ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

2011/2012-ES TANÉV

Kezdők és Haladók
(I., II. és III. kategória)

Feladatok és megoldások

A verseny az Emberi Erőforrás Minisztériuma megbízásából az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet és a Közigazgatási és Igazságügyi Minisztérium Wekerle Sándor Alapkezelő által meghirdetett NTP-KTTV-11-0015 kódszámú pályázati támogatásból valósult meg.

Nemzeti Tehetség Program

Bolyai János Matematikai Társulat

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Feladatok

1. Milyen arányban osztják az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és BF átlói egymást? (6 pont)

2. Az N pozitív egész szám pozitív osztóinak a szorzata 3^{595}. Határozzuk meg az N szám utolsó számjegyét! (6 pont)

3. Mely x és y pozitív egész számokra igaz az alábbi egyenlőség?

$$x^2 - y^2 + 2x - 6y - 25 = 0$$ (6 pont)

4. Egy zár, amelyen három nyomógomb van, akkor nyílik ki, ha a három különböző gombot egy meghatározott sorrendben közvetlenül egymás után nyomjuk meg. Legkevesebb hány gombnyomásra van szükség ahhoz, hogy biztosan kinyíljon a zár? (A megfelelő három gombnyomást esetlegesen megelőző gombnyomások sorozatának nincs hatása a zár szerkezetére.) (6 pont)

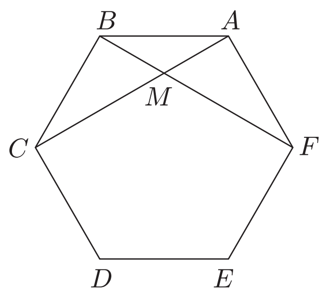
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Milyen arányban osztják az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és BF átlói egymást? (6 pont)

Megoldás.



Jelölje a két átló metszéspontját M! A hatszög szimmetriája miatt $AM = BM$, illetve $CM = FM$. 1 pont

Az ABF háromszög egyenlőszárú és szárszöge 120°, így $ABF\sphericalangle = AFB\sphericalangle = 30°$, és a hatszög szimmetriája miatt a $BCA\sphericalangle$ szintén 30°-os. Ezért

$$MBC\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABF\sphericalangle = 120° - 30° = 90°.$$ 2 pont

Tehát a CBM háromszög „fél" szabályos háromszög, így $CM = 2 \cdot BM$. 2 pont

Azaz $FM = 2 \cdot BM$, tehát az átlók 2 : 1 arányban osztják egymást. 1 pont

Megjegyzés: Ha az FA és CB oldalegyenesek metszéspontja G, akkor AGB szabályos háromszög (a szabályos hatszög külső szögei 60°-osak). Így AC és BF a CFG háromszög súlyvonalai, amelyek 2 : 1 arányban osztják egymást.

2. Az N pozitív egész szám pozitív osztóinak a szorzata 3^{595}. Határozzuk meg az N szám utolsó számjegyét! (6 pont)

Megoldás. Mivel az osztók szorzatában csak a 3-as prímtényező szerepel, ezért az N szám háromhatvány, így minden osztója háromhatvány. Tehát pozitív osztói a következők: 1, 3, 3^2, 3^3, $\ldots$, 3^n. Ezek szorzata

$$1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^n = 3^{1+2+3+\ldots+n} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$ 2 pont

Így $\dfrac{n(n+1)}{2} = 595$, azaz $n(n+1) = 1190$. Az 1190 osztópárjait felírva kapjuk, hogy $n = 34$. Tehát $N = 3^{34}$. 2 pont

A végződés megállapításához tekintsük az alábbi táblázatot!

hatvány	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
végződés	1	3	9	7	1	3

A végződés periodikusan ismétlődik, a periódushossz 4, így az N szám 9-re végződik, mert $34 = 8 \cdot 4 + 2$. 2 pont

3. Mely x és y pozitív egész számokra igaz az alábbi egyenlőség?

$$x^2 - y^2 + 2x - 6y - 25 = 0$$ (6 pont)

Megoldás. Alakítsuk át a kifejezést: $(x + 1)^2 - (y + 3)^2 = 17$. 2 pont

Innen alkalmazva az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ azonosságot: $(x + y + 4)(x - y - 2) = 17$. 1 pont

Mivel mindkét tényező egész szám, $(x + y + 4)$ biztosan pozitív és nagyobb, mint $(x - y - 2)$, így a 17-nek csak egyetlen szorzattá bontása jön szóba: $x + y + 4 = 17$ és $x - y - 2 = 1$. 2 pont

Innen a szokásos módon megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $x = 8$ és $y = 5$, amelyek valóban megfelelnek a feladat feltételeinek. 1 pont

4. Egy zár, amelyen három nyomógomb van, akkor nyílik ki, ha a három különböző gombot egy meghatározott sorrendben közvetlenül egymás után nyomjuk meg. Legkevesebb hány gombnyomásra van szükség ahhoz, hogy biztosan kinyíljon a zár? (A megfelelő három gombnyomást esetlegesen megelőző gombnyomások sorozatának nincs hatása a zár szerkezetére.) (6 pont)

Megoldás. A három gombot $3! = 6$ különböző sorrendben nyomhatjuk meg. Így a gombnyomások olyan sorozatára van szükség, amely mind a 6 lehetséges sorrendet tartalmazza.

Számozzuk meg a gombokat az 1, 2, 3 számokkal. Megmutatjuk, hogy 9 gombnyomás elegendő, de ennél kevesebb nem. 1 pont

Egy megfelelő gombnyomás sorozat: 1, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1. 1 pont

Tegyük fel, hogy van olyan 1, 2, 3 számokból készített nyolcelemű sorozat, amely alkalmas a zár kinyitására. Egy ilyen 6 próbálkozást tesz lehetővé, így ennél rövidebb sorozat nem jöhet szóba. 1 pont

A fellépő háromtagú részsorozatoknak így páronként különbözőnek kell lennie. Ebből következően szomszédos és a másodszomszédos elemek nem lehetnek egyenlők. 1 pont

Tekintsük a 3. helyen álló h elemet. Mivel h-val kezdődő permutáció 2 van, ezért a h még egyszer előfordul a sorozatban. Ez a 2. előfordulás nem lehet az 1., 2., 4., 5. és a két utolsó pozíción sem, hiszen ellenkező esetben lennének túl közeli h elemek, vagy pedig nem férne el a nyolctagú sorozatban a másik h-val kezdődő permutáció. Így h másodszor a 6. pozíciót foglalja el, ezért a vele kezdődő második permutáció a 8-as sorszámú elemmel végződik, az alábbiak szerint: _, _, h, x, y, h, y, x.

Ekkor viszont az 5. elemmel kezdődő hármasban az y elem megismétlődik.

Így beláttuk, hogy 9 gombnyomás feltétlenül szükséges a zár biztos kinyitásához. 2 pont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Mekkorák annak a deltoidnak a szögei, amelynek van körülírt köre, és az egyik átlója kétszer olyan hosszú, mint a másik? (6 pont)

2. Határozza meg azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy n egymást követő kétjegyű szám között mindig van olyan, amelyik osztható a számjegyeinek összegével. (6 pont)

3. Az O középpontú, $AB = 2r$ átmérőjű félkörön felvesszük egymás után a C és a D pontokat úgy, hogy az AC és a CD húrok hossza egyaránt a és a DB húr hossza x. Bizonyítsa be, hogy ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x mérőszáma is racionális szám! (8 pont)

4. Egy 4×4-es táblázat minden mezőjében kezdetben a 0 szám áll. Egy-egy lépésben a tábla valamely 2×2-es részletében a számok mindegyikét 1-gyel megnöveljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel az alábbi kitöltéseket?

$a)$

3	7	6	2
8	14	10	5
8	11	9	7
3	4	5	4

$b)$

3	7	6	2
8	14	9	5
8	9	10	7
3	4	5	4

$c)$

3	7	6	2
8	14	11	5
8	11	10	7
3	4	5	4

(10 pont)

5. Tegyük fel, hogy p és d pozitív egész számok, amelyekre a p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+10d$ számok mindegyike prímszám. Bizonyítsa be, hogy ekkor d értéke legalább 210. (10 pont)

Bolyai János
Matematikai Társulat

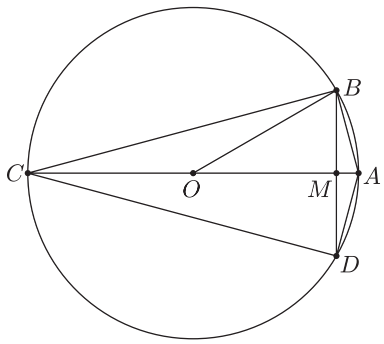
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
kezdők I–II. kategória II. forduló
kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Mekkorák annak a deltoidnak a szögei, amelynek van körülírt köre, és az egyik átlója kétszer olyan hosszú, mint a másik? (6 pont)

Megoldás.

A deltoid tengelyes szimmetriája miatt a körülírt kör O középpontja rajta van a szimmetriaátlón (a szimmetriaátlóra való tükrözéskor a körülírt kör önmagába megy át). Így a szimmetriaátló a kör átmérője, és mivel a másik átló is a kör egy húrja, ezért csak az lehet a rövidebb, tehát a szimmetriaátló a hosszabbik átló. 1 pont



Ezért Thalész tételének értelmében a deltoid rövidebb átlójának két végpontjánál (az ábrán a B és a D csúcsoknál) 90°–90°-os szögek vannak. 1 pont

A feltétel szerint $2BD = AC$, vagyis BD ugyanakkora, mint a kör sugara. Ekkor az OBD háromszög szabályos, így (az átlók metszéspontját M-mel jelölve) $OBD\sphericalangle =$ $= OBM\sphericalangle = 60°$, tehát $BOM\sphericalangle = BOA\sphericalangle = 30°$. 2 pont

Mivel a BOA háromszög egyenlő szárú ($OA = OB$), ezért $OAB\sphericalangle = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

A szimmetria miatt ekkor A-nál kétszer ekkora szög van, tehát: $DAB\sphericalangle = 150°$. 1 pont

Ekkor $BCD\sphericalangle = 30°$. 1 pont

Megjegyzés. Az OBD háromszög szabályossága helyett észre lehet venni az OBM háromszög félszabályosságát (90°, 60°, 30°-os szögek). Ebből is adódik, hogy $BOM\sphericalangle =$ $= BOA\sphericalangle = 30°$. Természetesen erre is jár a 2 pont. A befejezésnél a C-nél levő szöget is megkaphatjuk először a középponti és kerületi szögek tételével vagy közvetlen számolással, majd onnan az A-nál levőt. Ebben a sorrendben is jár az 1–1 pont.

2. Határozza meg azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy n egymást követő kétjegyű szám között mindig van olyan, amelyik osztható a számjegyeinek összegével. (6 pont)

1. megoldás.

Megmutatjuk, hogy $n = 10$. Vegyük észre, hogy n legfeljebb 10. Valóban, 10 egymást követő szám között biztosan van 10-zel osztható és a kétjegyű 10-zel osztható számok nyilván oszthatók számjegyeik összegével. 4 pont

Másrészt n legalább 10, mivel könnyen ellenőrizhető, hogy a 91, 92, …, 99 számok között nincs olyan, amelyik osztható lenne a számjegyeinek összegével. 2 pont

2. megoldás.

10 egymást követő szám között biztosan van 9-cel osztható. 1 pont

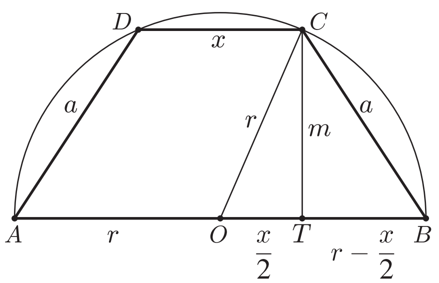
Egy 9-cel osztható szám számjegyeinek összege is osztható 9-cel, tehát egy 9-cel osztható kétjegyű szám számjegyeinek összege 9 vagy 18. 1 pont

Ha a számjegyek összege 9, akkor készen vagyunk. 1 pont

18 pedig csak úgy lehet, ha a kétjegyű szám a 99. Ekkor a 90, …, 99 számok közül a 90 osztható a számjegyeinek összegével. 1 pont

Másrészt n legalább 10, mivel könnyen ellenőrizhető, hogy a 91, 92, …, 99 számok között nincs olyan, amelyik osztható lenne a számjegyeinek összegével. 2 pont

3. Az O középpontú, $AB = 2r$ átmérőjű félkörön felvesszük egymás után a C és a D pontokat úgy, hogy az AC és a CD húrok hossza egyaránt a és a DB húr hossza x. Bizonyítsa be, hogy ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x mérőszáma is racionális szám! (8 pont)



1. megoldás.

A szomszédos a és x hosszúságú húrokat felcserélve az $ABCD$ szimmetrikus trapézhoz jutunk. (Egy körben azonos hosszúságú ívekhez azonos hosszúságú húrok tartoznak.) 3 pont

Ennek CT magasságát m-mel jelölve és a Pitagorasz-tételt alkalmazva

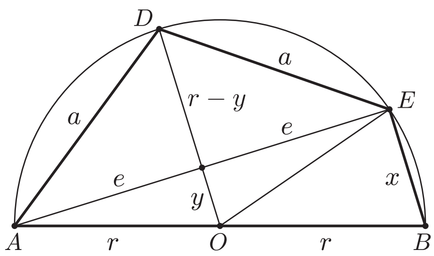
az OTC derékszögű háromszögben: $m^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$, 1 pont

a TBC derékszögű háromszögben: $m^2 = a^2 - \left(r - \frac{x}{2}\right)^2$. 1 pont

Az összehasonlítás alapján $r^2 - \frac{x^2}{4} = a^2 - r^2 + rx - \frac{x^2}{4}$, amiből $x = 2r - \frac{a^2}{r}$. 2 pont

Két racionális szám különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám, tehát ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x-é is az. 1 pont

2. megoldás.



