ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

2013/2014-ES TANÉV

Kezdők és Haladók
(I., II. és III. kategória)

Feladatok és megoldások

A verseny az NTP-TV-13-0068 azonosító számú pályázat alapján a Nemzeti Tehetség Program, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő, valamint az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet támogatásával valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

Bolyai János Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
Kezdők I–II. kategória, I. forduló

Feladatok

1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek bármely két szomszédos jegye különböző és a számjegyek összege 2013? (6 pont)

2. Egy 34 fős osztályban ugyanannyi fiú van, mint lány. Igaz-e, hogy ha leülnek egy kerek asztal köré, akkor minden esetben lesz olyan diák, akinek mindkét szomszédja lány? (6 pont)

3. Az a, b pozitív valós számokra az $a+b$, $a-b$, ab és $\frac{a}{b}$ kifejezések értéke növekvő sorrendben $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ és $\frac{7}{4}$. Melyik ez a két szám? (6 pont)

4. Az ABC háromszögben a B csúcsnál lévő szög 60°-os. Az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőt a C csúcshoz tartozó belső, illetve külső szögfelező rendre az E, illetve F pontban metszi. Mekkora az EC és az FE szakaszok hosszának aránya? (6 pont)

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek bármely két szomszédos jegye különböző és a számjegyek összege 2013? (6 pont)

Megoldás. Bármely két szomszédos számjegy összegének a lehető legnagyobbnak kell lennie, hogy a szám a lehető legkevesebb számjegyből álljon.

Ez az összeg – mivel két szomszédos számjegy különböző – $9+8=17$. (3 pont)

$2013 = 17 \cdot 118 + 7$, ezért a kérdezett legkisebb szám legalább $2 \cdot 118 + 1 = 237$ jegyű, és akkor a legkisebb, ha az első jegye a 7.

Ezért a kérdezett legkisebb szám: $78989\ldots 89$, ami egy 237 jegyű szám, az első számjegye 7, ezután 118-szor 89 következik. (3 pont)

2. Egy 34 fős osztályban ugyanannyi fiú van, mint lány. Igaz-e, hogy ha leülnek egy kerek asztal köré, akkor minden esetben lesz olyan diák, akinek mindkét szomszédja lány? (6 pont)

Megoldás. Az osztályban 17 fiú és 17 lány van. Tegyük fel, hogy létezik az osztálynak olyan leültetése, mely esetén nincs olyan diák, aki két lány között ül. Emiatt minden diáknak legalább az egyik szomszédja fiú. Tehát közvetlenül egymás mellett legfeljebb két lány ülhet, míg minden fiú mellett legalább még egy fiúnak ülnie kell. (3 pont)

Mivel $17 = 8 \cdot 2 + 1$, ezért a lányok a kör alakú asztalt legalább 9 olyan ívre osztják, amelyek mindegyikén legalább két fiúnak kell ülnie. Ekkor viszont a fiúk száma legalább 18 kell, hogy legyen, ami ellentmondás. Tehát mindig lesz olyan diák, akinek mindkét szomszédja lány. (3 pont)

3. Az a, b pozitív valós számokra az $a+b$, $a-b$, ab és $\frac{a}{b}$ kifejezések értéke növekvő sorrendben $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ és $\frac{7}{4}$. Melyik ez a két szám? (6 pont)

Megoldás. Mivel a négy érték között nincs negatív szám, ezért $a > b$, és így, $\frac{a}{b} > 1$, tehát $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, vagy $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$. (2 pont)

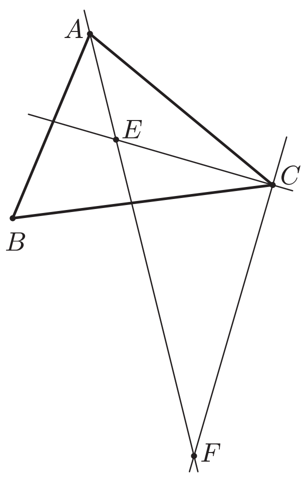
Ha $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, akkor $\frac{a+b}{a-b} = 7$. A maradó három tört közül csak $\frac{7}{4} : \frac{1}{4} = 7$, tehát $a + b = \frac{7}{4}$. Ezért, $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$. (2 pont)

Ha $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$, akkor $\frac{a+b}{a-b} = \frac{11}{3}$, ami nem szerepel a maradó három tört arányai között.

Ezért az egyetlen megoldás $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$ és ezek kielégítik a feladat feltételeit. (2 pont)

4. Az ABC háromszögben a B csúcsnál lévő szög $60°$-os. Az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőt a C csúcshoz tartozó belső, illetve külső szögfelező rendre az E, illetve F pontban metszi. Mekkora az EC és az FE szakaszok hosszának aránya? (6 pont)

Megoldás. Készítsünk *ábrát!*



Mivel AE belső és CF külső szögfelező, $CAE\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ és $FCB\sphericalangle = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Így:

$$AFC\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma = \frac{\beta}{2}. \quad \text{(3 pont)}$$

Tudjuk, hogy $\beta = 60°$, ezért $EFC\sphericalangle = 30°$.

Az ugyanazon csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, így az ECF háromszög félszabályos, amiből következik, hogy $EC : FE = 1 : 2$. (3 pont)

Kezdők I–II. kategória, II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a racionális számok halmazán!

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot(2x-2)\cdot(2x-3)\cdot(2x-4) \qquad \text{(6 pont)}$$

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek szomszédjai prímszámok, és a szám nem osztható 6-tal? (6 pont)

3. Egy 3 házaspárból álló 6 fős társaság elhatározza, hogy úgy ünneplik meg a karácsonyt, hogy mindegyikük megajándékozza a társaság egy másik tagját. Ehhez mindenki felírja a nevét egy cédulára, a cédulákat beleteszik egy kalapba majd mindenki húz egy cédulát a kalapból. A kihúzónak azt a személyt kell megajándékoznia, akinek a neve a kihúzott cédulán szerepel. A lehetséges esetek hányad részében fordul elő, hogy a 6 húzás során nem lesz olyan személy, aki önmagát vagy a házastársát húzza ki? (8 pont)

4. Az AD egységnyi hosszú szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkörív egy pontja B, a BD ív egy további pontja C, és jelölje E a BD és AC szakaszok metszéspontját. Határozza meg az $AE\cdot AC+DB\cdot DE$ kifejezés pontos értékét! (10 pont)

5. Melyik a legnagyobb n természetes szám, amelyre $5^{(2^{2013})}-1$ osztható 2^n-nel? (10 pont)

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a racionális számok halmazán!

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot(2x-2)\cdot(2x-3)\cdot(2x-4) \qquad \text{(6 pont)}$$

Megoldás. $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(2x-3)\cdot 2\cdot(x-2)$, amiből adódik, hogy $x_1=1$, illetve $x_2=2$ megoldások. (2 pont)

Ha $x\neq 1$ és $x\neq 2$, akkor

$$(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot 2\cdot(2x-3)\cdot 2,$$

azaz

$$x^2-7x+12=16x^2-32x+12,$$

ezt az egyenletet rendezve:

$$0 = 15x^2 - 25x, \quad \text{azaz} \quad 0 = x(3x - 5),$$

amiből $x_3 = 0$ és az $x_4 = \frac{5}{3}$ gyököket kapjuk, (3 pont)
amik szintén megoldások a megadott alaphalmazon. (1 pont)

Megjegyzés: Ha elvégzi a beszorzásokat és rendez, akkor a

$$0 = 15x^4 - 70x^3 + 105x^2 - 50x$$

egyenletet kapja, amiből $0 = x\big(3x^3 - 14x^2 + 21x - 10\big)$, tehát az egyik gyök $x_1 = 0$. (1 pont)

A $0 = 3x^3 - 14x^2 + 21x - 10$ egyenlet megoldása:

1) racionális gyökteszt alkalmazásával vagy próbálgatással könnyen adódik például az $x_2 = 1$ megoldás, (2 pont)
2) majd a másodfokú egyenlet megoldásával vagy további gyökteszttel a többi gyök ügyes csoportosítással például:

$$0 = 3x^3 - 3x^2 - 11x^2 + 11x + 10x - 10 = 3x^2(x - 1) - 11x(x - 1) + 10(x - 1) =$$
$$= (x - 1) \cdot \big(3x^2 - 11x + 10\big),$$

és innen befejezhető a megoldás. (3 pont)

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek szomszédjai prímszámok, és a szám nem osztható 6-tal? (6 pont)

Megoldás. Mivel csak egyetlen páros prímszám van (a 2), ezért, ha egy szám mindkét szomszédja prímszám, akkor biztosan páratlan prímszámokról van szó, így maga a szám biztosan osztható 2-vel. (1 pont)

Három egymást követő szám között mindig van 3-mal osztható. (2 pont)

1. eset: Az egyik prímszám osztható 3-mal, azaz az egyik prímszám a 3. Ekkor a három szám csak a 3, 4 és 5 lehet. (Hiszen az 1 nem prím!) (1 pont)

2. eset: A középső szám osztható 3-mal, ekkor azonban – mivel páros – biztosan osztható 6-tal is.

Tehát egyetlen olyan pozitív egész szám van, amelynek szomszédjai prímszámok, és ő maga nem osztható 6-tal: a 4. (2 pont)

3. Egy 3 házaspárból álló 6 fős társaság elhatározza, hogy úgy ünneplik meg a karácsonyt, hogy mindegyikük megajándékozza a társaság egy másik tagját. Ehhez mindenki felírja a nevét egy cédulára, a cédulákat beleteszik egy kalapba majd mindenki húz egy cédulát a kalapból. A kihúzónak azt a személyt kell megajándékoznia, akinek a neve a kihúzott cédulán szerepel. A lehetséges esetek hányad részében fordul elő, hogy a 6 húzás során nem lesz olyan személy, aki önmagát vagy a házastársát húzza ki? (8 pont)

Megoldás. Jelöljük a személyeket 1-től 6-ig, a házaspárok: $1-2$, $3-4$ és $5-6$.

Ekkor az összes lehetséges húzások száma: $6! = 720$. (1 pont)

Ezek közül a kedvező húzások számának meghatározásához soroljuk fel az összes lehetőséget!

Az 1-es személy nem húzhatja önmagát, illetve a 2-es személyt (házastársa), de húzhatja a 3-as személyt. Az összes lehetséges húzás, amelyben a 3-as személyt húzza az alábbi táblázatból olvasható ki (a táblázat egy sora egy érvényes húzásnak felel meg):

Ki húz?	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1.	3	4	5	6	1	2
2.	3	4	5	6	2	1
3.	3	4	6	5	1	2
4.	3	4	6	5	2	1
5.	3	5	1	6	2	4
6.	3	5	1	6	4	2
7.	3	5	2	6	1	4
8.	3	5	2	6	4	1
9.	3	5	6	1	2	4
10.	3	5	6	1	4	2
11.	3	5	6	2	1	4
12.	3	5	6	2	4	1
13.	3	6	1	5	2	4
14.	3	6	1	5	4	2
15.	3	6	2	5	1	4
16.	3	6	2	5	4	1
17.	3	6	5	1	2	4
18.	3	6	5	1	4	2
19.	3	6	5	2	1	4
20.	3	6	5	2	4	1

(5 pont)

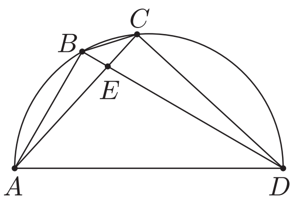
Pont ugyanennyi lehetőség adódik akkor is, ha az 1-es személy a 4-es, 5-ös vagy 6-os személyt húzza, azaz a kedvező húzások száma: $4 \cdot 20 = 80$. (1 pont)

Így a lehetséges esetek $\frac{1}{9}$ részében fordul elő, hogy a 6 húzás során nem lesz olyan személy, aki önmagát vagy a házastársát húzza ki? (1 pont)

A 20 „alapesetre” adott 5 pont szétbontható. Aki 13-mat felír 1 pontot, aki 14-et vagy 15-öt felír 2 pontot, aki 16-ot vagy 17-et felír 3 pontot, aki 18-at vagy 19-et felír 4 pontot kaphat.

4. Az AD egységnyi hosszú szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkörív egy pontja B, a BD ív egy további pontja C, és jelölje E a BD és AC szakaszok metszéspontját. Határozza meg az $AE \cdot AC + DB \cdot DE$ kifejezés pontos értékét! (10 pont)

Megoldás.



Thalész tétele miatt ABD derékszögű háromszög, így a Pitagorasz-tételt felírva

$$AD^2 = AB^2 + (EB + DE)^2,$$

ahonnan

$$AD^2 = AB^2 + EB^2 + DE^2 + 2 \cdot EB \cdot DE. \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel AEB is derékszögű háromszög, ezért $AB^2 + EB^2 = AE^2$, ezenkívül

$$EB = DB - DE,$$

így

$$AD^2 = AE^2 - DE^2 + 2 \cdot DB \cdot DE. \qquad \text{(3 pont)}$$

Hasonlóan kapjuk az ACD és ECD derékszögű háromszögekből, hogy

$$AD^2 = DE^2 - AE^2 + 2 \cdot AE \cdot AC. \qquad \text{(3 pont)}$$

Összegezve az előbbi két egyenlőséget adódik $AD^2 = AE \cdot AC + DB \cdot DE$, tehát

$$AE \cdot AC + DB \cdot DE = 1. \qquad \text{(2 pont)}$$

5. Melyik a legnagyobb n természetes szám, amelyre $5^{(2^{2013})} - 1$ osztható 2^n-nel? (10 pont)

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a $5^{(2^{2013})} - 1$ számot!

Használjuk a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot!

$$5^{(2^k)} - 1 = 5^{(2^{k-1} \cdot 2)} - 1 = \left(5^{(2^{k-1})}\right)^2 - 1 = \left(5^{(2^{k-1})} - 1\right)\left(5^{(2^{k-1})} + 1\right). \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennek ismételt alkalmazásával:

$$5^{(2^{2013})} - 1 = \left(5^{(2^{2012})} + 1\right)\left(5^{(2^{2011})} + 1\right)\left(5^{(2^{2010})} + 1\right) \dots \left(5^2 + 1\right)(5 + 1)(5 - 1). \qquad \text{(4 pont)}$$

Mivel az 5 négyes maradéka 1, ezért bármely hatványának a négyes maradéka 1. Ezért az $5^m + 1$ $(m \in \mathbb{N})$ négyes maradéka 2, azaz néggyel nem osztható páros szám. Így az első 2013 darab tényező mindegyike osztható 2-vel, de 4-gyel nem. Az utolsó tényező pedig $4 = 2^2$, így n lehetséges legnagyobb értéke 2015. (4 pont)

Kezdők I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

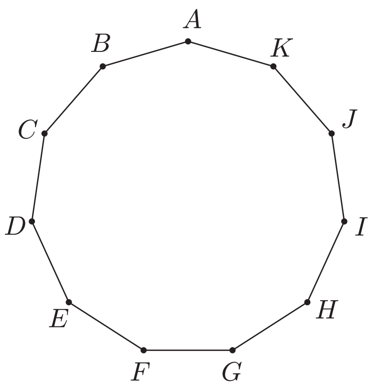
1. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek megoldásai az alábbi egyenletrendszernek!

$$\left.\begin{aligned} x+[y]+\{z\}&=3{,}4\\ [x]+\{y\}+z&=4{,}5\\ \{x\}+y+[z]&=5{,}3 \end{aligned}\right\}$$

($[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli, azaz azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb, mint a. $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli, azaz az a számnak és a egészrészének a különbségét: $\{a\}=a-[a]$.)

2. $a)$ Adjon meg egy olyan különböző pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

$b)$ Bizonyítsa be, hogy nem létezik olyan különböző pozitív egész számokból álló 11 elemű halmaz, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!



