ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

2012/2013-AS TANÉV

Kezdők és Haladók
(I., II. és III. kategória)

Feladatok és megoldások

A verseny az Emberi Erőforrás Minisztériuma megbízásából az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet és az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő által meghirdetett pályázaton, NTP-KTTV-12-0015 azonosító számú támogatásból valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

Bolyai János Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
Kezdők I–II. kategória, I. forduló

Feladatok

1. Az a és b nullától különböző valós számokra teljesül az alábbi összefüggés.

$$a^3 + \big(3a^2 + 1\big)b + \big(3b^2 + 1\big)a + b^3 = 0$$

Mennyi lehet az $\dfrac{a}{b}$ hányados értéke? (6 pont)

2. A 2011, 2012, 2013, 2014 számok közül melyek írhatók fel kettő vagy több egymást követő pozitív páratlan szám összegeként? (6 pont)

3. Egy esküvői vacsorán egy hatfős asztaltársaság tagjai közül néhányan ismerik egymást. A násznagy megkérdezi az asztaltársaság tagjait, hogy hány személyt ismernek az asztalnál ülők közül. Az első öt válaszadó által kimondott öt szám mindegyike különbözik egymástól. Hány embert ismerhet a hatodik személy az asztalnál ülők közül? (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.) (6 pont)

4. Hány olyan különböző (egymással nem egybevágó) háromszög van, amelynek két oldala 2 cm és 7 cm hosszúságú, és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal cm-ben vett mérőszáma is egész szám? (6 pont)

Megoldások és javítási útmutató

1. Az a és b nullától különböző valós számokra teljesül az alábbi összefüggés.

$$a^3 + \big(3a^2 + 1\big)b + \big(3b^2 + 1\big)a + b^3 = 0$$

Mennyi lehet az $\dfrac{a}{b}$ hányados értéke? (6 pont)

Megoldás. Rendezve és szorzattá alakítva:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a + b = 0, \qquad \text{1 pont}$$

$$(a+b)^3 + a + b = 0, \qquad \text{1 pont}$$

$$(a+b)\big((a+b)^2 + 1\big) = 0. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel a második tényező pozitív, csak $a + b = 0$ esetén lehet a szorzat 0. 1 pont

Innen pedig a keresett hányados -1. 1 pont

2. A 2011, 2012, 2013, 2014 számok közül melyek írhatók fel kettő vagy több egymást követő pozitív páratlan szám összegeként? (6 pont)

Megoldás. Két szomszédos páratlan szám összege 4-gyel osztható, mivel $(2k - 1) + (2k + 1) = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ezért páros sok szomszédos páratlan szám összege is 4-gyel osztható. 1 pont

Páratlan sok egymást követő páratlan szám összege páratlan, és mivel ilyenkor a középsőre szimmetrikusan elhelyezkedő tagok összege a középső tag többszöröse, az összeg a középső szám többszöröseként összetett szám. 1 pont

Mivel a 2011 prímszám, a 2014 pedig 4-gyel osztva 2 maradékot adó páros szám, azaz egyik sem osztható 4-gyel és nem is páratlan összetett szám, ezért ezek nem állíthatók elő egymást követő pozitív páratlan számok összegeként. 1-1 pont

A 2012 előállítása pl. $2012 = 1005 + 1007$. 1 pont

A 2013 előállítása a $2013 = 3 \cdot 671$ szorzattá bontás alapján $2013 = 669 + 671 + 673$. 1 pont

Megjegyzés:

A feladat általánosítható:

Minden $4n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) alakú szám előáll két szomszédos páratlan szám összegeként a $4n = (2n - 1) + (2n + 1)$ alakban.

Továbbá bármely $2n + 1 = p \cdot q$ ($n \in \mathbb{N}^+$) alakú páratlan szám előállítható

$$(p - q + 1) + (p - q + 3) + \ldots + p + \ldots + (p + q - 3) + (p + q - 1)$$

alakban, ahol p és q olyan pozitív páratlan számok, melyekre $p \geqq q > 1$.

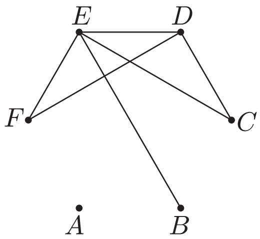
3. Egy esküvői vacsorán egy hatfős asztaltársaság tagjai közül néhányan ismerik egymást. A násznagy megkérdezi az asztaltársaság tagjait, hogy hány személyt ismernek az asztalnál ülők közül. Az első öt válaszadó által kimondott öt szám mindegyike különbözik egymástól. Hány embert ismerhet a hatodik személy az asztalnál ülők közül? (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.) (6 pont)

Megoldás. Mivel az ismeretségek kölcsönösek, így nem lehetséges, hogy a társaságban van valaki, aki 5 személyt, azaz mindenkit ismer és olyan is, aki senkit sem ismer. 1 pont

Így az öt különböző válasz – a sorrendtől eltekintve – csak kétféleképpen alakulhatott:

1. eset: Az első öt szám: 0, 1, 2, 3, 4.

Jelöljük a válaszadókat rendre az A, B, C, D és E betűkkel és jelölje a hatodik válaszadót F!

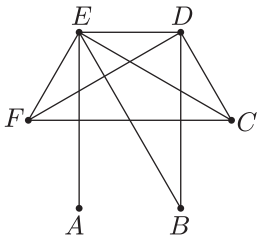


Mivel A senkit sem ismer, így E-nek csak úgy lehet 4 ismerőse, hogy A-n kívül mindenkit ismer. Ekkor B egyetlen ismerőse E. D-nek csak úgy lehet 3 ismerőse, ha A-n és B-n kívül mindenkit ismer. Így C két ismerőse D és E.

Mindezek alapján a hatodik válaszadó (F) két személyt (D, E) ismer. 2 pont

2. eset: Az első öt szám: 1, 2, 3, 4, 5.

Jelöljük a válaszadókat rendre az A, B, C, D és E betűkkel és jelölje a hatodik válaszadót F!



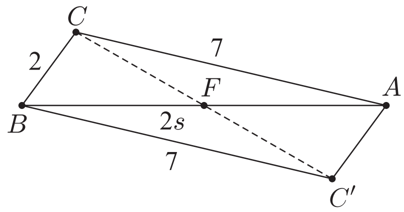
E-nek csak úgy lehet 5 ismerőse, hogy mindenkit ismer. Így A egyetlen ismerőse E. D-nek csak úgy lehet 4 ismerőse, ha A-n kívül mindenkit ismer. Így B két ismerőse D és E. C-nek csak úgy lehet 3 ismerőse, ha A-n és B-n kívül mindenkit ismer.

Mindezek alapján a hatodik válaszadó (F) három személyt (C, D, E) ismer. 2 pont

Tehát a hatodik személy 2 vagy 3 személyt ismerhet az asztalnál ülők közül. 1 pont

4. Hány olyan különböző (egymással nem egybevágó) háromszög van, amelynek két oldala 2 cm és 7 cm hosszúságú, és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal cm-ben vett mérőszáma is egész szám? (6 pont)

Megoldás.



Legyen $a = 2$ cm, $b = 7$ cm és jelölje a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonalat s ($s \in \mathbb{Z}^+$)!

Ha a háromszöget tükrözzük a c oldal felezőpontjára, akkor az $ACBC'$ paralelogrammát kapjuk. 1 pont

Tekintsük a CBC' háromszöget! Ennek a háromszögnek az oldalai a, b és $2s$ hosszúságúak.

Felírva a háromszög-egyenlőtlenséget mindhárom oldalra az alábbi egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$2s < a + b, \quad \text{azaz} \quad 2s < 9;$$

$$a < 2s + b, \quad \text{azaz} \quad 2 < 2s + 7 \text{ (ez nyilván teljesül) és}$$

$$b < 2s + a, \quad \text{azaz} \quad 7 < 2s + 2, \text{ ahonnan } 5 < 2s.$$

3 pont

Összefoglalva: $5 < 2s < 9$. Innen $s = 3$ cm vagy 4 cm. 1 pont

Azaz két ilyen háromszög van. 1 pont

Kezdők I–II. kategória, II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Egy osztályban minden diák jár a háromféle szakkör valamelyikére: 17-en matematikára, 13-an fizikára és 11-en kémiára. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak éppen négyszerese azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Hányan járnak mindhárom szakkörre és mennyi az osztálylétszám, ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, valamint a nem szemüveges fiúk száma egyenlő a lányok számával? (6 pont)

2. Van 6-6 piros és zöld matricánk, melyeken az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok találhatók mindkét szín esetében. Felragasztottuk valahogyan a piros matricákat egy kocka 6 oldalára. Ezt követően a zöld matricákat is felragasztjuk egy-egy oldalra. Ezután a kocka minden egyes csúcsára ráírjuk, hogy mennyi a csúcsot tartalmazó kockalapokon lévő 3 piros és 3 zöld szám összege. A zöld matricák akkor lettek helyesen felragasztva, ha az összes csúcsra ugyanaz a szám került. Hogyan ragaszthattuk fel a piros matricákat, ha az derül ki, hogy a zöld matricák felragasztására pontosan 6-féle helyes módszer van? Adjunk meg legalább egy megoldást! (6 pont)

3. Határozzuk meg azokat a lineáris $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényeket, melyekre

$$F(x) = \left|f(x)\right| - \left|g(x)\right| + h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } \ x < -1, \\ 3x+2, & \text{ha } \ -1 \leqq x < 0, \\ -2x+2, & \text{ha } \ 0 \leqq x. \end{cases} \qquad (8 \text{ pont})$$

4. Tudjuk, hogy $n = 2^{30} \cdot 3^{20}$. Hány olyan pozitív osztója van az n^2 számnak, mely kisebb n-nél és nem osztója n-nek? (10 pont)

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög derékszögű csúcsa C. Az AC befogón felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $CE = FA$ teljesüljön! Legyen Q pont a C csúcsból a BE-re bocsátott merőleges talppontja, míg R a CQ egyenes és az AB átfogó metszéspontja! Határozzuk meg, hogy a $CRF\sphericalangle$ felezője mekkora szöget zár be a BC befogó egyenesével! (10 pont)

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy osztályban minden diák jár a háromféle szakkör valamelyikére: 17-en matematikára, 13-an fizikára és 11-en kémiára. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak éppen négyszerese azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Hányan járnak mindhárom szakkörre és mennyi az osztálylétszám, ha az osztályba járó fiúk egyharmad része szemüveges, valamint a nem szemüveges fiúk száma egyenlő a lányok számával? (6 pont)

Megoldás. Mivel minden diák jár valamelyik szakkörre, ezért az osztálylétszámot megkaphatjuk úgy, hogy a 17, a 13 és a 11 összegéből levonjuk egyszer a pontosan két szakkörre járók számát és kétszer azokét, akik mindhárom szakkörre járnak. 1 pont

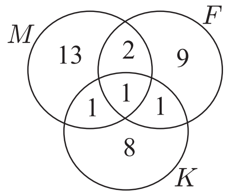
Jelöljük x-szel a mindhárom szakkörre járók számát! Ekkor pontosan két szakkörre $4x$ diák jár.

Így az osztálylétszámot a $17 + 13 + 11 - 4x - 2x = 41 - 6x$ összefüggés adja meg. 1 pont

Mivel a fiúk számának a kétharmad része egyenlő a lányok számával, ezért az osztálylétszám osztható öttel. 1 pont

Tehát az osztálylétszám egy olyan öttel osztható szám, amely egy hattal osztható számmal kisebb 41-nél. Felírva a lehetséges értékeket $\{35, 29, 23, 17, 11, 5\}$ kapjuk, hogy az osztálylétszám 35, így mindhárom szakkörre 1 diák jár. 2 pont

Egy ilyen lehetőséget mutat az alábbi halmazábra.



1 pont

2. Van 6-6 piros és zöld matricánk, melyeken az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok találhatók mindkét szín esetében. Felragasztottuk valahogyan a piros matricákat egy kocka 6 oldalára. Ezt követően a zöld matricákat is felragasztjuk egy-egy oldalra. Ezután a kocka minden egyes csúcsára ráírjuk, hogy mennyi a csúcsot tartalmazó kockalapokon lévő 3 piros és 3 zöld szám összege. A zöld matricák akkor lettek helyesen felragasztva, ha az összes csúcsra ugyanaz a szám került. Hogyan ragaszthattuk fel a piros matricákat, ha az derül ki, hogy a zöld matricák felragasztására pontosan 6-féle helyes módszer van? Adjunk meg legalább egy megoldást! (6 pont)

Megoldás. Először belátjuk, hogy pontosan akkor helyes egy felragasztás, ha a szemközti lapokon lévő 2-2 szám összege megegyezik. Egyrészt nyilvánvaló, hogy egy ilyen felragasztás helyes, hiszen minden csúcsban egy-egy oldal találkozik a szemközti oldalpárokból, így minden csúcsra ugyanaz lesz a kérdéses 3 piros és 3 zöld szám összege. Másrészt tekintsünk egy helyes felragasztást. Ekkor a kocka tetszőleges élének két végpontján is ugyanaz a szám kell, hogy szerepeljen. Márpedig e két csúcshoz tartozó lapok közül 2-2 megegyezik. A nem megegyező lapok pedig éppen szemköztes lapok, tehát azonos kell, hogy legyen e két szemköztes lapon lévő 2-2 szám összege. Bármelyik szemköztes lappárra van egy őket összekötő él, melyre ez a gondolatmenet érvényes. 2 pont

A továbbiakban tehát elegendő a szemköztes lappárokra figyelni. Az előzőek szerint a zöld matricák felragasztása akkor lehet helyes, ha a szemköztes lappárokon a piros és a zöld számok különbségének abszolút értéke megegyezik. (Pl. piros: 2, 4; zöld: 3, 1. itt a különbség a pirosaknál 2, a zöldeknél -2.) 1 pont

Ezek után elég találnunk a piros számoknak egy olyan felragasztását, amelynél a szemköztes lapok számainak különbsége mindig megegyezik, mert ekkor ugyanezek a számpárok használhatók a zöld számok felragasztásánál tetszőleges permutációban, ezekből pedig a 3 lappár esetében éppen 6 db van. 1 pont

Erre 2-féle lehetőség is van: 12, 34, 56; illetve 14, 25, 36. (Itt pl. az „12” azt jelöli, hogy az egyik szemköztes lappárra az 1-es és 2-es piros számok vannak felragasztva.) Az elsőnél a szemköztes lapokon lévő számok különbsége mindig 1, a másodiknál pedig mindig 3. Az első esetben minden olyan zöld felragasztás helyes lesz, mely a 21, 43, 65 számpárokkal dolgozik, az iménti három számpár tetszőleges sorrendje mellett. Hasonlóan, a másik esetnél a 41, 52, 63 számpárok adnak helyes ragasztási sémát, tetszőleges párosításban alkalmazva. Már csak azt kell végiggondolni, hogy az 1-től 6-ig lévő számokat csak egyféleképpen lehet 3 párba osztani úgy, hogy a párok tagjai közötti különbség mindig azonos (1, illetve 3) legyen. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen a legkisebb szám (az 1-es) párja egyértelműen kijelölhető, a fennmaradó számok közül a legkisebb párja pedig ezek után szintén mindig egyértelműen adódik. 2 pont

Ha a versenyző a fönti két megoldás közül az egyiket megtalálja, és teljes indoklást ad arra, hogy valóban pontosan 6*-féle helyes ragasztást tesz lehetővé, akkor már jár a 6 pont. A másik megoldás megtalálásáért* $+1$ pont *jár, amennyiben pedig sikerül belátnia (pl. az összes eset módszeres végignézésével), hogy nincs is több megoldási lehetőség, további* $+2$ pontot *kaphat.*

3. Határozzuk meg azokat a lineáris $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényeket, melyekre

$$F(x) = \big|f(x)\big| - \big|g(x)\big| + h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } \ x < -1, \\ 3x + 2, & \text{ha } \ -1 \leqq x < 0, \\ -2x + 2, & \text{ha } \ 0 \leqq x. \end{cases} \qquad \text{(8 pont)}$$

Megoldás. Mivel $F(x)$ intervallumonként konstans és elsőfokú függvényekkel van megadva és a hozzárendelési szabályok alapján az abszolútértékes kifejezések előjelváltási helyei az $x = -1$ és az $x = 0$ helyek, ezért célszerű $F(x)$-et az alábbi alakban keresni:

$$F(x) = \big|a(x + 1)\big| \mp |bx| + cx + d. \qquad \text{2 pont}$$

Ekkor

$$F(x) = \begin{cases} (c - a \pm b)x + d - a, & \text{ha } \ x < -1, \\ (a + c \pm b)x + a + d, & \text{ha } \ -1 \leqq x < 0, \\ (a \mp b + c)x + a + d, & \text{ha } \ 0 \leqq x. \end{cases} \qquad \text{2 pont}$$

Az együtthatók egyeztetése alapján

$$\begin{aligned} c - a \pm b &= 0, & d - a &= -1, \\ a + c \pm b &= 3, & a + d &= 2, \\ a \mp b + c &= -2, & a + d &= 2. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

Az egyenletrendszer megoldásaként kapott értékek: $a = \frac{3}{2}$, $b = \pm\frac{5}{2}$, $c = -1$ és $d = \frac{1}{2}$.

