefüggéshez jutunk. 1 pont

Az $a = 1$ összefüggést felhasználva az első egyenletrendszer első egyenletében az

$$(2) \qquad x = 2 - 2y$$

összefüggést kapjuk. 1 pont

A (2) összefüggést behelyettesítve az első egyenletrendszer második egyenletébe:

$$b(2 - 2y) + cy = 3. \qquad \text{1 pont}$$

Felhasználva az (1) összefüggést ebből:

$$(24 - 5c)(1 - y) + cy = 3$$
$$(6c - 24)y = 5c + 3. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenletnek pontosan akkor nincs megoldása, ha $c = 4$, ekkor (1)-ből $b = 2$. 1 pont

Az $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ értékek valóban kielégítik a feladat feltételeit. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Hányféle módon lehet felmenni egy 25 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha mindig csak 2-t vagy 3-at lépünk? (Más esetnek tekintjük azt, ha az alján lépünk 3-at, utána mindig 2-t, vagy az elejétől kettesével lépünk és a végén 3-at.)

Megoldás. Jelölje x, hányszor lépünk 2-t, y, hogy hányszor lépünk 3-at. Ekkor teljesülnie kell, hogy $2x + 3y = 25$. 1 pont.

Mivel $2x$ biztosan páros, $3y$ páratlan és így y is páratlan. A lehetséges értékek: $y = 1$, 3, 5 vagy 7. Az ezekhez tartozó x-ek: 11, 8, 5 és 2. 2 pont.

Ha $y = 1$ és $x = 11$, akkor összesen 12 lépés van, ebből 11 egyforma (2 lépcsőfok), azaz a lehetőségek száma = 12. 1 pont

A többi esetben 11, 10 illetve 9 lépés kell, ahol 3 és 8, 5 és 5 illetve 7 és 2 lépés egyformának tekinthető. Az egyes lehetőségek száma: 165, 252 és 36. 2 pont

Az összes lehetőség: $12 + 165 + 252 + 36 = 465$.

Összesen: 7 pont

3. Jelöljön x, y, z olyan pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $2xy^2 = 3z^3$. Mennyi az xyz szorzat minimuma?

1. megoldás. Mivel az egyenlet bal oldala osztható 2-vel, ezért a jobb oldal is osztható 2-vel. Ebből következik, hogy z osztható 2-vel. 1 pont

Mivel a jobb oldal osztható 3-mal, ezért a bal oldal is. Azaz x vagy y osztható 3-mal. 1 pont

Ezek alapján az xyz szorzat osztható 6-tal. 1 pont

Az xyz szorzat legkisebb lehetséges értéke a 6, nézzük először ezt. Az oszthatóságokat figyelembe véve két számhármas lehetséges: $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$ vagy $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$. 1 pont

Egyik számhármas sem megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

Vizsgáljuk $xyz = 12$-t. Az oszthatóságokat figyelembe véve található olyan számhármas, ami megoldása az eredeti egyenletnek: $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$. A kérdéses minimum tehát 12. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Írjuk fel x-et, y-t, z-t kanonikus alakban. Ha x vagy y vagy z osztható 2-től és 3-tól különböző prímmel, akkor az egyenlet mindkét oldala ezt a prímet ugyanakkora kitevőn tartalmazza, és ezzel a prímhatvánnyal osztva az egyenlet szerkezete nem változik, továbbra is $2xy^2 = 3z^3$ alakú, de az xyz csökkent, tehát a minimumot elég olyan xyz esetén keresni, melyek kanonikus felbontásában csak a 2 vagy 3 szerepelhet, azaz $x = 2^a \cdot 3^b$, $y = 2^c \cdot 3^d$, $z = 2^e \cdot 3^f$, a kitevők természetes számok. 1 pont

A két oldalon a 2 és 3 kitevőinek egyenlőségét felírva a következő két független egyenletet kapjuk.

$$1 + a + 2c = 3e$$
$$b + 2d = 1 + 3f.$$ 1 pont

$xyz = 2^{a+c+e} \cdot 3^{b+d+f}$, tehát $a + c + e$ és $b + d + f$ minimumát keressük.

Az első egyenletből látható, hogy e legalább 1. $e = 1$ esetén $a = 0$, $c = 1$ vagy $a = 2$, $c = 0$, az első esetben $a + c + e$ kisebb. 1 pont

A másodikból $f = 0$ esetén $b = 1$, $d = 0$. 1 pont

$e > 1$ esetén $a + 2c \geqq 5$, $(a + c) + c \geqq 5$, ahonnan $a + c \geqq 3$, ilyenkor $a + c + e \geqq 5$. 1 pont

$f > 0$ esetén $b + 2d \geqq 4$, $(b + d) + d \geqq 4$, tehát $b + d \geqq 2$, ekkor $b + d + f \geqq 3$. 1 pont

Ezek nagyobbak, mint az előbb kapott $a + c + e = 2$ és $b + d + f = 1$, tehát a minimális érték $xyz = 2^2 \cdot 3^1 = 12$ ($x = 3$, $y = 2$, $z = 2$). 1 pont

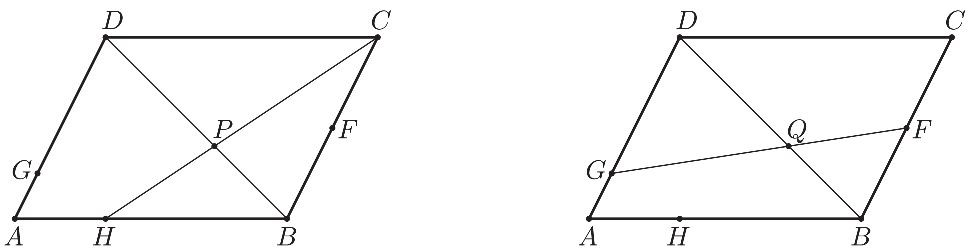
---

Összesen: 7 pont

4. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja H, BC oldalának felezőpontja F, és DA oldalának A-hoz legközelebb levő negyedelő pontja G. Bizonyítandó, hogy FG, CH és DB egy ponton mennek át!

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy GF és CH ugyanabban a pontban metszi a DB átlót. 1 pont

Jelölje P a CH és DB metszéspontját, Q pedig a GF és DB metszéspontját.



A HBP és a CDP háromszögek hasonlók, mert szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt

$$\frac{BP}{PD} = \frac{BH}{DC} = \frac{2}{3}.$$ 2 pont

Az FQB és a GQD háromszögek hasonlók, mert szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt

$$\frac{BQ}{QD} = \frac{BF}{DG} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$ 2 pont

Azt kaptuk, hogy $\frac{BP}{PD} = \frac{2}{3} = \frac{BQ}{QD}$, ez pedig csak úgy lehetséges, ha $P = Q$. Tehát FG, CH és DB egy ponton mennek át. 2 pont

Összesen: 7 pont

5. Két szám szorzata $a \cdot b = -1$. Ugyanezen két szám összege $a + b = 1$. Bizonyítsd be, hogy az $S = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + a^4 + b^4 + \ldots + a^8 + b^8$ kifejezés egy egész szám, és add meg a pontos értékét!

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy van két olyan a, b szám, amelyik kielégíti a feladat feltételeit.

Ehhez kifejezzük b-t $b = 1 - a$ alakban, majd beírjuk a másik feltételbe:

$$a(1-a) = -1 \longrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \longrightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vagyis pl. (ha $a > b$) $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kielégítik a két feltételt. 1 pont

Innen sokféleképp folytatható a feladat. (A megjegyzésben pár lehetséges folytatást leírunk majd.) A fennmaradó rész jó megoldása még 6 pontot ér!

Legyen $s_1 = a^1 + b^1 = a + b = 1$, $s_2 = a^2 + b^2$, …, $s_n = a^n + b^n$.