3. Adott az a oldalhosszúságú $ABCDEFGHIJK$ szabályos 11-szög. Legyen az AE átlónak és a CF átlónak a metszéspontja M!

Bizonyítsa be, hogy fennáll az $AF=AM+a$ összefüggés!

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek megoldásai az alábbi egyenletrendszernek!

$$\left.\begin{aligned} x+[y]+\{z\}&=3{,}4\\ [x]+\{y\}+z&=4{,}5\\ \{x\}+y+[z]&=5{,}3 \end{aligned}\right\}$$

($[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli, azaz azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb, mint a. $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli, azaz az a számnak és a egészrészének a különbségét: $\{a\}=a-[a]$.)

Megoldás. Összeadva a 3 egyenletet: $2x + 2y + 2z = 13{,}2$. 2 pont

Amiből: $x + y + z = 6{,}6$. 1 pont

A kapott egyenletből rendre kivonva az eredeti egyenleteket:

$$\{y\} + [z] = 3{,}2;$$
$$\{x\} + [y] = 2{,}1 \text{ és}$$
$$[x] + \{z\} = 1{,}3.$$ 2 pont

Figyelembe véve, hogy egy szám egészrésze egész szám, törtrésze pedig a $[0; 1[$ intervallumba eső érték, 1 pont
a kapott egyenletekből rendre

$$[z] = 3 \text{ és } \{y\} = 0{,}2;$$
$$[y] = 2 \text{ és } \{x\} = 0{,}1 \text{ és}$$
$$[x] = 1 \text{ és } \{z\} = 0{,}3.$$ 2 pont

Vagyis $x = 1{,}1$, $y = 2{,}2$ és $z = 3{,}3$ adódik. 1 pont

A kapott értékeket ellenőrizve azok megfelelnek a feladat feltételeinek. 1 pont

2. a) Adjon meg egy olyan különböző pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

b) Bizonyítsa be, hogy nem létezik olyan különböző pozitív egész számokból álló 11 elemű halmaz, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

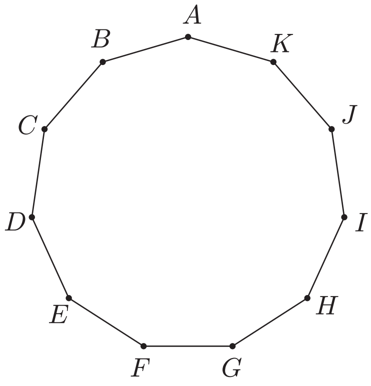
Megoldás. a) Legyen a halmaz elemeinek 6-tal való osztási maradéka rendre 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1! Ekkor, ha a kiválasztott 6 szám közé k db ($k = 1, 2, \ldots, 5$) 6-tal osztva 1 maradékot adó szám kerül, akkor az összeg is 6-tal osztva k maradékot fog adni. 2 pont

Például a $H = \{6; 12; 18; 24; 30; 1; 7; 13; 19; 25\}$ halmaz megfelelő. 1 pont

b) A skatulyaelv értelmében három különböző pozitív egész szám közül mindig kiválasztható kettő, amelynek paritása megegyezik, így összegük páros. Ezért 11 különböző pozitív egész szám közül mindig kiválasztható 5 számpár, amelyek tagjainak összege páros. 3 pont

Az így kapott 5 (kételemű) összeg között vagy van három, amelyek 3-mal osztva különböző maradékot adnak, vagy van három, amelyek 3-mal osztva azonos maradékot adnak (skatulyaelv). Ennek a három összegnek az összege osztható 3-mal. 3 pont

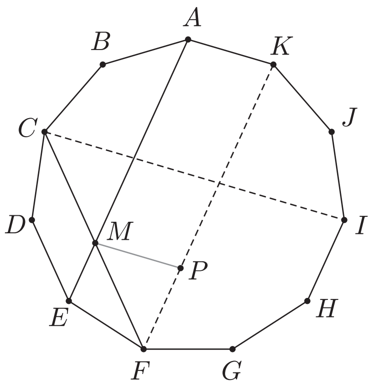
Mivel mindhárom összeg páros, így az összegük osztható 2-vel is, így $2 \cdot 3 = 6$-tal is. Ezzel a módszerrel találtunk 6 számot, amelyek összege osztható 6-tal. 1 pont



3. Adott az a oldalhosszúságú $ABCDEFGHIJK$ szabályos 11-szög. Legyen az AE átlónak és a CF átlónak a metszéspontja M!

Bizonyítsa be, hogy fennáll az $AF = AM + a$ összefüggés!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Be fogjuk bizonyítani, hogy $KF = AM + a$. Mivel $KF = AF$ (hiszen az F-en áthaladó szimmetriatengelyre tükrözve AF-et KF-et kapjuk), ezzel igazoltuk a feladatban szereplő állítást. 1 pont

$KF \parallel AE$, hiszen mindkét átló merőleges a C-n áthaladó szimmetriatengelyre. 1 pont

Vegyük fel az MP szakaszt úgy, hogy párhuzamos legyen az AK oldallal és P a KF átlóra illeszkedjen. 1 pont

Az így kapott $MPKA$ négyszög paralelogramma, mivel szemközti oldalai párhuzamosak. Innen $KP = AM$ és $MP = AK = a$. 2 pont

Így ahhoz, hogy igazoljuk, hogy $KF = KP + PF = AM + a$, elég megmutatnunk, hogy $PF = a$, azaz az MPF háromszög egyenlőszárú ($MP = PF = a$).

Ehhez rajzoljuk be a CI átlót. Az $ICF\sphericalangle = KFC\sphericalangle$, mivel a J-n áthaladó szimmetriatengelyre tükrözve az ICF szöget, a KFC szöget kapjuk. 2 pont

$CI \parallel AK \parallel MP$, mivel mindegyik merőleges az F-en áthaladó szimmetriatengelyre. $PMF\sphericalangle = ICF\sphericalangle$, mivel egyállású szögek. 2 pont

Mindezek alapján $PMF\sphericalangle = KFC\sphericalangle = PFM\sphericalangle$, azaz az MPF háromszög egyenlőszárú, így $MP = PF = a$. Ezzel állításunkat igazoltuk. 1 pont

Részpontok:

1 pont, ha bármilyen formában jelzi, hogy a szabályos 11-szögnek szimmetriatengelyei az egyik csúcson és a szemközti oldal felezőpontján áthaladó egyenesek.

1 pont, ha észreveszi, hogy bizonyos átlók hosszúsága megegyezik.

1 pont, ha észreveszi, hogy bizonyos átlók párhuzamosak.

Kezdők II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, amelyben az 1, 2 és 3 számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel és ezeken a számjegyeken kívül más számjegy nincs a számban?

2. Legyen A, B és C ebben a sorrendben egy egyenes három pontja. Szerkesszük meg az egyenes azonos oldalára az ABD és BCE szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ha az AE egyenest tükrözzük DC egyenesre, akkor a tükörkép átmegy a B ponton!

3. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyekre az

$$x^4 + 4 = py^4$$

egyenlet megoldható az egész számok körében.

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, amelyben az 1, 2 és 3 számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel és ezeken a számjegyeken kívül más számjegy nincs a számban?

1. megoldás. Tekintsük azokat a tízjegyű természetes számokat, amelyek az 1, 2 és 3 számjegyeken kívül más számjegyet nem tartalmaznak.

Ezek száma: 3^{10} =59049. 1 pont

Jelölje ezek közül S_i azok számát, amelyekben az i legfeljebb egyszer szerepel ($i = 1, 2, 3$) és $S_{i;j}$ azok számát, amelyekben az i és a j is legfeljebb egyszer szerepel ($i; j = 1, 2, 3$ és $i \neq j$).

A számjegyek hasonló szerepe miatt: $S_1 = S_2 = S_3$ és $S_{1;2} = S_{1;3} = S_{2;3}$. 3 pont

$S_1 = 10 \cdot 2^9 + 2^{10} = 6144$, mert ekkor az 1-es egyszer vagy egyszer sem fordul elő a számban. 2 pont

$S_{1;2} = 1 + 10 + 10 + 90 = 111$, mert ekkor sem az 1-es, sem a 2-es nem fordul elő vagy az 1-es egyszer és a 2-es nem fordul elő vagy a 2-es egyszer és az 1-es nem fordul elő vagy az 1-es és a 2-es is egyszer fordul elő a számban. 3 pont

Így a logikai szita-formula alapján a kérdezett számok száma:

$$59\,049 - 3 \cdot 6144 + 3 \cdot 111 = 40\,950.$$ 1 pont

2. megoldás(vázlat). Az előforduló 1, 2 és 3 számjegyek gyakorisága szerint négy eset lehet: $6-2-2$, $5-3-2$, $4-4-2$ és $4-3-3$. 1 pont

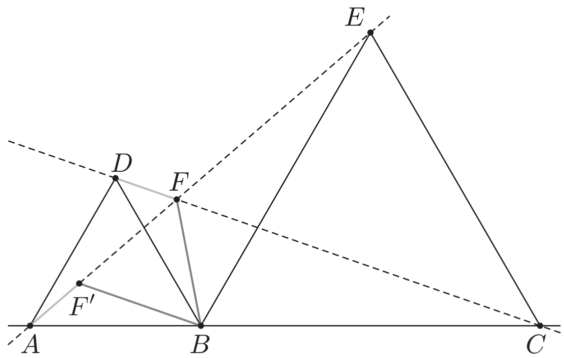
Ha az egyik számjegy hatszor, a másik kettő kétszer fordul elő, akkor a hatszor előforduló számjegy három-féle lehet, és ha ez pl. az 1-es, akkor azon tízjegyű számok száma, amelyekben 6 db 1-es, 2 db 2-es és 2-db 3-as szerepel pl. az ismétléses permutáció képlete szerint: $\frac{10!}{6!\,2!\,2!} = 1260$. Így $3 \cdot 1260 = 3780$ számot kapunk. 2 pont

A többi esetben rendre 15 120, 9450 és 12 600 számot kapunk. 2 – 2 – 2 pont

Tehát a kérdezett számok száma: $3780 + 15\ 120 + 9450 + 12\ 600 = 40\ 950$. 1 pont

2. Legyen A, B és C ebben a sorrendben egy egyenes három pontja. Szerkesszük meg az egyenes azonos oldalára az ABD és BCE szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ha az AE egyenest tükrözzük DC egyenesre, akkor a tükörkép átmegy a B ponton!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Mivel az ABD és BCE háromszög szabályos, ezért a D pontot, illetve a C pontot egy B középpontú $60°$-os forgatás viszi az A, illetve E pontba. 2 pont

Tehát ezzel a forgatással a DC egyenes átvihető az AE egyenesbe. Így a két egyenes $60°$-os szöget zár be egymással. 2 pont

Emiatt elég azt belátni, hogy BF, ahol F a két egyenes metszéspontja, felezi a CFA szöget. 1 pont

Mivel F pont rajta van a DC egyenesen, így a B középpontú $60°$-os forgatással keletkező képe, ami F', rajta van AE-n. 2 pont

Így az $F'BF$ háromszög szabályos, amiből következik, hogy $BFF'\sphericalangle = 60°$. 2 pont

Tehát BF felezi a CFA szöget, így a BF egyenes lesz az AE egyenes CD egyenesre vonatkozó tükörképe. 1 pont

3. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyekre az

$$x^4 + 4 = py^4$$

egyenlet megoldható az egész számok körében.

Megoldás. $p = 2$ esetén py^4 páros szám, így szükségképpen x is az. Ekkor az egyenlet baloldala 4-gyel osztható, ezért y-nak is párosnak kell lennie. Ha x és y is páros szám, akkor

$16 \mid x^4$ és $16 \mid y^4$, ami azt jelentené, hogy az egyenlet baloldala 16-tal osztva 4 maradékot adna, míg a jobboldal 16-tal osztható lenne, vagyis az egyenlőség nem állhatna fenn. 1 pont

Ha p páratlan prímszám, akkor x és y különböző paritása esetén az egyenlet két oldalán is különböző paritású szám állna, vagyis ez az eset nem valósulhat meg. Ha x és y is páros lenne, akkor a korábbiak szerint a 16-tal való osztási maradékok nem egyeznének meg az egyenlet két oldalán szereplő kifejezéseknél. Így a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy p, x és y egyaránt páratlan szám legyen. 1 pont

Írjuk fel az egyenletet az alábbi formában:

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = py^4,$$

$$\left(x^2 + 2\right)^2 - (2x)^2 = py^4,$$

$$\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right) = py^4.$$ 2 pont

A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy az egyenlőség bal oldalán szereplő szorzótényezők legnagyobb pozitív közös osztója 1.

Ha $d \mid x^2 + 2x + 2$ és $d \mid x^2 - 2x + 2$ ($d \in \mathbb{N}$), akkor $d \mid \left(x^2 + 2x + 2\right) - \left(x^2 - 2x + 2\right) = 4x$.

Mivel a vizsgált tényezők páratlan x esetén páratlan számok, ezért d is az, ami azt jelenti, hogy $d \mid x$. Ezt kihasználva $d \mid x^2 + 2x$ és $d \mid \left(x^2 + 2x + 2\right) - \left(x^2 + 2x\right) = 2$. Mivel d páratlan szám, ezért d valóban csak 1 lehet. 2 pont

Felhasználva, hogy $x^2 - 2x + 2$ és $x^2 + 2x + 2$ legnagyobb közös osztója 1, két esetet vizsgálhatunk:

1. eset: Léteznek olyan a, b természetes számok, melyekre $(a; b) = 1$ és

$$x^2 - 2x + 2 = a^4 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x + 2 = pb^4.$$

Ekkor

$$(x - 1)^2 + 1 = \left(a^2\right)^2 \quad \text{és} \quad (x + 1)^2 + 1 = pb^4.$$

Mivel az $\left(a^2\right)^2$ és $(x - 1)^2$ négyzetszámok különbsége 1, ezért $a^4 = 1$ és $(x - 1)^2 = 0$, amiből $a = 1$ és $x = 1$. Ezen értékeket a másik egyenletbe helyettesítve $b = 1$ és $p = 5$. 2 pont

2. eset: Léteznek olyan c, d természetes számok, melyekre $(c; d) = 1$ és

$$x^2 - 2x + 2 = pc^4 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x + 2 = d^4.$$

Ekkor

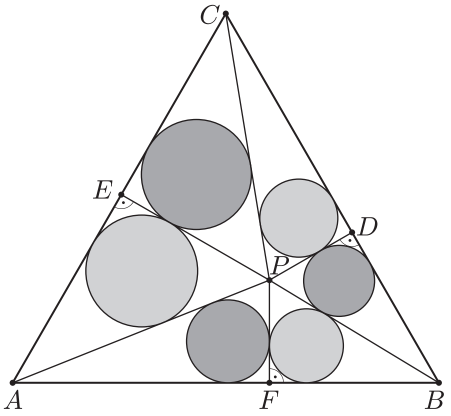
$$(x - 1)^2 + 1 = pc^4 \quad \text{és} \quad (x + 1)^2 + 1 = \left(d^2\right)^2.$$

Mivel a $\left(d^2\right)^2$ és $(x + 1)^2$ négyzetszámok különbsége 1, ezért $d^4 = 1$ és $(x + 1)^2 = 0$, amiből $d = 1$ és $x = -1$. Ezen értékeket a másik egyenletbe helyettesítve $c = 1$ és $p = 5$. 1 pont

Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az egyenlet a feltételeknek megfelelően csak $p = 5$ esetén oldható meg. Ekkor az egyenlet x, y-ra adódó megoldásai az $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$ és $(-1; -1)$ számpárok. 1 pont

Kezdők III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok



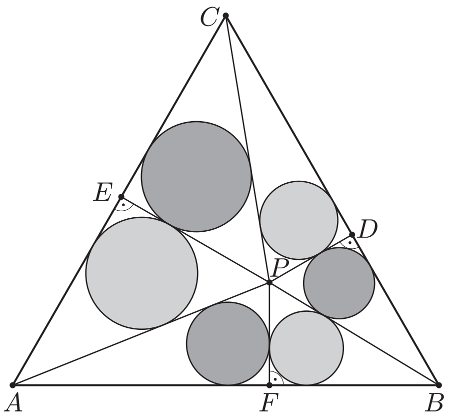
1. Legyen P az ABC szabályos háromszög egy belső pontja, D, E, F pontok pedig a P-ből a BC, CA és AB oldalakra állított merőlegesek talppontjai.