A keresett függvények pedig a következők:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{3}{2},$$

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{5}{2}x,$$

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x + \frac{1}{2}.$$

A kapott függvények teljesítik a feladat feltételét. 2 pont

4. Tudjuk, hogy $n = 2^{30} \cdot 3^{20}$. Hány olyan pozitív osztója van az n^2 számnak, mely kisebb n-nél és nem osztója n-nek? (10 pont)

Megoldás. Nézzük a problémát általánosan!

Legyen az n egynél nagyobb pozitív egész szám kanonikus alakja $n = p^r \cdot q^s$, ahol p, q két különböző prímszám. Ekkor n^2 kanonikus alakja $n^2 = p^{2r} \cdot q^{2s}$. Mint tudjuk az egynél nagyobb pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát meghatározhatjuk a kanonikus alakból. Így az n pozitív osztóinak a száma $(r+1)(s+1)$, míg az n^2 pozitív osztóinak a száma $(2s+1)(2r+1)$. 2 pont

Az n^2 osztói közül minden egyes n-nél kisebb pozitív osztóhoz hozzárendelhető pontosan egy n-nél nagyobb osztó. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, mert különbözőkhöz, különbözők tartoznak. 1 pont

Az így kapott osztópárok tagjainak a szorzata n^2. Az előzőek alapján pontosan annyi n-nél kisebb pozitív osztója van az n^2-nek, mint n-nél nagyobb. 1 pont

Ezek száma:

$$\frac{(2r+1)(2s+1)-1}{2} = 2sr + s + r.$$ 2 pont

Az n miden osztója, osztója n^2-nek is. 1 pont

Így n^2-nek

$$\frac{(2r+1)(2s+1)-1}{2} - \big((r+1)(s+1)-1\big) = 2sr + s + r - rs - r - s = rs$$

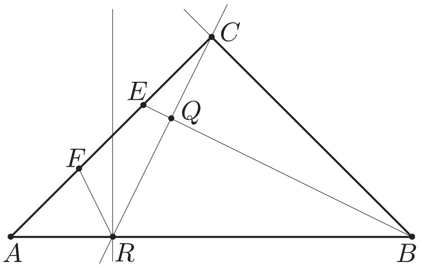
olyan pozitív osztója van, amely n-nél kisebb és nem osztója n-nek. 2 pont

Így a válasz: 600. 1 pont

(Ha a problémát ilyen általános alakban helyesen megoldja, +1 pont adható.)

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög derékszögű csúcsa C. Az AC befogón felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $CE = FA$ teljesüljön! Legyen Q pont a C csúcsból a BE-re bocsátott merőleges talppontja, míg R a CQ egyenes és az AB átfogó metszéspontja! Határozzuk meg, hogy a $CRF\sphericalangle$ felezője mekkora szöget zár be a BC befogó egyenesével! (10 pont)

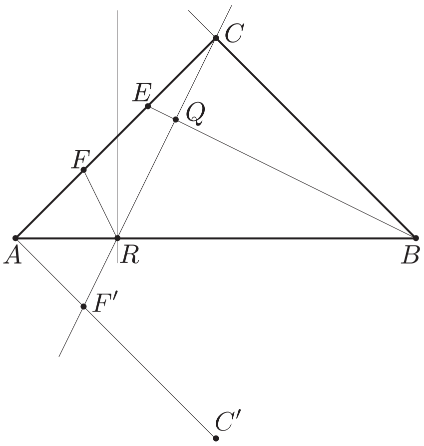
Megoldás.



Készítsünk ábrát! 1 pont

Belátjuk, hogy $CRB\sphericalangle = ARF\sphericalangle$, ebből következik, hogy a $CRF\sphericalangle$ felezője merőleges az AB egyenesre, amiből kapjuk, hogy a kérdezett szög 45°. 2 pont

Tükrözzük a CA oldalt az AB átfogóra! A C pont tükörképe legyen C'! A CR és az AC' metszéspontja legyen F'! Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $CAB\sphericalangle = 45°$, így a tükrözés miatt $BAC'\sphericalangle = 45°$, tehát $CAC'\sphericalangle = 90°$. 3 pont



Mivel CF' merőleges EB-re és AC merőleges BC-re, ezért $ACF'\sphericalangle = EBC\sphericalangle$, hisz merőleges szárú hegyesszögek. 1 pont

Az EBC és a CAF' háromszög derékszögű, valamint $ACF'\sphericalangle = EBC\sphericalangle$ és $BC = CA$, így a két háromszög egybevágó. 1 pont

Ebből következik, hogy $AF = CE = AF'$, tehát F' az F pont AB egyenesre vett tükörképe, így $ARF\sphericalangle = F'RA\sphericalangle$. 1 pont

Az $F'RA\sphericalangle = CRB\sphericalangle$, mert csúcsszögek. Ez alapján $ARF\sphericalangle = CRB\sphericalangle$.

Vagyis a keresett szög 45°. 1 pont

Kezdők I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy 60 lapból álló kézirat oldalait rendre megszámozták az 1, 2, ..., 120 oldalszámokkal. A kézirat néhány lapja azonban elveszett. A megmaradt lapok oldalaira írt számok összege 7159. Hány lap veszett el?

2. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalain adottak a D, E, F pontok úgy, hogy az AD, BE, CF szakaszok egy közös O pontban metszik egymást. Határozzuk meg az OF szakasz hosszát, ha $AO = 23$, $BO = 24$, $CO = 29$, $OD = 7$ és $OE = 8$ egység hosszúságú!

3. Legyen x, y, z három páronként különböző nem nulla valós szám! Határozzuk meg az xyz szorzat értékét, ha tudjuk, hogy

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}!$$

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy 60 lapból álló kézirat oldalait rendre megszámozták az 1, 2, ..., 120 oldalszámokkal. A kézirat néhány lapja azonban elveszett. A megmaradt lapok oldalaira írt számok összege 7159. Hány lap veszett el?

Megoldás. Eredetileg a könyv oldalszámainak összege: $1 + 2 + 3 + \ldots + 120 = 121 \cdot 60 = 7260$. Így az elveszett lapokra írt oldalszámok összege $7260 - 7159 = 101$. Egy lapon két oldalszám található, egy páratlan $(2k - 1)$, és egy páros $(2k)$. Ezek összege $4k - 1$ $(k \geqq 1)$. Ha s db lap veszett el, akkor a teljes összeg

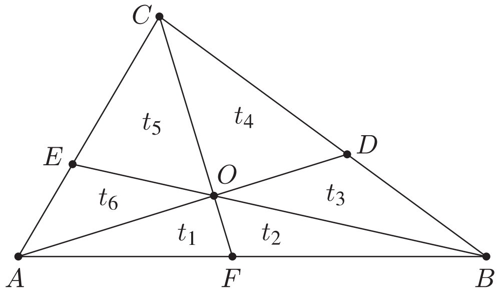
$$4k_1 - 1 + 4k_2 - 1 + \ldots + 4k_s - 1 = 4(k_1 + k_2 + \ldots + k_s) - s$$

értékkel csökken. Tehát $4(k_1 + k_2 + \ldots + k_s) - s = 101$, amiből következik, hogy s négyes maradéka 3. Ebből

$$101 = 4(k_1 + k_2 + \ldots + k_s) - s \geqq 4(1 + 2 + \ldots + s) - s = 4\frac{s(s+1)}{2} - s = \\ = 2s^2 + s = s(2s + 1).$$

Mivel $s = 7$ esetén az $s(2s + 1) = 105$, ezért $s < 7$. Így $s = 3$ lehet csak, mert a négyes maradéka 3. Ekkor $k_1 + k_2 + k_3 = 26$, amelynek nyilván van páronként különböző pozitív egészekből álló megoldása (pl. 1, 2, 23), tehát három lap veszett el.

2. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalain adottak a D, E, F pontok úgy, hogy az AD, BE, CF szakaszok egy közös O pontban metszik egymást. Határozzuk meg az OF szakasz hosszát, ha $AO = 23$, $BO = 24$, $CO = 29$, $OD = 7$ és $OE = 8$ egység hosszúságú!



Megoldás. Vezessük be az ABC háromszög részeinek területére az ábrán látható jelöléseket. Az ABO és ABC háromszögek alapja közös, magasságaik aránya pedig $OF : CF$. Területeik aránya így

$$\frac{OF}{CF} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}.$$

Hasonlóan kapjuk a következő arányokat:

$$\frac{OD}{AD} = \frac{t_3 + t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6},$$

$$\frac{OE}{BE} = \frac{t_5 + t_6}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}.$$

Az előbbi egyenletek összeadásával az

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

összefüggés adódik.

A megadott hosszúságok behelyettesítésével:

$$\frac{OF}{CF} = 1 - \frac{OD}{AD} - \frac{OE}{BE} = 1 - \frac{7}{30} - \frac{8}{32} = \frac{31}{60},$$

$$\frac{OF}{29 + OF} = \frac{31}{60}.$$

Innen pedig átrendezéssel adódik, hogy:

$$OF = 31.$$

A keresett szakasz tehát 31 egység hosszúságú.

3. Legyen x, y, z három páronként különböző nem nulla valós szám! Határozzuk meg az xyz szorzat értékét, ha tudjuk, hogy

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}!$$

Megoldás. Tekintsük az egyenlőségeket külön-külön! Rendezzük át az $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$ egyenlőséget az alábbi módon:

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y},$$

$$x - y = \frac{y - z}{yz},$$

$$yz = \frac{y - z}{x - y}.$$

(Az utolsó átalakítás korrekt, hiszen x, y és z páronként különbözőek.)

Ehhez hasonlóan kapjuk a $z+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{z}$ egyenlőségből, hogy $zx=\frac{z-x}{y-z}$, illetve a $z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}$ egyenlőségből, hogy $yx=\frac{y-x}{x-z}$. Így

$$xy\cdot yz\cdot zx=\frac{y-x}{x-z}\cdot\frac{y-z}{x-y}\cdot\frac{z-x}{y-z}=1.$$

Tehát az xyz szorzat értéke 1 vagy -1. Mindkét eset elő is fordulhat: $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=-2$ esetén $xyz=1$, ellentett számok esetében pedig a szorzat értéke -1.

Kezdők II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Hány olyan sorrendje van a 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012 és a 2013 számoknak, melyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?

2. Adott egy kör az AB átmérőjével. Legyen C a körvonal A-tól és B-től különböző pontja! Az ABC háromszög AB oldalán felvesszük a D és E pontot úgy, hogy $AD=AC$ és $BE=BC$ teljesüljön. Legyen k_1 a BC befogót érintő D középpontú, míg k_2 az AC befogót érintő E középpontú kör! Legyen T az ABC háromszög beírt körének, míg T_1 a k_1 és T_2 a k_2 körnek a területe! Hogyan vegyük fel a C pontot, hogy a $\frac{T}{T_1+T_2}$ tört értéke maximális legyen? Mekkora ez a maximális érték?

3. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x+y+z=2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

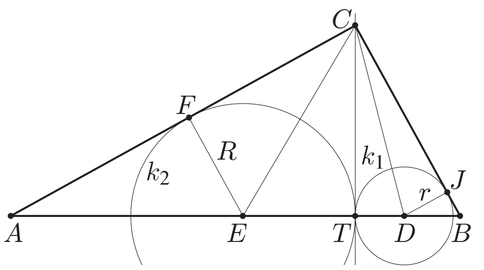
Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan sorrendje van a 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012 és a 2013 számoknak, melyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?

Megoldás. Minket csak a megadott számok hármas maradékai érdekelnek. Ezek rendre 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, melyek összege osztható 3-mal. Legyen a számok, egy a feladatnak megfelelő sorrendje $n_1, n_2, \ldots, n_7$! Mivel ekkor $3 \mid (n_1+n_2+n_3+n_4)$ és $3 \mid (n_4+n_5+n_6+n_7)$, így $3 \mid n_1+n_2+n_3+n_4+n_4+n_5+n_6+n_7$. De a hét szám hármas maradékának az összege osztható 3-mal, így az előzőek alapján $3 \mid n_4$. Ebből következik, hogy $3 \mid n_1+n_2+n_3$, ami csak úgy lehet, hogy az első három szám hármas maradéka páronként különböző, azaz 0, 1, 2 valamilyen sorrendben. Mivel $3 \mid n_1+n_2+n_3+n_4$ és $3 \mid n_2+n_3+n_4+n_5$, így $3 \mid n_5-n_1$, hasonlóan $3 \mid n_6-n_2$ és $3 \mid n_7-n_3$, azaz hármas maradékaik páronként egyenlők, ezért az első három szám meghatározza az utolsó hármat. Ez alapján n_4 háromféle lehet, míg n_1, n_2, n_3 értékeit $2^3 \cdot 3!$ féleképpen választhatjuk meg, így a feladatnak megfelelő sorrendek száma $3 \cdot 2^3 \cdot 3! = 144$.

2. Adott egy kör az AB átmérőjével. Legyen C a körvonal A-tól és B-től különböző pontja! Az ABC háromszög AB oldalán felvesszük a D és E pontot úgy, hogy $AD = AC$ és $BE = BC$ teljesüljön. Legyen k_1 a BC befogót érintő D középpontú, míg k_2 az AC befogót érintő E középpontú kör! Legyen T az ABC háromszög beírt körének, míg T_1 a k_1 és T_2 a k_2 körnek a területe! Hogyan vegyük fel a C pontot, hogy a $\dfrac{T}{T_1+T_2}$ tört értéke maximális legyen? Mekkora ez a maximális érték?

Megoldás. Thalész tételéből következik, hogy az ABC háromszög derékszögű, melynek átfogója AB.



Készítsünk ábrát!

Legyen a háromszög átfogójához tartozó magassága CT! Mivel $AD = AC$, ezért

$$ADC\sphericalangle = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

így $DCT = \dfrac{\alpha}{2}$. Mivel $BCT\sphericalangle = \alpha$, ezért DC a BCT szög felezője. Így D egyenlő távolságra van a CT és CB egyenesektől, tehát k_1 érinti CT-t is. Mivel CT merőleges DT-re, ezért az érintési pont T. Hasonlóan belátható, hogy k_2 T-ben érinti CT-t. Ebből következik, hogy $ED = R + r$. Mivel $EB = BC = a$ és $AD = AC = b$, ezért $ED = a + b - c$. Ismert, hogy a derékszögű háromszög beírt körének sugara $r_b = (a+b-c)/2$, így $r_b = (R+r)/2$. Ezek alapján

$$\frac{T}{T_1+T_2} = \frac{r_b^2\pi}{r^2\pi + R^2\pi} = \frac{r_b^2}{r^2+R^2} = \frac{r^2+R^2+2rR}{4(r^2+R^2)} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2rR}{r^2+R^2}\right) \leqq \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

hisz $2Rr \leqq R^2 + r^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqq (R-r)^2$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $R = r$, azaz ha az EDC háromszögben a CT magasság egyben szimmetriatengely, tehát az EDC háromszög egyenlő szárú. Ekkor a DCT és ECT szögek egyenlők, tehát $\alpha/2 = \beta/2$, azaz $\alpha = \beta$, tehát az ABC háromszög egyenlő szárú. Tehát a tört értéke akkor maximális, ha C az AB ív felezőpontja. A maximális érték $\dfrac{1}{2}$.

3. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x+y+z=2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Megoldás. Mivel $x+y+z=2$, így $z-1=1-x-y$. Ez alapján

$$xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1).$$

A többi ehhez hasonlóan átalakítható:

$$yz+x-1=(y-1)(z-1) \quad \text{és} \quad zx+y-1=(z-1)(x-1).$$

Ez alapján az algebrai törtek összege

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}=$$
$$=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=$$
$$=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}=\frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}.$$

Legyen a prímszám q!

Ekkor $(x-1)(y-1)(z-1)=-q$. Azaz felírtuk a q prímszám ellentettjét három egész szám szorzataként, ami csak úgy lehetséges, hogy a tényezők közül az egyik 1, a másik -1, a harmadik q, vagy kettő darab 1-gyel egyenlő és a harmadik $-q$-val, vagy kettő -1-gyel egyenlő egy pedig $-q$-val.