Ezzel a jelöléssel $S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_8$ a kérdés.

$$s_2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 3.$$ 1 pont

Másfelől tekintsük a következő egyenlőséget: $(n > 1)$.

$$s_n = a^n + b^n = 1 \cdot (a^n + b^n) = (a+b) \cdot (a^n + b^n) = a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot b \cdot \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right).$$

Vagyis $s_n = a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot b \cdot \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right) = s_{n+1} - s_{n-1}$, innen $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$ adódik. 3 pont

Innen $s_1 = 1$; $s_2 = 3 \to s_3 = 4 \to s_4 = 7 \to s_5 = 11 \to s_6 = 18 \to s_7 = 29 \to s_8 = 47$.

Vagyis $= 1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 = 120$. 2 pont

Vagyis $S = 120$.

Összesen: 7 pont

Megjegyzések: $a)$ Egy lehetséges „csúnya” megoldás: Használjuk a véges mértani sorozat összegképletét! Ezzel

$$S=\left(1+a+a^2+a^3+\ldots+a^8\right)+\left(1+b+\ldots+b^8\right)-2=\frac{1-a^9}{1-a}+\frac{1-b^9}{1-b}-2,$$

vagyis

$$S=\frac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-2=\frac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-2.$$

Innen a törteket bővítve a nevezők konjugáltjaival:

$$S=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}-2=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}-3$$

adódik.

Ezután kétszer alkalmazva a binomiális tételt a két 10-edik hatványra, és észrevéve, hogy a felbontás után az első tag számlálójában fennálló „páratlan” tagok éppen a második tag megfelelő „páratlan” tagjainak az ellentettjei és így ezek öszege: 0, míg a „páros” tagok közösek, adódik, hogy:

$$S=\frac{2\cdot\left(1^2+\binom{10}{2}\cdot 1^8\cdot 5+\binom{10}{4}\cdot 1^6\cdot 5^2+\binom{10}{6}\cdot 1^4\cdot 5^3+\binom{10}{8}\cdot 1^2\cdot 5^4+5^5\right)}{2^{10}}-3,$$

innen

$$S=\frac{1+45\cdot 5+210\cdot 25+210\cdot 125+45\cdot 625+3125}{2^9}-3,$$

$$S=\frac{3126+45\cdot 630+210\cdot 150}{2^9}-3=\frac{62976}{512}-3=123-3=120.$$

$a')$ a-ból következik, hogy $s_1+s_2+\ldots+s_n=s_{n+2}-3$.

$b)$ Természetesen külön-külön mindegyik s_i is megkapható két-két binomiális tétellel az iménti megjegyzéshez hasonlóan, de az még több számolást igényel!

$c)$ Az általunk s_n-nek nevezett sorozat a matematikában Lucas-sorozatként ismert.

A Lucas-sorozat nem rekurzív definíciójában $s_n=L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ megjelenik az aranymetszés száma.

Minden Fibonacci-szerű sorozat ($f_1=a$; $f_2=b$; $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$) kifejezhető a Lucas-sorozat tagjai segítségével, és így az aranymetszés számaival is!

Haladók II. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Oldjuk meg az egyenletet a valós $(x; y)$ számpárok halmazán!

$$4 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2} = -\left|\frac{y+3}{2y-1} - 1\right| - 6.$$

2. Hány olyan konvex sokszög van, amelynek három egymást követő csúcsa $A(5; 0)$, $B(5; 5)$ és $C(0; 5)$ koordinátájú pont, és a többi csúcsának koordinátái is nemnegatív egész számok?

3. Milyen pozitív egész n-re lesz a $2^8 + 2^{11} + 2^n$ négyzetszám?

4. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, adja meg az átlók hosszának **pontos** értékét!

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az egyenletet a valós $(x; y)$ számpárok halmazán!

$$4 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2} = -\left|\frac{y+3}{2y-1} - 1\right| - 6.$$

Megoldás. A $\sqrt{}$ alatt álló kifejezés nemnegatív, így $|x| \leqq 3$.

Rendezzük át az egyenletet!

Mindkét oldalhoz 6-ot adva:

$$10 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2} = -\left|\frac{y+3}{2y-1} - 1\right|,$$

$$\left(9 - x^2\right) - 2\sqrt{9 - x^2} + 1 = -\left|\frac{y+3}{2y-1} - 1\right|. \qquad \text{1 pont}$$

Ismerjük fel, hogy a bal oldalon a $\sqrt{9 - x^2} - 1$ kifejezés négyzete szerepel!

Vagyis az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\left(\sqrt{9 - x^2} - 1\right)^2 = -\left|\frac{y+3}{2y-1} - 1\right| \qquad \text{2 pont}$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, a jobboldal pedig nempozitív, ezért egyenlőek csak úgy lehetnek, ha külön-külön mindkettő 0-val egyenlő! 1 pont

Megoldva a $\left(\sqrt{9-x^2}-1\right)^2=0$ egyenletet:

$$\sqrt{9-x^2}=1 \quad\longrightarrow\quad 9-x^2=1 \quad\longrightarrow\quad 8=x^2 \quad\longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{8}$$

adódik.

És ez megfelel a $|x| \leqq 3$ feltételnek. 1 pont

Megoldva a $0=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|$ egyenletet:

$$\frac{y+3}{2y-1}-1=0 \quad\longrightarrow\quad \frac{y+3}{2y-1}=1 \quad\longrightarrow\quad y+3=2y-1 \quad\longrightarrow\quad y=4$$

adódik. 1 pont

Vagyis az egyenlet megoldása az alábbi két $(x;y)$ számpár: $\left(\sqrt{8};4\right)$ és $\left(-\sqrt{8};4\right)$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Hány olyan konvex sokszög van, amelynek három egymást követő csúcsa $A(5;0)$, $B(5;5)$ és $C(0;5)$ koordinátájú pont, és a többi csúcsának koordinátái is nemnegatív egész számok?

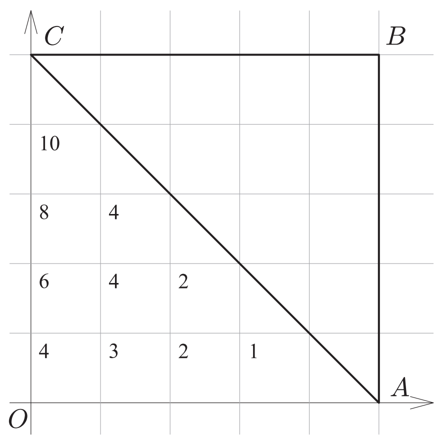
Megoldás. Háromszög 1 van.

Négyszög negyedik csúcsa olyan rácspont lehet, amely az ACO háromszög belsejében (O a koordináta-rendszer origója), vagy az OA, illetve OC oldalon van. Az ilyen pontok száma 15, így ennyi négyszög van. 1 pont)

Ötszögnél a 4. D csúcs helyét rögzítsük először, az ötödik csúcs lehetséges helyzeteinek számát D helyének megfelelő rácspontra írtuk. (A $D(3;1)$ pont után már csak a $(4;0)$ ponttal kapunk konvex ötszöget, ezért a $(4;0)$ pontra 1-et írtunk.) Összesen