Bizonyítsuk be, hogy a PAF, PBD, PCE, illetve PAE, PBF, PCD háromszögek beírt köreinek sugarait összegezve ugyanazt az értéket kapjuk.

2. Mely $n \geqq 3$ egész számok esetén létezik n darab páronként különböző pozitív egész szám úgy, hogy mindegyik osztója a többi összegének?

3. Az $1, 2, \ldots, 2015$ számok közül legfeljebb hányat lehet úgy kiválasztani, hogy a kiválasztottak közül semelyik két különbözőnek az összege nincs a kiválasztottak között? Adjuk meg az összes olyan kiválasztást, amellyel a lehető legtöbb számot kiválaszthatjuk.

Megoldások és javítási útmutató



1. Legyen P az ABC szabályos háromszög egy belső pontja, D, E, F pontok pedig a P-ből a BC, CA és AB oldalakra állított merőlegesek talppontjai.

Bizonyítsuk be, hogy a PAF, PBD, PCE, illetve PAE, PBF, PCD háromszögek beírt köreinek sugarait összegezve ugyanazt az értéket kapjuk.

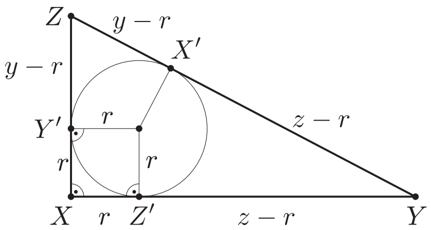
Megoldás. Használjuk fel az alábbi lemmát:

Az XYZ derékszögű háromszögben, ha a $ZXY\sphericalangle = 90^\circ$, akkor a beírt kör sugara $r = \frac{1}{2}(y+z-x)$, ahol x, y, z jelöli a háromszög megfelelő oldalainak hosszát.

A lemma igazolása:

Ha X', Y', Z' jelöli az érintési pontokat, akkor felhasználva, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak

$$YZ = YX' + X'Z = YZ' + ZY' = XY - XZ' + ZX - XY'.$$



Tehát

$$x = z - r + y - r,$$

amiből

$$r = \frac{1}{2}(y+z-x).$$ 2 pont

A lemma alapján a feladat állításának igazolásához elegendő belátni, hogy

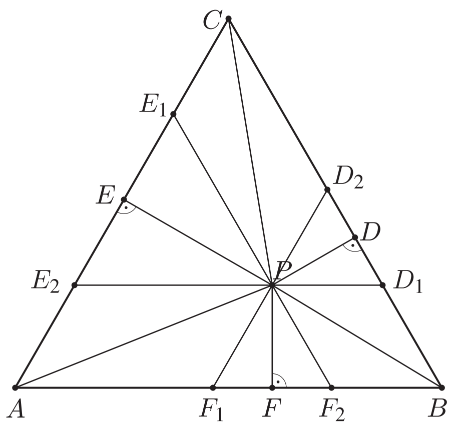
$$\frac{1}{2}\big[(AF+FP-PA)+(BD+DP-PB)+(CE+EP-PC)\big] =$$

$$= \frac{1}{2}\big[(BF+FP-PB)+(CD+DP-PC)+(AE+EP-PA)\big],$$

ami ekvivalens az $AF + BD + CE = AE + BF + CD$ egyenlőséggel. 2 pont

Húzzunk párhuzamosokat a P ponton keresztül az ABC háromszög oldalaival. A BC, CA, AB oldalakon keletkező metszéspontokat jelöljük az ábra szerint D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2-vel. A keletkező D_1D_2P, E_1E_2P, F_1F_2P háromszögek szabályosak lesznek, mivel szögeik egyállásúak az ABC háromszög szögeivel. 2 pont

Az AF_1D_2C, BD_1E_2A, CE_1F_2B szimmetrikus trapézok szárainak egyenlőségét felhasználva:



(1) $AF_1 = CD_2$,

(2) $BD_1 = AE_2$,

(3) $CE_1 = BF_2$. 2 pont

Mivel a szabályos háromszög magassága felezi a hozzá tartozó oldalt, ezért

(4) $F_1F = F_2F$,

(5) $D_1D = D_2D$,

(6) $E_1E = E_2E$. 1 pont

A 6 számozott összefüggés megfelelő oldalait összeadva:

$$AF_1 + F_1F + BD_1 + D_1D + CE_1 + E_1E = AE_2 + E_2E + BF_2 + F_2F + CD_2 + D_2D,$$

$$AF + BD + CE = AE + BF + CD \qquad \text{1 pont}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

2. Mely $n \geqq 3$ egész számok esetén létezik n darab páronként különböző pozitív egész szám úgy, hogy mindegyik osztója a többi összegének?

Megoldás. Legyenek ezek a számok $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Az oszthatósági feltétel pontosan akkor teljesül, ha mindegyikük osztója $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$-nek, vagyis ha minden $1 \leqq i \leqq n$ esetén létezik olyan k_i pozitív egész szám, hogy $S = k_i a_i$, azaz $a_i = S/k_i$. 2 pont

Mivel S éppen az a_i számok összege, ezért $\sum 1/k_i = 1$, $1 \leqq i \leqq n$. Ezért először olyan k_i páronként különböző pozitív egész számokat keresünk, melyek reciprokösszege 1. 1 pont

Belátjuk, hogy ilyenek minden $n \geqq 3$ esetén léteznek. Ha $n = 3$, akkor $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 6$ megfelelő választás. 1 pont

Ha pedig valamely $n \geqq 3$-ra már sikerült megadni n darab páronként különböző pozitív egész számot, melyek reciprokösszege 1, akkor közülük a legnagyobbat (ezt jelöljük y-nal) elhagyva, és $y+1$-et, valamint $y(y+1)$-et bevéve $n+1$ páronként különböző pozitív egész számot kapunk, amelyek reciprokösszege szintén 1, hiszen $1/y = 1/(y+1) + 1/\big[y(y+1)\big]$. Innen indukcióval következik az állítás. 3 pont

Tegyük fel tehát, hogy találtunk már olyan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ páronként különböző pozitív egész számokat, melyek reciprokösszege 1. Legyen K a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ számok legkisebb közös többszöröse. Ekkor $a_i = K/k_i$ számok $(1 \leqq i \leqq K)$ olyan páronként különböző pozitív egészek, amelyek összege K, és minden i-re teljesül, hogy $a_i \mid K$. Beláttuk, hogy minden $n \geqq 3$-ra léteznek ilyen számok. 3 pont

Megjegyzés: A k_i számokra egy másik lehetséges konstrukció: $k_1 = 2$, $k_2 = 2^2$, $\ldots$, $k_{n-2} = 2^{n-2}$, $k_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-3}$, $k_n = 3 \cdot 2^{n-2}$. Ezzel a választással $K = 3 \cdot 2^{n-2}$, és így az $a_1 = 3 \cdot 2^{n-3}$, $a_2 = 3 \cdot 2^{n-4}$, $\ldots$, $a_{n-2} = 3$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$ megoldás adódik.

(Aki bármilyen módon minden $n \geqq 3$-ra megad egy helyes konstrukciót, az 3 pontot kap, a fennmaradó 7 pont a konstrukció helyességének igazolásáért jár.)

3. Az $1, 2, \ldots, 2015$ számok közül legfeljebb hányat lehet úgy kiválasztani, hogy a kiválasztottak közül semelyik két különbözőnek az összege nincs a kiválasztottak között? Adjuk meg az összes olyan kiválasztást, amellyel a lehető legtöbb számot kiválaszthatjuk.

Megoldás. Először bebizonyítjuk, hogy 1009 darab számot nem lehet kiválasztani. Legyen ugyanis a legnagyobb kiválasztott szám x. Ha x páratlan, akkor az x-nél kisebb számokat párokba rendezzük: $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, $\ldots$, $(x/2 - 1/2, x/2 + 1/2)$. Világos, hogy minden párból legfeljebb egy szám választható ki, hiszen az egy párban levők különböznek, és az összegük x. Mivel összesen $x/2$-nél kevesebb pár van, az x-szel együtt a kiválasztható számok száma kisebb, mint $x/2+1 < 1009$ (hiszen x legfeljebb 2015). Ha pedig x páros, akkor legyenek a párok $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, ..., $(x/2-1, x/2+1)$. Ismét egy párból legfeljebb egy szám választható, a párok száma legfeljebb $x/2-1$, az $x/2$-vel és az x-szel együtt is a kiválasztható számok száma legfeljebb $x/2+1 < 1009$ (hiszen x legfeljebb 2014).

(*Pontozás:* 1 pont annak bizonyítására, hogy 1009 számot nem lehet kiválasztani.)

Második lépésként példákkal megmutatjuk, hogy 1008 szám viszont kiválasztható. Négy példánk:

1. az összes páratlan szám: 1, 3, 5, ..., 2015: ez jó, hiszen két páratlan szám összege páros;
2. a lehető legnagyobbak: 1008, 1009, 1010, ..., 2015: ez jó, hiszen a két legkisebb összege is nagyobb, mint a legnagyobb;
3. az előző módosítása (az 1008-at 1007-re cseréljük): 1007, 1009, 1010, 1011, ..., 2015: ez jó, hiszen a két legkisebb összege is nagyobb, mint a legnagyobb;
4. a 2. eltoltja: 1007, 1008, 1009, ..., 2014: ez jó, mert a két legkisebb összege is nagyobb, mint a legnagyobb.

(*Pontozás:* 1 pont, ha valamelyik példát megadja, és megindokolja, az miért jó.)

Ezzel a feladat első részét megoldottuk: 1008 szám kiválasztható a megadott feltétellel, több nem.

A feladat második részét úgy oldjuk meg, hogy bebizonyítjuk, pontosan csak a négy megadott konstrukció létezik 1008 szám kiválasztására.

(*Pontozás:* 1 pont, ha megsejti, hogy csak ez a négy a jó.)

Tegyük fel, hogy kiválasztottunk 1008 számot a feltételnek megfelelően. Először belátjuk, hogy a legnagyobb szám legalább 2014. Legyen ugyanis indirekten a legnagyobb szám $x < 2014$. Ha x páratlan, akkor az $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, ..., $(x/2-1/2, x/2+1/2)$ párok mindegyikéből legfeljebb egy lehet a kiválasztottak között. Az x-szel együtt ez kevesebb, mint $x/2+1$, ami kevesebb, mint 1008, ha $x < 2014$. Ha pedig x páros, akkor az $(1, x-1)$, $(2, x-2)$, ..., $(x/2-1, x/2+1)$ párok mindegyikéből legfeljebb egy lehet a kiválasztottak között. Az $x/2$-vel és az x-szel együtt ez legfeljebb $x/2+1$, ami kevesebb, mint 1008, ha $x < 2014$. Ezzel ellentmondásra jutottunk, beláttuk tehát, hogy a legnagyobb kiválasztott szám legalább 2014.

(*Pontozás:* 1 pont annak bizonyítására, hogy a legnagyobb kiválasztott szám legalább 2014.)

Ha a legnagyobb kiválasztott szám a 2014, akkor a nála kisebb számokat rendezzük párokba: $(1, 2013)$, $(2, 2012)$, ..., $(1006, 1008)$, és kimaradt az 1007. Mivel egy párból csak egy szám választható (egy párban az összeg 2014), és 1006 darab párunk van, a kiválasztott számok között van az 1007, valamint minden párból pontosan egy szám. Most belátjuk, hogy minden párból a nagyobb számot kellett kiválasztani. Legyen ugyanis indirekten $y < 1007$ egy kiválasztott szám. Ekkor $y+1007$ nincs kiválasztva (hiszen két különböző kiválasztott szám, y és 1007 összege). Ekkor annak párja, $2014-(1007+y) = 1007-y$ ki van választva. Ez azonban ellentmondás, hiszen y és $1007-y$ összege 1007, és ez mindhárom kiválasztott szám, továbbá y és $1007-y$ különböznek, hiszen y egész. Az ellentmondás tehát azt adja, hogy minden párból a nagyobb számot választottuk, így a kiválasztott számok éppen a 4. konstrukciót adják.

(*Pontozás:* 2 pont annak bizonyítására, hogy ha a legnagyobb szám a 2014, akkor egyedül a 4. konstrukció jó.)

Mostantól feltesszük, hogy a legnagyobb kiválasztott szám a 2015. A nála kisebb számokat osszuk párokba: $(1,2014)$, $(2,2013)$, $\ldots$, $(1007,1008)$. Világos, hogy minden párból pontosan egy számot választottunk ki.

Először nézzük azt az esetet, amikor kiválasztottuk az 1-et. Ebben az esetben a 2014-et nem választottuk ki. Belátjuk, hogy a 2-t nem választhattuk ki. Ha ugyanis kiválasztottuk volna, akkor a 2-nél nagyobb számokat osszuk hármasokba: $(3,4,5)$, $(6,7,8)$, $\ldots$, $(2013,2014,2015)$. Világos, hogy semelyik hármasból nem választhattunk ki egynél több számot: ha már kettőt választanánk, akkor azok különbsége 1 vagy 2 lenne, ahonnan átrendezve kapnánk két különböző kiválasztott számot, melyek összege szintén kiválasztott. A hármasok száma $2013/3 = 671$, még az 1-gyel és a 2-vel is jóval 1008 alatt maradunk. Tehát a 2-t nem választhattuk ki. Ekkor a párját, a 2013-at kiválasztottuk. Ekkor a 2012-t nem ($1+2012 = 2013$). Ekkor annak párját, a 3-at igen. Ekkor a 4-et nem ($1+3 = 4$). Ekkor annak párját, a 2011-et igen. És így tovább, végül minden páratlan számot kiválasztottunk, ez éppen az 1. konstrukciót adja. (Ez teljesen rendben van, de ha valaki formálisan akarja az indukciót, akkor: ha egy 1-nél nagyobb, 2013-nál kisebb z páratlan számot kiválasztottunk, akkor a nála eggyel nagyobb párosat ($z+1$) nem, ekkor annak párját ($2015-z-1$) igen, az annál eggyel kisebbet ($2015-z-2$) nem, ekkor annak párját ($z+2$) igen. És az indukció a 3-ról indítható.)

(*Pontozás:* 2 pont annak bizonyítására, hogy ha az 1-et kiválasztottuk, akkor az egyedüli helyes konstrukció az 1. konstrukció.)

A továbbiakban tehát feltehető, hogy a 2015 mellett a 2014-et is kiválasztottuk, az 1-et pedig nem. Tekintsük a következő sorozatot: 2013, 2, 2012, 3, 2011, 4, 2010, 5, 2009, 6, $\ldots$, 1010, 1005, 1009, 1006, 1008, 1007. Ez a sorozat 2012 tagú, és 1006 kiválasztott szám van benne. Világos, hogy nem lehet két szomszédos tagja kiválasztva, hiszen azok összege 2015 vagy 2014. Osszuk a sorozatot a következő módon párokba: $(2013,2)$, $(2012,3)$, $(2011,4)$, $(2010,5)$, $(2009,6)$, $\ldots$, $(1010,1005)$, $(1009,1006)$, $(1008,1007)$. Minden párból pontosan egy tag van kiválasztva. Ha egy párból az első tagot választottuk, akkor az őt megelőző párból nem lehetett a második tagot (az összegük 2014 lenne), tehát a megelőző párból is az első tagot választottuk. Ugyanígy, ha egy párból a második tagot választottuk, akkor a következő párból nem választhattuk az első tagot, tehát a másodikat kellett. Összességében: (balról jobbra haladva a párokon) valameddig az első tagot választottuk, utána pedig a második tagot. Az első párból biztosan az első tagot választottuk, hiszen ha nem, akkor mindenhonnan a második tagot kellett, de ez nem lehet, például $2+3 = 5$ miatt. Ekkor azonban már az utolsó két párból sem választhattuk a második tagot, hiszen $2013 = 1006+1007$. Tehát kétféleképpen választhattunk: vagy mindenhonnan az első tagot (2. konstrukció), vagy az utolsó kivételével mindenhonnan az első tagot, az utolsóból a második tagot (3. konstrukció).