Az elő eset teljesül, ha pl. $x=2$, $y=0$, $z=q+1$ (ez szimmetria okokból feltehető), ebből kapjuk, hogy $2+0+q+1=2$, amiből kapjuk, hogy $q=-1$, ami nem prím.

A második eset teljesül, ha pl. $x=2$, $y=2$ és $z=-q+1$. Ebből kapjuk, hogy

$$2+2-q+1=2, \quad \text{azaz} \quad q=3.$$

A harmadik esetén pl. $x=0$, $y=0$ és $z=-q+1$. Így $0+0+-q+1=2$, innen $q=-1$.

A $q=3$ esetben tehát $x=2$, $y=2$, $z=-2$. Ekkor a feladatban szereplő törtek egyikének sem 0 a nevezője. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk az eredményünk helyességéről. Tehát a keresett prím a 3.

Kezdők III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

2. Tekintsük azokat az emeletes hatványokat, melyek csupa 2-es számjegy felhasználásával alkothatók. (Tehát a következő számok szerepelhetnek bennük az egyes szinteken: 2, 22, 222, 2222, $\ldots$, $\underbrace{222\ldots2}_{k} = B_k$.)

Melyik a legnagyobb értékű ilyen emeletes hatvány, amely pontosan 2013 db 2-es számjegy felhasználásával képezhető?

3. Adott az ABC tompaszögű háromszög. (A C-nél lévő szög nagyobb 90°-nál.) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög feldarabolható 7 db hegyesszögű háromszögre.

Megoldások és javítási útmutató

1. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Megoldás. Mivel $x + y + z = 2$, így $z - 1 = 1 - x - y$. Ez alapján

$$xy + z - 1 = xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1).$$

A többi ehhez hasonlóan átalakítható:

$$yz + x - 1 = (y - 1)(z - 1) \quad \text{és} \quad zx + y - 1 = (z - 1)(x - 1).$$

Ez alapján az algebrai törtek összege

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}=$$

$$=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=$$

$$=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}=\frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}.$$

Legyen a prímszám q!

Ekkor $(x-1)(y-1)(z-1)=-q$. Azaz felírtuk a q prímszám ellentettjét három egész szám szorzataként, ami csak úgy lehetséges, hogy a tényezők közül az egyik 1, a másik -1, a harmadik q, vagy kettő darab 1-gyel egyenlő és a harmadik $-q$-val, vagy kettő -1-gyel egyenlő egy pedig $-q$-val.

Az elő eset teljesül, ha pl. $x=2$, $y=0$, $z=q+1$ (ez szimmetria okokból feltehető), ebből kapjuk, hogy $2+0+q+1=2$, amiből kapjuk, hogy $q=-1$, ami nem prím.

A második eset teljesül, ha pl. $x=2$, $y=2$ és $z=-q+1$. Ebből kapjuk, hogy

$$2+2-q+1=2, \quad \text{azaz} \quad q=3.$$

A harmadik esetén pl. $x=0$, $y=0$ és $z=-q+1$. Így $0+0+-q+1=2$, innen $q=-1$.

A $q=3$ esetben tehát $x=2$, $y=2$, $z=-2$. Ekkor a feladatban szereplő törtek egyikének sem 0 a nevezője. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk az eredményünk helyességéről. Tehát a keresett prím a 3.

2. Tekintsük azokat az emeletes hatványokat, melyek csupa 2-es számjegy felhasználásával alkothatók. (Tehát a következő számok szerepelhetnek bennük az egyes szinteken: 2, 22, 222, 2222, $\ldots$, $\underbrace{222\ldots2}_{k}=B_k$.)

Melyik a legnagyobb értékű ilyen emeletes hatvány, amely pontosan 2013 db 2-es számjegy felhasználásával képezhető?

1. megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket. Egy k szintű emeletes hatvány legalsó szintjén levő szám legyen A_1, a fölötte levő A_2, majd A_3 stb., végül a legfelső szinten lévő A_k.

a) Először megmutatjuk, hogy a legnagyobb számként csak olyan emeletes hatvány jöhet szóba, melynél minden l-re teljesül, hogy $A_l \leqq A_{l+1}$.

Ennek igazolásához először belátjuk, hogy: $B_{k+r}^{(B_k)^x} < B_k^{(B_{k+r})^x}$ ($r \geqq 1$, $x \geqq 1$). Miután ezt igazolni fogjuk, már egyszerű a dolgunk: ha látunk az emeletes hatványban szomszédos szinteken fordított sorrendben lévő számokat, akkor felcseréljük őket, és ezzel garantáltan növeljük a hatvány értékét. Szomszédos számok cseréjével pedig végül eljuthatunk a teljesen rendezett állapotig.

$B_{k+r}^{(B_k)^x} < B_k^{(B_{k+r})^x}$ bizonyítása:

Az egyszerűség kedvéért vezessük be átmenetileg a következő jelöléseket:

$a=B_{k+r}$, illetve $b=B_k$. Tehát $b<a$, sőt $10b<a$. Bizonyítandó, hogy $a^{b^x} < b^{a^x}$.

Először tekintsük a $b=2$ esetet.

Legyen $2^{n-1}<a<2^n$. Ekkor $a^{2^x} < 2^{n\cdot 2^x}$, illetve $2^{2^{(n-1)x}} < 2^{a^x}$. Elég tehát bizonyítanunk, hogy $2^{n\cdot 2^x} < 2^{2^{(n-1)x}}$. Ez ekvivalens azzal, hogy $n\cdot 2^x < 2^{(n-1)x}$, azaz, hogy $n<2^{(n-2)x}$. Mivel $b<a$, ezért $a<2^n$-ből következik, hogy $n \geqq 5$. $n=5$-re $5<2^{3x}$ triviálisan igaz, a többi n-re teljes indukcióval adódik a kívánt egyenlőtlenség. (Bal oldal 1-gyel nő, jobb oldal 2-szeresére változik.)

Legyen most $b \geqq 22$ és $b < a < b^2$, vagyis az előző eset jelölésével élve: $n = 2$.

Ekkor $a^{b^x} < b^{2b^x}$. Elég megmutatnunk tehát, hogy $b^{2b^x} < b^{a^x}$, azaz, hogy $2b^x < a^x$. Mivel viszont $10b < a$, ezért $2b^x < 10^x b^x < a^x$.

Legyen végül $b \geqq 22$ és $n \geqq 3$ olyan egész szám, melyre $b^{n-1} < a < b^n$.

Ekkor $a^{b^x} < b^{n \cdot b^x}$. Elég tehát belátnunk, hogy $b^{n \cdot b^x} < b^{a^x}$, azaz, hogy $n \cdot b^x < a^x$. $b^{n-1} < a$ miatt $b^{x(n-1)} < a^x$, ezért elég belátni, hogy $n \cdot b^x < b^{x(n-1)}$, ami egyenértékű azzal, hogy $n < b^{x(n-2)}$. $n = 3$-ra $3 < b^x = b^{x(n-2)}$. Nagyobb n-ekre teljes indukcióval látható, hogy igaz az egyenlőtlenség. (n-et 1-gyel növelve a bal oldal 1-gyel nagyobb, a jobb oldal viszont b^x-szeresére nő.)

$b)$ *Könnyen igazolható a következő összefüggés:*

$$l \geqq 2\text{-re:} \quad B_{l+1} < 2^{B_l}.$$

Valóban, teljes indukcióval: $l = 2$-re: $222 < 1024 = 2^{10} < 2^{22}$. Ha pedig valamely k-ra már beláttuk, hogy $B_{k+1} < 2^{B_k}$, akkor $k + 1$-re:

$$B_{k+2} < 2^4 \cdot B_{k+1} < 2^4 \cdot 2^{B_k} = 2^{B_k + 4} < 2^{B_{k+1}}.$$

$c)$ *Szintén könnyen adódik, hogy:*

$$22^{22} < 2^{2^{22}}.$$

Valóban: $22^{22} < \left(2^5\right)^{22} = 2^{5 \cdot 22} < 2^{2^7} < 2^{2^{22}}$.

$d)$ *Most már egyszerű belátnunk, hogy a keresett legnagyobb emeletes hatvány:* $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{22}}}}}}$, ahol az alsó 2011 db szinten 2-es szám szerepel, a legfelső szinten pedig 22.

– Ha a legfelső szinten lévő B_k szám 3, vagy több jegyű lenne, akkor a $b)$ pont szerint tudnánk növelni a hatvány értékén, ha kicseréljük B_k-t $2^{B_{k-1}}$-gyel.

– A legfelső szám tehát legfeljebb 22 lehet. Ekkor viszont a $c)$ pont miatt nem lehet alatta 22-es szám, hiszen akkor a legfelső két szinten lévő 22^{22}-t $2^{2^{22}}$-re cserélve megintcsak növelhetnénk a hatvány értékén.

– Ezért tehát valóban az a legnagyobb hatvány, melyben csak a legfelső szinten van 22-es, alatta pedig csupa 2-esek, hiszen ez nagyobb annál a hatványnál is, melyben minden szinten 2-es szám szerepel. $\square$

2. megoldás. *Jelölések.* Pozitív egész m-re bevezetjük az alábbi két jelölést. Legyen $2_m = 2(10^m - 1)/9$, azaz m darab kettesből álló szám. Legyen továbbá $A(m)$ a következő: $A(1) = 2$, $A(2) = 22$, $m > 2$-re pedig $A(m) = 2^{A(m-1)}$.

A feladatunk az, hogy megmutassuk, hogy az n darab kettesből álló emeletes hatványok közül $A(n)$ a legnagyobb, és minden más kisebb nála. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1, 2$-re nyilvánvaló: Tegyük fel, hogy $n - 1$-ig igaz, lássuk n-re, ahol $n \geqq 3$.

1. segédállítás. Ha $m \geqq 1$, akkor $2^{11^m} > 2_{m+1}$.

Bizonyítás. Ez $m = 1$-re nyilvánvaló ($2^{11} = 2048 > 22$). Ha pedig valamely m-re igaz, akkor $11^{m+1} = 11^m \cdot 11 > 11^m + 11$, hiszen $11^m > 11/10$, vagyis $2^{11^{m+1}}$ legalább még 11 darab

2-es tényezőt tartalmaz, ami legalább 2048-szorosára növeli 2^{11^m}-et, $2_{m+1}/2_m < 100$, hiszen 2_{m+1}-nek csak eggyel több jegye van, mint 2_m-nek. Innen indukcióval kész. $\square$

2. segédállítás. Ha $m \geqq 1$, akkor $A(m+1) \geqq 11A(m)$.

Bizonyítás. Ez $m = 1$-re nyilvánvaló. Ha $k \geqq 10$, akkor $2^k \geqq 11k$ ($k = 10$-re $1024 > 110$, utána a bal oldal kétszeresére, a jobb oldal 11-gyel nő, ami $(k+1)/k < 2$ miatt kevesebb, mint a kétszerese, indukció, mint az előbb). Ha $m \geqq 2$, akkor $A(m) > 10$, és ezzel készen is vagyunk. $\square$

Most tegyük fel, hogy adott a B, n darab kettesből álló emeletes hatvány.

(1) Ha a legalsó alapban 2-es áll, akkor az indukciós feltevés alapján

$$B = 2^C \leqq 2^{A(n-1)} = A(n),$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha C éppen $A(n-1)$, ekkor B éppen $A(n)$.

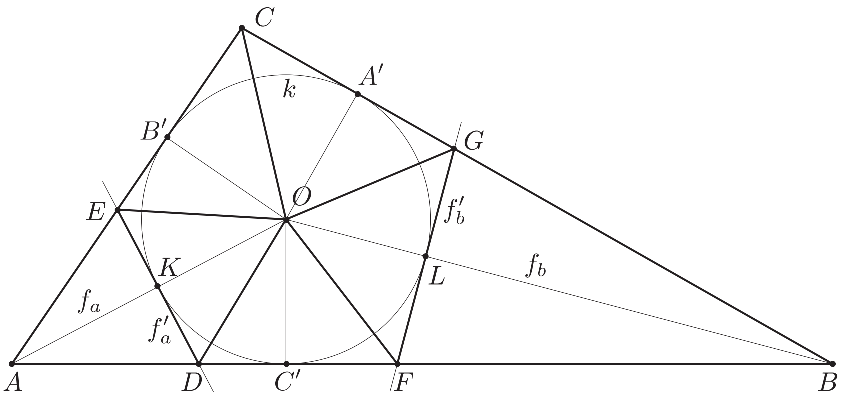
(2) Ha a legalsó alap maga B, akkor $B = 2_n < 2_{n-1}^2$, hiszen egy $n-1$ jegyű szám négyzete legalább $2n-3$ jegyű, B pedig n jegyű: ha $n > 3$, akkor ez elég is, $n = 3$-ra $22^2 > 222$ triviálisan. Ezzel ezt az esetet visszavezettük arra, amikor B valóban egy hatvány.

(3) Maradt tehát annak bizonyítása, hogy ha B legalsó alapja 2_m, ahol $1 < m < n$, akkor $B < A(n)$. Használva az indukciós feltevést és a segédállításokat:

$$B = 2_m^C \leqq 2_m^{A(n-m)} < \left(2^{11^{m-1}}\right)^{A(n-m)} = 2^{11^{m-1}A(n-m)} \leqq 2^{A(n-1)} = A(n).$$

3. Adott az ABC tompaszögű háromszög. (A C-nél lévő szög nagyobb 90°-nál.) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög feldarabolható 7 db hegyesszögű háromszögre.

Megoldás. Húzzuk be az ABC háromszög szögfelezőit, ezek legyenek rendre f_a, f_b és f_c. Tudjuk, hogy a három szögfelező egy pontban metszi egymást, ez pedig az ABC háromszög beírt k körének O középpontja. A k beírt kör sugara legyen r, átmérője d. A megfelelő oldalakon található érintési pontok legyenek rendre A', B' és C'. A k kör és az f_a szögfelező metszéspontja legyen K, míg a k kör és az f_b szögfelező metszéspontja legyen L. K-n, illetve L-en keresztül húzzunk merőlegeseket az f_a, illetve az f_b szögfelezőkre, ezek legyenek f_a' és f_b'. Az f_a' és f_b' egyenesek érintik a k kört a K, illetve L pontban. Az f_a' egyenes messe AB-t D-ben, AC-t pedig E-ben. Az f_b' egyenes pedig messe AB-t F-ben, míg BC-t G-ben.



Azt állítjuk, hogy a következő feldarabolással nyerhető 7 háromszög mindig megfelelő lesz. A $CEDFG$ ötszög a CO, EO, DO, FO, GO szakaszokkal felvágható 5 db háromszögre. Ezekhez járul még az ADE és BGF háromszög.

Ez utóbbi két háromszög egyenlő szárú hegyesszögű háromszög, tehát velük nincs gond.

Most vegyük sorra az ötszög feldarabolásával keletkező 5 db háromszöget.

(i) Először tekintsük az EDO háromszöget. Mivel $EK = KD$, KO pedig merőleges ED-re, ezért EDO egyenlő szárú. Elég tehát a DOE szögről belátni, hogy hegyesszög. A DEA és a $C'B'A$ háromszögek hasonlóak, hiszen mindkettő egyenlő szárú. Ezért $d > B'C' > DE$, tehát $d > DE$, ezért pedig a DE-re, mint átmérőre emelt Thalész-kör sugara kisebb, mint r, így pedig O a Thalész-körön kívül van, tehát valóban $DOE\sphericalangle < 90°$.

(ii) Analóg gondolatmenet mutatja, hogy az FGO háromszög is hegyesszögű.

(iii) Tekintsük most a DFO háromszöget. Mivel $DK = DC'$, $KO = C'O = r$, továbbá $OKD\sphericalangle = OC'D\sphericalangle = 90°$, ezért az OKD és $OC'D$ háromszögek egybevágóak, tehát a KDO és a $C'DO$ szögek egyenlőek, így a $C'DO$ szög hegyesszög. Analóg gondolatmenet révén adódik, hogy a $C'FO$ szög is hegyesszög, hiszen megegyezik az LFO szöggel. Mivel pedig $DC' = DK$ és $C'F = FL$, ezért $DF = DK + FL = (ED + GF)/2$. Láttuk korábban, hogy $ED < d$ és $GF < d$, ezért $DF = (ED + GF)/2 < d$ is teljesül, tehát a DF-re emelt Thalész-kör is külsejében tartalmazza az O pontot, így pedig a DOF szög hegyesszög.