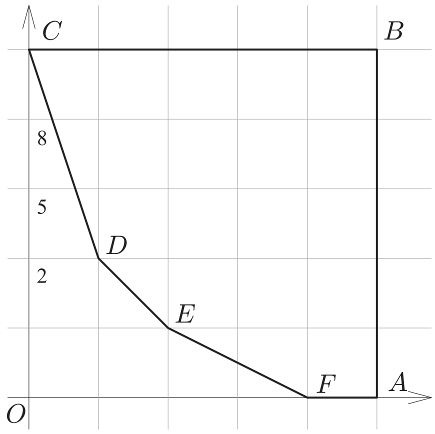
$$10+8+4+6+4+2+4+3+2+1=44$$

ötszög lehetséges. 2 pont

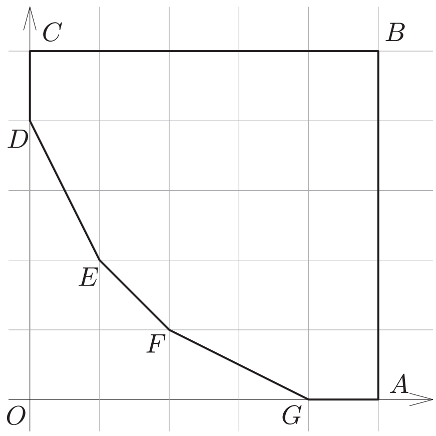


Hasonló módon számolhatjuk össze a hatszögeket. Itt a lehetőségek száma

$$8 + 5 + 2 + 1 = 16. \qquad \text{1 pont}$$



Hétszögből 1 van: 1 pont



Több csúcsú sokszög nem lehet, mert akkor az A, B és C csúcsokon kívüli legalább 5 csúcspontból vagy legalább 2-nek megegyezik az első vagy második koordinátája és így a sokszög konkáv vagy három csúcs egy egyenesre esik. 1 pont

Így az összes lehetséges sokszög száma: $1 + 15 + 44 + 16 + 1 = 77$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az egyes esetek számának bármely helyes (akár csak rajzzal indokolt) megállapításáért jár a megfelelő pontszám.

3. Milyen pozitív egész n-re lesz a $2^8 + 2^{11} + 2^n$ négyzetszám?

Megoldás. Legyen $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$, ahol a pozitív egész.

Átalakítva a bal oldali összeget kapjuk, hogy

$$2^8 + 2^{11} = 2^8\bigl(1 + 2^3\bigr) = 2^8 \cdot 9 = 2^8 \cdot 3^2 = \bigl(2^4 \cdot 3\bigr)^2 = 48^2,$$

így $48^2 + 2^n = a^2$. 1 pont

Rendezve és szorzattá alakítva

$$2^n = \bigl(a^2 - 48^2\bigr),$$

$$2^n = (a - 48)(a + 48).$$ 1 pont

A bal oldalon kettő-hatvány áll, a jobb oldalon egy szorzat. Az $a - 48 = 1$ vagy $a + 48 = 1$ nem vezet megoldásra.

Így a jobb oldalon a két tényező egy-egy kettő-hatvánnyal egyezik meg. Legyen

$$a + 48 = 2^k, \quad a - 48 = 2^{n-k},$$

ahol k egy n-nél kisebb pozitív egész, és $k > n - k$. 1 pont

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$96 = 2^k - 2^{n-k} = 2^{n-k}\bigl(2^{2k-n} - 1\bigr),$$

ahol 2^{n-k} és $2^{2k-n} - 1$ pozitív egész,

$$3 \cdot 2^5 = 2^{n-k}\bigl(2^{2k-n} - 1\bigr).$$ 1 pont

A 2^{n-k} nem osztható 3-mal, így $\bigl(2^{2k-n} - 1\bigr)$ $3 \cdot 2^m$ alakú, ahol m nem negatív és ötnél nem nagyobb egész. Ekkor

$$2^{2k-n} = 3 \cdot 2^m + 1.$$

Mivel a jobb oldal egynél nagyobb, ezért a bal oldal is. Ekkor viszont a bal oldal páros. A jobb oldal pedig csak akkor lesz páros, ha $m = 0$. 1 pont

Tehát $2^{2k-n} - 1 = 3$, így $2k - n = 2$ és $2^{n-k} = 2^5$, azaz $n - k = 5$. 1 pont

A

$$2k - n = 2,$$

$$n - k = 5$$

egyenletrendszer megoldása $k = 7$ és $n = 12$.

$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 2^8\bigl(1 + 2^3 + 2^4\bigr) = 2^8 \cdot 25 = \bigl(2^4 \cdot 5\bigr)^2 = 80^2$ valóban négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, adja meg az átlók hosszának **pontos** értékét!

1. megoldás. Ha létezik ilyen rombusz, akkor az átlók felére és az oldalra felírt háromszög-egyenlőtlenség alapján $e/2 + f/2 > 2$, 1 pont

azaz $e + f > 4$, illetve $e < 4$, $f < 4$, azaz $e + f < 8$. 1 pont

Egész megoldás csak az 5, 6 vagy 7 lehet. 1 pont

Viszont az $e^2 + f^2 = 16$ egyenlőségnek is teljesülni kell az átlók merőlegessége miatt. 1 pont

Az egyenletrendszerek csak az $e + f = 5$ esetén adnak megoldást. 2 pont

Ekkor $e = \left(5 + \sqrt{7}\right)/2$, $f = \left(5 - \sqrt{7}\right)/2$, vagy fordítva. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Az átlók merőlegessége miatt $e^2 + f^2 = 16$. 1 pont

Mivel $ef > 0$, ezért

$$16 = e^2 + f^2 < (e + f)^2 \leqq (e + f)^2 + (e - f)^2 = 2\left(e^2 + f^2\right) = 32.$$ 2 pont

16 és 32 között csak a 25 négyzetszám, azaz $e + f$ egyetlen lehetséges értéke 5. 2 pont

Az egyenletrendszer megoldása $e = \left(5 + \sqrt{7}\right)/2$, $f = \left(5 - \sqrt{7}\right)/2$, vagy fordítva. 2 pont

Összesen: 7 pont

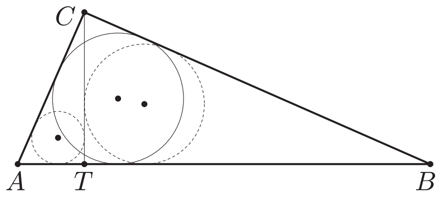
Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $a + b + c = 1$, igaz a következő állítás:

$$\left(a + \frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4 + \left(b + \frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4 + \left(c + \frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq 1.$$

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy A-nál és B-nél is hegyesszöge van. Ekkor állítsunk a C csúcsból merőlegest az AB oldalra, és jelölje a merőleges talppontját T! Legyen az ATC háromszögbe írt kör sugara r_a, a BTC háromszögbe írt kör sugara r_b, az ABC háromszögbe írt kör sugara r. Bizonyítsuk be, hogy ha $r + r_a + r_b = CT$, akkor a háromszögnek C-nél derékszöge van!



3. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan

– kétharmada félszemű;
– háromnegyede falábú;
– négyötöde kampókezű, és
– öthatoda kopasz.

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek, és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak!

Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldások és javítási útmutató

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $a+b+c=1$, igaz a következő állítás:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4+\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4+\left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq 1.$$

1. megoldás. Kiindulva abból, hogy

$$\left(a-\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2 \geqq 0, \qquad \text{2 pont}$$

vagyis:

$$a^2-\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{16a} \geqq 0.$$

Mindkét oldalt $\sqrt{a}$-val növelve, kapjuk:

$$a^2+\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{16a} \geqq \sqrt{a}, \qquad \text{1 pont}$$

innen:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2 \geqq \sqrt{a}. \qquad \text{1 pont}$$

Négyzetre emelve mindkét oldalt:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4 \geqq a. \qquad \text{1 pont}$$

Analóg a többi zárójel:

$$\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4 \geqq b \qquad \text{és} \qquad \left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq c. \qquad \text{1 pont}$$

Összeadva a megfelelő oldalakat és felhasználva az $a+b+c=1$ feltételt, igazoltuk, hogy:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4+\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4+\left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq a+b+c=1. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Tekintve, hogy a, b, c pozitív számok, felírjuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az a, illetve az $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ kifejezésekre:

$$\frac{a+\frac{1}{4\sqrt{a}}}{2} \geqq \sqrt{a\cdot\frac{1}{4\sqrt{a}}}, \qquad \text{2 pont}$$

Rendezzük, így kapjuk:

$$\frac{a+\frac{1}{4\sqrt{a}}}{2} \geqq \frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{2}, \quad \text{azaz:} \quad a+\frac{1}{4\sqrt{a}} \geqq \sqrt[4]{a}. \qquad \text{2 pont}$$

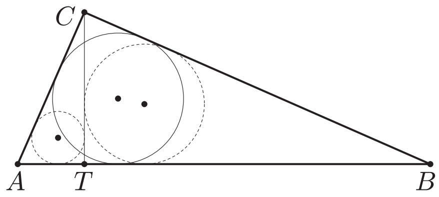
Mindkét oldalt negyedik hatványra emelve:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4 \geqq a. \qquad \text{1 pont}$$

(Tovább az első megoldás szerint.)