Az ábra jelöléseit használva, az $AOED$ négyszög deltoid, hiszen két-két szomszédos oldala egyenlő, azaz átlói merőlegesek egymásra, és az egyik átló, az szimmetriatengely is. Legyen az OD átlónak az O-hoz közelebbi szakasza y. Ekkor a másik $r-y$. Az AE átló felét jelöljük e-vel! A Thalész-tétel szerint ABE derékszögű háromszög. A keletkező derékszögű háromszögekre Pitagorasz tételét alkalmazva:

$$a^2 = (r-y)^2 + e^2,$$
$$r^2 = y^2 + e^2,$$
$$(2r)^2 = (2e)^2 + x^2.$$ 2 pont

Ha az első két egyenletet kivonjuk egymásból, majd kifejezzük y-t, a következőt kapjuk:

$$y = \frac{2r^2 - a^2}{2r}.$$ 2 pont

Ezt a második egyenletbe visszahelyettesítve:

$$e^2 = r^2 - y^2 = r^2 - \frac{4r^4 - 4r^2a^2 + a^4}{4r^2} = \frac{a^2(4r^2 - a^2)}{4r^2}.$$ 2 pont

Ezt a harmadik egyenletbe behelyettesítve és rendezve:

$$x^2 = \frac{4r^4 - 4a^2r^2 + a^4}{r^2} = \left(\frac{2r^2 - a^2}{r}\right)^2, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{2r^2 - a^2}{r} = 2r - \frac{a^2}{r}.$$ 1 pont

Két racionális szám különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám, tehát ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x-é is az. 1 pont

4. Egy 4×4-es táblázat minden mezőjében kezdetben a 0 szám áll. Egy-egy lépésben a tábla valamely 2×2-es részletében a számok mindegyikét 1-gyel megnöveljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel az alábbi kitöltéseket?

a)

3	7	6	2
8	14	10	5
8	11	9	7
3	4	5	4

b)

3	7	6	2
8	14	9	5
8	9	10	7
3	4	5	4

c)

3	7	6	2
8	14	11	5
8	11	10	7
3	4	5	4

(10 pont)

Megoldás.

$a)$ A táblázatban a számok összege kezdetben 0, és minden lépésben 4-gyel növekszik, vagyis minden változtatás után 4-gyel osztható lesz. Mivel az első táblázatban a számok összege 106, ami 4-gyel osztva 2 maradékot ad, ezért a kívánt állapot nem valósítható meg. 2 pont

$b)$ Színezzük ki a táblázat mezőit sakktáblaszerűen! (A bal felső mező legyen fekete.)

3	7	6	2
8	14	9	5
8	9	10	7
3	4	5	4

A táblázatban kezdetben a különböző színű mezőkön álló számok összege azonos. Minden változtatás során a fehér és fekete mezőkön álló számok összege is 2-vel nő, vagyis minden lépés után egyenlő marad a különböző színű mezőkön szereplő számok összege. Mivel a 2. ábrán a sötét mezők számainak összege 54, a világosaké pedig 50, ezért a megadott helyzet nem érhető el. 3 pont

$c)$ Meg fogjuk mutatni, hogy a 3. ábra előállítható.

Visszafelé haladva, a táblázatban szereplő 2×2-es részletekben szereplő 1-gyel csökkentve elő fogjuk állítani a csak 0-t tartalmazó kezdőállapotot.

A sarokmezőkön lévő 3, 2, 4, 3 számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely a sarkokra illeszkedő 2×2-es részleteket érintette. Ezeket a lépéseket visszavonva az alábbi ábra adódik:

0	4	4	0
5	11	9	3
5	8	6	3
0	1	1	0

A felső és az alsó sor középső két mezőjébe kerülő 4, 1 számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely erre a két-két kis négyzetre illeszkedő 2×2-es részleteket érintette. Ezeket a lépéseket is visszavonva az alábbi ábra adódik:

0	0	0	0
5	7	5	3
5	7	5	3
0	0	0	0

Az első és az utolsó oszlop középső két mezőjébe kerülő 5, 3 számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely erre a két-két kis négyzetre illeszkedő 2×2-es részleteket érintette. Ezeket a lépéseket is visszavonva az alábbi ábra adódik:

0	0	0	0
0	2	2	0
0	2	2	0
0	0	0	0

Végül a középső négy mezőbe kerülő 2-es számok mutatják meg, hogy hány olyan változtatás történt, amely ezt a négy kis négyzetet érintette. Ezeket a lépéseket is visszavonva adódik a csupa 0-t tartalmazó táblázat.

Tehát a felsorolt változtatások szerinti növeléseket tetszőleges sorrendben végrehajtva a c) jelű táblázat előállítható. 5 pont

5. Tegyük fel, hogy p és d pozitív egész számok, amelyekre a p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+10d$ számok mindegyike prímszám. Bizonyítsa be, hogy ekkor d értéke legalább 210. (10 pont)

Megoldás.

Jelöljük a 2, 3, 5, 7 prímszámok halmazát P-vel! Ha $p \in P$, akkor $p+pd$ a p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+10d$ számok egyike, tehát prímszámnak kéne lennie, de ez nem lehet, hiszen egy p-nél nagyobb p-vel osztható szám. Tehát $p \notin P$, ami azt is jelenti, hogy a p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+10d$ számok egyike sem eleme P-nek. 2 pont

Ezután megmutatjuk, hogy ha $q \in P$, akkor a q prímszám osztója d-nek, tehát d osztható a P beli elemek szorzatával, azaz 210-zel. Ebből már a feladat állítása következik. 1 pont

Tekintsük a következő q darab számot: p, $p+d$, $p+2d$, $\ldots$, $p+(q-1)d$.

Ha van köztük q-val osztható, akkor van olyan k ($0 \leqq k \leqq q-1$), hogy a $p+kd$ prímszám a q többszöröse, ami csak úgy lehet, hogy $p+kd=q$. Ez azonban az előzőek alapján nem lehet. 3 pont

Ha nincs köztük q-val osztható, akkor van köztük két olyan, amelyek q-val osztva ugyanakkora maradékot adnak, tehát a különbségük sd (ahol $1 \leqq s \leqq q-1$) osztható a q prímszámmal, tehát q osztója d-nek. 4 pont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Feladatok

1. Az $ABCD$ téglalap BC oldala 2 egység hosszúságú. Jelölje a BC oldal felezőpontját G, a CD oldal C csúcshoz közelebbi harmadoló pontját E. Mekkora az AB oldal, ha az EAG szög $30°$?

2. Egy háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel a, b és c, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei, ha tudjuk, hogy a β kétszerese az α szögnek és az oldalak között fennáll az $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$ összefüggés?

3. Pisti a következő játékot játssza. Először felír a táblára egy pozitív egész számot. Ezután minden lépésben letörli a táblán levő számot, s helyette, ha páros volt, akkor a szám felét, ha páratlan volt, akkor a nála 7-tel nagyobb számot írja fel. Jelöljük A-val, B-vel, illetve C-vel azon pozitív egész számok halmazát, melyekből kiindulva Pisti megkaphatja az 1, 3, illetve 7 számokat (a játékot utána is folytatja, miután ezek valamelyikét megkapta).

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész szám az A, B, C halmazok közül pontosan az egyiknek eleme.

$b)$ Hány $1\,000\,000$-nál kisebb eleme van A-nak, B-nek, illetve C-nek?

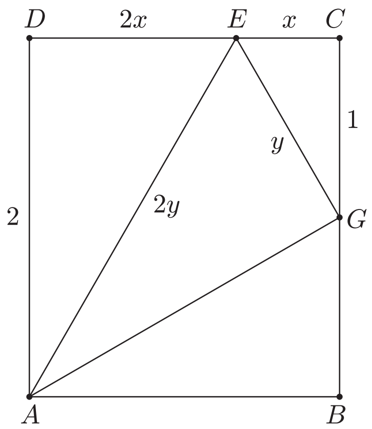
Az eredményhirdetést 2012. május 25-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ téglalap BC oldala 2 egység hosszúságú. Jelölje a BC oldal felezőpontját G, a CD oldal C csúcshoz közelebbi harmadoló pontját E. Mekkora az AB oldal, ha az EAG szög $30°$?



Megoldás. Ha $EC = x$ és $EG = y$, akkor az AED és GCE derékszögű háromszögekből a Pitagorász-tétel alapján:

$$AE^2 = (2x)^2 + 2^2 = 4(x^2 + 1^2) = (2y)^2,$$

tehát $AE = 2y$. Mivel az EAG szög $30°$, ebből az következik, hogy ha az E-nek az AG egyenesre vonatkozó tükörképe E_1, akkor az AE_1E háromszög szabályos és $y = EG = GE_1$. Így $EE_1 = 2y = EG + GE_1$, tehát G az EE_1 felezőpontja, hiszen a háromszög egyenlőtlenség miatt G-nek az EE_1-re kell illeszkednie. Ezért $AG = \sqrt{3}y$.

Tehát az ABG derékszögű háromszögből a Pitagorász-tétel alapján: $\left(\sqrt{3}y\right)^2 = (3x)^2 + 1^2$, de láttuk, hogy $y^2 = x^2 + 1$. Ezekből már egyszerűen megkapjuk, hogy $AB = 3x = \sqrt{3}$.

2. Egy háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel a, b és c, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei, ha tudjuk, hogy a β kétszerese az α szögnek és az oldalak között fennáll az $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ összefüggés?

Megoldás. Redukáljunk nullára és szorozzuk végig az egyenlőséget abc-vel! Ekkor a

$$c^2b - b^2c + a^2c - ac^2 + b^2a - a^2b = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Alakítsuk szorzattá a baloldali kifejezést!

$$c^2b - b^2c + a^2c - ac^2 + b^2a - a^2b = c\big(bc - b^2 + a^2 - ac\big) - ab(a-b) =$$

$$= c\big[(a-b)(a+b) - c(a-b)\big] - ab(a-b) = (a-b)\big(ca + cb - c^2 - ab\big) =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) = 0.$$

Ez az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$ vagy $b = c$ vagy $c = a$. Mivel $\beta = 2\alpha$, így $a \neq b$, tehát vagy $b = c$, vagy $c = a$.

Ha $b = c$, akkor $\gamma = \beta = 2\alpha$, így $\alpha + \beta + \gamma = 5\alpha = 180^\circ$, amiből $\alpha = 36^\circ$. Tehát $\gamma = \beta = 72^\circ$.

Ha $c = a$, akkor $\gamma = \alpha$, így $\alpha + \beta + \gamma = 4\alpha = 180^\circ$, amiből $\gamma = \alpha = 45^\circ$ és $\beta = 90^\circ$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a háromszög oldalaira előírt feltétel mindkét esetben teljesül, tehát valóban megoldásokat kaptunk.

3. Pisti a következő játékot játssza. Először felír a táblára egy pozitív egész számot. Ezután minden lépésben letörli a táblán levő számot, s helyette, ha páros volt, akkor a szám felét, ha páratlan volt, akkor a nála 7-tel nagyobb számot írja fel. Jelöljük A-val, B-vel, illetve C-vel azon pozitív egész számok halmazát, melyekből kiindulva Pisti megkaphatja az 1, 3, illetve 7 számokat (a játékot utána is folytatja, miután ezek valamelyikét megkapta).

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész szám az A, B, C halmazok közül pontosan az egyiknek eleme.

$b)$ Hány 1 000 000-nál kisebb eleme van A-nak, B-nek, illetve C-nek?

Megoldás. Definiáljuk az alábbi halmazokat:

$$A' := \{\text{7-tel osztva 1 vagy 2 vagy 4 maradékot adó pozitív egész számok}\},$$

$$B' := \{\text{7-tel osztva 3 vagy 5 vagy 6 maradékot adó pozitív egész számok}\},$$

$$C' := \{\text{7-tel osztva 0 maradékot adó pozitív egész számok}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy minden pozitív egész szám e három halmaz közül pontosan az egyiknek eleme. Mind a három halmaz zárt a feladatban szereplő két műveletre, hiszen egy szám és a nála 7-tel nagyobb szám 7-tel osztva ugyanazt adja maradékul, másrészt egy A'-beli páros szám 14-es maradéka 2 vagy 4 vagy 8, ilyennek a fele is A'-beli, egy B'-beli páros szám 14-es maradéka 6 vagy 10 vagy 12, ilyennek a fele is B'-beli és végül egy C'-beli páros szám 14-es maradéka 0, ilyennek a fele is C'-beli. Ebből látjuk, hogy $A = A$', $B = B$', $C = C$'.

Tehát minden pozitív egész szám az A, B, C halmazok közül pontosan az egyiknek eleme.

Az 1 000 000-nál kisebb számok közül 428 571 van A-ban, ugyanennyi B-ben és 142 857 C-ben.

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Feladatok

1. Egy konferencián magyar, angol, francia, német, olasz és spanyol tudósok vettek részt. Valaki észrevette, hogy mindenkinek pontosan hat ismerőse van jelen, mind a hat nemzetből pontosan egy. (Az ismeretségek kölcsönösek, és senki nem számít a saját maga ismerősének.)

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma osztható 12-vel!

$b)$ Bizonyítsuk be, hogy ha n 12-vel osztható pozitív egész szám, akkor valóban létezhet ilyen konferencia pontosan n résztvevővel!

2. Egy háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó két belső és két külső szögfelezőre merőlegeseket állítunk. Ezek a szögfelezőket a D, E, F és G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy ez a négy pont egy egyenesre illeszkedik!

3. Tudjuk, hogy $a + \frac{1}{a} = p$, ahol p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$A = a^4 + a^3 + a^2 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2}$$

egész szám! Mennyi a p értéke, ha A-nak négy pozitív osztója van?

Az eredményhirdetést 2012. május 25-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy konferencián magyar, angol, francia, német, olasz és spanyol tudósok vettek részt. Valaki észrevette, hogy mindenkinek pontosan hat ismerőse van jelen, mind a hat nemzetből pontosan egy. (Az ismeretségek kölcsönösek, és senki nem számít a saját maga ismerősének.)

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma osztható 12-vel!

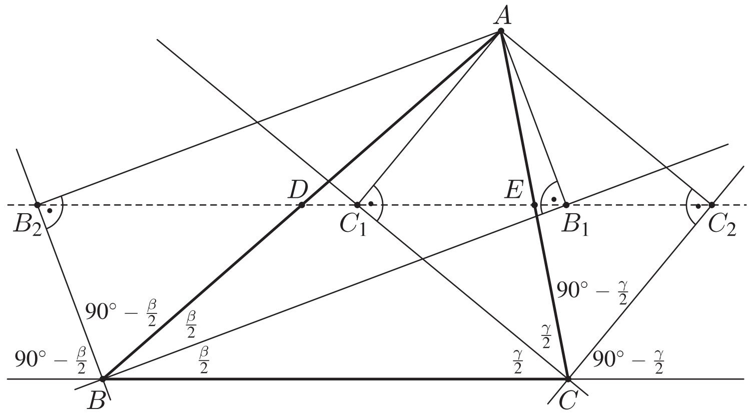
$b)$ Bizonyítsuk be, hogy ha n 12-vel osztható pozitív egész szám, akkor valóban létezhet ilyen konferencia pontosan n résztvevővel!