(iv) Most tekintsük a GCO háromszöget. Az előző gondolatmenet mintájára adódik, hogy $GA'O$ egybevágó GLO-val, így az $A'GO$ szög megegyezik az LGO szöggel, tehát $A'GO$ hegyesszög. $A'CO$ nyilván hegyesszög, hiszen éppen a C-nél lévő tompaszög fele. $A'CO$ ugyanakkor éppen ezért nagyobb 45°-nál, tehát az $A'CO$ derékszögű háromszögben $A'CO\sphericalangle > COA'\sphericalangle$, következésképp $r = A'O > A'C$. Mivel pedig $A'G = GL < r$-t már korábban beláttuk, így $CG = A'C + A'G < 2 \cdot r = d$. Tehát a CG-re rajzolt Thalész-körön kívül fog esni az O pont, így pedig a COG szög is hegyesszög.

(v) Végül a CEO háromszögre a GCO háromszögnél elmondottak analógiájára igazolható, hogy ő is hegyesszögű.

Ezzel megmutattunk egy alkalmas feldarabolást 7 db hegyesszögű háromszögre.

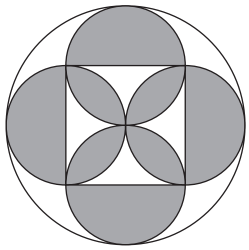
A bizonyítás során semmit nem használtunk fel az ABC háromszögről, azon túl, hogy C-nél tompaszög van.

Haladók – I. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. Keressük meg az összes olyan egymás utáni egész számokból álló számötöst, ahol az első három szám négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő szám négyzetének összegével!

2. Egy $2r$ sugarú körbe r sugarú köröket rajzolunk az ábra szerint. Hanyadrésze a fehéren maradt területek összege a középen kialakuló négyzet területének?



3. Melyek azok az N pozitív egész számok, amelyeknek prímtényezős felbontásában csak a 2 és a 3 hatványai szerepelnek, és N összes osztójának a száma harmadrésze N^2 osztói számának?

4. Adott a síkon tíz pont, egy szabályos tízszög csúcsai. Hányféle módon választhatók ki ezen pontok közül egy olyan háromszög csúcsai, amely belsejében tartalmazza a tízszög középpontját?

5. Egy k-szor n-es sakktábla ($k > 1$, $n > 1$) mindegyik mezőjén áll egy figura. Egy adott jelre mindegyik figura egy, a saját mezőjével élben szomszédos valamelyik mezőre lép. Ha $k + n = 2012$, akkor hány darab $(k; n)$ számpár esetén lehetséges, hogy a lépések után mindegyik mezőn legyen figura?

Megoldások és javítási útmutató

1. Keressük meg az összes olyan egymás utáni egész számokból álló számötöst, ahol az első három szám négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő szám négyzetének összegével!

1. megoldás. Az első számot x-szel jelölve írjuk fel az öt szám négyzetének összegét:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2. \qquad \text{1 pont}$$

Végezzük el a négyzetre emeléseket. Összevonás után kapjuk, hogy

$$x^2 - 8x - 20 = 0. \qquad \text{2 pont}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

I. módszer:

Alakítsuk szorzattá: $(x+2)(x-10)=0$. 1 pont

Egy szorzat akkor nulla, ha egyik tényezője nulla. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1=10$ és az $x_2=-2$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10,11,12,13,14\}$ és a $\{-2,-1,0,1,2\}$ számötösök elégíti ki. 1 pont

II. módszer:

Alakítsuk át az $x^2-8x-20=0$ egyenletet teljes négyzetté kiegészítéssel.

$$(x-4)^2=36.$$ 1 pont

Az egyenlet bal oldalán egy teljes négyzet van, a jobb oldalán egy négyzetszám. Így a fenti egyenlet igaz lesz, ha $x-4=6$ vagy ha $x-4=-6$. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1=10$ és az $x_2=-2$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10,11,12,13,14\}$ és a $\{-2,-1,0,1,2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

III. módszer:

Oldjuk meg az $x^2-8x-20=0$ másodfokú egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}=4\pm 6.$$ 2 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1=10$ és az $x_2=-2$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10,11,12,13,14\}$ és a $\{-2,-1,0,1,2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás. A középső számot x-szel jelölve írjuk fel az öt szám négyzetének összegét:

$$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2.$$ 1 pont

Végezzük el a négyzetre emeléseket. Összevonás után kapjuk, hogy

$$x^2-12x=0.$$ 2 pont

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

I. módszer:

Alakítsuk szorzattá: $x(x-12)=0$. 1 pont

Egy szorzat akkor nulla, ha egyik tagja nulla. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1=0$ és az $x_2=12$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10,11,12,13,14\}$ és a $\{-2,-1,0,1,2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

II. módszer:

Alakítsuk át az$x^2 - 12x = 0$ egyenletet teljes négyzetté kiegészítéssel.

$$(x-6)^2 = 36. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenlet bal oldalán egy teljes négyzet van, a jobb oldalán egy négyzetszám. Így a fenti egyenlet igaz lesz, ha $x - 6 = 6$ vagy ha $x - 6 = -6$. 1 pont

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 12$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

III. módszer:

Oldjuk meg az $x^2 - 12x = 0$ másodfokú egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével:

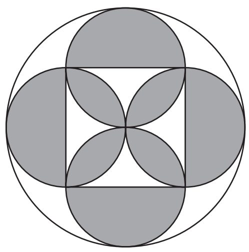
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 0}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{12 \pm 12}{2} = 6 \pm 6. \qquad \text{2 pont}$$

Azaz a másodfokú egyenletnek két gyöke van: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 12$. 1 pont

Ezért a feladatot a $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ és a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ számötösök elégítik ki. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy $2r$ sugarú körbe r sugarú köröket rajzolunk az ábra szerint. Hanyadrésze a fehéren maradt területek összege a középen kialakuló négyzet területének?



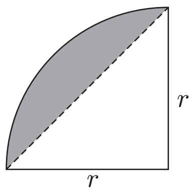
Megoldás. A nagy kör sugara $2r$. Így a területe $T_{\text{nagykör}} = 4r^2\pi$. 1 pont

A középen kialakuló kis négyzet oldala a kis kör átmérője, azaz $2r$. Így a kis négyzet területe

$$T_{\text{négyzet}} = 4r^2. \qquad \text{1 pont}$$

A színezett részek területe 4 kis félkör területének és középen 4 íves tartomány területének összege. 1 pont

A kis félkörök területének összege $T_{\text{félkörök}} = 4 \cdot \dfrac{r^2\pi}{2}$. 1 pont



A középen lévő négy íves rész területének fele megkapható, ha egy negyed kis kör területéből kivonunk egy r befogókkal rendelkező egyenlőszárú derékszögű háromszög területét. 1 pont

$$\frac{1}{2} \cdot T_{\text{íves}} = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{r \cdot r}{2}.$$ 1 pont

Így a fehéren maradt területek összegét megkapjuk, ha a nagy kör területéből levonjuk a 4 félkör, és a négy íves rész területének összegét:

$$T_{\text{fehér}} = T_{\text{nagykör}} - T_{\text{félkörök}} - 4 \cdot T_{\text{íves}} = 4r^2\pi - 4 \cdot \frac{r^2\pi}{2} - 8 \cdot \left(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r \cdot r}{2}\right) =$$

$$= 4r^2\pi - 2r^2\pi - 2r^2\pi + 4r^2 = 4r^2.$$

Azaz a fehéren maradt területek összege a kis négyzet területével egyezik meg. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Melyek azok az N pozitív egész számok, amelyeknek prímtényezős felbontásában csak a 2 és a 3 hatványai szerepelnek, és N összes osztójának a száma harmadrésze N^2 osztói számának?

Megoldás. Ha $N = 2^p3^q$, akkor N osztóinak száma: $(p+1)(q+1)$, N^2 osztóinak száma $(2p+1)(2q+1)$, ahol p és q pozitív egészek. A feltétel szerint:

$$(2p+1)(2q+1) = 3(p+1)(q+1).$$ 1 pont

A zárójelek felbontása és rendezés után $q = \dfrac{p+2}{p-1} = 1 + \dfrac{3}{p-1}$. (1 pont a jó rendezésért, 1 pont az egész leválasztásért vagy más, a továbbiakat indokoló lépésért.) 2 pont

Akkor kapunk csak egészet, ha $p-1$ osztója 3-nak, vagyis $p-1=1$ vagy 3. 1 pont

A lehetséges megoldások: $p=2$, $q=4$-ből $N = 2^2 3^4$ $(=144)$, illetve $p=4$, $q=2$-ből $N = 2^4 3^2$ $(=324)$. 2 pont

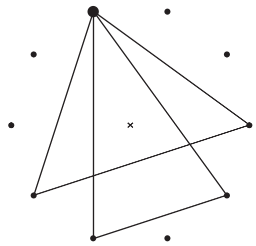
A kapott számok megfelelnek a feltételeknek (ellenőrzés). 1 pont

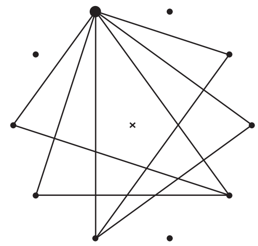
Összesen: 7 pont

4. Adott a síkon tíz pont, egy szabályos tízszög csúcsai. Hányféle módon választhatók ki ezen pontok közül egy olyan háromszög csúcsai, amely belsejében tartalmazza a tízszög középpontját?

Megoldás. Nevezzük „jó”-nak azokat a háromszögeket, amelyek belsejükben tartalmazzák a sokszög középpontját. A szabályos tízszög leghosszabb átlói átmennek a középponton, tehát ezek nem lehetnek jó háromszög oldalai. 1 pont

Jelöljük ki a tízszög egyik csúcsát, és számoljuk meg először az olyan jó háromszögeket, amelyeknek ez a kijelölt pont az egyik csúcsa.





Az előző észrevétel és egy ábra alapján adódik, hogy 6 ilyen jó háromszög van. 3 pont

A kiválasztott pont 10-féle lehet, de minden jó háromszöget háromszor számoltunk, a három csúcsánál.

Tehát összesen $\frac{6 \cdot 10}{3} = 20$ megfelelő háromszög választható ki a szabályos tízszög csúcsai közül. 3 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy k-szor n-es sakktábla ($k > 1$, $n > 1$) mindegyik mezőjén áll egy figura. Egy adott jelre mindegyik figura egy, a saját mezőjével élben szomszédos valamelyik mezőre lép. Ha $k + n = 2012$, akkor hány darab $(k; n)$ számpár esetén lehetséges, hogy a lépések után mindegyik mezőn legyen figura?

Megoldás. Ha k és n is páratlan szám, akkor a szokásos fekete-fehér színezés esetén valamelyik színű mezőből 1-gyel több van, mint a másikból. 1 pont

Ha például a fehér színű mezők száma nagyobb, akkor a fehér mezőn álló figurák csak fekete színű mezőre léphetnek, ezért valamelyik fekete színű mezőn legalább két figurának kell állnia a lépések után. 1 pont

Tehát k és n értéke egyszerre nem lehet páratlan, ha a lépések után mindegyik mezőn van figura. 1 pont

Mivel $k + n = 2012$ páros szám, így k és n értéke is – a feltételek teljesülése esetén – csak páros szám lehet. 1 pont

A $(k; n)$ számpárokban így k értéke 2, 4, 6, 8, $\ldots$, 2010 lehet. Ekkor a lehetséges megfelelő számpárok száma 1005. 1 pont

Mind az 1005 darab számpár esetén megvalósítható a feladat feltétele, például úgy, hogy minden egyes sorban a páronként szomszédos mezőkön álló figurák helyet cserélnek az adott jelre. 2 pont

Összesen: 7 pont

Haladók – II. kategória, első (iskolai) forduló

Feladatok

1. A „23-as szám” című misztikus filmben az egyik szereplő a házszámukat nagyon különlegesnek találja. A ház száma 1814, és az alábbi misztikus tulajdonságokat fedezi fel benne:

(1) ha az első két számjegyhez hozzáadjuk a második kettőből képzett kétjegyű számot, akkor $1 + 8 + 14 = 23$-at kapunk;

(2) ha az első két számjegyből képzett kétjegyű számhoz hozzáadjuk a másik két számjegyet, akkor $18 + 1 + 4 = 23$-at kapunk ismét;

(3) ha a két kétjegyű számot adjuk össze, akkor $18 + 14 = 32$-őt kapunk, ami épp a 23 fordított sorrendben leírva.

Tényleg különleges ebből a szempontból az 1814? Vagyis hány olyan négyjegyű szám van, amelyik rendelkezik a fenti három tulajdonság mindegyikével?

2. Határozzuk meg az A szám pozitív egész osztóinak számát, ahol:

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot \sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}}}}.$$

3. Egy sík 20 darab egyenese összesen 187 darab metszéspontot határoz meg. Igazoljuk, hogy az egyenesek között vannak párhuzamosak.

4. Egy t területű derékszögű trapézba az oldalakat érintő r sugarú kör írható, ahol $t = \frac{25}{4} r^2$. Mekkora a trapéz alapjainak aránya?

5. Van 2012 darab számunk $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}, a_{2012}$ mindegyik $\sqrt{2} + 1$, vagy $\sqrt{2} - 1$. Képezzük a következő összeget:

$$S = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 + \ldots + a_{2011}a_{2012}.$$

Lehet-e $S = 2012$?

Megoldások és javítási útmutató

1. A „23-as szám” című misztikus filmben az egyik szereplő a házszámukat nagyon különlegesnek találja. A ház száma 1814, és az alábbi misztikus tulajdonságokat fedezi fel benne:

(1) ha az első két számjegyhez hozzáadjuk a második kettőből képzett kétjegyű számot, akkor $1 + 8 + 14 = 23$-at kapunk;

(2) ha az első két számjegyből képzett kétjegyű számhoz hozzáadjuk a másik két számjegyet, akkor $18 + 1 + 4 = 23$-at kapunk ismét;

(3) ha a két kétjegyű számot adjuk össze, akkor $18 + 14 = 32$-őt kapunk, ami épp a 23 fordított sorrendben leírva.

Tényleg különleges ebből a szempontból az 1814? Vagyis hány olyan négyjegyű szám van, amelyik rendelkezik a fenti három tulajdonság mindegyikével?

Megoldás. Tekintsük az $\overline{abcd}$, négyjegyű számot, $a \neq 0$, és a, b, c, d számjegyek.

(1) és (2) miatt $a + b + 10c + d = 10a + b + c + d = 23$, ahonnan $a = c$. 2 pont

(3) miatt $20a + b + d = 32$, azaz $a = c = 1$, hiszen $a \geqq 2$ esetén az egyenlőség bal oldala legalább 40 lenne. 1 pont

Mivel $11 + b + d = 23$, $b + d = 12$, azaz a második és a negyedik számjegy összege 12. 1 pont

Ez az alábbi számok esetén teljesül: 1319, 1418, 1517, 1616, 1715, 1814, 1913, 2 pont
tehát 7, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van, azaz az 1814 nem is olyan különleges. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg az A szám pozitív egész osztóinak számát, ahol:

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot \sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}}}}.$$

Megoldás. Vizsgáljuk az $\sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}$ értékét.

$$\sqrt{1 + 2014 \cdot 2016} = \sqrt{1 + (2015 - 1) \cdot (2015 + 1)} = \sqrt{1 + 2015^2 - 1} = \sqrt{2015^2} = 2015.$$ 3 pont

Ekkor az $A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot 2015}}}$.

Az előző gondolatmenet alapján

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot 2014}} = \sqrt{1 + 2011 \cdot 2013} = \sqrt{1 + 2012^2 - 1} = 2012.$$ 2 pont

$2012 = 2^2 \cdot 503.$ 1 pont

Osztók száma: $(2+1)\cdot(1+1)=6$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy sík 20 darab egyenese összesen 187 darab metszéspontot határoz meg. Igazoljuk, hogy az egyenesek között vannak párhuzamosak.

Megoldás. A sík 20 darab egyenese legfeljebb $\dfrac{20\cdot 19}{2}=190$ darab metszéspontot határoz meg, ha bármely két egyenes metszi egymást. 1 pont

Ha az egyenesek között nem lennének párhuzamosak, akkor a 187 metszéspont eléréséhez legalább 3 egyenesnek egy pontban kell metszenie egymást. 1 pont

Amennyiben legalább négy egyenes metszi egymást egy pontban, akkor a metszéspontok maximális száma 185, hiszen 4 darab általános helyzetű egyenes 6 metszéspontot határoz meg, így az összes metszéspont száma legfeljebb $190-5=185$. 1 pont

Tehát párhuzamosság nélkül legfeljebb „hármas csomópontok” jöhetnek létre.