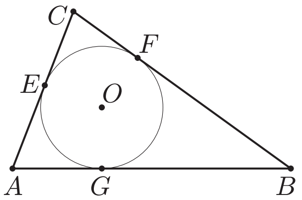
Összesen: 7 pont

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy A-nál és B-nél is hegyesszöge van. Ekkor állítsunk a C csúcsból merőlegest az AB oldalra, és jelölje a merőleges talppontját T! Legyen az ATC háromszögbe írt kör sugara r_a, a BTC háromszögbe írt kör sugara r_b, az ABC háromszögbe írt kör sugara r. Bizonyítsuk be, hogy ha $r+r_a+r_b=CT$, akkor a háromszögnek C-nél derékszöge van!



Megoldás. Vegyünk egy tetszőleges háromszöget, és a beírható körét. A csúcsból a körhöz húzott érintő szakaszok azonos hosszúságúak. Így az ábra jelöléseit használva

$$AE = AF = x.$$



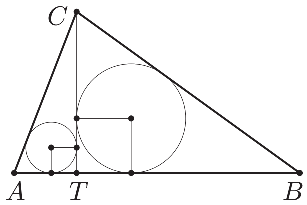
Ha $AB = c$, $BC = a$ és $AC = b$, akkor

$$BE = BG = c - x,$$
$$GC = CF = b - x,$$
$$BG + GC = BC = a,$$
$$c - x + b - x = a.$$

Ezt x-re rendezve kapjuk, hogy $x = \dfrac{b + c - a}{2}$. 2 pont

(Ha levezetés nélkül használja ezt az összefüggést, akkor is jár a 2 pont.)

Mivel CT merőleges AB-re, ezért a T-ből húzott érintőszakaszok derékszöget zárnak be egymással. Mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért a körök középpontjai, az érintési pontok és a T pont egy négyzetet határoznak meg. Így az érintő szakaszok hossza a kis kör sugarával egyezik meg. 1 pont



Az előzőeket felhasználva T-ből húzott érintőszakaszok hossza:

$$r_a = \frac{CT + AT - b}{2}, \quad \text{illetve} \quad t_b = \frac{CT + TB - a}{2}.$$ 1 pont

Tudjuk, hogy $r = CT - r_a - r_b$ és $AT + TB = c$.

Behelyettesítve és rendezve kapjuk, hogy

$$r = CT - r_a - r_b = CT - \frac{CT + AT - b}{2} - \frac{CT + TB - a}{2} = \frac{a + b - c}{2}.$$ 1 pont

Tehát a sugár megegyezik a C pontból húzott érintőszakasz hosszával. 1 pont

Mivel így a C-ből induló érintőszakaszok, és az érintési pontba húzható sugarak egy rombuszt alkotnak, amelynek két szemben lévő szöge derékszög (mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre) ezért ez az alakzat egy négyzet. Azaz az ABC háromszögnek a C csúcsánál derékszög van. Ezt kellett bizonyítanunk. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan

– kétharmada félszemű;
– háromnegyede falábú;
– négyötöde kampókezű, és
– öthatoda kopasz.

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek, és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak!

Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldás. Először belátjuk, hogy a hajón $S = 60m$ (60-nal osztható számú) matróz van. A szöveg alapján a matrózok száma 3-mal, 4-gyel, 5-tel, és 6-tal is osztható, de akkor osztható ezek legkisebb közös többszörösével is, azaz 60-nal. 2 pont

Minden nem félszemű matróznak húzzunk a fejére egy (kék) sapkát. Kiosztottunk $20m$ sapkát.

Minden matróznak, aki nem falábú, húzzunk a fejére egy (piros) sapkát. Kiosztottunk $15m$ sapkát.

Minden nem kampókezű matróznak húzzunk a fejére egy (zöld) sapkát. Kiosztottunk $12m$ sapkát.

Minden nem kopasz matróznak húzzunk a fejére egy (fehér) sapkát. Kiosztottunk $10m$ sapkát.

Így összesen $57m$ darab sapkát osztottunk ki.

Mivel a matrózok száma $60m$, legalább $3m$ olyan matróz van, akinek a fején nincsen egyetlen sapka sem, ami éppen azt jelenti, hogy legalább $3m$ matróz rendelkezik mind a négy tulajdonsággal. 2 pont

Mivel a hajón van legalább 5 matróz, ezért a lehetséges matrózszám $S = 60, 120, 180, \ldots$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$ esetek).

Ha $m \geqq 2$, akkor a fentiek szerint legalább $3m \geqq 6$ matróz lenne olyan, hogy mind a négy tulajdonsággal rendelkezik.

Mivel ez a feladat szerint pontosan 5, ezért csak $m = 1$ lehet, vagyis a hajón pontosan 60 matróz szolgál. 1 pont

Hátra van még annak a megmutatása, hogy 60 matrózzal kielégíthető a feladat állítása. Ezt mutatja az alábbi táblázat.

	Hány fő?	Félszem	Faláb	Kampókéz	Kopasz
	10	×	×	×	
	12	×	×		×
	13	×		×	×
	2			×	×
	18		×	×	×
	5	×	×	×	×
Ellenőrzés	60	40	45	48	50

2 pont

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 1. forduló

Feladatok

1. Egy háromszögben nevezzük *kerületfelezőnek* az olyan szakaszokat, amelyek a háromszög egy csúcsát úgy kötik össze a szemközti oldal egy pontjával, hogy a szakasz két oldalára a háromszög kerületének ugyanakkora része esik. Igaz-e, hogy ha egy háromszög nem egyenlő szárú, akkor kerületfelező szakaszai mind különböző hosszúságúak?

2. A másodfokú $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ polinom minden x-re teljesíti az alábbi összefüggést:

$$p(x) = \left(\frac{p(x+1) - p(x-1)}{2}\right)^2.$$

Add meg a következő összeg pontos értékét! $S = p(-3) - 2p(0) + p(3) = ?$

3. Megrajzoltuk egy konvex nyolcszög összes átlójának egyenesét, majd ezen egyenesek összes metszéspontját. Legfeljebb hány metszéspont eshet a nyolcszögön kívülre?

4. Melyik az a legkisebb (tízes számrendszerben felírt) természetes szám, amelyben mind a tízféle számjegy szerepel legalább egyszer, és a szám osztható 99-cel?

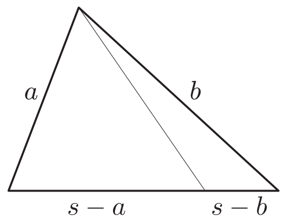
(A szám nem kezdődhet 0-val!)

5. Adott egy PQR háromszög, amelynek oldalai különböző hosszúak. Az MN szakasz ugyanazon oldalára felvettük a betűzésük sorrendjében azonos körüljárású MNA, BMN és NCM háromszögeket, amelyek mind hasonlók PQR-hez. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög is hasonló PQR-hez.