Megoldás. $a)$ Belátjuk, hogy minden nemzetségbe ugyanannyi résztvevő tartozik. Minden angol résztvevőhöz rendeljük hozzá francia ismerősét. A feltételből világos, hogy mindegyikhez pontosan egyet rendeltünk, így az angolok és a franciák száma megegyezik. Ezt nyilván bármelyik két nemzetségre elmondhatnánk. Másrészt belátjuk, hogy minden nemzetségbe páros sok résztvevő tartozik. Minden magyarhoz rendeljük hozzá magyar ismerősét, így a feltétel alapján párokba rendeztük a magyarokat, tehát a magyar résztvevők páros sokan vannak. Ezt is bármelyik nemzetségre elmondhatnánk. Tehát összességében minden nemzetségből ugyanannyian és páros sokan vannak, amiből az állítás világos.

$b)$ Legyen $n = 12k$, ahol k tetszőleges pozitív egész szám. Vegyünk fel $2k$ darab hatost: $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$. Egy hatos hat különböző országból érkezett emberből áll, minden nemzetségből egy-egy emberből, akik közül mindenki ismer mindenkit. Tegyük fel továbbá, hogy minden $1 \leqq i \leqq k$-ra A_i és B_i között a következő ismeretségek állnak fenn: mindenki ismeri a saját honfitársát. Más ismeretség nincs. Világos, hogy a konstrukció megfelelő.

2. Egy háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó két belső és két külső szögfelezőre merőlegeseket állítunk. Ezek a szögfelezőket a D, E, F és G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy ez a négy pont egy egyenesre illeszkedik!

Megoldás.



Jelöljük a háromszög A csúcsának a B és C csúcsokhoz tartozó belső és külső szögfelezőkre való merőleges vetületét B_1, B_2, C_1, C_2-vel. Legyen $B_1B_2 \cap AB = D$ és $C_1C_2 \cap AC = E$. Mivel az egy csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért az AB_2BB_1 és AC_1CC_2 négyszögek téglalapok. Mivel a téglalap átlói felezik egymást, ezért D és E az AB, illetve AC oldal felezőpontjai, azaz DE középvonal az ABC háromszögben, és így $DE \parallel BC$.

Másrészt a téglalap félátlói egyenlő hosszúságúak, ezért a BDB_2 háromszög egyenlőszárú. Ezt felhasználva:

$$DB_2B\sphericalangle = B_2BD\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2} \quad \text{és} \quad BDB_2\sphericalangle = 180° - 2\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \beta.$$

Mivel $BDB_2\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \beta$, ezért $B_2D \parallel BC$.

Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $C_2E \parallel BC$.

Mivel a B_2D és C_2E szakaszok részei a B_2B_1 és C_2C_1 szakaszoknak, $DE \parallel BC$, ezért a B_1, B_2, C_1, C_2 pontok valóban egy egyenesre esnek, és ez az egyenes az ABC háromszög BC oldallal párhuzamos középvonalára illeszkedik. Ezzel az állítást igazoltuk.

3. Tudjuk, hogy $a + \dfrac{1}{a} = p$, ahol p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$A = a^4 + a^3 + a^2 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2}$$

egész szám! Mennyi a p értéke, ha A-nak négy pozitív osztója van?

Megoldás. Alkalmazzuk a két tag összegének négyzetére, illetve köbére vonatkozó azonosságot az alábbi módon!

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \quad \text{és} \quad \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Ebből

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2 \quad \text{és} \quad a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2.$$

Így

$$a^2+\frac{1}{a^2}=p^2-2, \quad a^3+\frac{1}{a^3}=p^3-3p \quad \text{és} \quad a^4+\frac{1}{a^4}=\left(p^2-2\right)^2-2.$$

Tehát:

$$A=a^4+a^3+a^2+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^2}=\left(p^2-2\right)^2-2+p^3-3p+p^2-2,$$

ami egész szám.

Alakítsuk át a kapott kifejezést az alábbi módon!

$$A=\left(p^2-2\right)^2-2+p^3-3p+p^2-2=p^4-4p^2+4-2+p^3-3p+p^2-2=$$
$$=p^4+p^3-3p^2-3p=p(p^2-3)(p+1).$$

Mivel $4=4\cdot 1=2\cdot 2$, ezért A-nak csak úgy lehet négy pozitív osztója, ha egy prímszám harmadik hatványa, vagy két prímszám szorzata. Az első nem állhat fenn, hisz a p és $p+1$ relatív prímek, a második pedig csak úgy állhat fenn, ha p és $p+1$ prím, a p^2-3 pedig 1. Ebből jön, hogy $p=2$ és $A=6$ és $a=1$.

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Feladatok

1. Adott egy k kör és rajta kívül egy P pont. A P-ből a k-hoz húzott érintők érintési pontjai Q és R. Q-ból húzzunk a PR-rel párhuzamost, és metssze ez a k kört A-ban! Metssze továbbá az AP szakasz a k kört B-ben és QB az RP-t C-ben! Igaz-e, hogy $RC = CP$?

2. Legyen f a racionális számok halmazán értelmezett, valós értékű függvény. Tudjuk, hogy tetszőleges x, y racionális számokra teljesül az

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

egyenlőség. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú f függvényt!

3. Rögzített $k \geqq 2$ egész szám esetén azt mondjuk, hogy az n pozitív egész szám k-felbomló, ha létezik olyan p prímszám és a nem negatív egész szám, hogy:

$$n = p + a^k.$$

Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, mely egyetlen $2 \leqq k \leqq 2012$ egész számra sem k-felbomló!

Az eredményhirdetést 2012. május 25-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).

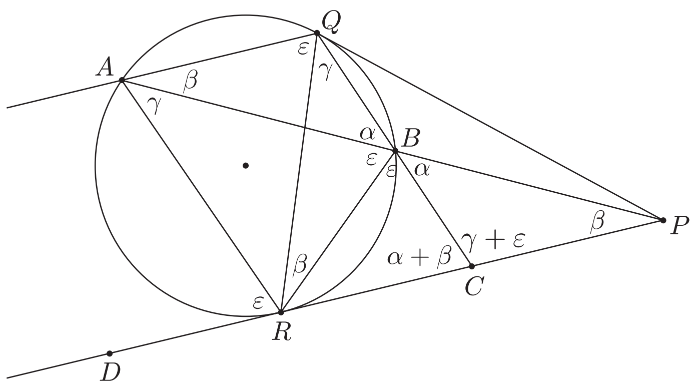
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott egy k kör és rajta kívül egy P pont. A P-ből a k-hoz húzott érintők érintési pontjai Q és R. Q-ból húzzunk a PR-rel párhuzamost, és metssze ez a k kört A-ban! Metssze továbbá az AP szakasz a k kört B-ben és QB az RP-t C-ben! Igaz-e, hogy $RC = CP$?

Megoldás.



A következőkben felhasználjuk az azonos ívhez tartozó kerületi szögek egyenlőségéről, valamint az érintőszárú kerületi szögekről szóló ismereteket. Legyen $ARQ\sphericalangle = \alpha$, ekkor $ABQ\sphericalangle = \alpha$. Legyen $BAQ\sphericalangle = \beta$, ekkor $BRQ\sphericalangle = \beta$. Legyen $RAB\sphericalangle = \gamma$, ekkor $RQB\sphericalangle = \gamma$. Legyen $ABR\sphericalangle = \varepsilon$, ekkor $AQR\sphericalangle = \varepsilon$.

Legyen D egy tetszőleges pont a PR szakasz R-en túli meghosszabbításán. Ekkor $ARD\sphericalangle = \varepsilon$, hiszen az AR húrhoz tartozó érintőszárú kerületi szög. Az $ARBQ$ húrnégyszögben a szemközti szögek összege $180°$, ezért $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 180°$. Innen adódik, hogy $BRC\sphericalangle = \gamma$, hiszen az R csúcsnál ez egészíti ki $180°$-ra a többi három szöget. $AQR\sphericalangle$ és $QRC\sphericalangle$ váltószögek, ezért $QRC\sphericalangle = AQR\sphericalangle = \varepsilon$. A QRC háromszögben két szög már ismert: $CQR\sphericalangle = \gamma$ és $QRC\sphericalangle = \varepsilon$. Innen $RCQ\sphericalangle = \alpha + \beta$ adódik. A BRC háromszögben $BRC\sphericalangle = \gamma$ és $RCB\sphericalangle = \alpha+\beta$, tehát $CBR\sphericalangle = \varepsilon$. $RCB\sphericalangle = \alpha+\beta$ miatt $BCP\sphericalangle = \gamma+\varepsilon$. $PBC\sphericalangle = \alpha$, hiszen $ABQ\sphericalangle = \alpha$-val csúcsszöget alkot. A BCP háromszöget vizsgálva közvetlenül adódik, hogy $CPB\sphericalangle = \beta$, hisz a másik két szöget már ismerjük. $PQC\sphericalangle = \beta$, hiszen a BQ-hoz tartozó érintőszárú kerületi szög. A PQC háromszögben már két szög ismert, tehát $CPQ\sphericalangle = \alpha$. A megfelelő szögek egyezősége miatt $RCB\triangle$ hasonló $QCR\triangle$-höz, továbbá $CPB\triangle$ hasonló $CQP\triangle$-höz.

A hasonlóságok miatt: $\dfrac{BC}{RC} = \dfrac{RC}{QC}$, valamint $\dfrac{BC}{CP} = \dfrac{CP}{QC}$. Az első összefüggésből $RC \cdot RC = BC \cdot QC$, míg a másodikból $CP \cdot CP = BC \cdot QC$ adódik. A két egyenlőség összevetéséből $RC \cdot RC = CP \cdot CP$, innen pedig $RC = CP$ adódik, hiszen pozitív hosszakról van szó.

2. Legyen f a racionális számok halmazán értelmezett, valós értékű függvény. Tudjuk, hogy tetszőleges x, y racionális számokra teljesül az

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

egyenlőség. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú f függvényt!

Megoldás. Ha $y = x$, akkor $f(2x) = 2f(x) + x^2$, azaz

$$f(2x) - \frac{(2x)^2}{2} = 2\left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right).$$

Tehát ennek $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ megoldása. Visszahelyettesítéssel látható, hogy erre teljesül az $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ egyenlőség is.

Legyen: $g(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Ekkor $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

Ha $x = y = 0$, akkor azt kapjuk, hogy $g(0) = 0$. Ha $y = x$, akkor $g(2x) = 2g(x)$ és ezután pl. teljes indukcióval azt kapjuk, hogy $g(nx) = ng(x)$ bármely n természetes számra. Ha $y = -x$, akkor felhasználva, hogy $g(0) = 0$, $g(-x) = -g(x)$ és így bármely k egész számra $g(kx) = kg(x)$. Legyenek most p és q egész számok ($q \neq 0$)! Ekkor

$$g(x) = g\left(q \cdot \frac{x}{q}\right) = qg\left(\frac{x}{q}\right), \quad \text{azaz} \quad g\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q}g(x)$$

és így

$$g\left(\frac{p}{q} \cdot x\right) = g\left(p \cdot \frac{x}{q}\right) = pg\left(\frac{x}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{q}g(x).$$

Tehát bármely r és x racionális számra: $g(rx) = rg(x)$. Végül r helyett x-et és x helyett 1-et írva azt kapjuk, hogy $g(x) = g(1) \cdot x$, tehát csak

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)x$$

lehet és egyszerűen látható, hogy erre teljesül is az eredeti egyenlet.

3. Rögzített $k \geqq 2$ egész szám esetén azt mondjuk, hogy az n pozitív egész szám k-felbomló, ha létezik olyan p prímszám és a nem negatív egész szám, hogy:

$$n = p + a^k.$$

Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, mely egyetlen $2 \leqq k \leqq 2012$ egész számra sem k-felbomló!

Megoldás. Legyen $N = 2012!$ és jelöljük a $2 \leqq k \leqq 2012$ egyenlőtlenségnek eleget tevő k pozitív egész számok halmazát K-val!

Bebizonyítjuk, hogy végtelen sok olyan 1-nél nagyobb b egész szám van, melyre ha $k \in K$, akkor b^N nem k-felbomló. Tegyük fel, hogy valamely $b >$1-re b^N k-felbomló valamely rögzített k-ra ($k \in K$). Ekkor van olyan p prímszám és a nem negatív egész szám, hogy:

$$b^N = p + a^k, \quad \text{azaz} \quad p = b^N - a^k = \left(b^{\frac{N}{k}}\right)^k - a^k.$$

Tehát ismert azonosság alapján:

$$p = \left(b^{N/k} - a\right)\left(b^{(k-1)N/k} + b^{(k-2)N/k}a + \ldots + b^{N/k}a^{k-2} + a^{k-1}\right).$$

Itt a második tényező > 1, mert $b > 1$. Ezért $b^{N/k} - a = 1$, azaz $a = b^{N/k} - 1$. Ezt az előzőbe beírva azt kapjuk, hogy

$$p = Q_k(b),$$

ahol $Q_k(x) = x^{(k-1)N/k} + x^{(k-2)N/k}\left(x^{N/k} - 1\right) + \ldots + x^{N/k}\left(x^{N/k} - 1\right)^{k-2} + \left(x^{N/k} - 1\right)^{k-1}$ egy egész együtthatós polinom, és $Q_k(x) > 1$, ha $x > 1$. Tehát végtelen sok olyan b-t kell keresnünk, hogy ha akkor $Q_k(b)$ ne legyen prímszám.

Legyen minden $k \in K$ esetén a p_k prímszám a $Q_k(2)$ egy osztója (ilyen van, mert $Q_k(2) > 1$) és vezessük be az $m = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{2012}$ jelölést! Ezután minden $k \in K$ esetén válasszuk úgy a t_k pozitív egész számot, hogy ha $x > t_k$, akkor teljesüljön a $Q_k(mx+2) >$ $> p_k$ egyenlőtlenség (ilyen t_k létezik, hiszen $Q_k(x)$ egy olyan nem konstans polinom, amelyben a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív). Végül jelöljük a $\max\left(t_2, \ldots, t_{2012}\right)$ számot T-vel!

Így, ha $t > T$ egész szám, akkor bármely $k \in K$ esetén $Q_k(mt+2)$ osztható lesz p_k-val, hiszen a p_k és az m definíciójából következik, hogy $Q_k(mt+2)$ és $Q_k(2)$ p_k-val osztva ugyanazt a maradékot adják és $Q_k(2)$ osztható p_k-val, másrészt t_k megválasztása miatt p_k-nál nagyobb.

Így $Q_k(mt+2)$ nem prímszám.

Nyilvánvaló, hogy végtelen sok $t > T$ egész szám van. Tehát ezekre $b = mt + 2$ esetén $Q_k(b)$ nem prímszám, ha $k \in K$.