(*Pontozás:* 2 pont annak bizonyítására, hogy ha a 2014 és a 2015 is kiválasztásra került, akkor csak a 2. és a 3. konstrukció létezik.)

Pontozás összefoglalva: A feladat második része lényegesen nehezebb, ezért a pontozás 2 (1. rész) + 8 (2. rész). Az első részben 1–1 pontot ér a kérdezett mennyiségre adott felső becslés (akármilyen helyes bizonyítással) és az alsó becslés (akármelyik helyes konstrukcióval). A feladat 2. részében 1 pont jár a végeredmény megsejtésére (önmagában a négy konstrukcióra nem, csak ha valahol kiderül, hogy ezeket véli az összes lehetségesnek). Jár 1 pont arra, ha a belátja, hogy az első 2013 szám között nincs 1008 megfelelő. Innen a feladat három különböző szálra vezet, mindegyiknek az elvarrásáért 2–2 pont jár. Természetesen mindenhol jár a pont egyenértékű részeredményekre.

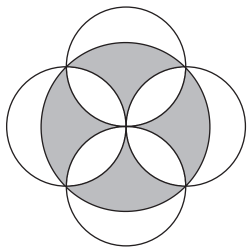
Haladók – I. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. Ha $A = 1\,111\,111\,111$ és $B = 111\,111$, akkor mennyi A és B legnagyobb közös osztója?

2. Mennyi az $f(x) = \left|x^2 - x\right| + \left|x^2 + 3x + 2\right|$ függvény legnagyobb és legkisebb értéke a $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ zárt intervallumon? Mely helyeken veszi fel ezeket az értékeket?

3. Mekkora a színezett részek területeinek összege, ha a kis körök sugara r?



4. Legyen $A = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)$, $C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Bizonyítsuk be, hogy a $K = \sqrt{(A + B - C) \cdot n + 2}$ kifejezés értéke minden n természetes szám esetén irracionális!

5. Egy kocka csúcsait megcímkézzük az $1, 2, \ldots, 8$ számokkal (minden címkét pontosan egy csúcsra írunk fel). A kocka egy lapjának értéke: a lapot határoló csúcsokon lévő számok összege.

Legfeljebb mekkora lehet egy kocka legkisebb értékű lapjának értéke?

Megoldások és javítási útmutató

1. Ha $A = 1\,111\,111\,111$ és $B = 111\,111$, akkor mennyi A és B legnagyobb közös osztója?

Megoldás. Felhasználjuk, hogy két szám legnagyobb közös osztója a két szám különbségét is osztja: $d = (A; B) \Rightarrow d \mid A - B = 1\,111\,000\,000$. 1 pont

Mivel A és B páratlan, továbbá egyik sem osztható 5-tel, ezért a legnagyobb közös osztó sem 2-vel sem öttel nem osztható. Így az előző feltételből $d \mid 1111$ következik. 2 pont

Most azt tudjuk, hogy a keresett d B-nek és 1111-nek is osztója, tehát ezek különbségét is osztja: $d \mid 111\,111 - 1111 = 110\,000$. Elismételve a fenti okoskodást, innen $d \mid 11$ következik. 2 pont

Az eddigiek alapján $d = 1$ vagy $d = 11$. Könnyű ellenőrizni (vagy a 11-es oszthatósági szabályt ismerve is következik), hogy $11 \mid A$ és $11 \mid B$.

Tehát a keresett érték, A és B legnagyobb közös osztója a 11. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Mennyi az $f(x) = \left|x^2 - x\right| + \left|x^2 + 3x + 2\right|$ függvény legnagyobb és legkisebb értéke a $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ zárt intervallumon? Mely helyeken veszi fel ezeket az értékeket?

Megoldás. A másodfokú kifejezések előjelének vizsgálata, az abszolút érték felbontása:

$$\begin{aligned} \left|x^2 - x\right| &= x^2 - x, \quad \text{ha} \quad x \in \left]-\infty; 0\right] \cup \left[1; \infty\right[, \\ \left|x^2 - x\right| &= x - x^2, \quad \text{ha} \quad x \in \left]0; 1\right[, \end{aligned}$$ 1 pont

$$\begin{aligned} \left|x^2 + 3x + 2\right| &= x^2 + 3x + 2 \qquad \text{ha} \quad x \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left[-1; \infty\right[, \\ \left|x^2 + 3x + 2\right| &= -x^2 - 3x - 2, \quad \text{ha} \quad x \in \left]-2; -1\right[. \end{aligned}$$ 1 pont

A megadott intervallumon a függvényt a következő hozzárendelési szabályok adják meg:

$$f(x) = -4x - 2, \qquad \text{ha} \quad x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right[,$$ 1 pont

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}, \qquad \text{ha} \quad x \in [-1; 0],$$ 1 pont

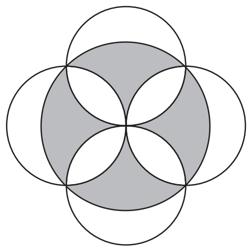
$$f(x) = 4x + 2, \qquad \text{ha} \quad x \in \left]0; \frac{1}{2}\right].$$ 1 pont

Az $f(x)$ függvény folytonos az adott intervallumon. Grafikonja szimmetrikus az intervallum felezési pontjára, az $x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ intervallumon szigorú monoton csökkenő, az $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ intervallumon szigorú monoton növekedő, mivel az intervallum zárt, így a maximumát a végpontokban veszi fel. (Grafikon felrajzolása vagy rövid indoklás.) 1 pont

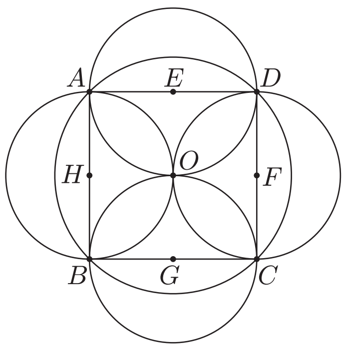
A minimumát az $x = -\frac{1}{2}$ helyen veszi fel, $f_{\min} = \frac{3}{2}$, a maximumát az $x = \frac{1}{2}$ és $x = -\frac{3}{2}$ helyeken veszi fel, és $f_{\max} = 4$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Mekkora a színezett részek területeinek összege, ha a kis körök sugara r?



Megoldás.



Az O középpontú négyes forgásszimmetria miatt az $ABCD$ négyszög négyzet. 1 pont

Ha r a kis kör sugara, akkor az $ABCD$ négyzet oldala $2r$. 1 pont

A nagyobb kör sugara a négyzet átlójának fele, azaz $R = \sqrt{2}r$. 1 pont

Az A és O végpontú, két negyedkörrel határolt területet két negyedkör területének összegéből az $AEOH$ négyzet területét levonva kapjuk meg:

$$T_{AO} = 2\frac{r^2\pi}{4} - r^2.$$ 1 pont

1. megoldás. A nagyobb, R sugarú körben, az $ABCD$-n kívül lévő területek összegét megkapjuk, ha az R sugarú kör területéből levonjuk a négyzet területét:

$$T_{\text{külső}} = R^2\pi - (2r)^2.$$ 1 pont

Vonjuk le az $AEOH$ négyzet területéből a T_{AO} területet! Az $ABCD$ négyzetben lévő színezett részek területek összege ennek négyszerese lesz:

$$T_{\text{belső}} = 4 \cdot \left(r^2 - T_{AO}\right) = 4 \cdot \left(r^2 - \left(2r^2\frac{\pi}{4} - r^2\right)\right) = 4 \cdot \left(2r^2 - r^2\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 8r^2 - 2r^2\pi = 8r^2 - R^2\pi.$$ 1 pont

Így a keresett színezett részek összege $T_{\text{külső}} + T_{\text{belső}} = 4r^2$. 1 pont

2. megoldás. A színezett részek összegét megkaphatjuk, ha az R sugarú kör területéből kivonjuk a T_{AO} terület négyszeresét:

$$T = R^2\pi - 4 \cdot T_{AO}.$$ 1 pont

Behelyettesítve R-et és T_{AO} értékét, majd átalakítva:

$$T = \left(\sqrt{2}r\right)^2\pi - 4 \cdot \left(2\frac{r^2\pi}{4} - r^2\right) = 2r^2\pi - 2r^2\pi + 4r^2 = 4r^2. \qquad \text{1 pont}$$

Így a keresett színezett részek összege $T = 4r^2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Legyen $A = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, $B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)$, $C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Bizonyítsuk be, hogy a $K = \sqrt{(A + B - C) \cdot n + 2}$ kifejezés értéke minden n természetes szám esetén irracionális!

Megoldás. Az A, B és C kifejezéseket hozzuk egyszerűbb alakra.

Az A kifejezés a nevező gyöktelenítésével

$$A = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

alakra hozható. 1 pont

A B kifejezés egy nevezetes azonosság felismerésével (vagy zárójelfelbontás útján) a

$$B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2\sqrt{3}}\right) = 5 - 2\sqrt{3}$$

alakot ölti. 1 pont

A C kifejezés négyzetgyök alatti része egy kéttagú különbség négyzete, ezért

$$C = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 - 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}. \qquad \text{2 pont}$$

Ezen értékeket behelyettesítve $A+B-C = 2+\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right) = 5$ adódik, tehát a vizsgálandó kifejezés a $K = \sqrt{5n+2}$. 1 pont

Indirekt tegyük fel, hogy K valamilyen n esetén racionális. Mivel n természetes szám, ezért $5n+2$ is az, tehát ha $\sqrt{5n+2}$ racionális, akkor egész is, vagyis $5n+2$ négyzetszám. 1 pont

Viszgáljuk meg, hogy egy természetes szám négyzete milyen maradékot adhat 5-tel osztva.

– ha a szám $5k$ alakú, akkor a négyzete $25k^2$ alakú, tehát a maradék 0.

– ha a szám $5k \pm 1$ alakú, akkor a négyzete $25k^2 \pm 10k + 1$ alakú, tehát a maradék 1.

– ha a szám $5k \pm 2$ alakú, akkor a négyzete $25k^2 \pm 20k + 4$ alakú, tehát a maradék 4.

Más lehetőség nincs, tehát egy négyzetszám 5-tel osztva nem adhat 2 maradékot, így $5n+2$ nem lehet négyzetszám. Ellentmondásra jutottunk, vagyis K valóban minden természetes n értékre irracionális. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy kocka csúcsait megcímkézzük az $1, 2, \ldots, 8$ számokkal (minden címkét pontosan egy csúcsra írunk fel). A kocka egy lapjának értéke: a lapot határoló csúcsokon lévő számok összege.

Legfeljebb mekkora lehet egy kocka legkisebb értékű lapjának értéke?

Megoldás. Mivel minden címkét háromszor számolunk (hiszen minden csúcs 3 laphoz tartozik), így a hat lap összértéke: $3 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8) = 108$. 1 pont

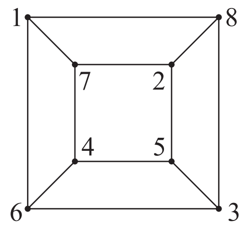
Így a legkisebb értékű lap értéke legfeljebb $108/6 = 18$.

(*Megjegyzés:* Ha a diák azzal érvel, hogy egy átlagos lap értéke 18, és mivel nem lehet minden lap értéke nagyobb, mint az átlag $\rightarrow$ így legfeljebb 18 a legkisebb értékű lap értéke kapja meg az $1+2$ pontot.) 2 pont

Ahhoz, hogy a legkisebb összeg 18 legyen az kell, hogy az összes többi lapösszeg is 18 legyen.

(*Megjegyzés:* Emiatt a kocka párhuzamos 4 élén felváltva a, $18-a$, a, $18-a$ összegeknek kell szerepelni, ami miatt könnyű találni jó megoldást.) 1 pont

És ez meg is valósítható, például az alábbi módon:



3 pont

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Legyen $f(x) = ax + b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az

$$|f(0) - 1|, \quad |f(1) - 3|, \quad |f(2) - 9|$$

számok mindegyike 1-nél kisebb.

2. Határozzuk meg azokat a négyjegyű számokat, ahol az első két számjegyből álló szám és az utolsó két számjegyből álló szám összegének négyzete egyenlő az eredeti számmal!

3. Az O középpontú körvonal két pontja A és B, továbbá $AOB\sphericalangle = 60°$. A rövidebb AB ív tetszőleges belső pontja M. Bizonyítsuk be, hogy az $OBMA$ négyszög középvonalai egymásra merőlegesek. (A négyszög középvonalainak a szemközti oldalak felezőpontját összekötő szakaszokat nevezzük.)

4. Soma az ötödik születésnapi bulijára 5 barátját hívhatta meg. El is készült az 5 névre szóló meghívó, és készült hozzá 5 felcímzett boríték is. Soma azonban még nem tud olvasni, és úgy rakta be a borítékokba a meghívókat, hogy végül senki sem a sajátját kapta kézhez. Hányféleképpen lehet így elrendezni a meghívókat?

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen $f(x) = ax + b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az

$$\left|f(0) - 1\right|, \quad \left|f(1) - 3\right|, \quad \left|f(2) - 9\right|$$

számok mindegyike 1-nél kisebb.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem teljesül, azaz mégis létezik olyan polinom, hogy a három szám mindegyike kisebb 1-nél. 1 pont

Az elsőből $|b - 1| < 1$, azaz $0 < b < 2$,
a másodikból $|a + b - 3| < 1$, azaz $2 < a + b < 4$,
a harmadikból $|2a + b - 9| < 1$, azaz $8 < 2a + b < 10$ adódik. 3 pont

Az első és a harmadik összegét 2-vel osztva $4 < a + b < 6$ következik. 2 pont

Ezt összevetve a másodikkal ellentmondásra jutunk, ezzel igazoltuk az állítást. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg azokat a négyjegyű számokat, ahol az első két számjegyből álló szám és az utolsó két számjegyből álló szám összegének négyzete egyenlő az eredeti számmal!

Megoldás. Legyen a keresett szám $\overline{abcd}$. Ekkor $\overline{abcd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2$.

Legyen $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$. Így az egyenlet az alábbi alakot ölti: $(x + y)^2 = 100x + y$. 1 pont

Átrendezve:

$$(x + y)^2 - (x + y) = 99x \implies (x + y)(x + y - 1) = 99x. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel $x + y$ és $x + y - 1$ relatív prímek, ezért csak különböző prímosztóik lehetnek. 1 pont

a) 11 is és 9 is osztója az $x + y$ számnak. Ekkor a 20 és 198 közötti egész számok közül az egyetlen lehetséges megoldás: $x + y = 99$, ebből $x = 98$ és $y = 1$. A keresett szám a 9801. 1 pont

$b)$ 11 osztója az $x+y$, 9 osztója az $x+y-1$ számnak. Ekkor a 20 és 198 közötti egész számok közül az egyetlen lehetséges megoldás: $x+y=55$, ebből $x=30$ és $y=25$. A keresett szám a 3025. 1 pont

$c)$ 9 osztója az $x+y$, 11 osztója az $x+y-1$ számnak. Ekkor a 20 és 198 közötti egész számok közül az egyetlen lehetséges megoldás: $x+y=45$, ebből $x=20$ és $y=25$. A keresett szám a 2025. 1 pont

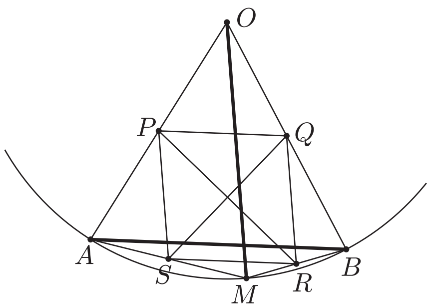
$d)$ A 11 és 9 osztója az $x+y-1$ számnak nem fordulhat elő, mert ekkor x 99-nél nagyobb lenne. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha az $a)-c)$ részben csak a helyes megoldásokat találja meg, de nem utal arra, hogy más megoldás nincs, erre a részre 1 pontot kaphat.