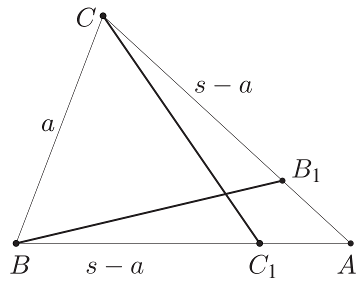
Megoldások és javítási útmutató

1. Egy háromszögben nevezzük *kerületfelezőnek* az olyan szakaszokat, amelyek a háromszög egy csúcsát úgy kötik össze a szemközti oldal egy pontjával, hogy a szakasz két oldalára a háromszög kerületének ugyanakkora része esik. Igaz-e, hogy ha egy háromszög nem egyenlő szárú, akkor kerületfelező szakaszai mind különböző hosszúságúak?

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges háromszög mindegyik csúcsához tartozik kerületfelező. Ehhez csak azt kell látni, hogy $s-a$ és $s-b$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt pozitív, továbbá $s - a + s - b = 2s - a - b = a + b + c - a - b = c$. Tehát a c hosszúságú oldalt a felé $s - a$, b felé $s - b$ hosszú szakaszra bontva megkapjuk a c oldalhoz tartozó kerületfelezőt. 2 pont



Most azt fogjuk igazolni, hogy ha van két egyenlő hosszúságú kerületfelező, akkor van két egyenlő oldal. Tehát ha minden oldal különböző, akkor minden kerületfelező is különböző hosszúságú. 2 pont



Tegyük fel, hogy a BB_1 és CC_1 kerületfelezők egyenlők: $BB_1 = CC_1$. A fentiek alapján $BC_1 = CB_1 = s - a$, mert mindkettő a-t egészíti ki a kerület felére. 1 pont

Az eddigiek alapján a BCC_1 és CBB_1 háromszögek egybevágók, mert mindhárom oldaluk megegyezik. Ebből viszont $CBC_1\sphericalangle = BCB_1\sphericalangle$ következik, vagyis az eredeti háromszög egyenlő szárú, mert van két egyenlő szöge. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. A másodfokú $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ polinom minden x-re teljesíti az alábbi összefüggést:

$$p(x) = \left(\frac{p(x+1) - p(x-1)}{2}\right)^2.$$

Add meg a következő összeg pontos értékét! $S = p(-3) - 2p(0) + p(3) =?$

Megoldás. Írjuk fel a megadott kifejezés jobb oldalát az a, b, c együtthatók segítségével!

$$\left(\frac{p(x+1) - p(x-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{\big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\big) - \big(a(x-1)^2 + b(x-1) + c\big)}{2}\right)^2. \qquad \text{1 pont}$$

Rendezzük!

$$\left(\frac{\left(a(x+1)^2+b(x+1)+c\right)-\left(a(x-1)^2+b(x-1)+c\right)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\left(ax^2+2ax+a+bx+b+c\right)-\left(ax^2-2ax+a+bx-b+c\right)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{4ax+2b}{2}\right)^2=(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2.$$ 2 pont

Mivel ez minden x-re megegyezik a $p(x)=ax^2+bx+c$ polinommal, ez csak úgy lehet, ha a megfelelő együtthatók megegyeznek, vagyis

$$a=4a^2 \quad\longrightarrow\quad a=\frac{1}{4} \quad (a\neq 0 \text{ miatt!})$$

$b=4ab=4\cdot\frac{1}{4}b=b$, vagyis b tetszőleges, és végül $c=b^2$.

Vagyis a $p(x)$ polinom $p(x)=\frac{1}{4}x^2+bx+b^2$ alakú valamely b valós számra. 2 pont

Ekkor az $S=p(-3)-2p(0)+p(3)$ kifejezés értéke:

$$S=\left(\frac{1}{4}(-3)^2-3b+b^2\right)-2b^2+\left(\frac{1}{4}3^2+3b+b^2\right)=\frac{9}{2}.$$

Vagyis az S összeg értéke: $S=4{,}5$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Megrajzoltuk egy konvex nyolcszög összes átlójának egyenesét, majd ezen egyenesek összes metszéspontját. Legfeljebb hány metszéspont eshet a nyolcszögön kívülre?

Megoldás. Először megjegyezzük, hogy lehet olyan nyolcszöget rajzolni, amelynek átlóegyenesei között nincsenek párhuzamosak, és sem a sokszög belsejében, sem a sokszögön kívül nem megy át három átlóegyenes egy ponton.

Például ha a nyolcszög csúcsait egy kör kerületén vesszük fel egymás után, valamilyen körüljárás szerinti sorrendben, akkor a konvexitás teljesül. Az első három pontot tetszőlegesen felvehetjük. Ezután a soron következő pont választásakor mindig csak véges sok lehetőséget zár ki, hogy nem keletkezhet a korábbi átlókkal párhuzamos szakasz, és olyan sem, ami két korábbi átló metszéspontján megy át. 1 pont

A továbbiakban tehát feltételezhetjük, hogy a nyolcszög csúcsain kívül nincs olyan pont, amelyen legalább három átló egyenese átmegy, és az átlók között nincsenek párhuzamosak.

Megszámoljuk, hogy összesen hány metszéspont lehetséges, majd ebből le fogjuk vonni a belső metszéspontok számát és a nyolcszög kerületére eső metszéspontok számát.

A nyolcszögnek $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ átlója van, ezekből $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ pár alkotható. 1 pont

A nyolcszög minden csúcsában öt átló találkozik, vagyis $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ átló pár metszi egymást egy adott csúcsban. Ez összesen $8 \cdot 10 = 80$ pár. 1 pont

A belső metszéspontok megszámolásához a következő (ismert) gondolat használható. Ha két átló belső pontban metszi egymást, akkor az átlók végpontjai biztosan különböznek. Tehát egy belső metszésponthoz hozzárendelhető négy csúcs. Fordítva, ha kiválasztunk négy tetszőleges csúcsot, akkor ezek egy konvex négyszöget adnak meg, amelynek átlói egyben a nyolcszög átlói is, és belül metszik egymást. Tehát a belső metszéspontok és a nyolcszög csúcsai közül kiválasztható négyesek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható meg. Így a belső metszéspontok száma $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70$. 2 pont

A 190 lehetséges pár közül 80 a sokszög kerületén metszi egymást, 70 a sokszög belsejében, tehát legfeljebb $190 - 80 - 70 = 40$ metszéspont eshet kívülre, és a bevezető megjegyzés alapján ez el is érhető. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Melyik az a legkisebb (tízes számrendszerben felírt) természetes szám, amelyben mind a tízféle számjegy szerepel legalább egyszer, és a szám osztható 99-cel?

(A szám nem kezdődhet 0-val!)

Megoldás. A számunk pontosan akkor osztható 99-cel, ha 9-cel, és 11-gyel is osztható.

Mivel $0 + 1 + \ldots + 8 + 9 = 45$, ezért ha a számunk 10-jegyű, és ezekből a jegyekből áll valamely sorrendben, akkor 9-cel osztható.

Ha nem találunk ilyen 11-gyel osztható számot, csak akkor van szükség arra, hogy valamely számjegyből több szerepeljen a számunkban.

(Vagyis a továbbiakban feltesszük, hogy a számunk 10-jegyű.) 1 pont

Vizsgáljuk a 11-gyel oszthatóságot (a fenti 10-jegyű számokra)!

Az oszthatósági szabály miatt a jegyek váltakozó előjelű összegének 11-gyel oszthatónak kell lenni.

Mivel a számjegyek összege 45, ez csak akkor lehet, ha a páratlan helyiértéken álló jegyek összegének (t), és a páros helyiértéken lévő számjegyek összegének (s) a különbsége ($t - s$) páratlan (különben t és s azonos paritású, így összegük páros, és így nem 45), vagyis $t - s \pm 11$, vagy ± 33. 1 pont

Ha a 10 lehetséges jegyből az 5 nagyobbat tesszük pl. a páratlan helyiértékekre, a többit pedig a páros helyiértékekre, akkor egy ilyen számra:

$$|t - s| = (9 + 8 + 7 + 6 + 5) - (4 + 3 + 2 + 1 + 0) = 25,$$

vagyis $t - s = \pm 33$ nem lehet $\longrightarrow$ $t - s = \pm 11$ lehetséges csak. 1 pont

Most akkor próbáljunk ilyen számot „csinálni”, méghozzá úgy, hogy a lehetséges legkisebb 10-jegyű számot alakítjuk ki eközben!