Ha pontosan 1 darab hármas csomópont van, akkor a metszéspontok száma (párhuzamosság nélkül) $190-2=188$. 1 pont

Ha pontosan 2 darab hármas csomópont van, akkor az összes csomópont száma

$$190-2-2=186.$$ 1 pont

Ha még több hármas csomópont lenne, akkor a metszéspontok száma még kisebb lenne.

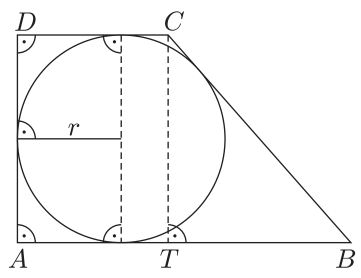
Tehát az egyenesek között vannak párhuzamosak is. 1 pont

A 187 metszéspont megvalósítható például úgy, hogy veszünk 3 darab párhuzamos egyenest és 17 darab általános helyzetű egyenest a felvett három egyeneshez képest. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy t területű derékszögű trapézba az oldalakat érintő r sugarú kör írható, ahol $t=\dfrac{25}{4}r^2$. Mekkora a trapéz alapjainak aránya?

Megoldás. Legyen – ábránknak megfelelően – a trapéz két párhuzamos oldala x és y, ahol például $x \geqq y$.



$$AD=TC=2r, \quad AB=x, \quad DC=y.$$

Az érintőnégyszögek tétele alapján $BC = x + y - 2r$. 1 pont

A $t = \dfrac{x+y}{2} \cdot 2r = \dfrac{25}{4}r^2$ feltétel szerint pedig $x + y = \dfrac{25}{4}r$. 1 pont

A CTB derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva

$$(2r)^2 + (x-y)^2 = \big((x+y) - 2r\big)^2,$$

hiszen $TB = x - y$ és $BC = x + y - 2r$. 1 pont

Mivel $x + y = \dfrac{25}{4}r$, ezért

$$(x-y)^2 = \left(\frac{25}{4}r - 2r\right)^2 - 4r^2 = \frac{225}{16}r^2,$$

így pedig $x - y = \dfrac{15}{4}r$. 1 pont

Az $x - y = \dfrac{15}{4}r$, $x + y = \dfrac{25}{4}r$ egyenletrendszer alapján a megfelelő oldalak összeadásával, illetve kivonásával $x = 5r$, $y = \dfrac{5}{4}r$ adódik. 2 pont

Így pedig $\dfrac{x}{y} = 4$, vagy $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Van 2012 darab számunk $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}, a_{2012}$ mindegyik $\sqrt{2} + 1$, vagy $\sqrt{2} - 1$.

Képezzük a következő összeget:

$$S = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 + \ldots + a_{2011}a_{2012}.$$

Lehet-e $S = 2012$?

Megoldás. Ha egyetlen a_ia_{i+1} alakú tagot veszünk az S-ből (ami egy 1006 tagú összeg), akkor az a_ia_{i+1} tag háromféle értéket vehet fel:

$$\begin{aligned} &\text{Vagy} \quad a_ia_{i+1} = \big(\sqrt{2}+1\big)\big(\sqrt{2}-1\big) = \big(\sqrt{2}-1\big)\big(\sqrt{2}+1\big) = 1, \\ &\text{vagy} \quad a_ia_{i+1} = \big(\sqrt{2}+1\big)\big(\sqrt{2}+1\big) = 3 + 2\sqrt{2}, \\ &\text{vagy} \quad a_ia_{i+1} = \big(\sqrt{2}-1\big)\big(\sqrt{2}-1\big) = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2 pont

Legyen az első típusú tagokból a, a második típusúakból b, a harmadik típusúakból c darab az 1006 tag között! (a, b, c természetesen nemnegatív egészek!)

Ekkor

(I) $$S = 1 \cdot a + \big(3 + 2\sqrt{2}\,\big)b + \big(3 - 2\sqrt{2}\,\big)c = a + 3(b+c) + \sqrt{2}(2b - 2c).$$ 1 pont

S csak úgy lehet egész (mivel a, b, c egész), ha $\sqrt{2}(2b - 2c)$ is egész.

Ez azt jelenti (mivel $\sqrt{2}$ irracionális), hogy $2b - 2c = 0$, hiszen „racionális · irracionális” kéttényezős szorzat akkor, és csak akkor lehet racionális, ha a racionális tényező 0.

Innen $b = c$. 1 pont

Mivel az S-beli tagok számára:

(II) $$1006 = a + b + c = a + 2b,$$ 1 pont

és ha azt szeretnénk, hogy $S = 2012$ legyen, akkor a következő egyenlőség is teljesül:

(III) $$2012 = S = a + 3(b + c) = a + 6b.$$

Most vonjuk ki (III)-ból a (II) egyenletet!

Adódik: $1006 = 4b$.

Ez viszont lehetetlen, hiszen b egész szám (és 1006 nem osztható 4-gyel)! 1 pont

Vagyis nem lehet az S összeg 2012! 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés:

A vonal alatti rész természetesen más módon is bizonyítható. Egy tipikus jó bizonyítás vázlata:

(Ha így gondolkodott a diák, természetesen jár erre a részre a 3 részpont!)

A legkisebb elérhető egészt úgy kapjuk meg, ha minden $a_i a_{i+1}$ tag értéke pontosan 1.

Ekkor $S = 1006$.

Úgy kaphatunk ennél nagyobb egészeket, hogy kettő „1-típusú” tagot kicserélünk egyetlen $a_i a_{i+1} = 3 + 2\sqrt{2}$, és egyetlen $a_i a_{i+1} = 3 - 2\sqrt{2}$ típusú tagra.

Ezzel éppen 4-gyel növeltük az összeget.

Vagyis 1006, és $1006 + 503 \cdot 4$ között éppen az $1006 + 4 \cdot n$ alakú számokat kaphatjuk csak meg, de ezek között nincs ott a 2012!

Haladók I. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Milyen a, b, c, d számjegyekre igaz, hogy $\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right) \cdot 61 = \overline{abcd}$?

2. Vegyünk fel az $ABCD$téglalap belsejében egy P pontot úgy, hogy $PB = 4$, $PC = 3$ és $PD = 5$ legyen. Mekkora PA?

3. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 18, \\ a_2 = 48, \\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \quad \text{ha} \quad n > 2. \end{cases}$$

Hány négyzetszám van a sorozat tagjai között?

4. Adott 50 szám, melyek összege 100. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható 3 úgy, hogy az összegük legalább 6 legyen.

Megoldások és javítási útmutató

1. Milyen a, b, c, d számjegyekre igaz, hogy $\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right) \cdot 61 = \overline{abcd}$?

Megoldás. Vezessük be az $x = \overline{ab}$ és az $y = \overline{cd}$ új ismeretleneket. Így egyenletünk az alábbi alakú:

$$(x + y) \cdot 61 = \overline{xy},$$

$$61x + 61y = 100x + y. \qquad \text{1 pont}$$

$$60y = 39x,$$

$$20y = 13x. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel a 20 és a 13 relatív prímek, 1 pont
ezért szükséges, hogy x 20 többszöröse legyen, 1 pont
és y 13 többszöröse legyen. 1 pont

Azaz az alábbi táblázatban szereplő (x, y) számpárokat, és a nekik megfelelő (a, b, c, d) számjegyeket, valamint $\overline{abcd}$ számokat kapjuk:

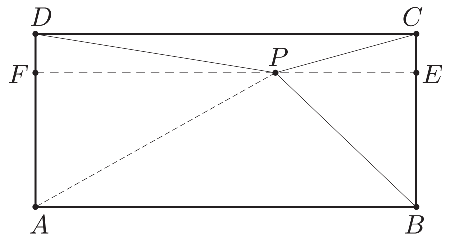
x	y	a	b	c	d	$\overline{abcd}$
20	13	2	0	1	3	2013
40	26	4	0	2	6	4026
60	39	6	0	3	9	6039
80	52	8	0	5	2	8052

2 pont

Összesen: 7 pont

2. Vegyünk fel az $ABCD$téglalap belsejében egy P pontot úgy, hogy $PB = 4$, $PC = 3$ és $PD = 5$ legyen. Mekkora PA?

Megoldás. Húzzunk P-n keresztül párhuzamost AB-vel. Ez az AD oldalt F, BC oldalt E pontban metszi.



Írjuk fel a Pitagorasz-tételt a PEB és PEC háromszögekre:

$$PB^2 = PE^2 + EB^2$$
$$PC^2 = PE^2 + EC^2. \qquad \text{1 pont}$$

Képezzük a $PB^2 - PC^2$ különbséget:

$$PB^2 - PC^2 = \left(PE^2 + EB^2\right) - \left(PE^2 + EC^2\right) = EB^2 - EC^2,$$
$$(i) \qquad PB^2 - PC^2 = EB^2 - EC^2. \qquad \text{1 pont}$$

Írjuk fel a Pitagorasz tételt a FAP és FDP háromszögekre:

$$PA^2 = PF^2 + FA^2,$$
$$PD^2 = PF^2 + FD^2. \qquad \text{1 pont}$$

Képezzük a $PA^2 - PD^2$ különbséget:

$$PA^2 - PD^2 = \left(PF^2 + FA^2\right) - \left(PF^2 + FD^2\right) = FA^2 - FD^2,$$
$$(ii) \qquad PA^2 - PD^2 = FA^2 - FD^2. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel FE párhuzamos volt AB-vel ezért $EB = FA$ és $EC = FD$. Így (i) és (ii)-ből:

$$PB^2 - PC^2 = EB^2 - EC^2 = FA^2 - FD^2 = PA^2 - PD^2. \qquad \text{2 pont}$$

Behelyettesítve az ismert adatokat:

$$4^2 - 3^2 = PA^2 - 5^2,$$
$$PA = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont

3. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 18, \\ a_2 = 48, \\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \quad \text{ha} \quad n > 2. \end{cases}$$

Hány négyzetszám van a sorozat tagjai között?

Megoldás. Írjuk fel az első két tag prímtényezős felbontását: $a_1 = 2^1 \cdot 3^2$, és $a_2 = 2^4 \cdot 3^1$.

Mivel az első két tagnak csak a 2, és a 3 a prímtényezői, ezért az összes többi tag prímfelbontásában is csak ez a két szám szerepelhet. 1 pont

Egy (1-nél nagyobb egész) szám pontosan akkor négyzetszám, ha prímfelbontásában minden prímtényező páros kitevővel szerepel, így ennek teljesülését fogjuk vizsgálni a_n esetén. 1 pont

A harmadik tagtól elkezdve a_n definíciója alapján az a_n prímfelbontásában szereplő 2-esek száma az előző két tag prímfelbontásaiban szereplő 2-esek számának összege (a 3-as prímtényezőkre hasonlóan). 1 pont

Így ha külön-külön vizsgáljuk az

a_n prímfelbontásában szereplő 2-esek számát (k_n-nel jelöljük), illetve

a_n prímfelbontásában szereplő 3-asok számát (h_n-nel jelöljük),

akkor két Fibonacci-szerű sorozatot kapunk. 1 pont

A k_n $(1, 4, 5, 9, 14, 23, \ldots)$ sorozat paritását vizsgálva adódik, hogy minden $n = 3k + 2$ indexű tag lesz csak páros, a többi páratlan, míg
a h_n $(2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots)$ sorozat minden $n = 3k + 1$ indexű tagja lesz csak páros, a többi páratlan. 2 pont

Vagyis k_n és h_n azonos n-re nem lehet egyszerre páros, így a_n prímfelbontásában valamelyik prímtényező páratlan kitevővel szerepel.

Így az a_n sorozat tagjai között nem lehet négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Adott 50 szám, melyek összege 100. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható 3 úgy, hogy az összegük legalább 6 legyen.

Megoldás. Képezzük az alábbi 3 tagú összegeket: $S_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_2 = a_2 + a_3 + a_4$, $\ldots$, $S_{49} = a_{49} + a_{50} + a_1$, $S_{50} = a_{50} + a_1 + a_2$. 2 pont

Ekkor $S_1 + S_2 + \ldots + S_{50} = 3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{50}) = 300 = 50 \cdot 6$. 2 pont

Az állítás következik abból, hogyha 50 szám összege $50 \cdot 6 = 300$, akkor nem lehet a számok mindegyike 6-nál kisebb. 3 pont

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 2. forduló

Feladatok

1. Az a, b pozitív egészek, és tudjuk, hogy a^2+ab+b^2 tízes számrendszerben felírva 0-ra végződik. Bizonyítsuk be, hogy legalább két nullára végződik.

2. Adott a síkon 6 pont, közülük semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy található közöttük három, amelyek által meghatározott háromszögnek van egy legalább $120°$-os szöge.

3. Nyolc darab pozitív egész szám összege és szorzata ugyanannyit ér. Mekkora ez a közös érték?

4. Egy konvex ötszög pontosan 100 darab egységnyi oldalú egybevágó szabályos háromszögből rakható ki (hézag- és átfedés nélkül). Mekkora lehet az ötszög kerülete?

Megoldások és javítási útmutató

1. Az a, b pozitív egészek, és tudjuk, hogy a^2+ab+b^2 tízes számrendszerben felírva 0-ra végződik. Bizonyítsuk be, hogy legalább két nullára végződik.

Megoldás. Átfogalmazzuk a feladatot. Tudjuk, hogy 10 osztója az a^2+ab+b^2 kifejezésnek, és azt kell belátnunk, hogy a^2+ab+b^2 100-zal is osztható. 1 pont

A feltétel ekvivalens azzal, hogy a kifejezés osztható 2-vel és 5-tel. Le fogjuk vezetni, hogy akkor 4-gyel és 25-tel is osztható, amiből már következik a bizonyítandó állítás. 1 pont

Először vizsgáljuk a 2-vel való oszthatóságot. Az alábbi táblázat alapján csak akkor lesz a kifejezés páros, ha a és b is páros.

a	b	a^2+ab+b^2 2-es maradékai
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Tehát a és b is páros. Ebből viszont az következik, hogy a^2, b^2 és ab is osztható 4-gyel, vagyis kifejezésünk is osztható 4-gyel. 2 pont

Most megnézzük az 5-tel való oszthatóságot.

a^2	b^2	ab	a^2+ab+b^2 5-ös maradékai
0	0	0	0
0	1; 4	0	1; 4
1; 4	0	0	1; 4
1	1	1; 4	3; 1
1	4	2; 3	2; 3
4	1	2; 3	2; 3
4	4	1; 4	4; 2

(A táblázat ötödik sora például azt mutatja, hogy ha a^2 1 maradékot ad 5-tel osztva, akkor a 1 vagy 4 maradékot ad, és ha b^2 maradéka 4, akkor b maradéka 2 vagy 3. Ezeket minden lehetséges párosításban összeszorozva ab-re az $1\cdot 2=2$, $1\cdot 3=3$, $4\cdot 2=8$, $4\cdot 3=12$ vagyis a 2 és 3 lehetséges maradékokat kapjuk.) 2 pont

Az előzőekhez hasonlóan csak akkor lesz a^2+ab+b^2 5-tel oszható, ha a és b is az, de ebben az esetben a^2, ab és b^2 (tehát összegük is) 25-tel is osztható. 1 pont

Ha pedig egy egész 4-gyel és 25-tel is osztható, akkor 100-zal is, így tízes számrendszerben felírt alakja legalább két nullára végződik.

Összesen: 7 pont

2. Adott a síkon 6 pont, közülük semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy található közöttük három, amelyek által meghatározott háromszögnek van egy legalább 120°-os szöge.

Megoldás. Képezzük az adott pontok konvex burkát, azaz azt a legszűkebb konvex sokszöget, melynek csúcsai az adott pontok közül valók, és tartalmazza az adott pontokat. 1 pont

Ha a konvex burok hatszög:

Nem lehet a hatszög minden szöge kisebb, mint 120°, mert a hatszög belső szögeinek összege 720°. 1 pont

Ezért a hatszögnek van legalább 120°-os szöge, ami a konvexitás miatt kisebb, mint 180°. Tehát ez a szög szöge egy olyan háromszögnek, melynek csúcsai az adott pontok közül valók, így az állítás teljesül. 1 pont

Ha a konvex burok ötszög, négyszög, vagy háromszög:

Ekkor van olyan pont, ami a konvex burok belsejében van (hiszen a pontok között nincs három, amelyek egy egyenesre illeszkednének), legyen ez a pont A. 1 pont

A konvex sokszöget az egyik csúcsából induló átlói háromszögekre bontják, tekintsük azt a BCD háromszöget, amely belsejében van az A pont. 2 pont

A BAD, CAD, DAB szögek összege 360°, ezért van közöttük olyan, amelyik legalább 120°, és az itt keletkező háromszög eleget tesz a feltételeknek, így az állítás teljesül. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Nyolc darab pozitív egész szám összege és szorzata ugyanannyit ér. Mekkora ez a közös érték?