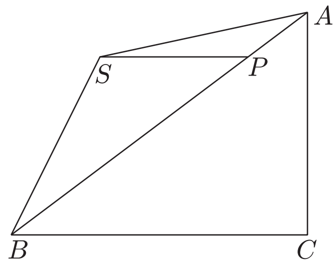
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Feladatok

1. Az ábrán látható ABC derékszögű háromszög AC oldala 6 cm, BC oldala 8 cm hosszú. Az SP szakasz párhuzamos BC-vel és fele olyan hosszú.

Mekkora az ABS háromszög területe? Bizonyítsuk be, hogy az ABS háromszög területe nem függ a P pont megválasztásától!



2. Az $ABCD$ négyzet BC oldalával párhuzamos e egyenes az AB oldalt az E, a CD oldalt pedig a G pontban metszi. Az $AEGD$ és az $EBCG$ négyszög kerületének aránya λ. Ha $\frac{AE}{EB} = \mu$, akkor mekkora a $(2 - \lambda) \cdot (2 + \mu)$ szorzat értéke?

3. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek $(x \in \mathbb{R})$ egy zérushelye van. Az $f(x)$ függvény mininumhelye $x = c$. Mekkora lehet az ac szorzat értéke?

4. Bizonyítsuk be, hogy $13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n esetén osztható 24-gyel!

5. A Bergengóc királyi palota egyik folyosóját újra kell kövezni. A folyosó 20 dm széles és 99 dm hosszú. A felújítás idején kétféle járókövet lehet beszerezni: a kisebbik $4\ \mathrm{dm} \times 4\ \mathrm{dm}$-es és 100 garas az ára, a nagyobbik $5\ \mathrm{dm} \times 5\ \mathrm{dm}$-es és 130 garasba kerül. Mindkettő megvásárolható darabonként is. Legkevesebb hány garasból tudja a kincstárnok megoldani a folyosó kikövezését, ha a köveket nem szabad elvágni?

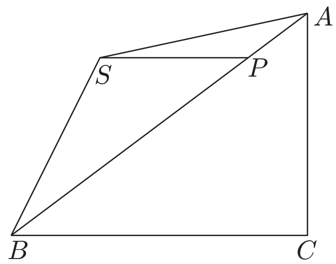
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

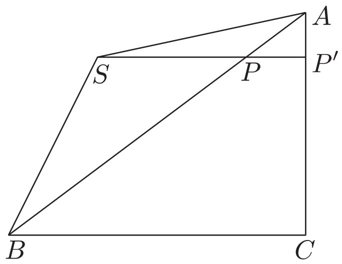
Megoldások és javítási útmutató

1. Az ábrán látható ABC derékszögű háromszög AC oldala 6 cm, BC oldala 8 cm hosszú. Az SP szakasz párhuzamos BC-vel és fele olyan hosszú.

Mekkora az ABS háromszög területe? Bizonyítsuk be, hogy az ABS háromszög területe nem függ a P pont megválasztásától!



1. megoldás. Húzzunk merőlegest S-ből AC-re. Legyen a merőleges talppontja AC-n P'. 1 pont



Írjuk fel az ABS háromszög területét, mint a PAS és PBS háromszögek területének összege.

$$T_{PAS} = \frac{PS \cdot AP'}{2},$$

$$T_{PBS} = \frac{PS \cdot PC'}{2}.$$ 2 pont

$$T_{SAB} = T_{PAS} + T_{PBS} = \frac{PS \cdot AP'}{2} + \frac{PS \cdot PC'}{2} =$$

$$= \frac{PS \cdot (AP' + P'C)}{2} = \frac{PS \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$

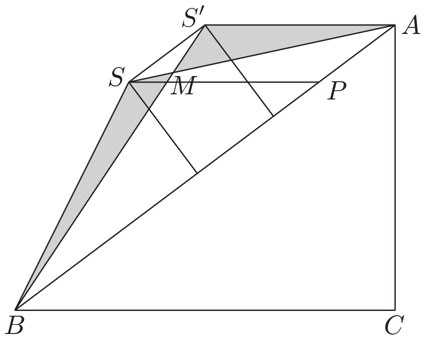
Tehát az ABS háromszög területe 12 cm^2. 2 pont

A fenti számítás P tetszőleges helyzete mellett elvégezhető, nem függ attól, hogy hol veszszük fel AB egyenesén. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás.



Húzzunk párhuzamost A-n keresztül SP-vel, és mérjünk rá SP-t. Legyen az így kapott pont S'. 1 pont

SS' párhuzamos AB-vel, így S és S' azonos távolságra vannak az AB szakasztól. 1 pont

Így az ABS' és ABS háromszögek területe megegyezik, mert azonos az alapjuk és egyenlő hosszú a magasságuk. 1 pont

Tehát P-t tetszőlegesen választva az AB egyenesén, a $BS'A$ háromszöggel azonos területű háromszöget kapunk. 2 pont

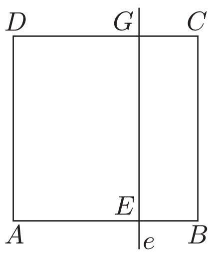
Az ABS' háromszög területét pedig kiszámíthatjuk, mint az AS' alap, és a hozzá tartozó magasság szorzata:

$$T_{BAS'} = \frac{AS' \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ négyzet BC oldalával párhuzamos e egyenes az AB oldalt az E, a CD oldalt pedig a G pontban metszi. Az $AEGD$ és az $EBCG$ négyszög kerületének aránya λ. Ha $\frac{AE}{EB} = \mu$, akkor mekkora a $(2 - \lambda) \cdot (2 + \mu)$ szorzat értéke?

Megoldás.



Az ábrának megfelelően az $EB = x$ jelöléssel $AE = \mu x$, így az $ABCD$ négyzet oldala $x + \mu x = x(1 + \mu)$. 1 pont

Az $AEGD$ téglalap kerülete $2\mu x + 2x(1 + \mu) = 2x(2\mu + 1)$.

Az $EBCG$ téglalap kerülete $2x + 2x(1 + \mu) = 2x(\mu + 2)$. 1 pont

A feltételek alapján $\frac{2x(2\mu + 1)}{2x(\mu + 2)} = \frac{2\mu + 1}{\mu + 2} = \lambda$. 1 pont

Rendezéssel $\lambda\mu + 2\lambda - 2\mu = 1$ adódik. 1 pont

Mivel $(\lambda - 2)(\mu + 2) = \lambda\mu + 2\lambda - 2\mu - 4$, ezért $(\lambda - 2)(\mu + 2) + 4 = 1$. 2 pont

Ekkor pedig $(\lambda - 2)(\mu + 2) = -3$, azaz $(2 - \lambda)(2 + \mu) = 3$, tehát a szorzat keresett értéke 3. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek ($x \in \mathbb{R}$) egy zérushelye van. Az $f(x)$ függvény mininumhelye $x = c$. Mekkora lehet az ac szorzat értéke?

Megoldás. Mivel az $f(x)$ függvénynek minimuma van, ezért $a > 0$.

Teljes négyzetté alakítással $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$ alakú. 1 pont

A minimum helye $x = -\dfrac{b}{2a}$, ami a feltétel szerint $-\dfrac{b}{2a} = c$, azaz $b = -2ac$. 2 pont

Az $f(x)$ függvénynek egy zérushelye van, így a diszkrimináns értéke 0, azaz $b^2 - 4ac = 0$. 1 pont

A $b = -2ac$ helyettesítéssel $4a^2c^2 - 4ac = 0$. 1 pont

A $4ac(ac - 1) = 0$ alakról leolvasható, hogy ac lehetséges értéke 0 vagy 1. 1 pont

Mindkét eset meg is valósul.

Ha $ac = 0$, akkor $c = 0$ és $b = 0$, így $f(x) = ax^2$, ha pedig $ac = 1$, akkor $c = \dfrac{1}{a}$ és $b = -2$, $f(x)$ pedig $f(x) = ax^2 - 2x + \dfrac{1}{a}$ alakú, ahol $a > 0$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy $13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n esetén osztható 24-gyel!

1. megoldás. Egy szám pontosan akkor osztható 24-gyel, ha 3-mal és 8-cal is osztható. 1 pont

Vizsgáljuk a 3-mal való oszthatóságot:

$$13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 = 13^n - 1^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 9 =$$
$$= (13 - 1)\big(13^{n-1} + 13^{n-2} \cdot 1 + \ldots + 13 \cdot 1^{n-2} + 1^{n-1}\big) + 3 \cdot 5^{n-1} + 9.$$ 2 pont

Mivel az összeg minden tagja osztható 3-mal, ezért az összeg is. 1 pont

Hasonlóan vizsgáljuk a 8-cal való oszthatóságot is:

$$13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 = 13^n - 5^n + 5^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 =$$
$$= (13 - 5)\big(13^{n-1} + 13^{n-2} \cdot 5 + \ldots + 13 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1}\big) + 5 \cdot 5^{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1} + 8 =$$
$$= (13 - 5)\big(13^{n-1} + 13^{n-2} \cdot 5 + \ldots + 13 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1}\big) + 8 \cdot 5^{n-1} + 8.$$ 2 pont

Az összeg minden tagja osztható 8-cal, ezért az összeg is, tehát a kifejezés 24-gyel is osztható minden pozitív egész n esetén. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Legyen $a_n = 13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n-re.

Ha $n = 1$, akkor $a_1 = 13 + 3 + 8 = 24$, ami osztható 24-gyel. 1 pont

Tekintsük a sorozat két egymást követő tagjának különbségét:

$$a_{n+1} - a_n = 13^{n+1} + 3 \cdot 5^n + 8 - \left(13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8\right) =$$

$$= 13 \cdot 13^n + 3 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} + 8 - 13^n - 3 \cdot 5^{n-1} - 8 = 12 \cdot \left(13^n + 5^{n-1}\right).$$ 3 pont

Tetszőleges páratlan szám minden pozitív egész kitevőjű hatványa páratlan, 1 pont
ezért a zárójelben levő kifejezés értéke két páratlan szám összege, tehát páros. 1 pont

Páros szám 12-szerese osztható 24-gyel, vagyis a sorozat bármely két egymást követő tagjának különbsége osztható 24-gyel. Mivel ez igaz a sorozat első tagjára is, ezért a sorozat minden tagja 24 többszöröse. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás. Legyen $a_n = 13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden pozitív egész n-re, az oszthatóságot bizonyítsuk n-szerinti teljes indukcióval.

Legyen $n = 1$, ekkor $a_1 = 13 + 3 + 8 = 24$, ami osztható 24-gyel. 1 pont

Tegyük fel, hogy az állítás valamely pozitív egész n-re igaz, be kell látnunk, hogy $n + 1$-re is igaz. 1 pont

$$a_{n+1} = 13^{n+1} + 3 \cdot 5^n + 8 = 13 \cdot 13^n + 5 \cdot 3 \cdot 5^{n-1} + 8 =$$

$$= 13 \cdot \left(13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8\right) - 8 \cdot 3 \cdot 5^{n-1} - 12 \cdot 8 = 13 \cdot a_n - 24 \cdot 5^{n-1} - 24 \cdot 4.$$ 3 pont

Az első tag az indukciós feltevés szerint osztható 24-gyel, 1 pont
ezért az összeg mindhárom tagja osztható 24-gyel, tehát az a_n sorozat minden tagja valóban a 24 többszöröse. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. A Bergengóc királyi palota egyik folyosóját újra kell kövezni. A folyosó 20 dm széles és 99 dm hosszú. A felújítás idején kétféle járókövet lehet beszerezni: a kisebbik $4\ \mathrm{dm} \times 4\ \mathrm{dm}$-es és 100 garas az ára, a nagyobbik $5\ \mathrm{dm} \times 5\ \mathrm{dm}$-es és 130 garasba kerül. Mindkettő megvásárolható darabonként is. Legkevesebb hány garasból tudja a kincstárnok megoldani a folyosó kikövezését, ha a köveket nem szabad elvágni?

Megoldás. Először vizsgáljuk meg azt, hogy a 20 dm-es szélesség hogyan hozható ki a kétféle járókőből. Mivel nem lehet darabolni a köveket, páros sok 5-ös kell, hogy páros szélességet kapjunk. Mivel $20 - 2 \cdot 5 = 10$ nem osztható 4-gyel, ezért csak két lehetőség van:

- vagy 4 darab 5×5-ös;
- vagy 5 darab 4×4-es kerülhet egymás mellé.

Tehát a kikövezés úgy fog kinézni, hogy a 20×99-es téglalapot 20×4-es és 20×5-ös téglalapokkal fogjuk lefedni. 2 pont

Most arra fogunk koncentrálni, hogy a 99 dm-es hossz hogyan állhat össze 4 dm-es és 5 dm-es részekből. Meg kell tehát oldanunk a

$$4a + 5b = 99$$

egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán. 1 pont

Átrendezve $4a = 99 - 5b$, tehát $99 - 5b$ 4-gyel osztható, ami pontosan akkor teljesül, ha b $4k + 3$ alakú. Innen már egyszerűen táblázatba foglalhatjuk a lehetőségeket:

a	b
21	3
16	7
11	11
6	15
1	19

2 pont

Végül azt kell meggondolnunk, hogy melyik fajta járókő az olcsóbb. Összesen $20 \cdot 99\ \mathrm{dm}^2$ területet kell lefednünk, ezért azt fogjuk kiszámolni, hogy melyik típusú kő esetén olcsóbb egy dm^2.

Mivel $130/25 < 6 < 100/16$, ezért a nagyobb járókő az olcsóbb, abból kell minél többet felhasználni. 1 pont

A táblázat utolsó sorában a legnagyobb a nagyobb kövek száma. Az $a = 1$ öt darab kisebb járókövet jelent, a $b = 19$ pedig $19 \cdot 4 = 76$ nagyobbat (hiszen 20 dm szélességben kell lerakni a köveket). Tehát a kincstár $5 \cdot 100 + 76 \cdot 130 = 10380$ garasból tudja megoldani a felújítást. 1 pont

Összesen: 7 pont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Feladatok

1. A minden valós számra értelmezett $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$ és $g(x) = mx$ függvény grafikonja érinti egymást, ahol m valós paraméter. Hol lehet az érintési pont?

2. A Bergengóc királyi palota egyik folyosóját újra kell kövezni. A folyosó 20 dm széles és 99 dm hosszú. A felújítás idején kétféle járókövet lehet beszerezni: a kisebbik $4\ \mathrm{dm} \times 4\ \mathrm{dm}$-es és 100 garas az ára, a nagyobbik $5\ \mathrm{dm} \times 5\ \mathrm{dm}$-es és 130 garasba kerül. Mindkettő megvásárolható darabonként is. Legkevesebb hány garasból tudja a kincstárnok megoldani a folyosó kikövezését, ha a köveket nem szabad elvágni?

3. Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra, az egyiknek a hossza 5 egység, a trapéz magassága 4 egység. Mekkora a területe?

4. Adottak az $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú hatjegyű, illetve négyjegyű természetes számok, ahol a, b, c és d nem feltétlenül különböző számjegyeket jelöl.

$a)$ Mutassa ki, hogy $\sqrt{n}$ nem természetes szám!

$b)$ Határozza meg azokat az (n, m) számpárokat, ahol $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú természetes számok, továbbá igaz, hogy $\sqrt{n+m} \in \mathbb{N}$!

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak és a szemben fekvő csúcsokat összekötő három átló egyenlő egymással, akkor a hatszög csúcsai egy körön fekszenek, vagyis a hatszög köré kör rajzolható.

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A minden valós számra értelmezett $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2$ és $g(x) = mx$ függvény grafikonja érinti egymást, ahol m valós paraméter. Hol lehet az érintési pont?

Megoldás. Az $f(x)$ függvény képe $(2;0)$ csúcsú felfelé nyíló parabola, $g(x)$ képe pedig origón átmenő egyenes. 1 pont

Érintés esetén a parabolának és az egyenesnek egy közös pontja van.

Tehát az $\dfrac{1}{2}(x-2)^2 = mx$, azaz az $\dfrac{1}{2}x^2 - (m+2)x + 2 = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0. 1 pont

Így $(m+2)^2 - 4 = 0$, ahonnan $m(m+4) = 0$ adódik.

A megoldások $m = 0$, illetve $m = -4$. 2 pont

A két esetben az $\dfrac{1}{2}(x-2)^2 = mx$ egyenlet megoldása $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. 1 pont

Ennek megfelelően az érintési pontok $E_1(2;0)$, valamint $E_2(-2;8)$. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. A Bergengóc királyi palota egyik folyosóját újra kell kövezni. A folyosó 20 dm széles és 99 dm hosszú. A felújítás idején kétféle járókövet lehet beszerezni: a kisebbik $4\ \mathrm{dm} \times 4\ \mathrm{dm}$-es és 100 garas az ára, a nagyobbik $5\ \mathrm{dm} \times 5\ \mathrm{dm}$-es és 130 garasba kerül. Mindkettő megvásárolható darabonként is. Legkevesebb hány garasból tudja a kincstárnok megoldani a folyosó kikövezését, ha a köveket nem szabad elvágni?

Megoldás. Először vizsgáljuk meg azt, hogy a 20 dm-es szélesség hogyan hozható ki a kétféle járókőből. Mivel nem lehet darabolni a köveket, páros sok 5-ös kell, hogy páros szélességet kapjunk. Mivel $20 - 2 \cdot 5 = 10$ nem osztható 4-gyel, ezért csak két lehetőség van:

- vagy 4 darab 5×5-ös;
- vagy 5 darab 4×4-es kerülhet egymás mellé.

Tehát a kikövezés úgy fog kinézni, hogy a 20×99-es téglalapot 20×4-es és 20×5-ös téglalapokkal fogjuk lefedni. 2 pont

Most arra fogunk koncentrálni, hogy a 99 dm-es hossz hogyan állhat össze 4 dm-es és 5 dm-es részekből. Meg kell tehát oldanunk a

$$4a + 5b = 99$$

egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán. 1 pont

Átrendezve $4a = 99 - 5b$, tehát $99 - 5b$ 4-gyel osztható, ami pontosan akkor teljesül, ha b $4k + 3$ alakú. Innen már egyszerűen táblázatba foglalhatjuk a lehetőségeket:

a	b
21	3
16	7
11	11
6	15
1	19

2 pont

Végül azt kell meggondolnunk, hogy melyik fajta járókő az olcsóbb. Összesen $20 \cdot 99$ dm^2 területet kell lefednünk, ezért azt fogjuk kiszámolni, hogy melyik típusú kő esetén olcsóbb egy dm^2.

Mivel $130/25 < 6 < 100/16$, ezért a nagyobb járókő az olcsóbb, abból kell minél többet felhasználni. 1 pont

A táblázat utolsó sorában a legnagyobb a nagyobb kövek száma. Az $a = 1$ öt darab kisebb járókövet jelent, a $b = 19$ pedig $19 \cdot 4 = 76$ nagyobbat (hiszen 20 dm szélességben kell lerakni a köveket). Tehát a kincstár $5 \cdot 100 + 76 \cdot 130 = 10380$ garasból tudja megoldani a felújítást. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra, az egyiknek a hossza 5 egység, a trapéz magassága 4 egység. Mekkora a területe?

Megoldás. Legyenek a trapéz párhuzamos oldalai a és c, átlói e és f. Mivel az átlók merőlegesek egymásra, a trapéz területe kiszámítható az $\frac{e \cdot f}{2}$ összefüggésből is. 1 pont

Így $\frac{5 \cdot f}{2} = \frac{(a+c)}{2} \cdot 4$, ebből $a + c = \frac{5}{4} f$. 2 pont

Az egyik átló eltolásával létre jön egy olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói e és f, átfogója $a + c$. 1 pont

Erre felírva a Pitagorasz-tételt $\left(\frac{5}{4} f\right)^2 = 25 + f^2$, ebből $f = \frac{20}{3}$. 2 pont

$$T = \frac{5 \cdot \frac{20}{3}}{2} = \frac{50}{3} \quad \text{(területegység).}$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Adottak az $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú hatjegyű, illetve négyjegyű természetes számok, ahol a, b, c és d nem feltétlenül különböző számjegyeket jelöl.

$a)$ Mutassa ki, hogy $\sqrt{n}$ nem természetes szám!

$b)$ Határozza meg azokat az (n, m) számpárokat, ahol $n = \overline{abcabc}$ és $m = \overline{d00d}$ alakú természetes számok, továbbá igaz, hogy $\sqrt{n+m} \in \mathbb{N}$!

Megoldás. $a)$ $n = \overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$. 1 pont

Mivel a 7, a 11 és a 13 prímszám, az n szám csakis akkor lehet négyzetszám, ha az $\overline{abc}$ háromjegyű természetes szám prímtényezős felbontásában szerepelnek ezen prímtényezők egy páratlan hatványon, ami ellentmond annak, hogy $\overline{abc}$ háromjegyű szám.
(Vagy: n csakis akkor lehet négyzetszám, ha $1001 \mid \overline{abc}$-nek, ami lehetetlen.) 1 pont

$b)$ $n + m = 1001 \cdot (\overline{abc} + d)$. 1 pont

Mivel $n + m$ négyzetszám, ezért $\overline{abc} + d = 1001 \cdot k$, ahol k négyzetszámjegy és nem 0.

Ha $k = 1$, akkor $a = b = 9$, $d = 11 - c$ és $c \in \{2, 3, 4, \ldots, 9\}$. 2 pont

Tudjuk, hogy $\overline{abc} \leqq 999$ és $d \leqq 9$, így $\overline{abc} + d \leqq 1008$.

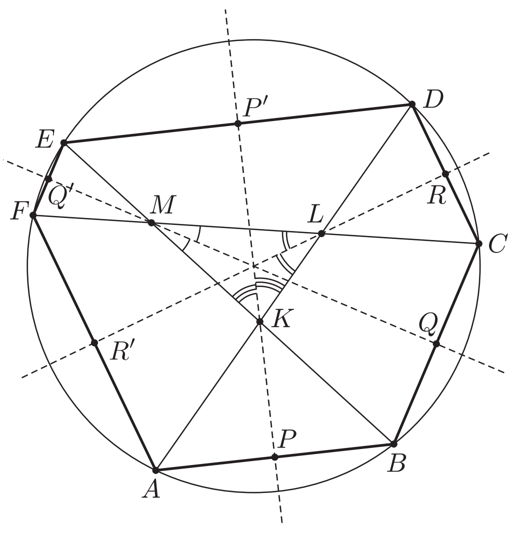
Ha $k = 4$, akkor $\overline{abc} + d = 4004$, ami lehetetlen, vagy
ha $k = 9$, akkor $\overline{abc} + d = 9009$, ami szintén lehetetlen 1 pont

A keresett számpárok: $(999999; 2002)$; $(998998; 3003)$; $(997997; 4004)$; $(996996; 5005)$; $(995995; 6006)$; $(994994; 7007)$; $(993993; 8008)$; $(992992; 9009)$. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak és a szemben fekvő csúcsokat összekötő három átló egyenlő egymással, akkor a hatszög csúcsai egy körön fekszenek, vagyis a hatszög köré kör rajzolható.

Megoldás.



Legyen a feladat feltételeinek megfelelő hatszög $ABCDEF$.

Az $ABDE$ négyszög trapéz, amelynek AD és BE átlói egyenlőek egymással. Ebből következik, hogy a trapéz szimmetrikus. 1 pont

A PP' egyenes, mely összeköti a DE oldal P' felezőpontját és az AB oldal P felezőpontjával, ennek a trapéznak a szimmetriatengelye.

Ez az egyenes merőleges az AB és ED oldalakra, átmegy az AD és BE átlók metszéspontján, és felezi a köztük lévő szöget. 2 pont

Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy a hatszög BC és EF (CD és FA) oldalainak felezőpontjait összekötő QQ' (RR') egyenes merőleges ezekre az oldalakra és felezi a hatszög BE és CF (DA és CF) átlói által bezárt szöget. 1 pont

Így PP', QQ', RR' egyenesek szögfelezői az AD, BE és CF egyenesek alkotta KLM háromszögnek, (ha létezik a háromszög) és mint ilyenek, egy pontban metszik egymást, legyen ez O. 1 pont

Ha AD, BE és CF egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor ugyanebben a pontban metszi egymást PP', QQ', RR' is, akkor ez a pont legyen O. 1 pont

Abból, hogy az $ABCDEF$ hatszög oldalainak felezőpontjaiban emelt merőlegesek egy pontban, O-ban metszik egymást, következik, hogy O egyenlő távolságra van a hatszög mindegyik csúcsától, azaz a hatszög köré kör rajzolható. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egy adott négyzet 2012 darab kisebb méretű négyzetre bontható úgy, hogy a kisebb méretű négyzetek oldalai párhuzamosak legyenek az eredeti négyzet oldalaival.

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

3. Egy egyenlőszárú háromszög magasságpontja M, súlypontja S. Az S pont rajta van a háromszög beírt körén. Mekkora az MS szakasz és a háromszög alaphoz tartozó magasságának aránya?

4. Az $x^n + (x+1)^n + (x+2)^n + (x+3)^n + (x+4)^n + (x+5)^n + (x+6)^n$ összeg osztható 7-tel, ahol x egész szám és n pozitív egész szám. Oldjuk meg az $n < 2012$ egyenlőtlenséget!

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

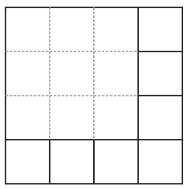
1. Bizonyítsuk be, hogy egy adott négyzet 2012 darab kisebb méretű négyzetre bontható úgy, hogy a kisebb méretű négyzetek oldalai párhuzamosak legyenek az eredeti négyzet oldalaival.

1. megoldás.

A feltételeknek megfelelően bármely négyzet felosztható 4 darab négyzetre a négyzet középvonalaival.

Ez azt jelenti, hogy bármely négyzetből 4 darab újabb négyzetet kaphatunk, ekkor pedig a meglevő négyzetek száma 3-mal növekszik. 1 pont

Egy adott négyzetet a feltételeknek megfelelő módon fel tudunk 8 darab négyzetre osztani az oldalak 4 részre osztásával a következő ábra szerint:



2 pont

Ezután ábránk bármelyik „kisebb” négyzetére alkalmazva a középvonalak szerinti felosztást – az előzőek alapján – 3-mal növekszik a kisebb méretű négyzetek száma.

Ha ezt az eljárást k-szor alkalmazzuk, akkor a keletkező négyzetek száma $8 + 3k$ lesz. 2 pont

Ha a négyzetek száma 2012, akkor $3k + 8 = 2012$, azaz $k = 668$. 1 pont

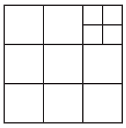
A $k = 668$ esetben az előállítás valóban megvalósítható, például az ábránk szerinti egyik „kis négyzet” középvonalak szerinti felosztásának 668-szor történő ismétlésével. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás.

Egy adott négyzet a feltételeknek megfelelően felbontható 9 darab négyzetre a szemköztes oldalak megfelelő harmadolópontjait összekötő szakaszokkal.

Ekkor az eddig meglevő négyzetek száma 8-cal nő. 1 pont

A  felosztásban a kis négyzetek száma 12. 2 pont

Az első megoldás alapján a keletkező négyzetek száma $12 + 8k$, ha a keletkezett kis négyzetek egyikét 9 darab kisebb négyzetre osztjuk k-szor egymás után. 2 pont

Mivel $12 + 8k = 2012$, így $k = 250$. 1 pont

A konstrukció megvalósítható. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás.

Először 43^2 számú egybevágó négyzetre osztjuk az eredeti négyzetet. 1 pont

Ezután az egyik kis négyzetet 4 részre osztjuk a középvonalaival. 1 pont

A keletkező négyzetek közül két darabot egyenként $9 \cdot 9 = 81$ darab egybevágó kisebb négyzetre osztunk. 2 pont

Így az összesen keletkező négyzetek száma

$$43^2 - 1 + 2^2 + 9^2 - 1 + 9^2 - 1 = 2012.$$ 2 pont

A konstrukció valóban megvalósítható. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzések.

(1) Indoklás nélküli konstrukció megadásáért legfeljebb 5 pont adható.

(2) Bármilyen megoldásért a megadott megoldások részpontszámaival arányosan adhatók meg a megfelelő pontszámok.

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

Megoldás.

A keresett számokban előforduló számjegyek lehetséges értéke 1, 2, 3, 4, 6, 8 a szorzatra vonatkozó feltétel alapján. 1 pont

A számjegyek nem növekvő sorrendbe rendezve a következők lehetnek az összegre adott feltétel alapján:

8, 3	és 13 db 1-es,
6, 4	és 14 db 1-es,
6, 2, 2	és 14 db 1-es,
4, 3, 2	és 15 db 1-es,
3, 2, 2, 2	és 15 db 1-es.