Úgy érdemes próbálkozni, hogy a lehető legkisebb jegyet tesszük az első helyre, aztán a maradék jegyek közül a lehető legkisebbet a második helyre, és így tovább ... (Ezt a nyilvánvaló elvet később több helyen kihasználjuk.) 1 pont

Ha a számunk eleje 1023 ... lenne, akkor „eddig” $t - s = 1 + 2 - 3 = 0$.

Ha most a maradék hat jegyből a három nagyobbat pl. a páratlan helyekre, a többit a páros helyekre tesszük, akkor $|t - s| = (9 + 8 + 7) - (6 + 5 + 4) = 9 < 11$.

Vagyis a számunk nem kezdődhet 1023-mal. 1 pont

A számunk a lehető legkisebb akkor lehet az eddigiek alapján, ha 1024-gyel kezdődik. „Eddig” $t - s = 1 + 2 - 4 = -1$. A $|t - s| = 11$ feltétel most kielégíthető, de $(9 + 8 + 7) - (6 + 5 + 3) = 10$ miatt pontosan akkor, ha a páratlan helyiértékekre tesszük a 3, 5, 6 jegyeket, míg a páros helyiértékekre a 7, 8, 9 jegyeket.

Ezt sokféleképpen tehetnénk, de (mivel a legkisebb ilyen számot keressük) nyilván megint csak „növekvő módon” fogjuk rendezni a lehetséges jegyeinket.

Így a legkisebb lehetséges számunk az 1024375869. 1 pont

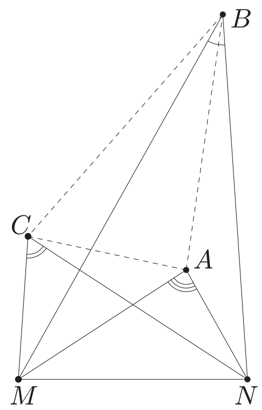
Válasz: a legkisebb ilyen szám az 1024375869.

(Ez a pont a szám indoklás nélküli megtalálásáért is jár!) 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Adott egy PQR háromszög, amelynek oldalai különböző hosszúak. Az MN szakasz ugyanazon oldalára felvettük a betűzésük sorrendjében azonos körüljárású MNA, BMN és NCM háromszögeket, amelyek mind hasonlók PQR-hez. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög is hasonló PQR-hez.

Megoldás.



Először rögzítjük, hogy melyik szögek felelnek meg egymásnak. Legyen

$$P\sphericalangle = AMN\sphericalangle = NBM\sphericalangle = MNC\sphericalangle;$$

$$Q\sphericalangle = MNA\sphericalangle = BMN\sphericalangle = NCM\sphericalangle;$$

$$R\sphericalangle = NAM\sphericalangle = MNB\sphericalangle = CMN\sphericalangle.$$

Az oldalak különböznek, ezért feltehetjük, hogy a következő relációk igazak: $P\sphericalangle < Q\sphericalangle < R\sphericalangle$.

Az áttekinthetőség kedvéért az ábrán nem jelöltük meg mind a kilenc szöget.

Nevezzük el az AMN háromszög oldalait: $MN = a$, $NA = m$, $AM = n$. Ezekkel a szakaszokkal kifejezzük a BN, BM, CN és CM szakaszokat. A háromszögek hasonlóságából $a : m : n = BM : a : BN = CN : CM : a$ következik. 1 pont

A megfelelő arányokból $BN = \frac{an}{m}$, $BM = \frac{a^2}{m}$, $CN = \frac{a^2}{n}$ és $CM = \frac{am}{n}$. 2 pont

Az MN szakaszra rajzolt háromszögek szögei is megegyeznek a hasonlóságok miatt, így $CMB\sphericalangle = CMN\sphericalangle - BMN\sphericalangle = BNM\sphericalangle - ANM\sphericalangle = BNA\sphericalangle$. Tehát CM és MB ugyanakkora szöget zár be, mint AN és NB, továbbá

$$\frac{CM}{BM} = \frac{\frac{am}{n}}{\frac{a^2}{m}} = \frac{m^2}{an} = \frac{m}{\frac{an}{m}} = \frac{AN}{BN}.$$

Azt kaptuk, hogy $CMB_\triangle \sim ANB_\triangle$. 2 pont

Az előbbi kivonásoknál kihasználtuk szögek feltételezett nagyságrendjét, de a többi sorrendnél ugyanígy kapjuk az egyenlőséget.

Végül vegyük észre, hogy a $CMB_\triangle \sim ANB_\triangle$ hasonlóság miatt $CBM\sphericalangle = ABN\sphericalangle$, tehát $CBA\sphericalangle = MBN\sphericalangle$, továbbá $\frac{CB}{AB} = \frac{MB}{NB}$. Ez a két összefüggés maga után vonja, hogy $CBA_\triangle \sim MBN_\triangle$. Ezzel az állítás bizonyítását befejeztük. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az utolsó szakaszban újra használtuk a szögek rendezését ahhoz, hogy BA ugyanolyan irányban van BN-től, mint BC, BM-től.

Haladók III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $abc = 1$, igaz a következő állítás:

$$\frac{a^9 + b^9}{a^6 + a^3b^3 + b^6} + \frac{b^9 + c^9}{b^6 + b^3c^3 + c^6} + \frac{c^9 + a^9}{c^6 + c^3a^3 + a^6} \geqq 2.$$

2. Egy 3×3-as táblázat mezőibe beírtuk az első kilenc pozitív egész számot pontosan egyszer úgy, hogy a három sorban (balról jobbra), a három oszlopban (felülről lefele) és a bal felső sarokból induló átlón kiolvasható háromjegyű számok mindegyike osztható 11-gyel. Mekkora lehet a jobb felső sarokból kiinduló átlón kiolvasható szám értéke?

3. Adott a síkban n darab vektor, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A vektorok abszolút értékeinek összege 1. Bizonyítsuk, hogy ezen vektorok halmazának van olyan nem üres részhalmaza, hogy a részhalmaz vektorai összegének abszolút értéke legalább $\frac{1}{6}$!

Megoldások és javítási útmutató

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $abc = 1$, igaz a következő állítás:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6}\geqq 2.$$

1. megoldás.

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}=\frac{\left(a^3+b^3\right)\left(a^6-a^3b^3+b^6\right)}{a^6+a^3b^3+b^6}=\left(a^3+b^3\right)-\frac{2a^3b^3\left(a^3+b^3\right)}{a^6+a^3b^3+b^6}. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel:

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \left(a^3-b^3\right)^2,\\
0 &\leqq a^6-2a^3b^3+b^6,\\
2a^3b^3 &\leqq a^6+b^6,\\
3a^3b^3 &\leqq a^6+a^3b^3+b^6,\\
\frac{a^3b^3}{a^6+a^3b^3+b^6} &\leqq \frac{1}{3}, && \text{1 pont}\\
\frac{2a^3b^3\left(a^3+b^3\right)}{a^6+a^3b^3+b^6} &\leqq \frac{2\left(a^3+b^3\right)}{3},\\
\left(a^3+b^3\right)-\frac{2a^3b^3\left(a^3+b^3\right)}{a^6+a^3b^3+b^6} &\geqq \left(a^3+b^3\right)-\frac{2\left(a^3+b^3\right)}{3},\\
\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6} &\geqq \frac{\left(a^3+b^3\right)}{3}. && \text{1 pont}
\end{aligned}$$

Analóg:

$$\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}\geqq\frac{\left(b^3+c^3\right)}{3} \qquad \text{és} \qquad \frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6}\geqq\frac{\left(c^3+a^3\right)}{3}.$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6}\geqq\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{3}. \qquad \text{1 pont}$$

Felhasználva, hogy:

(1) a, b, c pozitív,

(2) $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=a^3+b^3+c^3-3abc$,

és

(3) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + ac + bc,$ 1 pont

arra a következtetésre jutunk, hogy $a^3 + b^3 + c^3 \geqq 3abc.$ 1 pont

Így:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6} + \frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6} + \frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geqq$$

$$\geqq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{3} \geqq \frac{2 \cdot 3abc}{3} = 2abc = 2,$$

amit bizonyítani kellett 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás (*több versenyző dolgozata alapján*).