Megoldás. Feltehetjük, hogy $1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_8$ a nyolc szám nagyság szerinti sorrendje.

Az $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_8$ egyenlet oldalait x_8-cal osztva

$$\frac{x_1}{x_8} + \frac{x_2}{x_8} + \frac{x_3}{x_8} + \ldots + \frac{x_7}{x_8} + 1 = x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_7$$

adódik.

Mivel

$$\frac{x_1}{x_8} \leqq \frac{x_2}{x_8} \leqq \ldots \leqq \frac{x_7}{x_8} \leqq 1,$$

ezért $8 \geqq x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_7$. 1 pont

Nyilvánvaló, hogy $x_7 \geqq 2$, így $x_8 \geqq x_7 \geqq 2$, ezért $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, hiszen $x_4 \geqq 2$ esetén a szorzat értéke legalább 16.

Tehát $4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = x_5 x_6 x_7 x_8$. Így pedig

$$x_5 x_6 x_7 = \frac{4}{x_8} + \frac{x_5}{x_8} + \frac{x_6}{x_8} + \frac{x_7}{x_8} + 1 \leqq 6,$$

hiszen $x_8 \geqq x_7 \geqq 2$. 1 pont

Az $x_5 x_6 x_7 \leqq 6$ egyenlőtlenség alapján x_5 értéke csak 1 lehet. Így pedig $x_6 x_7 \leqq 6$, ezért x_6 értéke 1 vagy 2. 1 pont

Ha $x_6 = 1$, akkor $6 + x_7 + x_8 = x_7 x_8$, ahonnan

$$x_8 = \frac{x_7 + 6}{x_7 - 1} = 1 + \frac{7}{x_7 - 1}, \quad \text{azaz} \quad (x_7 - 1)(x_8 - 1) = 7.$$

Az egyenlet egyetlen megoldása $x_7 = 2$, $x_8 = 8$, ekkor pedig

$$x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_8 = x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 16.$$ 1 pont

Ha $x_6 = 2$, akkor $7 + x_7 + x_8 = 2x_7 x_8$ alapján

$$x_8 = \frac{x_7 + 7}{2x_7 - 1} \geqq x_7,$$

ahonnan $(2x_7 - 1)(2x_8 - 1) = 15$ adódik. 1 pont

Egyenletünk megoldása $x_7 = 2$, $x_8 = 3$. 1 pont

Ebben az esetben a szorzat és az összeg közös értéke 12.

A közös érték tehát 16 vagy 12, ahol mindkét érték megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

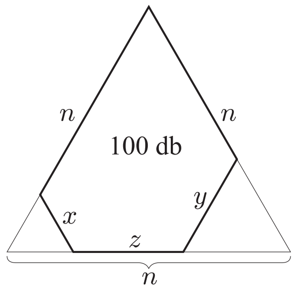
Összesen: 7 pont

4. Egy konvex ötszög pontosan 100 darab egységnyi oldalú egybevágó szabályos háromszögből rakható ki (hézag- és átfedés nélkül). Mekkora lehet az ötszög kerülete?

Megoldás.

Egybevágó szabályos háromszögekből egy újabb szabályos háromszöget csak négyzetszám számú darabból lehet kirakni. Esetünkben egy n oldalú szabályos háromszög n^2 egységyni oldalú kis háromszögből állhat. 1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő ötszög az alábbi ábra szerint kiegészíthető egy n oldalú szabályos háromszögre:



Ha például $x \leqq y$, akkor $1 \leqq x \leqq y < n$, $\;n = x + y + z$ az ötszög létrejöttének feltétele, ahol $z \geqq 1$.

Bevezető megállapításunk alapján

$$(x+y+1)^2 - x^2 - y^2 \leqq (x+y+z)^2 - x^2 - y^2 = 100.$$

A felírt egyenlőtlenség rendezett alakja

$$2x + 2y + 2xy \leqq 99.$$ 1 pont

Ha $x \leqq y$, akkor $4x + 2x^2 \leqq 99$, azaz $x^2 + 2x \leqq 49{,}5$, ahonnan $x \leqq 6$ következik. 1 pont

Mivel $n^2 - x^2 - y^2 = 100$, ezért

(1) $x = 1$ esetén $n^2 - y^2 = 101$, így $n - y = 1$, $n + y = 101$, ahonnan $n = 51$, $y = 50$ nem ad megoldást.

(2) $x = 2$ esetén $n^2 - y^2 = 104$, ezért $n - y = 2$, $n + y = 52$ vagy $n - y = 4$, $n + y = 26$ lehetséges.

Az első esetben $n = 27$, $y = 25$, ami nem ad megoldást.

A második esetben $n = 15$, $y = 11$. Ekkor $x = 2$, $y = 11$, $z = 2$, a másik két oldal pedig 4, illetve 13 egység hosszú. Az ötszög kerülete pedig 32 egységnyi. 2 pont

(3) Az $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$ esetekben rendre $n^2 - y^2 = 109$, $n^2 - y^2 = 116$, $n^2 - y^2 = 125$, $n^2 - y^2 = 136$ adódik.

Az $n^2 - y^2 = (n - y)(n + y)$ azonosság alapján $n - y < n + y$ felhasználásával a felsorolásnak megfelelően az

$$\left.\begin{aligned} n-y&=1\\ n+y&=109 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} n-y&=2\\ n+y&=58 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} n-y&=1\\ n+y&=125 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} n-y&=5\\ n+y&=25 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} n-y&=2\\ n+y&=68 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} n-y&=4\\ n+y&=34 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerek adódnak, felhasználva azt is, hogy $n-y$ és $n+y$ azonos paritásúak.

A felírt egyenletrendszerek egyikének sincs a feladat feltételeinek megfelelő megoldása. 2 pont

Tehát az ötszög kerülete csak 32 egység hosszú lehet.

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 1. forduló

Feladatok

1. Egy kör kerületére felírjuk 1-től 13-ig az egészeket valamilyen sorrendben. Három (a kör mentén) szomszédos számot *triónak* nevezünk. (13 ilyen csoport van.) A trióban lévő három szám összegét: a *trió összegének* hívjuk. Egy *trió maximális,* ha a trió összege nagyobb, vagy egyenlő, mint az adott sorrendnél fellépő másik 12 trió bármelyikének az összege.

Mennyi a maximális trió összegének minimuma (az összes lehetséges sorrend esetén)?

2. Egy konvex ötszög pontosan 100 darab egységnyi oldalú egybevágó szabályos háromszögből rakható ki (hézag- és átfedés nélkül). Mekkora lehet az ötszög kerülete?

3. Van 15 darab különböző 2 és 2013 közé eső pozitív egészünk úgy, hogy bármely kettő (különböző) közülük relatív prím egymáshoz.

Igazoljuk, hogy a számok között van prím!

4. Az $ABCD$ négyzet BD átlóján úgy vettük fel az M és N pontokat, hogy

$$BM^2 + ND^2 = MN^2.$$

Mekkora az $MAN\sphericalangle$?

5. Melyek azok az x valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [2012x] = 2013?$$

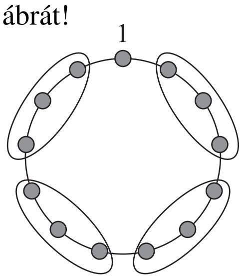
($[y]$ értéke az a legnagyobb egész szám, amely y-nál nem nagyobb.)

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kör kerületére felírjuk 1-től 13-ig az egészeket valamilyen sorrendben. Három (a kör mentén) szomszédos számot *triónak* nevezünk. (13 ilyen csoport van.) A trióban lévő három szám összegét: a *trió összegének* hívjuk. Egy *trió maximális,* ha a trió összege nagyobb, vagy egyenlő, mint az adott sorrendnél fellépő másik 12 trió bármelyikének az összege.

Mennyi a maximális trió összegének minimuma (az összes lehetséges sorrend esetén)?

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát!



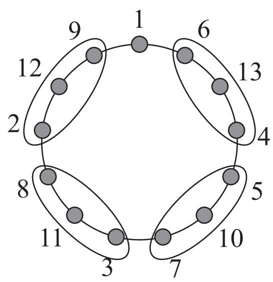
A kör kerületén ott van valahol az 1-es szám (az ábrán: „délben”), a maradék 12 számot az ábra szerint osszuk fel 4 diszjunkt trióra! 2 pont

Ennek a 4 triónak az összege: $2 + 3 + \ldots + 13 = 90$. (Összegeik átlaga: $90/4 = 22{,}5$)

Vagyis a 4 trió között van olyan, amelynek összege legalább 23.

Így a maximális trió összegének minimuma legalább 23 … 2 pont

…, és a 23-as minimum el is érhető a következő ábra szerint. (A 13 darab „ellenőrzést” nem mellékeljük.)



Vagyis a maximális trió összegének minimuma 23. 3 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzések:

– Ha a versenyző valamilyen módon igazolja, hogy a maximális trió összegének minimuma legalább 22 *(a 23-as érték helyett) az első 4 pontból kapjon 2 pontot.*

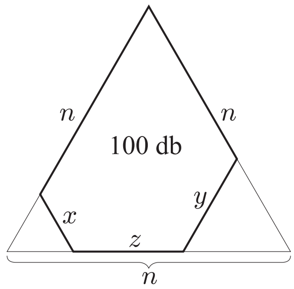
– Az utolsó három pont természetesen akkor is jár, ha a versenyző nem indokolja a „legalább 23*”-at (az első 4 pontért), de megfelelő olyan ábrája van, ahol a maximális trió összege* 23!

2. Egy konvex ötszög pontosan 100 darab egységnyi oldalú egybevágó szabályos háromszögből rakható ki (hézag- és átfedés nélkül). Mekkora lehet az ötszög kerülete?

Megoldás.

Egybevágó szabályos háromszögekből egy újabb szabályos háromszöget csak négyzetszám számú darabból lehet kirakni. Esetünkben egy n oldalú szabályos háromszög n^2 egységnyi oldalú kis háromszögből állhat. 1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő ötszög az alábbi ábra szerint kiegészíthető egy n oldalú szabályos háromszögre:



Ha például $x \leqq y$, akkor $1 \leqq x \leqq y < n$, $n = x + y + z$ az ötszög létrejöttének feltétele, ahol $z \geqq 1$.

Bevezető megállapításunk alapján

$$(x+y+1)^2 - x^2 - y^2 \leqq (x+y+z)^2 - x^2 - y^2 = 100.$$

A felírt egyenlőtlenség rendezett alakja

$$2x + 2y + 2xy \leqq 99.$$ 1 pont

Ha $x \leqq y$, akkor $4x + 2x^2 \leqq 99$, azaz $x^2 + 2x \leqq 49{,}5$, ahonnan $x \leqq 6$ következik. 1 pont

Mivel $n^2 - x^2 - y^2 = 100$, ezért

(1) $x = 1$ esetén $n^2 - y^2 = 101$, így $n - y = 1$, $n + y = 101$, ahonnan $n = 51$, $y = 50$ nem ad megoldást.

(2) $x = 2$ esetén $n^2 - y^2 = 104$, ezért $n - y = 2$, $n + y = 52$ vagy $n - y = 4$, $n + y = 26$ lehetséges.

Az első esetben $n = 27$, $y = 25$, ami nem ad megoldást.

A második esetben $n = 15$, $y = 11$. Ekkor $x = 2$, $y = 11$, $z = 2$, a másik két oldal pedig 4, illetve 13 egység hosszú. Az ötszög kerülete pedig 32 egységnyi. 2 pont

(3) Az $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$ esetekben rendre $n^2 - y^2 = 109$, $n^2 - y^2 = 116$, $n^2 - y^2 = 125$, $n^2 - y^2 = 136$ adódik.

Az $n^2 - y^2 = (n-y)(n+y)$ azonosság alapján $n - y < n + y$ felhasználásával a felsorolásnak megfelelően az

$$\left.\begin{aligned} n-y&=1\\ n+y&=109 \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} n-y&=2\\ n+y&=58 \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} n-y&=1\\ n+y&=125 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} n-y&=5\\ n+y&=25 \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} n-y&=2\\ n+y&=68 \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} n-y&=4\\ n+y&=34 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerek adódnak, felhasználva azt is, hogy $n - y$ és $n + y$ azonos paritásúak.

A felírt egyenletrendszerek egyikének sincs a feladat feltételeinek megfelelő megoldása. 2 pont

Tehát az ötszög kerülete csak 32 egység hosszú lehet.

Összesen: 7 pont

3. Van 15 darab különböző 2 és 2013 közé eső pozitív egészünk úgy, hogy bármely kettő (különböző) közülük relatív prím egymáshoz.

Igazoljuk, hogy a számok között van prím!

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy a számok között nincs prím.

Ekkor minden szám legalább két (nem feltétlenül különböző) prímszám szorzatára bontható, és mivel relatív prímek egymáshoz, ezért két különböző szám prímfelbontásában nem szerepelhetnek azonos prímek. 2 pont

Legyen a 15 számunk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}$ a legkisebb prímtényezőik szerint növekvő sorrendben felsorolva.

(Vagyis, $i < j$ akkor, és csak akkor, ha a_i legkisebb prímtényezője kisebb, mint a_j legkisebb prímtényezője.) 2 pont

Vizsgáljuk a_{15} prímtényezős felbontását!

a_{15} legkisebb prímtényezője (az előző pont miatt) legalább akkora, mint a 15-dik pozitív prím, ami $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47)$ 47.

Vagyis $a_{15} \geqq 47 \cdot 47 = 2209 > 2013$. 2 pont

Ellentmondásra jutottunk, a hiba csak az indirekt feltevésünkben lehet, vagyis valóban van a 15 szám között prím. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: a feladat olyan értelemben „éles", hogy ha csak 14 *számunk lenne* 2–2013*-ig, már nem lenne igaz az állítás.*

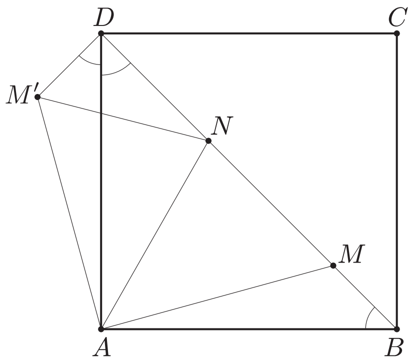
Erre jó ellenpélda az $a_1 = 2^2$, $a_2 = 3^2$, $a_3 = 5^2$, …, $a_{14} = 43^2 = 1849$ *számok.*

4. Az $ABCD$ négyzet BD átlóján úgy vettük fel az M és N pontokat, hogy

$$BM^2 + ND^2 = MN^2.$$

Mekkora az $MAN\sphericalangle$?

Megoldás. Először jegyezzük meg, hogy a pontok sorrendje B, M, N, D, hiszen a B, N, M, D sorrendben már BM^2 is nagyobb lenne, mint MN^2. 1 pont



Készítsünk ábrát! Ahhoz, hogy a feltételt fel tudjuk használni, létrehozunk egy olyan háromszöget, amelynek oldalai BM, MN és ND. Ehhez forgassuk el A körül 90°-kal az ABM háromszöget, az ábrán látható módon az ADM' háromszögbe. 2 pont

Az elforgatás miatt egyrészt $DM' = BM$, másrészt $ADM'\sphericalangle = ABM\sphericalangle = 45°$. Tehát NDM' derékszögű háromszög, vagyis Pitagorasz tétele és a feltétel alapján $M'N = MN$. 1 pont

Szintén a forgatás miatt $AM = AM'$, így $AMNM'$ deltoid. 1 pont

Végül vegyük észre, hogy ismét a forgatás miatt AM' merőles AM-re, és a deltoid AN átlója felezi A-nál lévő szögét, tehát $MAN\sphericalangle = 45°$. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

5. Melyek azok az x valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [2012x] = 2013?$$

($[y]$ értéke az a legnagyobb egész szám, amely y-nál nem nagyobb.)

Megoldás. Először belátjuk, hogy $[2012x] < 3$. Ha ugyanis $3 \leqq [2012x]$ lenne, akkor $3 \leqq 2012x$, azaz $\frac{3}{2012} \leqq x$.

Az $f(x) = [x] + [2x] + [3x] + \ldots + [2012x]$ függvény növekvő, de

$$f\left(\frac{3}{2012}\right) = 0 \cdot 670 + 1 \cdot 671 + 2 \cdot 670 + 3 \cdot 1 = 2014,$$

ezért $x < \frac{3}{2012}$. 2 pont

Az eredeti egyenlet szerint $0 < x < \frac{3}{2012}$, valamint $0 \leqq [2012x] < 3$ alapján $f(x)$ tagjainak értéke 0, 1, 2 lehet.