2 pont

Az öt lehetséges esetben a megoldások száma rendre

$$\frac{15!}{13!},\quad \frac{16!}{14!},\quad \frac{17!}{2!\cdot 14!},\quad \frac{18!}{15!},\quad \frac{19!}{15!\cdot 3!}.$$ 2 pont

A keresett számok száma az öt esetben kapott értékek összege. 1 pont

Összesen tehát

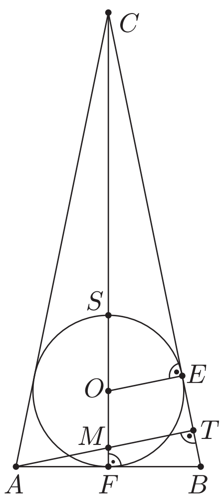
$$15\cdot 14+16\cdot 15+17\cdot 8\cdot 15+18\cdot 17\cdot 16+19\cdot 17\cdot 16\cdot 3=22\,890$$

darab szám felel meg a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy egyenlőszárú háromszög magasságpontja M, súlypontja S. Az S pont rajta van a háromszög beírt körén. Mekkora az MS szakasz és a háromszög alaphoz tartozó magasságának aránya?

Megoldás.



Ábránk jelöléseinek megfelelően legyen $AF=FB=x$, $FM=y$, $OF=OE=OS=r$ a beírt kör sugara, továbbá $FC=m$.

Az S súlypont osztási arányára vonatkozó tétel alapján $FC=m=$ $=6r$, így $OC=5r$. 1 pont

Az OEC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján

$$EC=\sqrt{(5r)^2-r^2}=2r\sqrt{6}.$$ 1 pont

Az AMF és a COE háromszög hasonló, mert egy-egy derékszögük van, valamint az A és C csúcsnál fekvő szögek merőleges szárú hegyesszögek. 1 pont

Így pedig $\dfrac{FM}{AF}=\dfrac{OE}{EC}$, azaz $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. 1 pont

Az AFC és a CEO háromszög is hasonló, ezért

$$\frac{AF}{FC}=\frac{OE}{EC},\quad \text{azaz}\quad \frac{x}{6r}=\frac{1}{2\sqrt{6}},\quad \text{tehát}\quad x=\frac{\sqrt{6}}{2}\,r.$$ 1 pont

Mivel $\frac{y}{x} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, ezért $y = \frac{x}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} r = \frac{r}{4}$. 1 pont

Az előzőek alapján így

$$\frac{MS}{FC} = \frac{2r-y}{m} = \frac{2r-\frac{r}{4}}{6r}, \quad \text{azaz} \quad \frac{MS}{FC} = \frac{7}{24}.$$ 1 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Az $x^n + (x+1)^n + (x+2)^n + (x+3)^n + (x+4)^n + (x+5)^n + (x+6)^n$ összeg osztható 7-tel, ahol x egész szám és n pozitív egész szám. Oldjuk meg az $n < 2012$ egyenlőtlenséget!

Megoldás.

Az x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$, $x+6$ számok 7-es maradéka mind különböző, azaz valamilyen sorrendben 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ezért elég vizsgálni az $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ összeg 7-es maradékát. 1 pont

Ha n páratlan szám, akkor az $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ összeg szorzattá alakítására vonatkozó szabály alapján ($a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{N}$) a hatványösszeg az $(1^n + 6^n) + (2^n + 5^n) + (3^n + 4^n)$ csoportosításnak megfelelően osztható 7-tel. 1 pont

Ha az n kitevő $6k$ alakú ($k \in \mathbb{Z}^+$), akkor az $1^{6k} + 2^{6k} + 3^{6k} + 4^{6k} + 5^{6k} + 6^{6k}$ összeg 7-es maradéka 6, mert az 1^k, $(2^6)^k$, $(3^6)^k$, $(4^6)^k$, $(5^6)^k$, $(6^6)^k$ hatványok 7-es maradéka rendre 1, hiszen 1^k maradéka 1, $(2^6)^k = (8 \cdot 8)^k$ maradéka 1, $(3^6)^k = (3^3)^{2k}$ 7-es maradéka 1, továbbá 1 és 6, 2 és 5, valamint 3 és 4 7-es maradékának abszolút értéke külön-külön megegyezik, a kitevők pedig párosak ($2k$-val oszthatók).

Tehát $n = 6k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) esetén a hatványösszeg nem osztható 7-tel. 2 pont

Ha $n = 6k+2$ alakú ($k \in \mathbb{N}$), akkor az $1^{6k+2} + 2^{6k+2} + 3^{6k+2} + 4^{6k+2} + 5^{6k+2} + 6^{6k+2}$ hatványösszeg 7-es maradéka az előző eset alapján $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$ 7-es maradékának felel meg, ami 0. 1 pont

Ha $n = 6k+4$ alakú ($k \in \mathbb{N}$), akkor a hatványösszeg 7-es maradéka az előzőek alapján $1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4$ 7-es maradékával egyezik meg, azaz $1+2+4+4+2+1 = 14$ alapján a hatványösszeg osztható 7-tel. 1 pont

Összesen így az n kitevő értéke bármely 2012-nél kisebb, de 6-tal nem osztható pozitív egész szám lehet. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Feladatok

1. Mely x és y természetes számokra igaz, hogy $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1000}$?

2. Legyen $A = 1\underbrace{77\ldots7}_{2k+1\ \text{db}}6$ és $B = 3\underbrace{55\ldots5}_{k\ \text{db}}2$ $2k+3$, illetve $k+2$ jegyű természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám, és határozzuk meg $\sqrt{A-B}$ jegyeinek számát!

3. Az ABC háromszögben $AC = 2AB$. Az AB és AC oldalon vegyük fel az M, illetve N pontokat úgy, hogy az $\frac{AB}{2} = AM = CN = \frac{AC}{4}$ összefüggés teljesüljön. Jelölje P az MN és Q a BC szakaszok felezőpontját, AD pedig a BAC szög szögfelezőjét, ahol D illeszkedik BC-re. Igazoljuk, hogy $PQ : AD = 3 : 8$!

4. Egy 90 cm kerületű háromszög oldalai cm-ben mérve egész szám hosszúak. Mekkorák az oldalak, ha a háromszög egyik szöge egy másik szögének kétszerese?

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Mely x és y természetes számokra igaz, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1000}$?

Megoldás.

Ha $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1000}$, akkor $\sqrt{y}=\sqrt{1000}-\sqrt{x}$ alapján

$$y=x+1000-2\sqrt{1000x}=x+1000-20\sqrt{10x},$$

azaz $20\sqrt{10x}=x-y+1000$. 1 pont

Egyenletünk alapján $\sqrt{10x}$ racionális szám, de x egész szám, ezért $10x$ csak négyzetszám lehet. 1 pont

Ha viszont $10x$ négyzetszám, akkor $x=10k^2$ alakú, ahol $k\in\mathbb{N}$. 1 pont

Teljesen hasonló módon adódik, hogy $y=10n^2$ alakú, ahol $n\in\mathbb{N}$.

Az eredeti egyenlet az $x=10k^2$, $y=10n^2$ helyettesítéssel $k\sqrt{10}+n\sqrt{10}=10\sqrt{10}$, azaz $k+n=10$. 1 pont

A lehetséges $(k;n)$ számpárok száma így 11, amelyek

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

. 1 pont

A megfelelő $(x;y)$ számpárok ennek megfelelően

x	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000
y	1000	810	640	490	360	250	160	90	40	10	0

.

A megadott számpárok ki is elégítik az eredeti egyenletet. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.

(1) Alig indokolt megoldások esetén a dolgozat értéke legfeljebb 3 pont lehet.

(2) Ha a megadott számpárok legalább fele hibás, akkor jó gondolatmenet esetén is csak maximálisan 4 pont adható a feladat megoldására.

2. Legyen $A = 1\underbrace{77\ldots7}_{2k+1 \text{ db}}6$ és $B = 3\underbrace{55\ldots5}_{k \text{ db}}2$ $2k+3$, illetve $k+2$ jegyű természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám, és határozzuk meg $\sqrt{A-B}$ jegyeinek számát!

Megoldás.

Alakítsuk át az A és B számokat a következőképpen:

$$A = 10^{2k+2} + 7 \cdot \big(\underbrace{11\ldots1}_{2k+1 \text{ db}}\big) \cdot 10 + 6 =$$

$$= 10^{2k+2} + \frac{7}{9} \cdot \big(\underbrace{99\ldots9}_{2k+1 \text{ db}}\big) \cdot 10 + 6 = 10^{2k+2} + \frac{7}{9} \cdot \big(10^{2k+1} - 1\big) \cdot 10 + 6,$$

ahonnan $A = \dfrac{16}{9} \cdot \big(10^{2k+2} - 1\big)$ adódik. 2 pont

Hasonlóan

$$B = 3 \cdot 10^{k+1} + 5 \cdot \big(\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ db}}\big) \cdot 10 + 2 = 3 \cdot 10^{k+1} + \frac{5}{9} \cdot \big(\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ db}}\big) \cdot 10 + 2 =$$

$$= 3 \cdot 10^{k+1} + \frac{5}{9} \cdot \big(10^{k} - 1\big) \cdot 10 + 2,$$

ebből pedig $B = \dfrac{32}{9} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big)$ következik. 2 pont

Képezzük az $A - B$ különbséget:

$$A - B = \frac{16}{9} \cdot \big(10^{2k+2} - 1\big) - \frac{32}{9} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big) = \frac{16}{9} \cdot \big(10^{2k+2} - 2 \cdot 10^{k+1} + 1\big) =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big)\right)^2.$$ 1 pont

Ekkor

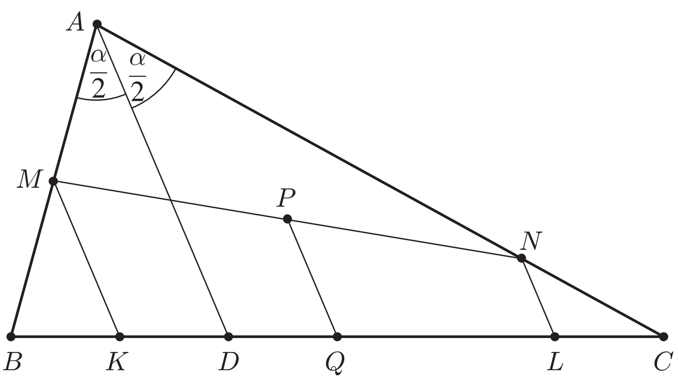
$$\sqrt{A-B} = \frac{4}{3} \cdot \big(10^{k+1} - 1\big) = \frac{4}{3} \cdot \big(\underbrace{99\ldots9}_{k+1 \text{ db}}\big) = 4 \cdot \big(\underbrace{33\ldots3}_{k+1 \text{ db}}\big) = 1\underbrace{33\ldots3}_{k \text{ db}}2,$$ 1 pont

ami $k+2$ jegyű természetes szám. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az ABC háromszögben $AC = 2AB$. Az AB és AC oldalon vegyük fel az M, illetve N pontokat úgy, hogy az $\frac{AB}{2} = AM = CN = \frac{AC}{4}$ összefüggés teljesüljön. Jelölje P az MN és Q a BC szakaszok felezőpontját, AD pedig a BAC szög szögfelezőjét, ahol D illeszkedik BC-re. Igazoljuk, hogy $PQ : AD = 3 : 8$!

Megoldás.



Segédszerkesztés: Legyen K és L a BC szakasz két olyan pontja, amelyre MK és PL párhuzamos AD-vel, így $MKLN$ trapéz. 1 pont

Bevezetjük a következő jelöléseket: $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$; $BD = x$ és $DC = a - x$. A szögfelezőtételt alkalmazva a következő egyenlőséghez jutok: $\frac{x}{c} = \frac{a-x}{b}$. A feltételben szereplő összefüggést – vagyis, hogy $\frac{c}{2} = \frac{b}{4}$ – felhasználva $x = \frac{a}{3}$. 2 pont

Bizonyítjuk, hogy az $MKLN$ trapézban PQ középvonal, ahol P MN felezőpontja.

Az ABD háromszögben M az AB felezőpontja, $MK \parallel AD$, így MK középvonal, és $MK = \frac{AD}{2}$ és $BK = \frac{x}{2} = \frac{a}{6}$. 1 pont

ADC háromszögben $NL \parallel AD$, így $ADC\triangle \cong NLC\triangle$, a hasonlósági arány 4 : 1, vagyis $NL = \frac{AD}{4}$, $LC = \frac{a-x}{4} = \frac{a}{6}$. 1 pont

Mivel Q felezőpontja BC-nek és $BK = CL$, ezért Q felezőpontja KL-nek is, így PQ középvonala az $MKLN$ trapéznak.

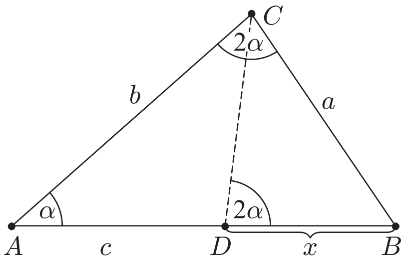
$$PQ = \frac{MK + NL}{2} = \frac{\frac{AD}{2} + \frac{AD}{4}}{2} = \frac{3}{8}AD.$$ 1 pont

Így bebizonyítottuk, hogy $PQ : AD = 3 : 8$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy 90 cm kerületű háromszög oldalai cm-ben mérve egész szám hosszúak. Mekkorák az oldalak, ha a háromszög egyik szöge egy másik szögének kétszerese?

Megoldás.



Ábránknak megfelelően $AD = c - x$, $DB = x$, ahol CD az ACB szög belső szögfelezője.

A feladat megoldásának szempontjából érdektelen, hogy a háromszög melyik szöge kétszerese valamelyik másik szögének.

A BCD háromszög hasonló a BAC háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. 1 pont

A hasonlóság alapján $\frac{x}{a} = \frac{a}{c}$, azaz $x = \frac{a^2}{c}$,
továbbá a $CD = f$ jelöléssel $\frac{f}{a} = \frac{b}{c}$, így $f = \frac{ab}{c}$. 1 pont

Az ADC háromszög a szögei alapján egyenlő szárú ($AD = DC$), ezért $c - x = f$, azaz $c - \frac{a^2}{c} = \frac{ab}{c}$, ahonnan $b = \frac{c^2 - a^2}{a}$ adódik. 1 pont

Mivel $a + b + c = 90$, ezért $a + \frac{c^2 - a^2}{a} + c = 90$, így

$$a = \frac{c^2}{90 - c} = \frac{c^2 - 90c + 90c}{90 - c} = -c + \frac{90c - 90^2 + 90^2}{90 - c} = -c - 90 + \frac{90^2}{90 - c}.$$ 1 pont

A háromszög-egyenlőtlenség alapján egyrészt $a < c < 45$, másrészt pedig $b < a + c$ alapján $\frac{c^2 - a^2}{a} < a + c$, azaz $\frac{c}{2} < a$, így pedig $\frac{c}{2} < \frac{c^2}{90 - c}$, ahonnan $c > 30$ adódik.

Mivel pedig $30 < c < 45$, ezért $45 < 90 - c < 60$. 1 pont

Az $a = -c - 90 + \frac{90^2}{90 - c}$ formula alapján $90 - c$ osztója a $90^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ számnak, ahol $45 < 90 - c < 60$.