Többen használták a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség *Titu-lemma* néven elhíresült alakját. Három tagra ez így néz ki:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

ahol a, b, c, x, y, z pozitív valós számok, és egyenlőség akkor teljesül, ha $a/x = b/y = c/z$.

A bizonyítandó egyenlőtlenség egyszerűbb alakba írható,ha bevezetjük az $a^3 = A$, $b^3 = B$, $c^3 = C$ jelöléseket. Így $ABC = 1$ is teljesül, és elég azt bizonyítani, hogy

$$\frac{A^3+B^3}{A^2+AB+B^2} + \frac{B^3+C^3}{B^2+BC+C^2} + \frac{C^3+A^3}{C^2+CA+A^2} \geqq 2.$$

Most kettébontjuk a törteket, és bővítünk, hogy a számlálók teljes négyzetté váljanak:

$$\frac{A^3}{A^2+AB+B^2} \cdot \frac{A}{A} + \frac{B^3}{A^2+AB+B^2} \cdot \frac{B}{B} + \frac{B^3}{B^2+BC+C^2} \cdot \frac{B}{B}$$

$$+ \frac{C^3}{B^2+BC+C^2} \cdot \frac{C}{C} + \frac{C^3}{C^2+CA+A^2} \cdot \frac{C}{C} + \frac{A^3}{C^2+CA+A^2} \cdot \frac{A}{A} \geqq 2.$$

Két csoportra alkalmazva a Titu-lemmát:

$$\frac{A^4}{A^3+A^2B+AB^2} + \frac{B^4}{B^3+B^2C+BC^2} + \frac{C^4}{C^3+C^2A+CA^2}$$

$$\geqq \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2},$$

illetve

$$\frac{B^4}{A^2B+AB^2+B^3} + \frac{C^4}{B^2C+BC^2+C^3} + \frac{A^4}{C^2A+CA^2+A^3}$$

$$\geqq \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2}.$$

A két becslés összegéből

$$\text{baloldal} \geqq 2 \cdot \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2}$$

következik, ezért elegendő megmutatni, hogy

$$\frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2} \geqq 1.$$

A nevező szorzattá alakítható:

$$\frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2}$$
$$= \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^2(A+B+C)+B^2(A+B+C)+C^2(A+B+C)}.$$

Kiemelés és egyszerűsítés után

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C} \geqq 1$$

igazolandó. Végül ismét alkalmazzuk a Titu-lemmát, majd a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C} = \frac{A^2}{A+B+C} + \frac{B^2}{A+B+C} + \frac{C^2}{A+B+C}$$
$$\geqq \frac{(A+B+C)^2}{3(A+B+C)} = \frac{A+B+C}{3} \geqq \sqrt[3]{ABC} = 1.$$

$a=b=c=1$ esetén minden becslésben egyenlőség áll.

2. Egy 3×3-as táblázat mezőibe beírtuk az első kilenc pozitív egész számot pontosan egyszer úgy, hogy a három sorban (balról jobbra), a három oszlopban (felülről lefele) és a bal felső sarokból induló átlón kiolvasható háromjegyű számok mindegyike osztható 11-gyel. Mekkora lehet a jobb felső sarokból kiinduló átlón kiolvasható szám értéke?

Megoldás.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

A táblázat mezőibe írt számokat jelöljük az ábra szerint $a, b, c, \ldots, i$ betűkkel.

Egy szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha a számjegyeinek váltakozó előjellel vett összege osztható 11-gyel.

A feladat feltétele szerint a három sorban kiolvasható számok oszthatók 11-gyel, vagyis teljesülnek a következő oszthatóságok:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} 11 &\mid a-b+c, \\ 11 &\mid d-e+f, \\ 11 &\mid g-h+i. \end{aligned}$$

A középső oszlopban kiolvasható szám 11-gyel való oszthatósága miatt pedig

$$11 \mid b - e + h.$$ 1 pont

Vizsgáljuk az $(a - b + c) + (d - e + f) + (g - h + i) - 2(b - e + h)$ összeget. A fenti oszthatóságok miatt ennek az összegnek is osztója a 11, vagyis

$$\begin{aligned} 11 \mid (a - b + c) + (d - e + f) + (g - h + i) + 2(b - e + h) = \\ = (a + b + c + d + e + f + g + h + i) - 4e. \end{aligned}$$ 1 pont

Mivel az $a, b, c, \dots, i$ számok az $1, 2, 3, \dots, 9$ számokkal egyeznek meg valamilyen sorrendben, az $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ egyenlőség teljesül, tehát a fenti oszthatóság a

$$11 \mid 45 - 4e$$

alakba írható.

Mivel $1 \leqq e \leqq 9$, ezért $9 \leqq 45 - 4e \leqq 41$, e egész és $11 \mid 45 - 4e$, amiből $e = 3$ következik. 1 pont

A középső sorban, a középső oszlopban és a bal felső sarokból induló átlóban kiolvasható számok 11-gyel való oszthatósága miatt

$$11 \mid d - 3 + f,$$
$$11 \mid b - 3 + h,$$
$$11 \mid a - 3 + i.$$

Mivel ezen összegek nem lehetnek negatívak sem 14-nél nagyobbak (hisz két különböző számjegy összege legfeljebb 17), ezért a $d + f$, $b + h$ és $a + i$ összegek értéke 3 vagy 14 lehet. 1 pont

Nem lehet mindegyik érték 14, hisz a hat legnagyobb számjegy összege 39, ami kisebb $3 \cdot 14 = 42$-nél, tehát az egyik összeg értéke 3. Mivel csak a két legkisebb pozitív egész szám összege 3, a másik két összeg értéke biztosan 14, mely csak $5 + 9$ és $6 + 8$ alakban állhat elő. A két kimaradó számjegy a 4 és a 7, ezek lesznek c és g értékei, tehát a jobb felső sarokból induló átló átlóban kiolvasható szám a 437 és a 734 lehet. 2 pont

Ilyen kitöltések léteznek is, amint az ábrákon látható. 1 pont

2	9	7
6	3	8
4	5	1

1	5	4
8	3	6
7	9	2

Összesen: 7 pont

3. Adott a síkban n darab vektor, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A vektorok abszolút értékeinek összege 1. Bizonyítsuk, hogy ezen vektorok halmazának van olyan nem üres részhalmaza, hogy a részhalmaz vektorai összegének abszolút értéke legalább $\frac{1}{6}$!

1. megoldás. Mérjük fel a vektorokat egy O pontból. Az ebben az O pontban található 360°-os szöget bontsuk fel 3 darab 120°-ra. 1 pont

A skatulya-elv miatt van olyan szög, ahova eső vektorok hosszának összege legalább $1/3$ (a szögszárakra eső vektorokat besorolhatjuk a két szög bármelyikébe, akár mindkettőbe). 2 pont

Ennek a szögnek húzzuk be a szögfelezőjét, és minden ide a szögbe eső vektort bontsunk a szögfelezővel párhuzamos és rá merőleges komponensre. 1 pont

Egy vektor párhuzamos komponense akkor a legkisebb, ha a vektor 60°-ot zár be a szögfelezővel. Ilyenkor ez a komponens feleakkora, mint a vektor. 1 pont

Ezért a párhuzamos komponensek összegének hossza legalább $1/6$. 1 pont

Merőleges komponenseket is figyelembe véve a vektorok összegének hossza nem csökkenhet, így az legalább $1/6$! 1 pont

Megjegyzés: Ha rögzítjük, hogy a két határoló szögszár közül csak az egyik tartozik a 120°-os szöghöz, akkor az is adódik, hogy az összeg abszolút értéke több, mint $1/6$!