Ha $f(x)$ tagjai között a darab 0, b darab 1, c darab 2 értékű tag van, akkor $a+b+c = 2012$ és $b + 2c = 2013$. 1 pont

Egyenletrendszerünk alapján $b = 2011 - 2a$, $c = a + 1$, ahol $0 < a < 2012$.

Az $ax < 1$ és $(a + 1)x \geqq 1$ feltételek alapján

(I) $$\frac{1}{a+1} \leqq x < \frac{1}{a}.$$

A $\left[(2012-a)x\right]=2$ feltétel alapján pedig $(2012-a)x \geqq 2$, ahonnan $x \geqq \dfrac{2}{2012-a}$, így pedig

(II) $$\frac{2}{2012-a} \leqq x < \frac{1}{a}.$$ 1 pont

Az egyenlőtlenség alapján $a \leqq 670$.

Mivel $(2011-a)x < 2$, ezért $x < \dfrac{2}{2011-a}$, így

(III) $$\frac{1}{a+1} \leqq x < \frac{2}{2011-a},$$

ahonnan $670 \leqq a$ adódik. 1 pont

Eredményeink alapján $a=670$, $b=671$, $c=671$. Így pedig (I), (II), (III) alapján rendre

$$\frac{1}{671} \leqq x < \frac{1}{670},$$
$$\frac{1}{671} \leqq x < \frac{2}{1341},$$
$$\frac{1}{671} \leqq x < \frac{2}{1341} \quad \text{adódik.}$$

A rendszer megoldása $\dfrac{1}{671} \leqq x < \dfrac{2}{1341}$. 1 pont

Az $\left[\dfrac{1}{671}; \dfrac{2}{1341}\right[$ intervallumba eső valamennyi x érték megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg azokat a négyzetszámokat, amelyekre igaz, hogy ha felcseréljük két utolsó számjegyüket, továbbra is négyzetszámot kapunk!

2. Az AFE hegyesszögű háromszög ED és FB magasságvonalai a C pontban metszik egymást. Az M, N, P, Q pontok rendre az FC, EC, AE, AF szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy $MNPQ$ téglalap.

3. Az x, y, z valós számokra $x + y + z = 5$ és $xy + yz + zx = 8$ teljesül. Igazoljuk, hogy x, y, z bármelyikének értéke legalább 1, de legfeljebb $\frac{7}{3}$.

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg azokat a négyzetszámokat, amelyekre igaz, hogy ha felcseréljük két utolsó számjegyüket, továbbra is négyzetszámot kapunk!

Megoldás. Egy négyzetszám utolsó számjegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet.

Ha az utolsó számjegy 0, akkor az eredeti szám $10k$; $k \in \mathbb{N}^+$ alakú. Egy ilyen szám négyzete osztható százzal, tehát minden $(10k)^2$; $k \in \mathbb{N}^+$ négyzetszám megoldás. 1 pont

Ha az utolsó számjegy 5, az eredeti szám $10k + 5$; $k \in \mathbb{N}$ alakú, ennek négyzete pedig $100l + 25$; $l \in \mathbb{N}$ alakú, de ebben az esetben az utolsó két számjegy megfordítása 52-re végződő számot ad és ez nem lehet négyzetszám. 1 pont

Tehát a megfelelő négyzetszámok utolsó jegye 1, 4, 6 vagy 9 lehet.

Ha az utolsó két számjegy különböző, akkor a $(14; 41)$, $(16; 61)$, $(19; 91)$, $(46; 64)$, $(49; 94)$, $(69; 96)$ végződéspárok jöhetnek szóba. 1 pont

Mivel egy négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad, ezért csak a $(16; 61)$, $(69; 96)$ végződéspárok maradnak. 1 pont

Tekintettel arra, hogy $51^2 - 50^2 = 101$, ezért ha az utolsó két számjegy különböző, az 50-nél nagyobb számok négyzete már a százas helyiértéken is különbözik, így elegendő az 50 alatti számok négyzetében keresni a megfelelő végződéspárokat, sőt mivel $(50 - k)^2$ és k^2 ugyanúgy végződik, ezért elegendő a 25 alatti számok négyzetét vizsgálni.

Ezek közül csak a $13^2 = 169$ és a $14^2 = 196$ felel meg a feltételeknek. 1 pont

Ha az utolsó két számjegy azonos, akkor a 4-gyel való oszthatóságot vizsgálva, csak a 44-re végződő négyzetszámok jöhetnek szóba.

A végződéseket vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a 12, 62, 38, 88 végződésű számok négyzete végződik 44-re.

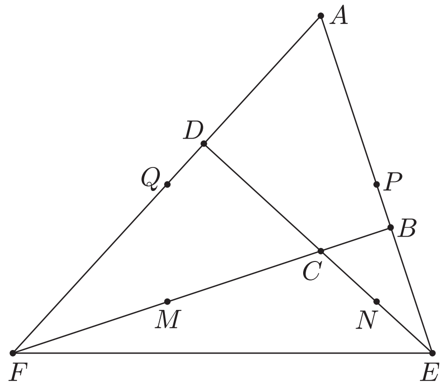
Tehát a feladatnak megoldási még az $(50k \pm 12)^2$; $k \in \mathbb{N}$ alakú négyzetszámok. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Az AFE hegyesszögű háromszög ED és FB magasságvonalai a C pontban metszik egymást. Az M, N, P, Q pontok rendre az FC, EC, AE, AF szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy $MNPQ$ téglalap.

Megoldás.



Mivel M, N, P, Q felezési pontok, az MN, NP, PQ, QM szakaszok rendre a CFE, CAE, AFE és AFC háromszögek középvonalai. 2 pont

Ezért MN és $1/2FE$, valamint PQ és $1/2FE$ párhuzamos és egyenlő egymással. 1 pont

Tehát MN párhuzamos és egyenlő PQ-val, tehát $MNPQ$ paralelogramma. 1 pont

Mivel C magasságpont, EF és az AC magasságvonal merőlegesek egymásra, 1 pont

és MN párhuzamos FE-vel, és QM párhuzamos AC-val, így MN merőleges QM-re, 1 pont

tehát $MNPQ$ téglalap. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az x, y, z valós számokra $x+y+z=5$ és $xy+yz+zx=8$ teljesül. Igazoljuk, hogy x, y, z bármelyikének értéke legalább 1, de legfeljebb $\frac{7}{3}$.

Megoldás. Az első egyenletből $x=5-(y+z)$, ezt a másikba írva $\big(5-(y+z)\big)(y+z)+ + yz = 8$. Rendezzük a kapott összefüggést:

$$\big(5-(y+z)\big)(y+z)+yz=8$$
$$5y+5z-y^2-z^2-2yz+yz=8$$
$$y^2+y(z-5)+z^2-5z+8=0.$$
2 pont

A kapott egyenletet y-ban másodfokú paraméteres egyenletnek tekintjük, és megvizsgáljuk, milyen feltételt szab z-re az, hogy a diszkrimináns nem lehet negatív (hiszen feltettük, hogy létezik x, y és z). 2 pont

$$D(z)=(z-5)^2-4(z^2-5z+8)\geqq 0$$
$$-3z^2+10z-7=-3(z-1)\left(z-\frac{7}{3}\right)\geqq 0.$$
1 pont

A lefele nyíló parabola a két zérushelye között nemnegatív, vagyis valóban $1\leqq z\leqq\frac{7}{3}$. Az indoklás x-re és y-ra pontosan ugyanígy elmondható, tehát mindhárom változó a megadott korlátok közé esik. 1 pont

Végül megmutatjuk, hogy léteznek a feltételeknek megfelelő valós számok.

$x=y=2$, $z=1$ illetve $x=y=\frac{4}{3}$, $z=\frac{7}{3}$ esetén teljesülnek az egyenlőségek, és z felveszi valamelyik szélsőértékét. 1 pont

Összesen: 7 pont

Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}$ tört nem egyszerűsíthető.

2. Egy négyzet tetszőleges belső pontja P, amin keresztül párhuzamosokat húzunk a négyzet oldalaival és átlóival. Ezek az egyenesek nyolc részre vágják a négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett részek két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a részek területének összege egyenlő.

3. Egy n sorból, és 7 oszlopból álló ($n \times 7$-es) táblázatot szeretnék kitölteni a következő módon:

– Minden sorban az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok kell, hogy szerepeljenek valamilyen sorrendben (természetesen a sor valamennyi mezőjébe pontosan egy szám kerül).

– Bármely két sornak legalább egy helyen/egy mezőben különböznie kell.

– Bármely két sor legalább egy helyen meg kell egyezzen.

Legfeljebb mennyi lehet n?

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}$ tört nem egyszerűsíthető.

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt:

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}=\frac{(n^2+1)\cdot(n^2+3)}{(n^2+2)\cdot(n^2+8)}.$$ 1 pont

(n^2+2) szomszédja mind (n^2+1)-nek, mind (n^2+3)-nak, így 1-nél nagyobb közös osztójuk nincs, tehát nem lehet egyszerűsíteni (n^2+2) egyik osztójával sem. 2 pont

Tehát azt kell csak vizsgálni, lehet-e (n^2+8) valamelyik osztójával egyszerűsíteni.

1. eset:

Ha $d \neq 1$ és $d \mid (n^2+8)$, és $d \mid (n^2+3)$, akkor $d \mid \big[(n^2+8)-(n^2+3)\big]$, tehát $d \mid 5$, azaz $d=5$.

De egy négyzetszám sosem végződik 2-re vagy 7-re, így (n^2+8) nem végződhet sem 0-ra, sem 5-re, így nem lehet osztója az 5. 2 pont

2. eset:

Ha $d \neq 1$ és $d \mid (n^2+8)$, és $d \mid (n^2+1)$, akkor $d \mid \left[(n^2+8)-(n^2+1)\right]$, tehát $d \mid 7$, azaz $d = 7$.

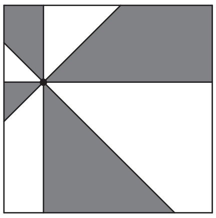
Ha $n = 7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, vagy $7k \pm 3$, akkor $n^2+1 = 7M+1$, $7M+2$, $7M+5$, vagy $7M+3$ alakú és így (n^2+1) nem osztható 7-tel.

Tehát a tört nem egyszerűsíthető. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy négyzet tetszőleges belső pontja P, amin keresztül párhuzamosokat húzunk a négyzet oldalaival és átlóival. Ezek az egyenesek nyolc részre vágják a négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett részek két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a részek területének összege egyenlő.

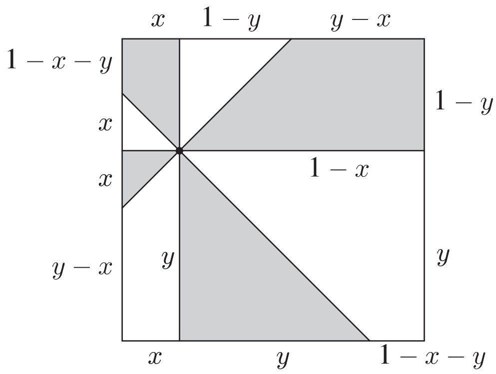
Megoldás.



Néhány vázlatrajz tanulmányozása után egyértelművé válik, hogy az ábrán látható színezés adja a megfelelő csoportosítást, vagyis a körüljárás szerinti minden második darab tartozik egy csoportba. 1 pont

Amennyiben P a négyzet valamelyik szimmetriatengelyére esik, akkor nyilvánvaló az állítás, hiszen minden „színezett” darabnak van egy „színezetlen” egybevágó párja. 1 pont

Az általános eset vizsgálatához feltesszük, hogy a négyzet oldala egységnyi, a P pont helyzetét pedig egy x és egy y változóval írjuk le, az alábbi ábra szerint. A jelölt szakaszok felírásához csupán azt kell használnunk, hogy (a) a téglalap szemközti oldalai egyenlők; (b) a 45°-os derékszögű háromszög befogói egyenlők.



3 pont

A szürkével jelölt terület háromszögekből és derékszögű trapézokból áll:

$$T = \frac{(1-x-y)+(1-y)}{2} \cdot x + \frac{(y-x)+(1-x)}{2} \cdot (1-y) + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$2T = (2-x-2y)x + (1+y-2x)(1-y) + y^2 + x^2$$

$$2T = 2x - x^2 - 2xy + 1 - y^2 - 2x + 2xy + x^2 + y^2$$

$$2T = 1.$$

Beláttuk tehát, hogy a szürke részek területének összege $\frac{1}{2}$, a négyzet területének fele. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy n sorból, és 7 oszlopból álló ($n \times 7$-es) táblázatot szeretnék kitölteni a következő módon:

– Minden sorban az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok kell, hogy szerepeljenek valamilyen sorrendben (természetesen a sor valamennyi mezőjébe pontosan egy szám kerül).

– Bármely két sornak legalább egy helyen/egy mezőben különböznie kell.

– Bármely két sor legalább egy helyen meg kell egyezzen.

Legfeljebb mennyi lehet n?

Megoldás. Bármely sorban az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok egy permutációja szerepel, ezek száma: 7! $(= 5040)$. 1 pont

Tekintsünk egy olyan adott $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ permutációt, mely ott van a táblázatban.

A következő hat permutáció (az eredeti „ciklikusan eltoltjai”) ekkor nem szerepelhet a táblázatban:

$$\begin{gathered}
a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_1\\
a_3a_4a_5a_6a_7a_1a_2\\
a_4a_5a_6a_7a_1a_2a_3\\
a_5a_6a_7a_1a_2a_3a_4\\
a_6a_7a_1a_2a_3a_4a_5\\
a_7a_1a_2a_3a_4a_5a_6,
\end{gathered}$$

hiszen bármelyik permutáció az összes helyen különbözik az eredetitől. 2 pont

Ha a két különböző
(első) $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$, és
(második) $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$ permutáció
szerepel a táblázatban, azok hat-hat „ciklikus eltoltja” 12 különböző permutáció, ugyanis, ha lenne az első permutáció ciklikus eltoltjai között olyan, amelyik megegyezik a második permutáció egy ciklikus eltoltjával, akkor a második permutáció is az első egy ciklikus eltoltja lenne, s így nem lehetne a táblán. 1 pont

De akkor a lehetséges 7! permutáció összesen 6! $(= 720)$ darab olyan 7-es csoportra osztható, hogy egy-egy csoporton belül legfeljebb egy permutáció kerülhet a táblára; vagyis *n legfeljebb 720 lehet.* 1 pont

És ez el is érhető. Például írjuk fel a táblára az összes olyan permutációt pontosan egyszer, amelyek 1-essel kezdődnek.

Ezek száma 6!, és nyilván teljesülnek rájuk a feladat követelményei.

Vagyis n maximális értéke $n = 6! = 720$. 2 pont

Összesen: 7 pont

Haladók III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszög beírt köre az AC és BC oldalakat az X és Y pontokban érinti. A B-ből induló belső szögfelező az XY szakaszt P-ben metszi. Mekkora az $APB\sphericalangle$?

2. 2013 valós számra fennáll:

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_{2012} \geqq a_{2013} \geqq 0, \quad \text{valamint}$$

$$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \geqq \frac{61}{4}.$$

Igazoljuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2012} + a_{2013} \geqq \sqrt{2013}$!

Lehet-e a fenti 2013 tagú összeg pontosan $\sqrt{2013}$?

3. Artúr király udvarába hivatalos vendégségbe néhány lovag. Bármely két lovag vagy barát, vagy ellenség (a viszonyok kölcsönösek, és az idő múlásával nem változnak).

Egy korábbi vendégség során ugyanezek a lovagok le tudtak ülni két asztal mellé úgy, hogy az egy asztalnál ülők mind barátai voltak egymásnak.

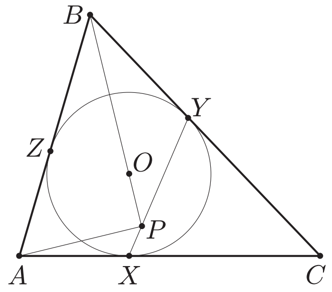
A mostani vendégség során a vendégek egyesével érkeztek meg. Érkezésük után minden érkező leült az egyik olyan asztalhoz, ahol nem ült ellensége; az ilyen asztalok közül azt választva, ahol a legtöbb barátja ült (ha egyetlen megfelelő asztal sem volt, akkor az érkező természetesen új asztalhoz ült). Így összesen 12 asztal mellé ültek le lovagok.

Legalább hány lovag érkezett a vendégségbe?

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszög beírt köre az AC és BC oldalakat az X és Y pontokban érinti. A B-ből induló belső szögfelező az XY szakaszt P-ben metszi. Mekkora az $APB\sphericalangle$?

Megoldás.