3. Az O középpontú körvonal két pontja A és B, továbbá $AOB\sphericalangle = 60^\circ$. A rövidebb AB ív tetszőleges belső pontja M. Bizonyítsuk be, hogy az $OBMA$ négyszög középvonalai egymásra merőlegesek. (A négyszög középvonalainak a szemközti oldalak felezőpontját összekötő szakaszokat nevezzük.)

Megoldás.



Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján.

A feladat állításában szereplő középvonalak a PR és QS szakaszok.

Először megmutatjuk, hogy $PQRS$ paralelogramma. Az ABO háromszögben PQ középvonal, ezért párhuzamos AB-vel, és fele akkora. Hasonlóan az AMB háromszögben SR középvonal, ezért szintén párhuzamos AB-vel, és ugyancsak fele akkora. A két észrevételt összegezve PQ és RS párhuzamos egymással, és hosszuk megegyezik, vagyis $PQRS$ valóban paralelogramma. 2 pont

A fentiekhez hasonlóan az is megkapható, hogy a PS és QR szakaszok az OM szakasszal párhuzamosak és egymással egyenlő hosszúak. 1 pont

Azt akarjuk belátni, hogy a $PQRS$ paralelogramma átlói egymásra merőlegesek. Ez pontosan akkor teljesül, ha a paralelogramma rombusz is egyben. 1 pont

Ez a fentiek alapján akkor lesz igaz, ha $AB=OM$, hiszen $PQ=\frac{1}{2}AB$ és $QR=\frac{1}{2}OM$. 1 pont

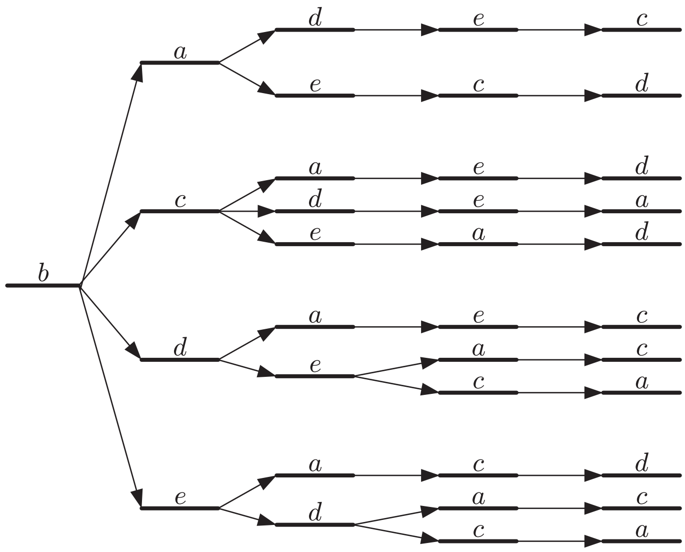
Ez pedig igaz, hiszen AOB szabályos háromszög, vagyis AB egyenlő a kör sugarával, így OM-mel is. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Soma az ötödik születésnapi bulijára 5 barátját hívhatta meg. El is készült az 5 névre szóló meghívó, és készült hozzá 5 felcímzett boríték is. Soma azonban még nem tud olvasni, és úgy rakta be a borítékokba a meghívókat, hogy végül senki sem a sajátját kapta kézhez. Hányféleképpen lehet így elrendezni a meghívókat?

I. megoldás. Jelöljük a meghívott gyerekeket A, B, C, D, E-vel, a nekik megcímzett borítékokat a, b, c, d, e-vel.

Az A meghívója a b, c, d és e borítékjába kerülhetett. Ha A meghívója a b-nek címzett borítékba került, akkor a B meghívója az a, c, d és e körül kerülhetett ki. A további lehetőségeket ábrázoljuk az alábbi fagráffal:



A függőleges oszlopokban rendre A, B, C, D és E lehetséges borítékjai szerepelnek. 5 pont

Mivel az az eset, amikor A a c, d vagy e borítékban kapja a meghívóját, teljesen szimmetrikus a fentivel, ezért négyszer ennyi a megoldás. 1 pont

Azaz összesen 44-féle lehetőség van, amikor senki sem kapja a saját meghívóját. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Amennyiben (akár rendszer nélkül, de) az összes lehetőséget felsorolja, azért is jár a 7 pont. Amennyiben a felsorolásból akár egy is hiányzik, vagy hibásan szerepel, akkor összesen maximálisan már csak 4 pont adható.

II. megoldás. Jelöljük T_i-vel azon elrendezések számát, ahol i darab meghívó esetén egyik sincs a helyén. Ekkor $T_2 = 1$. 1 pont

i darab meghívó esetén számoljuk ki úgy a jó esetek számát, hogy az összes lehetséges elrendezésből levonjuk azokat az eseteket, amikor $1, 2, \ldots, i-2$ a helyén van. Ha $i-1$ meghívó a helyén van, akkor következésképpen mind a helyén van. 1 pont

3 meghívó esetén az első meghívót 3, a másodikat 2, a harmadikat 1 embernek borítékolhatjuk. Az összes lehetőség száma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Ebből lehet egy meghívó a helyén. Három hely van, ha egy a helyén van, akkor $T_2 = 1$-féleképpen oszthatjuk ki a meghívókat, hogy egyik se legyen a helyén. És egy olyan eset van, amikor mind a három a helyén van. Így

$$T_3 = 3! - \binom{3}{1}T_2 - 1 = 6 - 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$

$$T_3 = 2.$$ 1 pont

Ha négy meghívót vizsgálunk, akkor az összes lehetőségek száma 4!, mivel az elsőt 4, a második meghívót 3, a harmadik meghívót 2 és a negyedik meghívót 1-féle helyre lehet rakni. Ha egy meghívó a helyén van, azt négy hely közül választhatjuk ki. A maradék három helyre kell úgy elhelyezni a meghívókat, hogy már ne legyen egy se a helyén. Az előbb látottak szerint ezt $T_3 = 2$-féleképpen tehetjük meg. Lehet továbbá az, hogy kettő van a helyén. A négy elemből kettőt 6-féleképpen választhatunk ki. A maradék kettőt pedig egyféleképpen tudjuk elrendezni úgy, hogy egyik se legyen a helyén. És végül egy olyan eset van, amikor mind a négy a helyén van:

$$T_4 = 4! - \binom{4}{1}T_3 - \binom{4}{2}T_2 - 1 = 24 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 1 = 9,$$

$$T_4 = 9.$$ 1 pont

Teljesen hasonlóan adódik az öt meghívó esete: Az összes meghívót 5!-féleképpen helyezhetem el. Ha egy van a helyén, akkor azt ötféleképpen választhatom ki, és a maradék négyet az előbb kiszámolt $T_4 = 9$-féleképpen lehet elhelyezni. 1 pont

10-féleképpen lehet az ötből kettő a helyén, és ugyanennyi az, amikor három van a helyén. Amikor kettő van a helyén, akkor a három meghívót 2-féleképpen, amikor három van a helyén, akkor a kettő meghívót 1-féleképpen rendezhetem el. 1 pont

Végül itt is marad az az eset, amikor mindegyik a helyén van. És így az ötmeghívós eset:

$$T_5 = 5! - \binom{5}{1}T_4 - \binom{5}{2}T_3 - \binom{5}{3}T_2 - 1 = 120 - 5 \cdot 9 - 10 \cdot 2 - 10 \cdot 1 - 1 = 44,$$

$$T_5 = 44.$$ 1 pont

Azaz 44 olyan elrendezés van, amikor nincs egyik meghívó sem a saját borítékjában.

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az S8Q-bolygón n különböző ország osztozik ($50 < n < 80$).

Bármely két különböző ország között vagy baráti, vagy ellenséges a kapcsolat (harmadik eset nincs, és a kapcsolat kölcsönös) a következő két szabály mellett:

Ha A, B, C három különböző ország, és ...

(1) A barátságos B-vel, valamint B barátságos C-vel, akkor A is barátságos C-vel.
(... barátom barátja a barátom ...)

(2) A ellenséges B-vel, és B is ellenséges C-vel, akkor A barátságos C-vel.
(... ellenségem ellensége a barátom ...)

Valamint tudjuk, hogy az n ország között lévő összes lehetséges viszonynak éppen a fele baráti, a másik fele ellenséges.

Hány ország van az S8Q-bolygón?

2. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egész számok. A háromszögbe írt kör r, és a hozzáírt körök r_1, r_2, r_3 sugarainak mérőszámai páros egész számok. Tudjuk még, hogy,

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 + r \cdot r_2 \cdot r_3 + r \cdot r_3 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű!

3. Egy n pozitív egész szám *17-edíziglen izgalmas,* ha a következő feltételek teljesülnek rá:

(1) nincs (az 1-en kívül) négyzetszám osztója;

(2) pontosan 16 pozitív osztója van;

(3) ha nagyság szerint sorba rendezem a 16 darab pozitív osztót, akkor a 10-dik, és a 7-dik osztó különbsége éppen 17.

Kérdés: Hány *17-edíziglen izgalmas* szám van?

Megoldások és javítási útmutató

1. Az S8Q-bolygón n különböző ország osztozik ($50 < n < 80$).

Bármely két különböző ország között vagy baráti, vagy ellenséges a kapcsolat (harmadik eset nincs, és a kapcsolat kölcsönös) a következő két szabály mellett:

Ha A, B, C három különböző ország, és ...

(1) A barátságos B-vel, valamint B barátságos C-vel, akkor A is barátságos C-vel.
(... barátom barátja a barátom ...)

(2) A ellenséges B-vel, és B is ellenséges C-vel, akkor A barátságos C-vel.
(... ellenségem ellensége a barátom ...)

Valamint tudjuk, hogy az n ország között lévő összes lehetséges viszonynak éppen a fele baráti, a másik fele ellenséges.

Hány ország van az S8Q-bolygón?

Megoldás. Használjunk gráfot! Az országok a csúcsok, két baráti ország között piros, két ellenséges ország között kék él vezessen.

Az (1) feltételből következik, hogy a barátság tranzitív, vagyis pl. A, és az A-val barátságos országok egy piros klikket alkotnak (a klikken belül mindenki-mindenkivel barát).

Ha a kék éleket elhagynánk, a megmaradt gráf néhány ilyen piros klikk uniója.

És persze két különböző piros klikkhez tartozó pont között kék él vezet. 1 pont

A (2) feltételből következik, hogy legfeljebb két piros klikk van a gráfunkban (különben lenne benne kék háromszög, vagyis három páronként ellenséges ország).

Valamint mivel van kék él (ellenséges viszony, hiszen az élek fele kék!) pontosan két piros klikkből, és a két piros klikk közötti kék élekből áll a gráfom. 1 pont

Legyen az országok száma n, a két szövetségi rendszerben pedig p, és q db ország ($p \geqq q$).

A piros élek száma: $\dfrac{p(p-1)}{2} + \dfrac{q(q-1)}{2}$.

A kék élek száma: pq. 1 pont

Mivel azonos a piros, és a kék élek száma:

$$\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} = pq,$$

$$p^2 - p + q^2 - q = 2pq,$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = p + q. \qquad \text{1 pont}$$

Vagyis $n = p + q = (p-q)^2$ négyzetszám. 2 pont

De akkor az országok száma, vagyis n ($50 < n < 80$ miatt) csak 64 lehet.

(Ekkor $p + q = 64$, és $p - q = 8$ miatt $p = 36$; $q = 28$, és a kapott két szövetségi rendszer ki is elégíti a feladat feltételeit.) 1 pont

Összesen: 7 pont

(Megjegyzés: Könnyen általánosítható a feladat. Ha n-re nem adjuk meg az $50 < n < 80$ feltételt, akkor a feladatnak minden n négyzetszám megoldása (és csak ezek), míg a két szövetségi rendszerben lévő országok száma két egymást követő háromszögszám.)

2. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egész számok. A háromszögbe írt kör r, és a hozzáírt körök r_1, r_2, r_3 sugarainak mérőszámai páros egész számok. Tudjuk még, hogy,

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 + r \cdot r_2 \cdot r_3 + r \cdot r_3 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű!

Megoldás. A feltétel alapján: $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = 1$, valamint

$$r = \frac{t}{s}, \quad r_1 = \frac{t}{s-a}, \quad r_2 = \frac{t}{s-b}, \quad r_3 = \frac{t}{s-c},$$

ahonnan: $4s - (a + b + c) = 2s = t$, így r =2, és t is egész szám, tehát 1 pont

(1) $$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}, \text{ másrészt}$$ 1 pont

(2) $$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{t^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = t^2.$$ 1 pont

Tegyük fel, hogy $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$, így $\dfrac{3}{r_1} \geqq \dfrac{1}{2}$, azaz $r_1 \leqq 6$, 2 pont

de a geometriai jelentésük és párosságuk alapján $2 = r < r_1$, így r_1 4 vagy 6. Utóbbi esetén (1) miatt $r_1 = r_2 = r_3 = 6$, és ezekkel (2) bal oldala $2 \cdot 6^3$, ami nem négyzetszám. Így $r_1 = 4$. Hasonlóan végigvezethető, hogy $r_2 = 6$ és $r_3 = 12$. 1 pont

(2)-ből $t = 24$, így $s = 12$, $s - a = 6$, $s - b = 4$, $s - c = 2$, azaz $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Egy n pozitív egész szám *17-edíziglen izgalmas,* ha a következő feltételek teljesülnek rá:

(1) nincs (az 1-en kívül) négyzetszám osztója;

(2) pontosan 16 pozitív osztója van;

(3) ha nagyság szerint sorba rendezem a 16 darab pozitív osztót, akkor a 10-dik, és a 7-dik osztó különbsége éppen 17.

Kérdés: Hány *17-edíziglen izgalmas* szám van?

Megoldás. A számom n prímtényezős felbontásában minden prímtényező 1-es kitevővel szerepel, különben lenne az 1-en kívül n-nek más négyzetszám osztója.

Vagyis $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ n prímtényezős felbontása.

Ekkor az osztók számára vonatkozó ismert képlet szerint n osztóinak a száma: $d(n) = 2^k$, vagyis n-nek 4 különböző prímosztója van.

Az egyszerűség kedvéért n prímfelbontása legyen: $n = p \cdot q \cdot r \cdot s$ (ahol $p < q < r < s$). 1 pont

Az n 16 darab osztóját a következő módon fogom jelölni (nagyság szerint sorba állítva őket):

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{15} < d_{16} = n.$$

Mivel $d_{10} - d_7 = 17$, ezért n-nek van páros, és páratlan osztója is; vagyis a 2 ott van n prímosztói között. $\rightarrow$ $n = 2 \cdot q \cdot r \cdot s$. 1 pont

Másfelől n osztói a szokásos módon osztópárokba rendezhetők.

– Egy osztópáron belül a két osztó szorzata éppen n, és
– d_i; d_{17-i} éppen egy osztópárba tartoznak.

Vagyis d_7; d_{10} éppen egymás osztópárjai, és így szorzatuk n.

A d_7; d_{10} pár között ott van a d_8; d_9 osztópár is úgy, hogy $d_8 \cdot d_9 = n$, és $d_7 < d_8 < d_9 <$ $< d_{10}$.

Ha lenne n-nek 17, vagy annál nagyobb prímosztója, pl. $q > 16$, akkor
a d_7; d_{10} pár egyik tagja osztható ezzel a q-val, és
a d_8; d_9 pár egyike is osztható ezzel a q-val.