Összesen: 7 pont

2. megoldás (*több versenyző dolgozata alapján*).

Felveszünk egy tetszőleges koordináta-rendszert, amelyben a vektorok koordinátái $\underline{v}_i(x_i; y_i)$. Két egyszerű becslést használunk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i| + |y_i|\big) \leqq |\underline{v}_i| \leqq |x_i| + |y_i|.$$

Az alsó becslés a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség következménye:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i| + |y_i|\big) \leqq |\underline{v}_i| \Leftrightarrow \frac{|x_i| + |y_i|}{2} \leqq \sqrt{\frac{|x_i|^2 + |y_i|^2}{2}}.$$

A felső becslés pedig a háromszög-egyenlőtlenségből jön ki, hiszen $\underline{v}_i(x_i; y_i) = (x_i; 0) + (0; y_i)$.

Most bontsuk négy csoportra a vektorokat aszerint, hogy melyik síknegyedbe esnek. (Felvehető úgy a két tengely, hogy semelyik vektor ne legyen párhuzamos egyik tengellyel sem.) Számoljuk ki minden csoportban a vektorok tengelyeken vett merőleges vetületeinek összhosszát. Biztos lesz olyan síknegyed, ahol a vetületek összhossza legalább $1/4$, hiszen a fenti felső becslés alapján a négy csoportban összesen legalább 1 a vetületek összhossza.

Azt is feltehetjük, hogy ez az I-es síknegyedben áll elő, tehát itt minden koordináta pozitív. (A tengelyek megfelelő forgatásával elérhető ez a helyzet.) Jelölje az I-es síknegyedbe eső vektorokat $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{4} \leqq \sum_{i=1}^{k}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i,$$

ahol az összegzés már csak a $\underline{w}_j$ vektorokra vonatkozik, és az abszolútértékek a síknegyed megválasztása miatt voltak elhagyhatók.

Végül a fenti alsó becslést használva:

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\underline{w}_j\right| = \left|\left(\sum_{j=1}^{k}x_j;\sum_{j=1}^{k}y_j\right)\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}x_j+\sum_{j=1}^{k}y_j\right) \geqq \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{6}.$$

3. megoldás (*Baran Zsuzsa dolgozata alapján*).

A vektorok hosszának összegére vonatkozó feltételből és a háromszög-egyenlőtlenségből

$$1 = \sum_{i=1}^{n}|\underline{v}_i| \leqq \sum_{i=1}^{n}\big(|x_i|+|y_i|\big) = \sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i|.$$

Az utolsó két összeg valamelyike nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Feltehető, hogy $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i| \geqq \frac{1}{2}$.

Az x_i koordináták előjele szerint osszuk két csoportra a vektorokat. (A 0 mehet a pozitívak közé.) Az egyik csoportban $\sum|x_j| \geqq \frac{1}{4}$, hiszen összesen legalább $\frac{1}{2}$ az abszolútértékek összege. A folytatásban ezen csoport vektorait jelölje $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$. Tudjuk, hogy $k > 0$, mert nem nulla az összeg.

A csoportban minden x koordináta azonos előjelű, ezért

$$\sum|x_j| = \left|\sum x_j\right|.$$

Emiatt

$$\left|\sum\underline{w}_j\right| = \left|\left(\sum x_j;\sum y_j\right)\right| \geqq \left|\sum x_j\right| = \sum|x_j| \geqq \frac{1}{4}.$$

Az utolsó becslésnél azt használtuk, hogy egy vektor hossza legalább annyi, mint x koordinátája abszolútértéke.

4. megoldás (*Baran Zsuzsa és Williams Kada dolgozata alapján*).

Az eddigi megoldásokban egyre jobb alsó becsléseket adtunk a kiválasztható részhalmaz összegének hosszára $\big(1/6, 1/\big(4\sqrt{2}\big), 1/4\big)$. Természetesen adódik a következő kérdés:

> *Mi az a legnagyobb K valós szám, amire igaz, hogy ha n vektor hosszának összege* 1*, akkor kiválasztható közülük néhány, amelyek összegének hossza legalább K?*

Az éles becslés megsejtéséhez a következő gondolatkísérlet eredményeként juthatunk. Tegyük fel, hogy az n vektor egy szabályos n-szög oldalvektorai, és n „nagyon nagy”. Ekkor a sokszög egy egységnyi kerületű kört közelít, melynek átmérője $\frac{1}{\pi}$. Szemléletesen látszik, hogy a vektorok tetszőleges részhalmazának összege olyan vektort ad, amely nem hosszabb, mint a kör átmérője.

Megmutatjuk, hogy $K = \frac{1}{\pi}$ elérhető.

Az előző megoldásokban egy tetszőlegesen felvett koordináta-rendszerben dolgoztunk. Azzal tudjuk javítani az alsó becslésünket, ha megtaláljuk a *legjobb* koordináta-rendszert. Induljunk ki egy tetszőleges koordináta-rendszerből, ahol az i. vektor $\underline{v}_i(x_i; y_i)$. Most forgassuk körbe az X-tengelyt, és minden helyzetben számoljuk ki a vektorok X- és Y-irányú vetületét. Ha az eredeti rendszer X-tengelyének pozitív irányával $\underline{v}_i$ α, az elforgatott X-tengely pedig φ nagyságú szöget zár be, akkor a vektor merőleges vetületeinek összhossza az elforgatott rendszerre vonatkozóan:

$$V(\varphi, \underline{v}_i) = \big(\big|\sin(\alpha - \varphi)\big| + \big|\cos(\alpha - \varphi)\big|\big)|\underline{v}_i|.$$

A sin és cos periodicitása alapján:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi &= |\underline{v}_i| \cdot \left(\int_0^{2\pi} \big|\sin(\alpha - \varphi)\big|\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \big|\cos(\alpha - \varphi)\big|\,\mathrm{d}\varphi\right) = \\
&= |\underline{v}_i| \cdot \left(\int_0^{2\pi} \big|\sin(\varphi)\big|\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \big|\cos(\varphi)\big|\,\mathrm{d}\varphi\right) = \\
&= |\underline{v}_i| \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4|\underline{v}_i| \cdot \big(-\cos\pi - (-\cos 0)\big) = 8|\underline{v}_i|.
\end{aligned}$$

Az összes vektorra összegezve:

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi = 8\left(\sum_{i=1}^{n} |\underline{v}_i|\right) = 8.$$

Emiatt létezik $\varphi \in [0; 2\pi]$, amelyre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(\varphi, \underline{v}_i) \geqq \frac{8}{2\pi}$, ellenkező esetben ugyanis $I \leqq 8$ adódna. Ezt a φ-t választjuk tehát, és a folytatásban már abban a koordináta-rendszerben dolgozunk, amit ez a szög kijelölt.

Innentől az előző megoldás működik, de most az $1 \leqq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ helyett az erősebb $\displaystyle\frac{8}{2\pi} \leqq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ egyenlőtlenségből indulhatunk ki, ezért végül a kiválasztott $\underline{w}_j$ vektorokra a

$$\Big|\sum \underline{w}_j\Big| \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

egyenlőtlenséget kapjuk meg.

A fenti gondolatkísérlet pontossá tehető, és megmutatható, hogy ennél nagyobb K már nem lehet jó.

JEGYZETEK