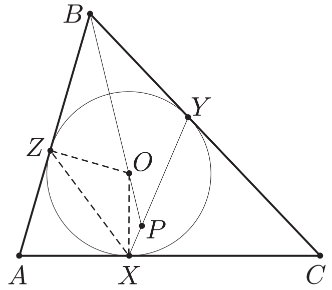


Ábrát készítünk, amin felhasználjuk, hogy a feladat állítása szerint a B-ből induló szögfelező metszi az XY *szakaszt*. Legyen a beírt kör középpontja O (ezen áthalad a B-ből induló szögfelező), és jelölje Z a beírt kör AB-n fekvő érintési pontját.

Az ábra alapján az a sejtésünk, hogy $APB\sphericalangle = 90°$, ezt fogjuk bizonyítani. 1 pont

Ha a metszéspont egybeesik X-szel, akkor ABC egyenlő szárú ($AB = BC$), és így nyilván a B-ből induló belső szögfelező merőleges az AC oldalra. 1 pont

A bizonyítás lényege annak megmutatása, hogy az A, X, P, O, Z pontok egy AO átmérőjű körön vannak. Thalész tétele miatt innen következik a feladat állítása. 1 pont



A szokásos módon jelölve a háromszög szögeit a következőket írhatjuk fel:

Az XCY egyenlő szárú háromszögből

$$CXY\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

az AXZ egyenlő szárú háromszögből pedig

$$AXZ\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Innen

$$ZXP\sphericalangle = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Azt is tudjuk, hogy $ZBP\sphericalangle = \beta/2$, ezért a $ZXPB$ négyszögben az X-nél és B-nél lévő szögek összege 90°, tehát a Z-nél és P-nél lévő szögek összege 270°. Viszont $OZB = 90^\circ$ (érintő), ezért $XPO\sphericalangle + XZO\sphericalangle = 270^\circ - 90^\circ = 180^\circ$, vagyis $XPOZ$ húrnégyszög. 2 pont

Thalész tétele miatt $AXOZ$ is húrnégyszög, AO átmérővel, tehát beláttuk, hogy A, X, P, O és Z egy AO átmérőjű körön vannak, így $APO\sphericalangle = APB\sphericalangle = 90^\circ$. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A feladat állítása akkor is igaz marad, ha a szögfelező az XY szakasz meghosszabbítását metszi.

2. 2013 valós számra fennáll:

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_{2012} \geqq a_{2013} \geqq 0, \quad \text{valamint}$$

$$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \geqq \frac{61}{4}.$$

Igazoljuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2012} + a_{2013} \geqq \sqrt{2013}$!

Lehet-e a fenti 2013 tagú összeg pontosan $\sqrt{2013}$?

1. megoldás. Az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2012} + a_{2013}$ összeget nevezzük el S-nek!

S első 33 tagjára, és a maradék tagokra is egy-egy alsó becslést fogunk adni.

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{33} \geqq 33 \cdot a_{33}$ a tagok monoton csökkenése miatt. 1 pont

A $\frac{61}{4} \leqq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2$ egyenlőtlenség jobb oldalán lévő valamennyi a_k^2 tagot cseréljünk ki a nála (ugyancsak a tagok monoton csökkenése miatt) nem kisebb $a_{33} \cdot a_k$ taggal.

Ekkor nyerjük:

$$\frac{61}{4} \leqq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \leqq a_{33} \cdot (a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}).$$

Ezt az egyenlőtlenséget osztva a pozitív a_{33}-mal kapjuk (a_{33} nyilván pozitív, különben a_{34}, és utána az összes tag is mind 0 lenne ellentmondásban azzal, hogy a négyzetösszegük nagyobb 61/4-nél.):

(2) $$\frac{61}{4 \cdot a_{33}} \leqq a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}.$$ 2 pont

(1) és **(2)** alapján:

$$S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{33}) + (a_{34} + \ldots + a_{2012} + a_{2013}) \geqq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}}.$$

Itt a kéttagú számtani, mértani közepek közötti összefüggést használva

$$S \geqq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}} \geqq 2 \cdot \sqrt{33 \cdot a_{33} \cdot \frac{61}{4 \cdot a_{33}}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{33 \cdot 61}{4}} = \sqrt{33 \cdot 61} = \sqrt{2013}\,.$$

Vagyis S valóban legalább $\sqrt{2013}\,$. 2 pont

Akkor van egyenlőség, ha az összes helyen, ahol becsültünk egyenlőség van.

A „számtani–mértani közepes becslés” miatt $33 \cdot a_{33} = \dfrac{61}{4 \cdot a_{33}}$, s innen

$$a_{33} = \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}} = \sqrt{\frac{61}{132}}\,.$$ 1 pont

Az **(1)** becslés miatt $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{33}$ az első 33 tagra.

Míg a **(2)** becslés miatt valamennyi ($k > 33$) tagra $a_k^2 = a_k \cdot a_{33}$.

Ez utóbbi csak úgy lehet, ha $a_k = 0$, vagy $a_k = a_{33}$.

Mivel most

$$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 = \frac{61}{4} = 33 \cdot \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}}^{\,2} = 33 \cdot a_{33}^2,$$

ez a tagok nem csökkenése miatt azt jelenti, hogy $a_{34} = a_{35} = \ldots = a_{66} = a_{33}$, és a többi tag: 0.

Vagyis: pontosan

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{33} = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}, \quad \text{és} \quad a_{67} = a_{68} = \ldots = a_{2013} = 0$$

esetén teljesül az egyenlőség. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Megoldás (*Janzer Barnabás dolgozata alapján*).

Először „észrevesszük”, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$, és $a_{67} = a_{68} = \ldots = a_{2013} = 0$ esetén egyenlőség teljesül, vagyis $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} = \sqrt{2013}$.

Ezután megmutatjuk, hogy minden más esetben tudjuk úgy módosítani az a_i számokat, hogy a feltételek érvényesek maradjanak, a számok összege ne nőjön, és végül legalább $\sqrt{2013}$ legyen.

Tervünk a következő: az $a_{34}, a_{35}, \ldots$ számokat úgy változtatjuk, hogy négyzetösszegük ne változzon, és a kis indexűek a_{34}-hez, a nagy indexűek pedig 0-hoz közeledjenek. A következő lemma alapján ez a módosítás nem növeli (általában csökkenti) a számok összegét.

Lemma: *Ha $x \geqq y \geqq 0$, és x-et megnöveljük, y-t pedig csökkentjük (de legfeljebb nulláig) úgy, hogy az új számok négyzetösszege megegyezzen az $x^2 + y^2$ összeggel, akkor a kapott számok összege nem nagyobb, mint $x + y$.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $x \geqq y > 0$. Legyen $a, b > 0$ és $x^2 + y^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2$. Innen $2yb - 2xa = a^2 + b^2 > 0$, vagyis $yb > xa$. Ez csak úgy lehetséges, ha $b > a$, hiszen $y \leqq x$. Tehát $x + a + y - b = x + y - (b - a) > x + y$.

A folytatásban a_{34}-et rögzítjük. A 34-nél kisebb indexű számokat a_{34}-re csökkenthetjük, ezzel nem sértjük meg egyik feltételünket sem, és a számok összege nem nő. A 34-nél nagyobb indexű elemeknél pedig ismételten alkalmazzuk a lemmánkat, a következő módon:

Először az (a_{35}, a_{2013}) párt „toljuk” szét, ha lehetséges. A széttolás azt jelenti, amit a lemmában végeztünk a számpárral. Ha a_{35} értéke eléri a_{34}-et, vagy a_{2013} eléri nullát, megállunk. Ezután mindig vesszük a legkisebb indexű olyan elemet, ami kisebb a_{34}-nél, és a legnagyobb indexűt, ami pozitív, és velük folytatjuk a „széttolást”. Így a négyzetösszeg nem változik, a számok összege nem nő (általában csökken), és előbb-utóbb eljutunk a következő állapotba:

$$\underbrace{x, x, \ldots, x}_{33 \text{ db}}, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{n \text{ db}}, \underbrace{y}_{a_{34+n}}, 0, 0, \ldots, 0, \qquad (x \geqq y).$$

Az persze előfordulhat, hogy a számsor végén nincsenek nullák.

Ha még az is igaz lenne, hogy $y = 0$, akkor kész lennénk, hiszen ebben az esetben $n \cdot a_{34}^2 = \frac{61}{4}$, vagyis $a_1 = \ldots = a_{33} = a_{34} = \ldots = a_{34+n-1} = \sqrt{\frac{61}{4n}}$. Ekkor

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} = (33 + n) \cdot \sqrt{\frac{61}{4n}} = n \cdot \sqrt{\frac{61}{4n}} + 33 \cdot \sqrt{\frac{61}{4n}} \geqq 2 \cdot \sqrt{33n\sqrt{\frac{61}{4n}}^2} = \sqrt{2013}.$$

A megoldás utolsó része tehát arra irányul, hogy megmutassuk, eljuthatunk az $y = 0$ állapotba úgy, hogy a feltételek nem sérültek, és a számok összege nem nőtt. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a_{34}-től kezdve „elég sok” egyenlő elem van-e.

$n \geqq 33$: Az y számot nullára csökkentjük, az $a_1 = \ldots = a_{33+n}$ számokat pedig $x + \frac{y}{33 + n}$-re növeljük. Az elemek összege nem változott, a négyzetösszegről megmutatjuk, hogy nem csökkent, vagyis nem sérült a feltétel.

Azt szeretnénk látni, hogy $nx^2 + y^2 \leqq n\left(x + \frac{y}{33+n}\right)^2$. A zárójel felbontása, $y > 0$-val egyszerűsítés és $(n+33)$-mal való szorzás után ez így néz ki: $y(n+33) \leqq 2nx + \frac{y}{n+33}$. Ez pedig igaz, hiszen ($n + 33 \leqq 2n$ miatt)

$$y(n+3) < x(n+33) \leqq 2nx < 2nx + \frac{y}{n+33}.$$

Így már csupa egyenlő pozitív számunk van, amelyeket egyenlő mértékben csökkentve a számok összege csökken, a kérdéses számok négyzetösszege pedig 61/4-re csökkenthető.

$n < 33$: Most az $a_1, a_2 \ldots, a_{34+n}$ számokat helyettesítjük átlagukkal $\left(\frac{(33+n)x+y}{34+n}\right)$, és megmutatjuk, hogy így a feltételben szereplő négyzetösszeg nem csökkent. Az nyilvánvaló, hogy az összeg nem változott. A következőt kell belátnunk:

$$nx^2 + y^2 \leqq (n+1)\cdot\left(\frac{(33+n)x+y}{34+n}\right)^2.$$

Rövid számolás következik:

$$nx^2 + y^2 \leqq (n+1)\cdot\left(\frac{(33+n)x+y}{34+n}\right)^2 = (n+1)\cdot\left(x - \frac{x-y}{n+34}\right)^2$$

$$y^2 \leqq -2nx\frac{x-y}{n+34} + n\cdot\left(\frac{x-y}{n+34}\right)^2 + x^2 - 2x\frac{x-y}{n+34} + \left(\frac{x-y}{n+34}\right)^2.$$

A jobboldalról elhagyva a (nemnegatív) négyzetes tagokat, elég lenne belátni, hogy

$$y^2 \leqq -2nx\frac{x-y}{n+34} + x^2 - 2x\frac{x-y}{n+34}.$$

Beszorzás után:

$$ny^2 + 34y^2 \leqq x^2(32-n) + x\cdot(2ny+2y).$$

$32 - n \geqq 0$ és $x > y$ miatt elég lenne:

$$ny^2 + 34y^2 \leqq y^2(32-n) + y\cdot(2ny+2y) = ny^2 + 34y^2,$$

ami azonosság. Tehát ebben az esetben is egyenlővé tudtuk tenni a számsor pozitív tagjait a feltételek megsértése nélkül, és közben a számok összege nem nőtt. Érdemes megjegyezni, hogy az előző egyenlőtlenség mindegyik gyengítése az $x > y$ reláción múlott.

Összefoglalva: mindkét esetben eljutottunk egy olyan helyzetbe, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{34+n} = x > 0$ és $a_{34+n+1} = \ldots = a_{2013} = 0$, továbbá teljesül, hogy a számok összege az átalakítás során nem nőtt (általában csökkent), és $a_{34}^2 + \ldots + a_{2013}^2 = \frac{61}{4}$. Az ilyen számsorról pedig korábban bebizonyítottuk, hogy összege legalább $\sqrt{2013}$.

3. Artúr király udvarába hivatalos vendégségbe néhány lovag. Bármely két lovag vagy barát, vagy ellenség (a viszonyok kölcsönösek, és az idő múlásával nem változnak).

Egy korábbi vendégség során ugyanezek a lovagok le tudtak ülni két asztal mellé úgy, hogy az egy asztalnál ülők mind barátai voltak egymásnak.

A mostani vendégség során a vendégek egyesével érkeztek meg. Érkezésük után minden érkező leült az egyik olyan asztalhoz, ahol nem ült ellensége; az ilyen asztalok közül azt választva, ahol a legtöbb barátja ült (ha egyetlen megfelelő asztal sem volt, akkor az érkező természetesen új asztalhoz ült). Így összesen 12 asztal mellé ültek le lovagok.

Legalább hány lovag érkezett a vendégségbe?

Megoldás. A feladatot átfogalmazzuk gráfnyelvre.

A gráf csúcsai a lovagok lesznek, és két csúcs pontosan akkor lesz összekötve, ha a nekik megfelelő lovagok ellenségek. A gráf csúcsai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy éllel összekötött csúcsok ne kapjanak azonos színt (*korábban két asztal mellé* ...). (A gráfom páros gráf.) A felső színosztálybeli (a továbbiakban *F-beli*) csúcsok (*első asztalnál lévő lovagok*) legyenek $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m$, míg az alsó (*$A$-beli*) színosztálybeliek (*második asztal*): $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Élek azonos színosztályon belül természetesen nem mennek. 1 pont

Először megmutatjuk, hogy $m+n$ (*a lovagok száma*) lehet 22. Legyen $n=m=11$, és a következő csúcsok legyenek éllel összekötve: A_j $(1 \leqq j \leqq 10)$ csúcs legyen összekötve az összes F_k $(1 \leqq k \leqq 11)$ csúccsal, kivéve F_j-t. Míg A_{11} csúcs legyen összekötve (kivétel nélkül) az összes F_k csúccsal. (Ez a definíció már egyértelműen leírja, hogy a felső csúcsok mely alsó csúcsokkal vannak összekötve.)

Vagyis a gráfom egy „majdnem teljes páros gráf”, pontosan a 10 darab $A_j - F_j$ $(1 \leqq j \leqq 10)$ él hiányzik belőle. Most jöjjenek a „lovagok” az $A_1 - F_1 - A_2 - F_2 - A_3 - \ldots - A_{10} - F_{10} - -A_{11} - F_{11}$ sorrendben.

A gráf definíciója alapján

– az első két lovag (A_1, F_1) az első asztalhoz ül,

– a „második két” lovag (A_2, F_2) a második asztalhoz (hiszen mindkettőjüknek van ellensége az első asztalnál, viszont egymás barátai),

– a „harmadik két” lovag (A_3, F_3) a harmadik asztalhoz (hiszen mindkettőjüknek van ellensége az első két asztalnál, de egymásnak barátai) ...,

– a „tizedik két” lovag (A_{10}, F_{10}) a tizedik asztalhoz (mindkettőjüknek van ellensége az első kilenc asztal mindegyikénél, de egymásnak barátai),

– A_{11} a tizenegyedik asztalhoz kerül (az első tíz asztal mindegyikénél van ellensége),

– míg F_{11} a tizenkettedik asztalhoz kerül (minden asztalnál ül ellensége).

Vagyis a lovagok száma valóban lehet 22. 3 pont

Másodjára megmutatjuk, hogy a lovagok száma nem lehet 22-nél kevesebb. Legyen a tizenkettedik asztalhoz leülő egyik lovag (az általánosság megszorítása nélkül) F-beli. Mivel a tizenkettedik asztalhoz ült le, ezért az első 11 asztal közül valamennyinél ül A-beli lovag, vagyis $n \geqq 11$. Ekkor a tizenegyedik asztalnál is ül egy A-beli lovag. Emiatt az első tíz asztal közül valamennyinél kell, hogy üljön F-beli lovag. De akkor az első 10 asztalnál ülő (legalább 10 darab) F-beli, és a tizenkettedik asztalnál ülő F-beli együtt legalább 11 darab F-beli lovag. Vagyis $m \geqq 11$. Azaz a lovagok száma $m+n \geqq 22$.

Vagyis legalább 22 lovag érkezett a vendégségbe. 3 pont

Összesen: 7 pont