Ekkor a négy szám $(d_7; d_8; d_9; d_{10})$ közül a két q-val osztható között legalább q a különbség, vagyis legalább 17.

De akkor $d_{10} - d_7 > 17$.

Vagyis n-nek (a 2-n kívül) a maradék három különböző prímosztója a 3; 5; 7; 11; 13 prímek közül kerülnek ki. 2 pont

Az n szám 7 legkisebb osztója (ha $n = 2 \cdot q \cdot r \cdot s$ alakú, és $2 < q < r < s$) 1, 2, q, r, s, $2q$, $2r$ (valamilyen sorrendben), hiszen mindegyiktől nagyobb $2s$, és pq is.

(Csak $pq > s$ lehetne kérdéses, de mivel pq legalább 15, s legfeljebb 13, ez is igaz.)

Vagyis d_7 vagy s, vagy $2r$ (mert ez a két szám lehet a hét legkisebb osztó közül a legnagyobb). 1 pont

$a)$ Ha $d_7 = s$ $\rightarrow$ $d_{10} = 2 \cdot r \cdot q = s + 17$, s lehetséges értékeit (7, 11, 13) végigpróbálva:
$\rightarrow$ $7 + 17 = 24$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $11 + 17 = 28$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $13 + 17 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ jó alakú $\rightarrow$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 390$ megoldás.

(Valóban a 390 legkisebb 10 osztója: 1, 2, 3, 5, 6, 10, **13**, 15, 26, **30**,...) 1 pont

$b)$ Ha $d_7 = 2r$ $\rightarrow$ $d_{10} = q \cdot s = 2r + 17$.

r lehetséges értékeit (5, 7, 11) végigpróbálva:
$\rightarrow$ $2 \cdot 5 + 17 = 27$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $2 \cdot 7 + 17 = 31$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $2 \cdot 11 + 17 = 39 = 3 \cdot 13$ jó alakú $\rightarrow$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 858$ megoldás.

(Valóban a 858 legkisebb 10 osztója: 1, 2, 3, 6, 11, 13, **22**, 26, 33, **39**, ...) 1 pont

Vagyis két megoldás van, és ezek a 390, és a 858.

Összesen: 7 pont

Haladók – II. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív szám, amelynek a 10-es számrendszerbeli alakja 28-ra végződik, és számjegyeinek összege 28?

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)=120.$$

3. Az ABC háromszög AB oldalának A-n túli meghosszabbításán felvettük a P pontot, a BC oldal B-n túli meghosszabbításán az R pontot, végül az AC oldal A-n túli meghosszabbításán a Q pontot úgy, hogy $AP=AB$, $CB=BR$ és $CA=AQ$. Mennyi a PQR háromszög területe, ha az ABC háromszögé 100 cm^2?

4. Osztható-e 81-gyel a 81 darab egyesből álló szám?

5. Egy 2013×2013 méretű táblázat minden mezőjébe az 1-től 2013-ig terjedő egész számok valamelyikét írtuk be úgy, hogy semelyik sorba nem kerültek egyenlő számok, és a táblázat szimmetrikus lett az egyik átlójára. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ebben az átlóban sem fordulnak elő egyenlő számok.

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív szám, amelynek a 10-es számrendszerbeli alakja 28-ra végződik, és számjegyeinek összege 28?

Megoldás. A keresett szám $100A+28$ alakú. A feltételek miatt $100A$ is osztható 28-cal, ezért A osztható 7-tel. 2 pont

Az A szám jegyeinek összege $28-(2+8)=18$, így az A szám osztható 9-cel. 2 pont

Ezért az A szám osztható 63-mal. 1 pont

63 többszörösei: 63, 126, 189 stb. Közülük a legkisebb, amelyben a számjegyek összege 18, a 189. Így a keresett szám: 18 928, és ez megfelel a feltételeknek. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)=120.$$

Megoldás. A tényezők sorrendjét felcserélve alakítsuk át a kifejezést:

$$(x-5)(x-8)\cdot(x-6)(x-7)=120.$$

Szorozzuk össze az első kettő tényezőt, majd a második kettőt:

$$\left(x^2-13x+40\right)\left(x^2-13x+42\right)=120. \qquad 1 \text{ pont}$$

Vezessük be az $A=x^2-13x+40$ új ismeretlent. 1 pont

Így az egyenletünk az alábbi másodfokú egyenletté alakul:

$$A\cdot(A+2)=120,$$

$$A^2+2A-120=0, \qquad 1 \text{ pont}$$

melynek megoldásai:

$$A_1=10,$$

$$A_2=-12. \qquad 1 \text{ pont}$$

Az $A_1=10=x^2-13x+40$ másodfokú egyenlet megoldásai az $x_1=10$ és az $x_2=3$. 1 pont

Az $A_2=-12=x^2-13x+40$ másodfokú egyenletnek nincsenek valós megoldásai, mivel a diszkriminánsa negatív. 1 pont

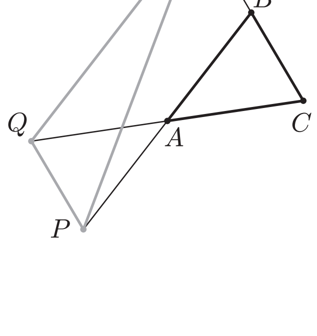
Azaz az eredeti egyenletünknek csak két megoldása van: $x_1=10, \quad x_2=3$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha észreveszi, hogy $120=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2$ és így kapja meg az $x_1=10$ megoldást, akkor az 2 pont. Ha észreveszi továbbá, hogy $120=(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)$ és így az $x_2=3$ megoldást is megkapja, de nem bizonyítja, hogy több megoldás nincs, akkor azért legfeljebb még további 2 pont adható.

3. Az ABC háromszög AB oldalának A-n túli meghosszabbításán felvettük a P pontot, a BC oldal B-n túli meghosszabbításán az R pontot, végül az AC oldal A-n túli meghosszabbításán a Q pontot úgy, hogy $AP=AB$, $CB=BR$ és $CA=AQ$. Mennyi a PQR háromszög területe, ha az ABC háromszögé 100 cm^2?

Megoldás.



Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján! 1 pont

A feltételek miatt AB a QCR háromszög középvonala, ezért $QR \parallel AB$ és $QR=2AB$. 2 pont

Szintén a feltételek miatt QP a CB szakasz A-ra vonatkozó tükörképe, tehát a QP és CB szakaszok párhuzamosak és egyenlő a hosszuk. 1 pont

Azt kaptuk, hogy $PBRQ$ paralelogramma és ezek szerint a PQR háromszög területe fele a paralelogramma területének. 1 pont

Végül a középvonalra vonatkozó korábbi észrevételünk alapján $QR = 2AB$ és a paralelogramma QR-hez tartozó magassága egyenlő az ABC háromszög A-hoz tartozó magasságával, vagyis $T_{PBRQ} = 4 \cdot T_{ABC}$. Ebből $T_{PQR} = 2 \cdot T_{ABC} = 200\ \mathrm{cm}^2$ következik. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Osztható-e 81-gyel a 81 darab egyesből álló szám?

1. megoldás. A számjegyek összege osztható 9-cel, így az eredeti szám is osztható 9-cel. 1 pont

Osszuk el a számot 9-cel:

$$1111111111\ldots11 : 9 = 012345679012345679\ldots012345679.$$ 2 pont

A hányados biztosan osztható 9-cel, 1 pont
mivel egy kilenc számjegyből álló szám ismétlődik, amelyben minden számjegy kilencszer fordul elő.
Vagy: $9 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9) = 333$, ami osztható kilenccel. 2 pont

Az eredeti számot egy olyan szorzatként írtuk fel, amelynek mindkét tényezője osztható 9-cel, így az eredeti szám osztható $9 \cdot 9 = 81$-gyel. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. A számjegyek összege osztható 9-cel, így az eredeti szám is osztható 9-cel. 1 pont

Az eredeti számot felírhatjuk a következő alakban:

$$111111111\underbrace{000\ldots0}_{72\ \text{db}} + 111111111\underbrace{000\ldots0}_{63\ \text{db}} + \ldots + 111111111000000000 + 111111111.$$ 1 pont

Ebből a számból kiemelhetjük a 111111111 számot: 1 pont

$$111111111 \cdot \left(10^{72} + 10^{63} + \ldots + 10^{9} + 1\right) =$$ 1 pont

$$= 111111111 \cdot 1000000001000000001\ldots1,$$ 1 pont

a második szorzótényezőben 9 db 1-es van, számjegyeinek összege 9, így osztható kilenccel. 1 pont

Mivel mind a két szorzótényező osztható 9-cel, így az eredeti szám osztható $9 \cdot 9 = 81$-gyel. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy 2013×2013 méretű táblázat minden mezőjébe az 1-től 2013-ig terjedő egész számok valamelyikét írtuk be úgy, hogy semelyik sorba nem kerültek egyenlő számok, és a táblázat szimmetrikus lett az egyik átlójára. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ebben az átlóban sem fordulnak elő egyenlő számok.

Megoldás. A feltételekből következik, hogy minden számot minden sorban pontosan egyszer, így összesen 2013-szor írtunk le. 1 pont

A táblázat szimmetriájából következik, hogy a szóban forgó átlón kívül eső mezőkben együttvéve minden szám páros sokszor fordul elő. 3 pont

Így ebben az átlóban a 2013 szám mindegyike páratlan sokszor, tehát legalább egyszer szerepel. 2 pont

Mivel 2013 mező van az átlóban, egyikük sem fordulhat elő egynél többször. Ezzel az állítást bizonyítottuk. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Legyen $f(x) = ax + b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az

$$\left|f(0) - 1\right|, \quad \left|f(1) - 3\right|, \quad \left|f(2) - 9\right|$$

számok mindegyike 1-nél kisebb.

2. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszögben $a^2 + 4m_a^2 \leqq (b + c)^2$, ahol a, b és c a háromszög oldalainak hosszát, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot jelenti!

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2x^2y^2 + y^2 = 6x^2 + 12$ egyenletet!

4. Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

H egy nemüres részhalmazát *átlagosnak* hívjuk, ha a benne szereplő számok átlaga megegyezik 5-tel (pl. az $L = \{3; 4; 8\}$ ilyen).

Hány átlagos részhalmaza van H-nak?

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen $f(x) = ax + b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az

$$\left|f(0) - 1\right|, \quad \left|f(1) - 3\right|, \quad \left|f(2) - 9\right|$$

számok mindegyike 1-nél kisebb.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem teljesül, azaz mégis létezik olyan polinom, hogy a három szám mindegyike kisebb 1-nél. 1 pont

Az elsőből $|b-1|<1$, azaz $0<b<2$,
a másodikból $|a+b-3|<1$, azaz $2<a+b<4$,
a harmadikból $|2a+b-9|<1$, azaz $8<2a+b<10$ adódik. 3 pont

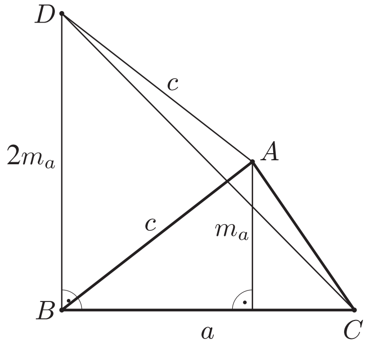
Az első és a harmadik összegét 2-vel osztva $4<a+b<6$ következik. 2 pont

Ezt összevetve a másodikkal, ellentmondásra jutunk, ezzel igazoltuk az állítást. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszögben $a^2+4m_a^2 \leqq (b+c)^2$, ahol a, b és c a háromszög oldalainak hosszát, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot jelenti!

Megoldás.



Állítsunk a B csúcsban merőlegest a BC oldalra, és mérjük rá az A csúcsot is tartalmazó félsíkban a $2m_a$ távolságot. Így kapjuk a D pontot. 2 pont

A DBC derékszögű háromszögre felírva Pitagorasz tételét

$$DC^2 = BC^2 + BD^2,$$

azaz

$$DC^2 = a^2 + (2m_a)^2. \qquad 1 \text{ pont}$$

Viszont az ABD háromszög egyenlőszárú, $AD = AB = c$, 2 pont
ezért az ACD háromszög DC oldalára felírva a háromszög-egyenlőtlenséget

$$DC \leqq AC + AD, \quad \text{azaz} \quad DC \leqq b + c. \qquad 1 \text{ pont}$$

Ezt az (1) összefüggésbe helyettesítve a bizonyítandó állítást kapjuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2x^2y^2+y^2=6x^2+12$ egyenletet!

Megoldás. Rendezzük át az egyenletet a következőképpen:

$$y^2-12 = 2x^2 \cdot \left(3-y^2\right)$$

Mivel y egész szám, ezért $y^2 \neq 3$, vagyis az egyenlet az

$$x^2 = \frac{y^2-12}{2\cdot\left(3-y^2\right)} \qquad 1 \text{ pont}$$

alakba írható.

A egyenlet bal oldala nem vehet fel negatív értéket, ezért a jobb oldala sem, ahonnan a

$$0 \leqq \frac{y^2 - 12}{2 \cdot (3 - y^2)}$$

feltételt kapjuk. 1 pont

Ez akkor teljesül, ha azonos előjelű a számláló és a nevező, vagy a számláló értéke 0. 1 pont

A számláló $y^2 > 12$ esetben, míg a nevező $(0 \leqq)\ y^2 < 3$ esetben vesz fel pozitív értéket, innen nem kapunk megoldást.

A számláló $y^2 \leqq 12$ esetben negatív vagy 0, a nevező pedig $y^2 > 3$ esetben negatív, tehát a feltétel ekvivalens a $3 < y^2 \leqq 12$ egyenlőtlenséggel. 2 pont

Mivel y egész szám, ezért csak $y^2 = 4$ vagy $y^2 = 9$ lehet. Az $y^2 = 9$ esetben $x^2 = \frac{1}{4}$, tehát x nem egész, innen nem kapunk megoldást. 1 pont

Az $y^2 = 4$ esetben $x^2 = 4$, ebből négy $(x; y)$ számpár adódik: $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; 2)$ és $(-2; -2)$, melyek valóban megoldásai az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

H egy nemüres részhalmazát *átlagosnak* hívjuk, ha a benne szereplő számok átlaga megegyezik 5-tel (pl. az $L = \{3; 4; 8\}$ ilyen).

Hány átlagos részhalmaza van H-nak?

Megoldás. Áttérünk a K halmazra, ahol $K = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, és a 0 összegű részhalmazokat vizsgáljuk (ezekből triviálisan adódnak „visszatolással”, vagyis a jó K-beli részhalmaz elemeinek 5-tel való növelésével a jó H részhalmazok).

Egy K-beli „jó” összegben az 1; 2; 3; 4 számokból számolt összeg ugyanannyi, mint a -1; -2; -3; -4 számokból számolt összeg ellentettje.

A jó összegben szereplő pozitív számok összege szerint fogunk esetet bontani, azt pedig a végén nézzük meg, hogy hova tehető a nulla.

a) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **0** (vagyis nem szerepel pozitív szám a jó összegben), akkor csak az lehet, hogy a K-beli jó részhalmazban csak a 0 szerepel. $\rightarrow$ A jó H-beli részhalmaz: $\{5\}$.

b) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **1**. Egyféleképpen lehet a pozitív számok közül: csak az 1-et veszem bele a részhalmazba ($\rightarrow$ $\{-1; 1\}$ $\rightarrow$ $\{4; 6\}$). **1 eset**

c) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **2**. Egyféleképpen lehet a pozitív számok közül: csak a 2-t veszem bele a részhalmazba ($\rightarrow$ $\{-2; 2\}$ $\rightarrow$ $\{3; 7\}$). **1 eset** 1 pont

d) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **3**. Kétféleképpen lehet; $3/2+1$. (A negatív -3-as összegre is két eset $-3/-2+(-1)$). Itt a két „pozitív esetet”, és a két „negatív esetet" tetszőlegesen párosíthatjuk $\to$ 4 megoldás: ($\to$

$$\{-3;+3\}/\{-3;+1;+2\}/\{-2;-1;+1;+2\}/\{-2;-1;+3\}$$

a megfelelő K-beli jó halmazok). **4 eset**

(Ha ez a gondolat szerepel a dolgozatban, akkor jár az ezért a részért adható 2 pont!) 2 pont

$e)$ Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **4**. Kétféleképpen lehet;
$4/3+1\ \to$ **4 eset**

$f)$ Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **5**. Kétféleképpen lehet;
$4+1/3+2\ \to$ **4 eset** 1 pont

$g)$ Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **6**. Ez éppen a „komplentere" annak, amikor az összeg 4 (e eset, $1+2+3+4=10$ miatt!). Vagyis minden olyan esetet, ahol az összeg 6, párosíthatunk egy olyan esettel, ahol az összeg 4, így a két alesetben szereplő átlagos halmazok száma azonos. $\to$ **4 eset**

$h-i-j-k)$ (7 – 8 – 9 – 10-es összeg) a megfelelő d, c, b, a esetek komplementerei az iméntiek szerint. **Rendre 4/1/1/1 esettel.**

(Ha ez a gondolat szerepel a dolgozatban, akkor jár az ezért a részért adható 2 pont!) 2 pont

Amikor az összegben szereplő pozitív számok összege nem 0 ($b-k$-ig), akkor a 0-t belevehetjük a halmazunkba, és ki is hagyhatjuk (ezek az esetszámok duplázódnak), amikor a pozitív számok összege 0 (a eset), akkor a 0-t muszáj belevenni (1 eset).

Vagyis az esetek száma: $2\cdot(1+1+4+4+4+4+4+1+1+1)+1=51$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adjunk meg a síkban 7 pontot úgy, hogy közülük bármely 4 között mindig legyen 3 olyan, hogy azok, mint csúcsok derékszögű háromszöget határozzanak meg.

2. Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $A_n=2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ számnak legalább n különböző prímosztója van.

3. Mennyi az $f(x)=x^{2014}+2x^{2013}+3x^{2012}+\ldots+2013x^2+2014x+2015$ függvény legkisebb értéke?

Megoldások és javítási útmutató

1. Adjunk meg a síkban 7 pontot úgy, hogy közülük bármely 4 között mindig legyen 3 olyan, hogy azok, mint csúcsok derékszögű háromszöget határozzanak meg.

Megoldás. Válasszuk egy négyzet csúcsait, középpontját, valamint a négyzet köré írt kör, a négyzet átlóitól különböző átmérőjének két végpontját (jó konstrukció). 3 pont

Indoklás: Ha a 4 pont között valamely átmérő két végpontja is szerepel, akkor a körvonalról van még legalább egy pont (Thalész). 2 pont

Ha egyik átmérőnek sincs két végpontja a 4 pont között, akkor az átmérőkről legfeljebb 3 pont választható, melyek közül az egyik a négyzet oldala, így ez a negyedik pontként választott középponttal derékszögű háromszöget alkot. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $A_n = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ számnak legalább n különböző prímosztója van.

Megoldás. $A_1 = 2^2 + 2^1 + 1 = 7$ és $A_2 = 2^4 + 2^2 + 1 = 21 = 3 \cdot 7$. Tehát $n = 1$ és $n = 2$ esetén igaz az állítás. 1 pont

Legyen most $n > 1$, és tegyük fel, hogy n-ig igaz a feladat állítása. Bevezetve az $x = 2^{2^{n-1}}$ jelölést, $A_{n+1} = x^4 + x^2 + 1$. 2 pont

Az ismert algebrai átalakítással

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 = \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(x^2 + x + 1\right).$$ 1 pont

Visszaírva az x-nek megfelelő kettőhatványt:

$$A_{n+1} = \left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right) \cdot \left(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1\right) = \left(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\right) \cdot A_n.$$ 1 pont

A két zárójelben álló tényező páratlan, és különbségük $2 \cdot 2^{2^{n-1}}$ kettőhatvány, tehát relatív prímek, hiszen a legnagyobb közös osztó a különbségnek is osztója. 1 pont

Az első tényező 1-nél nagyobb, és relatív prím a másodikhoz, amiről tudjuk, hogy van legalább n különböző prímosztója. Az első tényező ad még legalább egy „új” prímtényezőt, ezzel beláttuk, hogy A_{n+1}-nek legalább $n + 1$ különböző prímosztója van. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Mennyi az $f(x) = x^{2014} + 2x^{2013} + 3x^{2012} + \ldots + 2013x^2 + 2014x + 2015$ függvény legkisebb értéke?

Megoldás. A páratlan együtthatójú tagokat bontsuk két részre az alábbi módon:

$$(2n+1)x^k = nx^k + (n+1)x^k.$$ 1 pont

Ezzel a függvény az

$$f(x) = x^{2014} + 2x^{2013} + \left(x^{2012} + 2x^{2012}\right) + 4x^{2011} + \left(2x^{2010} + 3x^{2010}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(1006x^2 + 1007x^2\right) + 2014x + (1007 + 1008)$$

alakra hozható. 1 pont

Alakítsuk át a kifejezést: az egymást követő tagokat csoportosítsuk hármasával, majd az egyes csoportokból emeljünk ki.

$$f(x) = \left(x^{2014} + 2x^{2013} + x^{2012}\right) + 2\left(x^{2012} + 2x^{2011} + x^{2010}\right) + \ldots$$
$$\ldots + 1007\left(x^2 + 2x + 1\right) + 1008.$$ 2 pont

A zárójelekben levő kifejezések mind egyenlők egy-egy kéttagú összeg négyzetével, vagyis

$$f(x) = \left(x^{1007} + x^{1006}\right)^2 + 2\left(x^{1006} + x^{1005}\right)^2 + \ldots + 1007(x+1)^2 + 1008.$$ 1 pont

Mivel egy valós szám négyzete nemnegatív, a zárójeles tagok legkisebb értéke 0.

Az $x^k + x^{k-1} = 0$, $k \geqq 2$ egyenletből $x = 0$, vagy (az egyenlet x^{k-1}-nel való osztása után) $x = -1$, következik, de az utolsó négyzetes tag ezek közül csak $x = -1$ esetén lesz 0. 1 pont

Ezeken a tagokon kívül változó nem szerepel a kifejezésben, ami módosítaná a minimumhelyet, így a függvény legkisebb értéke $f(-1) = 1008$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 1. forduló

Feladatok

1. Legyenek a, b, c és d olyan valós számok, amelyekre $ab = 1$ és $ac + bd = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $cd \leqq 1$.

2. Egy bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik ülésen 10 fő volt jelen. A bizottság bármelyik 2 tagja legfeljebb egy ülésen volt együtt. Bizonyítsuk be, hogy a bizottság legalább 64 tagból áll!

3. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a

$$p + 1 = 2x^2, \tag{1}$$

$$p^2 + 1 = 2y^2. \tag{2}$$

egyenletrendszernek van egész megoldása?

4. Legyen a P pont az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának tetszőleges pontja. A P pont merőleges vetülete AC-n az R, BC-n a Q pont. Bizonyítsuk be, hogy

$a)$ Az RQ szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át;

$b)$ P-ből az RQ szakaszra bocsátott merőlegesek is egy ponton mennek át!

5. Egy $n \times n$-es tábla egyik mezőjén áll egy bábu. Egy lépésben mozoghatunk egyet fel, vagy egyet jobbra, vagy átlósan balra lefele egyet. Lehetséges-e, hogy a táblát úgy járjuk be, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, és végül a kiindulási mezőtől eggyel jobbra érkezünk meg?

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyenek a, b, c és d olyan valós számok, amelyekre $ab = 1$ és $ac + bd = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $cd \leqq 1$.

I. megoldás. $b = \dfrac{1}{a}$–t helyettesítve, ($a \neq 0$) $c \cdot a^2 + d = 2a$ adódik, 2 pont

tehát a $c \cdot x^2 - 2x + d = 0$ egyenletnek „a” megoldása, 2 pont

azaz $D = 4 - 4cd \geqq 0$, 2 pont

amiből következik a bizonyítandó állítás: $cd \leqq 1$. 1 pont

Összesen: 7 pont

II. megoldás. Mivel $ab = 1$, a és b előjele megegyezik.

Ha c és d előjele különbözik, vagy valamelyik 0, akkor $cd \leqq 0 < 1$, tehát c és d előjele is megegyezik.

Ha a 4 szám előjele nem egyezne meg, akkor az előbbiek alapján ac és bd is negatív, tehát nem lehetne összegük 2. 2 pont

Tehát a, b, c, d előjele megegyezik, így az ac, bd, cd szorzatok pozitívak. 1 pont

Ekkor ac és bd számtani és mértani közepe:

$$\sqrt{abcd} \leqq \frac{ac+bd}{2} = 1,$$ 3 pont

amiből következik a bizonyítandó állítás: $cd \leqq 1$. 1 pont

Összesen: 7 pont

III. megoldás. A feltétel szerint: $ac - ab = ab - bd$, szorzattá alakítva:

$$a(c-b) = b(a-d).$$ 2 pont

Két egyenlő szám szorzata nemnegatív:

$$0 \leqq ab(c-b)(a-d) = ac + bd - ab - cd = 1 - cd,$$ 4 pont

amit átrendezve adódik a bizonyítandó állítás: $cd \leqq 1$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik ülésen 10 fő volt jelen. A bizottság bármelyik 2 tagja legfeljebb egy ülésen volt együtt. Bizonyítsuk be, hogy a bizottság legalább 64 tagból áll!

Megoldás. Ha található olyan tag, aki legalább 7 ülésen jelen volt, akkor az ezeken résztvevő többi 9 ember a feladat feltétele szerint minden ülésen különböző, azaz legalább $7 \cdot 9 = 63 + 1$ tag van. 3 pont

Ha pedig mindenki legfeljebb 6 ülésen vett részt, akkor az ülések összlétszáma csak úgy lehetett 400, ha legalább $400/6$, azaz 66-nál is több tagja van a bizottságnak. 4 pont

Összesen: 7 pont

3. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a

(1) $$p + 1 = 2x^2,$$

(2) $$p^2 + 1 = 2y^2.$$

egyenletrendszernek van egész megoldása?

Megoldás. (Ha $(x; y)$ egész megoldása az egyenletrendszernek, a megfelelő ellentettek is azok, így p megtalálásához feltehetjük, hogy $x > 0$ és $y > 0$.)

A két egyenletet kivonva egymásból és szorzattá alakítva:

$$p \cdot \frac{p-1}{2} = (y+x)(y-x). \qquad 1 \text{ pont}$$

Mivel $p = 2$-re nincs egész megoldása az egyenletrendszernek, ezért $\frac{p-1}{2}$ egész és p osztója a jobb oldali szorzat egyik tényezőjének. 1 pont

A (2) egyenlet alapján $p > y$, így p $y - x$-nek nem, csak $y + x$-nek lehet osztója. 1 pont

Viszont mivel az egyenletek alapján $y > x$, így $2p > y + x$, csak $x + y = p$ és $y - x = \frac{p-1}{2}$ teljesülhet. 2 pont

A két egyenletet összeadva $y = \frac{3p-1}{4}$, ezt az eredeti egyenletrendszer (2) egyenletébe helyettesítve a

$$p^2 + 1 = 2\frac{(3p-1)^2}{16}$$

egyenlethez jutunk, amelynek a feltételeknek megfelelő megoldása csak a $p = 7$. 1 pont

A feladat feltételeinek ellenőrzése: 1 pont

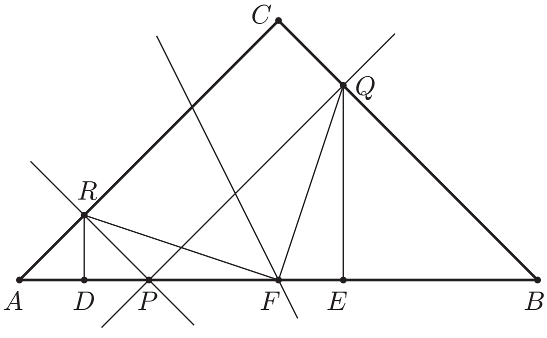
Összesen: 7 pont

4. Legyen a P pont az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának tetszőleges pontja. A P pont merőleges vetülete AC-n az R, BC-n a Q pont. Bizonyítsuk be, hogy

$a)$ Az RQ szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át;

$b)$ P-ből az RQ szakaszra bocsátott merőlegesek is egy ponton mennek át!

Megoldás. $a)$ Jelöljük az AP távolságot x-szel, az AB távolságot c-vel, Legyen F az AB átfogó felezőpontja, D és E pedig R és Q pontok merőleges vetületei AB-n.



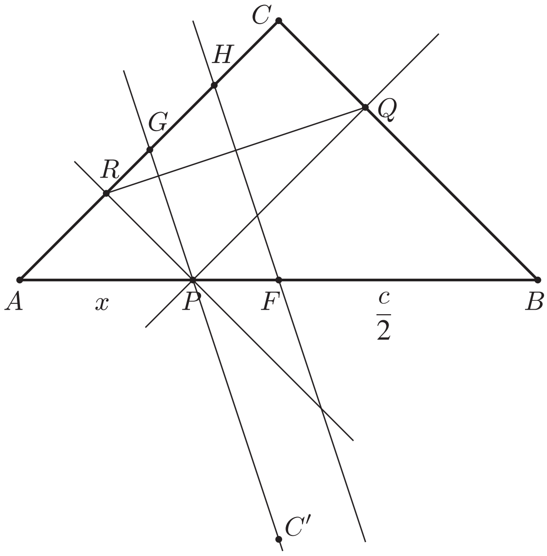
D és E APR és PBQ egyenlő szárú derékszögű háromszögek oldalfelező pontjai, tehát:

$$FE = \frac{c}{2} - \frac{c-x}{2} = \frac{x}{2} = RD, \qquad 1 \text{ pont}$$

$$EQ = \frac{c-x}{2} = \frac{c}{2} - \frac{x}{2} = DF. \qquad 1 \text{ pont}$$

DFR és EQF háromszögek egybevágók, mivel két oldal és a közbezárt szög megegyezik, tehát $FQ = FR$, vagyis az F pont P pont bármely helyzetében rajta van RQ szakasz felezőmerőlegesén. 1 pont

$b)$ Használjuk az ábra jelöléseit!



PG egyenes párhuzamos az előbbi FH egyenessel, így $GPR\sphericalangle = RQP\sphericalangle$ (merőleges szárú szögek), és $PRG\sphericalangle = QPR\sphericalangle$ (derékszögek), tehát PRG és QPR háromszögek hasonlóak.

$$\frac{RG}{RP} = \frac{RP}{PQ}, \quad \text{ebből} \quad RG = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x^2}{(c-x)}.$$ 1 pont

Ekkor:

$$AG = AR + RG = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x^2}{(c-x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c \cdot x}{(c-x)},$$

$$CG = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c \cdot x}{(c-x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c^2 - 2cx}{(c-x)}.$$ 1 pont

A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{GH}{AG} = \frac{\frac{c}{2} - x}{x}, \quad \text{így} \quad GH = \frac{c-2x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c \cdot x}{(c-x)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{c^2 - 2cx}{(c-x)} = \frac{CG}{2}.$$ 1 pont

Az előbbiek alapján GP egyenest a HP egyenesből egy C középpontú, 2 arányú centrális hasonlósággal kapjuk, tehát az $a)$ állítást felhasználva ezek az egyenesek átmennek a C pont F pontra vonatkozó C' tükörképén. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy $n \times n$-es tábla egyik mezőjén áll egy bábu. Egy lépésben mozoghatunk egyet fel, vagy egyet jobbra, vagy átlósan balra lefele egyet. Lehetséges-e, hogy a táblát úgy járjuk be, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, és végül a kiindulási mezőtől eggyel jobbra érkezünk meg?

Megoldás. Számozzuk meg a tábla mezőit „szokásos” módon úgy, mint egy síkbeli koordináta-rendszer rácspontjait. Ekkor az $(a; b)$ koordinátájú mező feletti az $(a; b+1)$, a tőle jobbra lévő az $(a+1; b)$ és az átlósan balra lefelé lévő az $(a-1; b-1)$. 1 pont

Azt fogjuk vizsgálni, hogyan változik az $a+b$ összeg a tábla bejárása során. 1 pont

Két esetben 1-gyel nő az összeg, a harmadik típusú lépésnél pedig 2-vel csökken. Ez azt jelenti, hogy ha az $(a; b)$ mezőről az $(a'; b')$ mezőre léptünk, akkor

$$(a' + b') - (a + b) \equiv 1 \pmod 3.$$ 2 pont

Mivel a táblának n^2 mezője van, ezért összesen $n^2 - 1$ lépés után kell megérkeznünk az $(a+1; b)$ mezőre. Mivel minden lépésben „eggyel nő” a koordináták összegének hármas maradéka, azt kaptuk, hogy szükségszerűen $n^2 - 1$ hárommal osztva 1 maradékot ad. 1 pont

Ez viszont lehetetlen, mert ebből az következne, hogy $n^2 = 3k + 2$, valamilyen k egészre, de egy négyzetszám nem adhat 2 maradékot 3-mal osztva. A tábla nem járható be a megadott feltételek szerint. 2 pont

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az x, y, z *pozitív egész* számokról tudjuk, hogy *relatív prímek,* és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x \cdot y \cdot z$ négyzetszám!

2. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 körök A-ban és B-ben metszik egymást. Az A-n átmenő közös szelőjük a köröket még C és D pontokban is metszi. (C k_1-en, D k_2-n van.) A CO_1 és DO_2 egyenesek metszéspontja M. Igazoljuk, hogy O_1, O_2, M és B egy körön vannak.

3. Egy $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ halmaz *súlyán* a benne lévő számok szorzatát értjük.

(Vagyis pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaz súlya: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.)

Tekintsük a $H = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{2014}\right\}$ halmazt! Mennyi H összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege?

(Ez pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaznál $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$ lenne.)

Megoldások és javítási útmutató

1. Az x, y, z *pozitív egész* számokról tudjuk, hogy *relatív prímek,* és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x \cdot y \cdot z$ négyzetszám!

(*Megjegyzés.* Sajnos az eredeti kitűzésben lemaradt a kikötés, hogy a számok pozitív egészek. Ha negatív egészeket is megengedünk, az állítás már nem igaz: $x = -3$, $y = -6$, $z = -2$ megoldás, és $xyz = -36$ nem négyzetszám.)

Megoldás. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$-t xyz-vel szorozva kapjuk, hogy $yz + xz = yx$.

Legyen x és y legnagyobb közös osztója d. Ekkor $x = d \cdot a$ és $y = d \cdot b$ alakba írható úgy, hogy $(a, b) = 1$.

Beírva a fenti egyenletbe:

$$abz + daz = d^2ab,$$
$$(a + b)z = dab,$$
$$z = d \cdot \frac{ab}{a + b}.$$

A legnagyobb közös osztó tulajdonságaiból adódik, hogy

$$(a, b) = (a, a + b) = (b, a + b) = 1 \Rightarrow (ab, a + b) = 1.$$

Mivel $z = d \cdot \frac{ab}{a + b}$ és d és z egész, ezért d felírható $k \cdot (a + b)$ alakban, ahol k egész.

Így $z = kab$,

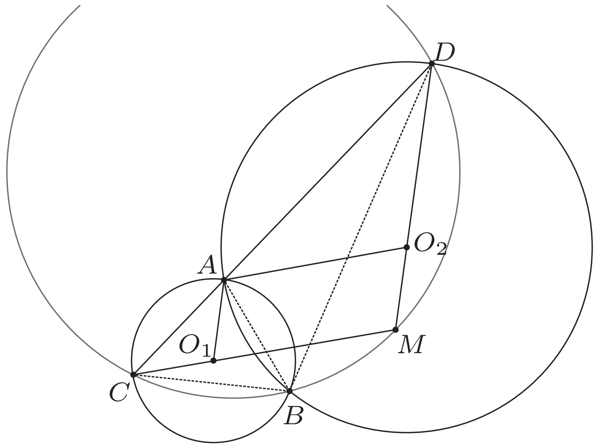
$$x = ka(a + b),$$
$$y = kb(a + b).$$

Mivel $(x, y, z) = 1$, ezért szükségszerűen $k = 1$. Így $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$.

Azaz $xyz = \big(ab(a + b)\big)^2$, ami négyzetszám.

2. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 körök A-ban és B-ben metszik egymást. Az A-n átmenő közös szelőjük a köröket még C és D pontokban is metszi. (C k_1-en, D k_2-n van.) A CO_1 és DO_2 egyenesek metszéspontja M. Igazoljuk, hogy O_1, O_2, M és B egy körön vannak.

1. megoldás. Először megmutatjuk, hogy C, B, M és D egy körön vannak. Használjuk az alábbi ábra elrendezését és vezessük be a következő szögeket: $ABC\sphericalangle = \gamma$, $ABD\sphericalangle = \delta$.



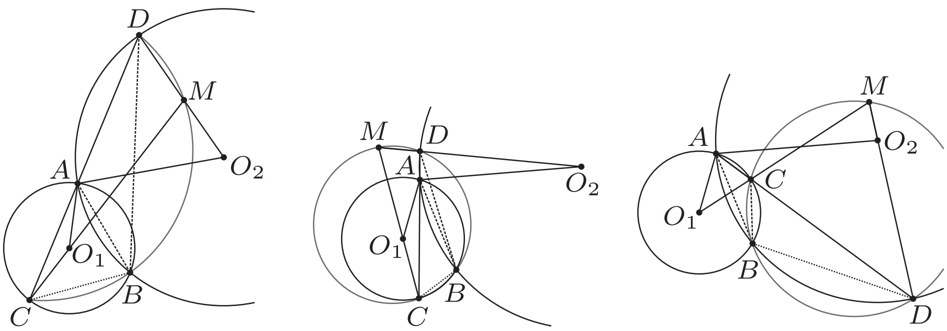
A kerületi és középponti szögek tétele szerint $AO_1C\sphericalangle = 2\gamma$, $AO_2D\sphericalangle = 2\delta$. Az ACO_1 és ADO_2 egyenlőszárú háromszögekben $CAO_1\sphericalangle = 90° - \gamma$ és $DAO_2\sphericalangle = 90° - \delta$, emiatt $O_1AO_2\sphericalangle = \gamma + \delta$.

$AO_1M\sphericalangle = 180° - 2\gamma$, $AO_2M\sphericalangle = 180° - 2\delta$, ezért az AO_1MO_2 négyszögben

$$O_1MO_2\sphericalangle = 360° - (180° - 2\gamma) - (180° - 2\delta) - (\gamma + \delta) = \gamma + \delta.$$

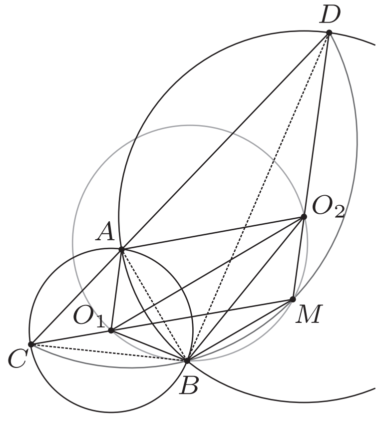
Azt kaptuk, hogy $CBD\sphericalangle = CMD\sphericalangle$, vagyis C, B, M, D egy körön vannak.

Megjegyzés: C helyzetétől függően több különböző elrendezés lehetséges. A fenti érvelés kis módosítással a többi elrendezés esetén is elmondható. Lényeges eltérések két helyen vannak: Az A pont nem feltétlenül választja el egymástól a C és D pontokat, illetve az M pont és a B pont kerülhet az O_1O_2 egyenes különböző oldalára is. Utóbbi esetben nem $O_1MB\sphericalangle = O_1O_2B\sphericalangle$, hanem $O_1MB\sphericalangle = 180° - O_1O_2B\sphericalangle$ bizonyítandó.



A folytatásban az első ábra alapján dolgozunk tovább. A C, B, M, D pontokat tartalmazó kört k_3-nak nevezzük. A kerületi szögek tételét fogjuk többször alkalmazni, mindig jelölve, hogy melyik körben.

Azt fogjuk megmutatni, hogy $O_1MB\sphericalangle = O_1O_2B\sphericalangle$.



$$O_1MB\sphericalangle = CMB\sphericalangle \quad \text{(szögszár meghosszabbítása);}$$
$$CMB\sphericalangle = CDB\sphericalangle \quad \text{(KSZT } k_3\text{);}$$
$$CDB\sphericalangle = ADB\sphericalangle \quad \text{(szögszár meghosszabbítása);}$$
$$AO_2B\sphericalangle = 2 \cdot ADB\sphericalangle \quad \text{(KSZT } k_2\text{);}$$
$$O_1O_2B\sphericalangle = \frac{1}{2} \cdot AO_2B\sphericalangle = ADB\sphericalangle \quad (O_1O_2 \text{ felezi az } AO_2B\sphericalangle\text{-et).}$$

Az egyenlőségeket végigkövetve pont a bizonyítandó $O_1MB\sphericalangle = O_1O_2B\sphericalangle$ összefüggést kaptuk.

2. megoldás. A most következő (jóval egyszerűbb) megoldás előnye (egyszerűségén túl), hogy *irányított szögekkel* is működik, ezért nem kell különböző eseteket vizsgálni. A megoldásban (bizonyítás nélkül) felvázoljuk az irányított szögek felhasznált tulajdonságait.

Most is egy lemmával kezdünk.

Lemma. *Ha a k_1 és k_2 körök két metszéspontja A és B, továbbá a B végpontú átmérő másik végpontja a két körben X és Y, akkor X, Y és A egy egyenesre esnek.*

Bizonyítás. A Thalesz-tétel miatt $BAX\sphericalangle = BAY\sphericalangle = 90°$, ebből a pontok sorrendjétől függetlenül következik, hogy X, Y és A egy egyenesen van.

Most tegyük fel, hogy a feladatban szereplő CD szelő φ szöget zár be XAY-nal. A folytatásban a szögeket $XAC\sphericalangle$ helyett $\measuredangle XAC$ módon fogjuk jelölni, mert *irányított szögekkel* dolgozunk. Az irányított szögeket előjelesen, és modulo 180° mérjük. (Tehát például $30° = -150°$.) Az irányított szögek megoldásunkban felhasznált tulajdonságai az alábbiak:

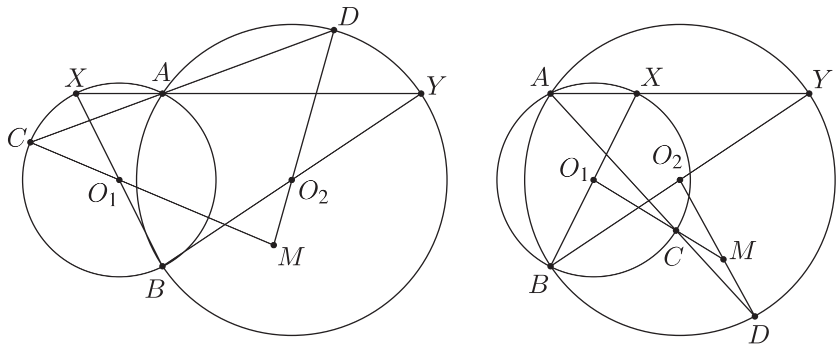
1. Ha A, M, B és C, M, D kollineáris, akkor $\measuredangle CMA = \measuredangle DMB$.
2. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$.
3. Ha a k kör kerületi pontja P, íve AB, középpontja O, akkor $2 \cdot \measuredangle APB = \measuredangle AOB$.

4. $\measuredangle APB = \measuredangle AQB \Leftrightarrow A, B, P, Q$ egy körön vagy egy egyenesen van.

Most már egységesen kezelve az összes esetet, a következő egyszerű megoldást adhatjuk a feladatra:

$$\measuredangle XAC = \measuredangle YAD,$$
$$2 \cdot \measuredangle XAC = \measuredangle XO_1C = \measuredangle BO_1M \quad \text{és}$$
$$2 \cdot \measuredangle YAD = \measuredangle YO_2D = \measuredangle BO_2M.$$

Tehát $\measuredangle BO_1M = \measuredangle BO_2M$, amiből következik, hogy B, M, O_1, O_2 egy körön vannak, mert B, O_1, O_2 nem kollineáris.



$$\measuredangle MO_1B = \measuredangle CO_1X = 2\measuredangle CAX = 2\measuredangle DAY = \measuredangle DO_2Y = \measuredangle MO_2B$$

3. Egy $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ halmaz *súlyán* a benne lévő számok szorzatát értjük.

(Vagyis pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaz súlya: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.)

Tekintsük a $H = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{2014}\right\}$ halmazt! Mennyi H összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege?

(Ez pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaznál $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$ lenne.)

Megoldás. Önkényesen tekintsük az üres halmaz súlyát 1-nek! (Ez később látszódni fog, hogy nem is olyan önkényes.)

Legyen
$A = H$ összes páratlan elemszámú részhalmazai súlyainak összege, és
$B = H$ összes páros elemszámú (az üreshalmazzal együtt) részhalmazai súlyainak az összege.

Nyilván $C = A + B = H$ összes részhalmazai súlyainak az összege.

Nekünk $B - 1$-re van szükségünk.

Lemma: *Ha $K = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$, akkor K összes részhalmazai súlyainak összege (az üres halmaz 1-es súlyával együtt):*

$$S = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$

Bizonyítás: Nyilvánvaló. Az n db ( ) felbontása után éppen egy 2^n tagú összeget kapunk, melyben ott van egyszer az 1-es (üreshalmaz súlya), másfelől az összes lehetséges $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$ szorzat (az összes lehetséges $\{a_{i_1}; a_{i_2}; \dots ; a_{i_k}\}$ részhalmaz súlya).

Vagyis most nálunk $H = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots ; \frac{1}{2014}\right\}$ esetén:

$$C = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2014}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2015}{2014} = \frac{2015}{2}.$$

Vagyis A, és B számok segítségével: $A + B = \frac{2015}{2}$.

Másfelől tekintsük a $H' = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \dots ; -\frac{1}{2014}\right\}$ halmazt.

Erre a H' összes részhalmazának a súlya:

$$C' = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2014}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}.$$

Most vizsgáljuk meg, hogy miből is tevődik össze C'!

Legyen itt is
$A' = H'$ összes páratlan elemszámú részhalmazai súlyainak összege, és
$B' = H'$ összes páros elemszámú (az üreshalmazzal együtt) részhalmazai súlyainak az összege.

Nyilván egyfelől $C' = A' + B'$, másfelől $B' = B$; hiszen H' egy páros elemszámú részhalmazának a súlya megegyezik H azon páros elemszámú részhalmazának a súlyával, amely éppen a megfelelő H'-beli részhalmaz ellentettjeit tartalmazza.

$A' = -A$ (hasonlóan, mint az imént $B' = B$-nél).

De akkor A, B-re a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left\{\begin{aligned} A + B &= \frac{2015}{2} \\ -A + B &= \frac{1}{2014} \end{aligned}\right. \quad\to\quad 2B = \frac{2015}{2} + \frac{1}{2014} \quad\to\quad B = \frac{2015}{4} + \frac{1}{4028}.$$

Mivel ebben a B-ben benne van az üreshalmaz 1-es súllyal, a válasz:

H összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege:

$$B - 1 = \frac{2011}{4} + \frac{1}{4028}.$$