A $90 - c$ osztó lehetséges értéke kétféle lehet: 50 vagy 54. 1 pont

Ekkor pedig a megoldások:

a	32	24
b	18	30
c	40	36

.

Mindkét megoldás megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Ha a versenyző az $a = \frac{c^2}{90 - c}$ formula alapján indokolva megadja az $(a; c)$ párok összes lehetséges értékét, akkor erre a részre 2 pontot kaphat.

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $S = \dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ egész része nem lehet négyzetszám!

2. Kiszámoltuk, hogy hány olyan n-jegyű ($n > 1$) szám van, ahol bármely két szomszédos jegy összege osztható 3-mal. A kapott eredmény végződhet-e 2012-re?

3. Az ABC egyenlőszárú háromszög k köréírt körét belülről, a háromszög AC és BC szárait pedig rendre a P és Q pontokban érinti a k_1 kör.

Bizonyítsuk be, hogy PQ felezőpontja az ABC háromszög beírt körének középpontja!

4. Az x, y, z, u valós számokra teljesül, hogy

$$4x\sqrt{4-x^2} - 3y\sqrt{3-y^2} + 2z\sqrt{2-z^2} - u\sqrt{1-u^2} = 15.$$

Mekkora az xy^2z^2u szorzat értéke?

5. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az éleket pirossal vagy kékkel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű él indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket! Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is kiszínezzük.

Összesen hány háromszöget színezünk be?

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $S = \dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ egész része nem lehet négyzetszám!

Megoldás.

A tört nevezőjét gyöktelenítve kapjuk, hogy $S = 2n + 2 + 2\sqrt{n(n+1)}$, 2 pont

így S egész része $2n + 2 + \left[2\sqrt{n(n+1)}\,\right]$, hiszen $2n + 2$ egész szám. 1 pont

Mivel

$$2n = 2\sqrt{n^2} < 2\sqrt{n(n+1)} = 2\sqrt{n^2+n} < 2\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2n+1, \qquad \text{1 pont}$$

ezért $\left[2\sqrt{n(n+1)}\,\right] = 2n$, így S egész része $4n + 2$. 1 pont

A négyzetszámok 4-gyel osztva 0, vagy 1 maradékot adhatnak, 1 pont

azaz 2-t nem, így S egész része valóban nem lehet négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Kiszámoltuk, hogy hány olyan n-jegyű ($n > 1$) szám van, ahol bármely két szomszédos jegy összege osztható 3-mal. A kapott eredmény végződhet-e 2012-re?

Megoldás.

Először megszámoljuk, hogy hány „jó” szám van n-jegyű szám esetén. Az n-jegyű számunk kezdő jegye szerint három különböző esetet különböztetünk meg ($3k + 1$, $3k + 2$, vagy $3k$ alakú a kezdő jegy).

Ha a kezdő jegy 1, 4 vagy 7 (3 eset), akkor 2, 5, vagy 8-cal folytathatjuk (újra 3 eset), majd újra 1, 4, 7-tel, … (vagyis felváltva $3k+1$, és $3k+2$ alakú számjegyek jönnek). Ez n-jegyű szám esetén éppen 3^n jó számot jelent. 1 pont

Ha a kezdő jegy 2, 5 vagy 8, akkor teljesen hasonlóan, mint az előző esetben, itt is felváltva $3k + 2$, és $3k + 1$ alakú számjegyek jönnek, vagyis n jegy esetén itt is 3^n jó szám van. 1 pont

Ha pedig a kezdő jegy 3, 6 vagy 9 ($3k$ alakú), akkor ugyanúgy $3k$ alakú számjeggyel folytathatjuk, vagyis 3, 6, 9 vagy 0-val. Itt $3 \cdot 4^{n-1}$ eset van. 1 pont

Vagyis n jegyű szám esetén a jó számok száma: $S = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^{n-1}$. 1 pont

Erről az S számról fogjuk belátni, hogy nem végződhet 2012-re!

Ugyanis, ha egy szám 2012-re végződik, akkor osztható 4-gyel. 1 pont

De $S = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^{n-1}$ és S-ben (mint kéttagú összegben) $4 \mid 3 \cdot 4^{n-1}$, ha $n > 1$, de 3^n páratlan, emiatt $2 \cdot 3^n$ 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Így S is kettő maradékot ad 4-gyel osztva. 1 pont

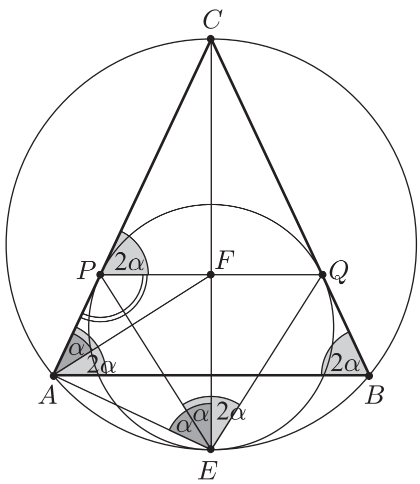
De akkor S nem osztható 4-gyel, és így nem is végződhet 2012-re. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az ABC egyenlőszárú háromszög k köréírt körét belülről, a háromszög AC és BC szárait pedig rendre a P és Q pontokban érinti a k_1 kör.

Bizonyítsuk be, hogy PQ felezőpontja az ABC háromszög beírt körének középpontja!

Megoldás.



Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért szimmetrikus CE-re.

Legyen $CAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 2\alpha$. Mivel $PQ \parallel AB$-vel, ezért $CPQ\sphericalangle = 2\alpha$. 1 pont

Mivel a $CPQ\sphericalangle = 2\alpha$ a kis kör PQ húrjához húzott külső szög, ezért a PQ húrhoz húzott $PEQ\sphericalangle$ kerületi szög 2α. 1 pont

Vizsgáljuk a PFE háromszög belső szögeit. Mivel az ABC háromszög szimmetrikus CE-re, ezért $PEF\sphericalangle = FEQ\sphericalangle = \alpha$.

CE merőleges PQ-ra, ezért $EFP\sphericalangle = 90^\circ$. Ezért a PFE háromszögben a harmadik szög $FPE\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. 1 pont

Tekintsük a PEA háromszög belső szögeit!

A P pont körül $CPF\sphericalangle + FPE\sphericalangle + EPA\sphericalangle = 180^\circ$, ezért $EPA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$.

A nagy kör AC húrjához tartozó kerületi szög 2α, ezért $AEC\sphericalangle = 2\alpha$, így pedig $AEP\sphericalangle = \alpha$.

Tehát $PAE\sphericalangle = 90^\circ$. 1 pont

Mivel a $PFEA$ négyszög szemközti szögei 180°-ra egészítik ki egymást, ezért $PFEA$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

A $PFEA$ négyszög körülírt körének PF húrjához tartozó kerületi szög $PEF\sphericalangle = \alpha$, ezért $PAF\sphericalangle = \alpha$. 1 pont

Azaz FA a $CAB\sphericalangle$ szögfelezője. Mivel CE is felezi a $ACB\sphericalangle$ szöget, ezért ezek F metszéspontja az ABC háromszög beírt körének középpontja. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az x, y, z, u valós számokra teljesül, hogy

$$4x\sqrt{4-x^2}-3y\sqrt{3-y^2}+2z\sqrt{2-z^2}-u\sqrt{1-u^2}=15.$$

Mekkora az xy^2z^2u szorzat értéke?

Megoldás.

A négyzetgyökös kifejezések csak akkor értelmezhetőek, ha $|x|\leqq 2$, $|y|\leqq\sqrt{3}$, $|z|\leqq\sqrt{2}$ és $|u|\leqq 1$. 1 pont

Mivel

$$x\sqrt{4-x^2}\leqq |x|\cdot\sqrt{4-x^2}=\sqrt{x^2(4-x^2)}\leqq\frac{x^2+4-x^2}{2}=2,$$

ezért $4x\sqrt{4-x^2}\leqq 8$ a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség alapján. 1 pont

Teljesen hasonló módon $y\sqrt{3-y^2}\leqq |y|\cdot\sqrt{3-y^2}=\sqrt{y^2(3-y^2)}\leqq\frac{3}{2}$.

Továbbá $z\cdot\sqrt{2-z^2}\leqq\sqrt{z^2(2-z^2)}\leqq 1$ és $u\sqrt{1-u^2}\leqq\frac{1}{2}$. 1 pont

A négy változóra felírt egyenlőtlenség esetén az egyenlőség csak az $|x|=\sqrt{2}$, $|y|=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $|z|=1$, $|u|=\sqrt{\frac{1}{2}}$ esetben áll fenn. 1 pont

Ekkor pedig az eredeti $15=4x\sqrt{4-x^2}-3y\sqrt{3-y^2}+2z\sqrt{2-z^2}-u\sqrt{1-u^2}$ egyenlet alapján

$$\begin{aligned}15&\leqq 4|x|\sqrt{4-x^2}+3|y|\sqrt{3-y^2}+2|z|\sqrt{2-z^2}+|u|\sqrt{1-u^2}\leqq\\&\leqq 8+3\cdot\frac{3}{2}+2\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}=15,\end{aligned}$$

ezért csak $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z=1$, $u=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ lehetséges. 2 pont

Az xy^2z^2u szorzat értéke így $\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{3}{2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

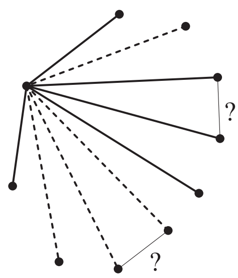
5. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az éleket pirossal vagy kékkel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű él indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket. Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is kiszínezzük.

Összesen hány háromszöget színezünk be?

Megoldás.

Jelölje x a beszínezett, y a nem beszínezett háromszögek számát.

Összesen $x + y = \dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$ háromszöget készíthetünk, ha a 30 pont mindegyikét minden ponttal összekötjük. 1 pont



Minden pontból pontosan 12 kék, és 17 piros él indul ki. Mivel azt nem tudjuk, hogy az adott pontból kiinduló két kék él milyen színű éllel van összekötve, ezért számoljuk meg, hogy adott pontból hány *lehetséges* egyszínű háromszög képezhető, azaz hány olyan pontkettes van, amelyeket azonos színnel kötöttünk össze. Ezekből $\dfrac{12 \cdot 11}{2}$ kék színű és $\dfrac{17 \cdot 16}{2}$ piros színű van.

Azaz összesen $\dfrac{12 \cdot 11}{2} + \dfrac{17 \cdot 16}{2} = 202$ egyszínű háromszög képzelhető el egy pontból kiindulva. 2 pont

Mind a harminc pontra ez összesen $30 \cdot \left(\dfrac{12 \cdot 11}{2} + \dfrac{17 \cdot 16}{2}\right) = 30 \cdot 202 = 6060$ háromszöget ad ki. 1 pont

Azok a háromszögek, amelyeknek minden oldala egyszínű, azokat ebben az összegben háromszor számoltuk meg, a nem egyszínű háromszögeket pedig egyszer. Azaz $3x + y = 6060$. 1 pont

Az $x + y = 4060$ és $3x + y = 6060$ egyenletrendszert x-re megoldva kapjuk, hogy $x = 1000$ olyan háromszög van, amit beszíneztünk. 1 pont

Létezik a feltételeknek megfelelő színezés. Például számozzuk be a pontokat 1-től 30-ig. A feltételnek megfelelő színezést kapunk, ha minden i. sorszámú pontot összekötünk kék színnel az $i-6$, $i-5$, $i-4$, $i-3$, $i-2$, $i-1$, $i+1$, $i+2$, $i+3$, $i+4$, $i+5$, $i+6$ (mod 30) sorszámú ponttal, a többi pontot pedig piros színnel kötjük össze. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy ha az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója AC, C merőleges vetülete AB-n E, AD-n F, akkor

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

Igaz-e az állítás az $AC < BD$ esetben?

2. Eszter naponta legalább egyszer bejelentkezik a Facebook-ra; de hogy ne vigye túlzásba, egy héten 12-nél többször sosem jelentkezik be. Mutassuk meg, hogy ki lehet választani néhány olyan egymás után következő napot, amelyek során összesen pontosan 20-szor jelentkezik be.

3. Két pozitív szám szorzata megegyezik az összegükkel. Mindkét szám olyan véges tizedestört, amely a tizedesvessző után két számjegyet tartalmaz úgy, hogy az utolsó számjegy 0-tól különböző. Melyik ez a két szám?

Az eredményhirdetést 2012. május 25-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

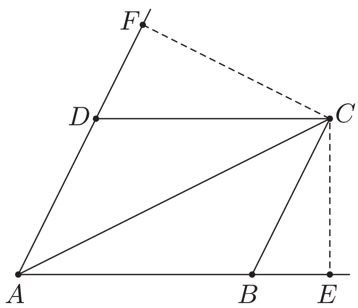
Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsa be, hogy ha az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója AC, C merőleges vetülete AB-n E, AD-n F, akkor

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

Igaz-e az állítás az $AC < BD$ esetben?

Megoldás.



A BEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

Ezt felhasználva és az AEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = \\ &= AE^2 + BC^2 - (AE - AB)^2 = \\ &= AE^2 + BC^2 - AE^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2. \end{aligned}$$

Tehát

(1) $$AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$ 1 pont

A DFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$DC^2 = DF^2 + CF^2.$$

Ezt felhasználva és az AFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AF^2 + CF^2 = AF^2 + DC^2 - DF^2 = AF^2 + DC^2 - (AF - AD)^2 = \\ &= AF^2 + DC^2 - AF^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2. \end{aligned}$$

Tehát

(2) $$AC^2 = DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$ 1 pont

(1)-et és (2)-t összeadva

$$2 \cdot AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Felhasználva, hogy $AB = DC$ és $BC = AD$,

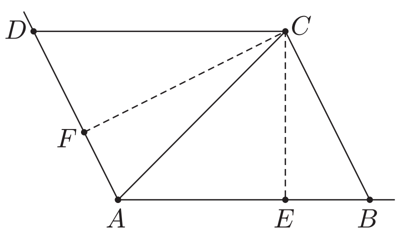
$$2 \cdot AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AE + 2 \cdot AD \cdot AF,$$

amiből

$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF.$$ 1 pont

Ha $AC < BD$, akkor két lehetőség van.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $AB > AD$. Ekkor E az AB oldal belső pontja.



1. eset: Ha F az AD oldal belső pontja.

A BEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

Ezt felhasználva és az AEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = AE^2 + BC^2 - (AB - AE)^2 =$$
$$= AE^2 + BC^2 - AE^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

Tehát

(1) $$AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

A DFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$DC^2 = DF^2 + CF^2.$$

Ezt felhasználva és az AFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + DC^2 - DF^2 = AF^2 + DC^2 - (AD - AF)^2 =$$
$$= AF^2 + DC^2 - AF^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Tehát

(2) $$AC^2 = DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$ 1 pont

(1)-et és (2)-t összeadva:

$$2 \cdot AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

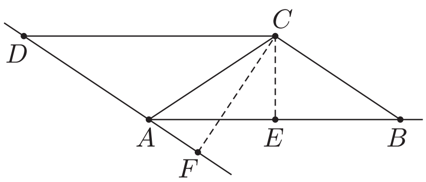
Felhasználva, hogy $AB = DC$ és $BC = AD$:

$$2 \cdot AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AE + 2 \cdot AD \cdot AF,$$

amiből

$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF.$$

Tehát ebben az esetben az állítás igaz. 1 pont



2. eset: Ha F az AD oldal külső pontja.

A BEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

Ezt felhasználva és az AEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = AE^2 + BC^2 - (AB - AE)^2 =$$
$$= AE^2 + BC^2 - AE^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

Tehát

(1) $$AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

A DFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$DC^2 = DF^2 + CF^2.$$

Ezt felhasználva és az AFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + DC^2 - DF^2 = AF^2 + DC^2 - (AD + AF)^2 =$$
$$= AF^2 + DC^2 - AF^2 - 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Tehát

(2) $$AC^2 = DC^2 - 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$ 1 pont

(1)-et és (2)-t összeadva:

$$2 \cdot AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Felhasználva, hogy $AB = DC$ és $BC = AD$:

$$2 \cdot AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AE - 2 \cdot AD \cdot AF,$$

amiből

$$AC^2 = AB \cdot AE - AD \cdot AF.$$

Tehát ebben az esetben az állítás nem igaz. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Eszter naponta legalább egyszer bejelentkezik a Facebook-ra; de hogy ne vigye túlzásba, egy héten 12-nél többször sosem jelentkezik be. Mutassuk meg, hogy ki lehet választani néhány olyan egymás után következő napot, amelyek során összesen pontosan 20-szor jelentkezik be.

Megoldás. Tegyük fel, hogy Eszter az egyik hétfőn a_1-szer, hétfőn és kedden a_2-ször, hétfőn, kedden és szerdán a_3-szor és így tovább, k hét után, azaz $7k$ nap alatt összesen a_{7k}-szor jelentkezett be a Facebook-ra. 1 pont

Tekintsük az $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{7k}, a_1 + 20, a_2 + 20, \ldots, a_{7k} + 20\}$ számhalmazt. Az a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{7k} számok között nincs két egyenlő, mivel mindennap legalább egyszer bejelentkezik, és így hasonlóképp, az $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $\ldots$, $a_{7k} + 20$ számok között sem lehetnek egyenlőek. 2 pont

Összesen 2-szer $7k$ napunk, azaz $14k$ napunk van, amelyek közül egyik sem nagyobb, mint $12k + 20$, mert Eszter egyik héten sem jelentkezik be 12-nél többször. 1 pont

Ha $14k$ meghaladja $12k + 20$-at, akkor lesz legalább két egyenlő számunk az A halmazban, és a fentiek alapján létezik olyan m és n érték, hogy $a_m = a_n + 20$, és ez azt jelenti, hogy $a_m - a_n = 20$, azaz hogy $m - n$ nap alatt, az $n + 1$-től az m-edikig bezárólag Eszter 20-szor jelentkezett be a Facebook-ra. 2 pont

A $14k > 12k + 20$ egyenlőtlenség megoldása, $k > 10$, ami azt jelenti, hogy ha legalább 11 hétig vizsgálódunk, biztosan lesznek olyan egymást követő napok, amelyeken Eszter összesen pontosan 20-szor jelentkezik be a Facebook-ra. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Teljes értékű az a megoldás is, amikor a fenti konstrukciót rögtön 11 (vagy több) hétre készíti el a versenyző.

3. Két pozitív szám szorzata megegyezik az összegükkel. Mindkét szám olyan véges tizedestört, amely a tizedesvessző után két számjegyet tartalmaz úgy, hogy az utolsó számjegy 0-tól különböző. Melyik ez a két szám?

Megoldás. Legyen a keresett két szám a és b, ahol $0 < a \leqq b$.

Az $ab = a + b$ feltétel alapján $b(a - 1) = a$, ahonnan $a > 1$ következik. 1 pont

A $b = \dfrac{a}{a-1} \geqq a$ feltétel alapján pedig $a \leqq 2$ adódik. A feladat feltételei alapján így az a szám egészrésze 1. 1 pont

Az eddigiek alapján $a = 1 + m_1$, $b = k + m_2$ alakú, ahol $m_1 = \dfrac{10x + y}{100}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $m_2 = \dfrac{10z + u}{100}$, x, y, z, u pedig számjegyek.

Mivel $(1 + m_1)(k + m_2) = 1 + m_1 + k + m_2$, ezért

$$k + m_2 + km_1 + m_1 m_2 = 1 + m_1 + k + m_2, \quad \text{azaz} \quad (k - 1)m_1 = 1 - m_1 \cdot m_2,$$

így pedig $k - 1 + m_2 = \dfrac{1}{m_1}$.

Jelöléseink alapján ekkor $100(k - 1) + 10z + u = \dfrac{100^2}{10x + y}$. 2 pont

A bal oldal pozitív egész szám, ezért $(10x + y)$ osztója $100^2 = 2^4 \cdot 5^4$-nek.

$1 \leqq 10x + y < 100$ és $y \neq 0$, így $10x + y$ lehetséges értékei: 1, 2, 4, 5, 8, 16, 25 lehet csak. 1 pont

A felsorolt értékek közül egyedül a 16 felel meg a feltételeknek. 1 pont

Ekkor $a = 1{,}16$, így $b = \dfrac{a}{a - 1}$ alapján $b = 7{,}25$.

Az $a = 1{,}16$, $b = 7{,}25$ számok valóban megfelelnek a feladat feltételeinek, hiszen $1{,}16 \cdot 7{,}25 = 1{,}16 + 7{,}25 = 8{,}41$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

**Bolyai János
Matematikai Társulat**

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Feladatok

1. Keressük meg az összes olyan kilencjegyű pozitív egész számot, melyben minden számjegy 1-től 9-ig csak egyszer szerepel, és az első, i darab számjegyből képzett i jegyű szám osztható i-vel $(i = 1, \dots, 9)$!

2. Az ABC háromszögben $\alpha = 2\beta = 4\gamma$. A belső szögfelezők az a, b és c oldalt rendre a D, E és F pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $DE = DF$!

3. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az

$a)$ $x^2 - y^2 = 2012^{2011}$,

$b)$ $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$

egyenletet?

Az eredményhirdetést 2012. május 25-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Keressük meg az összes olyan kilencjegyű pozitív egész számot, melyben minden számjegy 1-től 9-ig csak egyszer szerepel, és az első, i darab számjegyből képzett i jegyű szám osztható i-vel $(i = 1, \dots, 9)$!

Megoldás. Jelöljük a számunkat az $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$-cel.

Az öttel oszthatóság miatt $a_5 = 5$. 1 pont

A páros sorszámú helyen lévő számok a_2, a_4, a_6, a_8 szükségszerűen párosak, így a páratlan sorszámú helyeken lévő számok páratlanok lesznek.

Az $a_1a_2a_3a_4$ néggyel osztható. A néggyel való oszthatósági szabályok szerint elég az utolsó két jegyet nézni. De mivel a_3 páratlan, így $a_4 = 2$ vagy $a_4 = 6$ lehet csak.

Hasonlóan a nyolccal való oszthatóságot vizsgálva kapjuk, hogy $a_6a_7a_8$ nyolccal osztható. De mivel a_6 páros, ezért elég az a_7a_8-nak nyolccal oszthatónak lennie. Mivel a_7 páratlan, ezért $a_8 = 2$ (ha $a_7 = 3$ v. 7) vagy $a_8 = 6$ (ha $a_7 = 1$ v. 5 v. 9) lehet.

Így a_2 és a_6 csak 4 vagy 8 lehet. 2 pont

$a_1a_2a_3$ hármommal, $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ hattal osztható, ezért $a_4a_5a_6$ is osztható hárommal.

Amennyiben $a_2 = 4$, akkor $a_6 = 8$, a_1 és a_3 1 és 7 lehet, $a_4 = 2$, így $a_6 = 8$, $a_8 = 6$, $a_7 = 3$ vagy 9.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	**4**	7	**2**	**5**	**8**	3	6	9
7	**4**	1	**2**	**5**	**8**	3	6	9
1	**4**	7	**2**	**5**	**8**	9	6	3
7	**4**	1	**2**	**5**	**8**	9	6	3

De az első két eset nem lehet, mert ha $a_7 = 3$, akkor a_8 csak 2 lehet.

A második két esetben az első 7 számjegyből alkotott szám nem osztható 7-tel. 2 pont

Ha $a_2 = 8$, akkor $a_6 = 4$, ekkor $a_4 = 6$, $a_8 = 2$. Így $a_7 = 3$ vagy 7 lehet. a_1 és a_3 pedig 1 vagy 3, 9 vagy 1, 7 vagy 9, 7 vagy 3. 1 pont

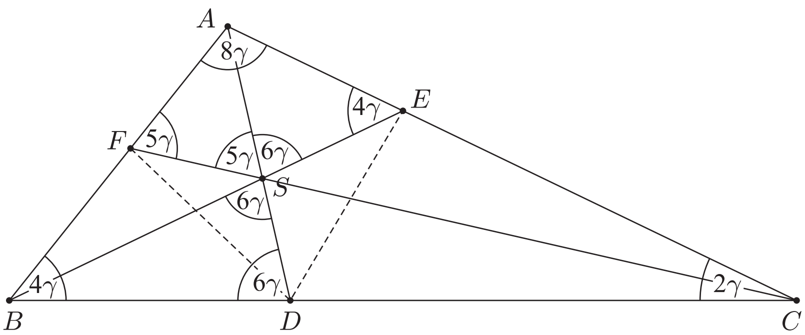
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	**8**	9	**6**	**5**	**4**	3	**2**	7
9	**8**	1	**6**	**5**	**4**	3	**2**	7
7	**8**	9	**6**	**5**	**4**	3	**2**	1
9	**8**	7	**6**	**5**	**4**	3	**2**	1
1	**8**	3	**6**	**5**	**4**	7	**2**	9
3	***8***	*1*	***6***	***5***	***4***	*7*	***2***	*9*
1	**8**	9	**6**	**5**	**4**	7	**2**	3
9	**8**	1	**6**	**5**	**4**	7	**2**	3

A fenti számok első 7 számjegyeiből alkotott számokat héttel osztva csak a 381 654 729 osztható 7-tel is, így az egyetlen szám, amire az állítás feltételei teljesülnek, az a 381 654 729. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ABC háromszögben $\alpha = 2\beta = 4\gamma$. A belső szögfelezők az a, b és c oldalt rendre a D, E és F pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $DE = DF$!

Megoldás.



Legyen S az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontja. Jelöljük az ABC háromszög szögeit $ACB\sphericalangle = 2\gamma$, $CBA\sphericalangle = 4\gamma$, $BAC\sphericalangle = 8\gamma$-val. Ekkor mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért tudjuk, hogy $14\gamma = 180^\circ$. Ezt felhasználva az ABE háromszögből $AEB\sphericalangle = 4\gamma$, $ASE\sphericalangle = BSD\sphericalangle = 6\gamma$, $AFS\sphericalangle = 5\gamma = ASF\sphericalangle$. 1 pont

Legyen $AS = x$ és $SD = y$. ASF és ASE háromszögek egyenlőszárúak, mert van két azonos szögük, így $AF = AS = SE = x$.

BAD és BSD háromszögek is egyenlőszárúak, ezért $AD = x + y = BD = BS$. 1 pont

BAD háromszögre felírjuk a szögfelező tételt: $\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{DB}{DS}$. 1 pont

$$BF = AB - AF = \left(\frac{DB}{DS} - \frac{AF}{AS}\right) \cdot AS = \left(\frac{x+y}{y} - x\right) \cdot x = \frac{x^2}{y}.$$ 1 pont

ABE háromszögben a szögfelező tétel $\dfrac{EA}{ES} = \dfrac{BA}{BS}$. Ebből

$$EA = \frac{BA}{BS} \cdot ES = \left(\frac{AF + FB}{BS}\right) \cdot ES = \frac{x + \dfrac{x^2}{y}}{x + y} \cdot x = \frac{x^2}{y}. \qquad \text{2 pont}$$

Azaz EAD és FBD háromszögek egybevágóak, mivel két oldaluk: $BD = AD = x + y$, $BF = EA$ és a közbezárt szögük megegyezik. Így $DE = DF$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az

$a)$ $x^2 - y^2 = 2012^{2011}$,

$b)$ $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$

egyenletet?

Megoldás. $a)$ $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ és $2012^{2011} = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$, ahol 503 prímszám.

2012^{2011} összes pozitív osztójának száma $4023 \cdot 2012$, ezért pontosan ugyanennyi osztópárja van 2012^{2011}-nek.

Az $x - y$ és $x + y$ kifejezés egész számok esetén azonos paritású, ezért az osztópárok tagjai között nem lehet páratlan szám. 1 pont

2012^{2011} páratlan osztói: 1, 503, 503^2, 503^3, $\ldots$, 503^{2011}, azaz 2012 darab páratlan osztó van.

A 2012^{2011} páratlan számot tartalmazó osztópárjainak száma tehát $2 \cdot 2012$.

Mivel $x - y < x + y$, ezért az $(x - y; x + y)$ megfelelő osztópárok száma

$$\frac{4023 \cdot 2012 - 2 \cdot 2012}{2} = \frac{4021 \cdot 2012}{2} = 4021 \cdot 1006 = 4\,045\,126. \qquad \text{1 pont}$$

Nyilvánvaló, hogy mind a 4 045 126 darab megoldás meg is felel a feladat feltételeinek. 1 pont

$b)$ Ha $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$, akkor x és y is csak páros szám lehet.

Ennek megfelelően legyen $x = 2^s \cdot x_1$, $y = 2^t \cdot y_1$, ahol $1 \leqq s \leqq t$, $s, t \in \mathbb{Z}^+$ és x_1, y_1 páratlan szám.

Egyenletünk alapján $2^{2s} \cdot x_1^2 + 2^{2t} \cdot y_1^2 = 2012^{2011} = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$.

Ha $s = t$, akkor $2^{2s}\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$.

Mivel $x_1^2 + y_1^2$ két páratlan szám négyzetének összege, ezért az összeg $4k + 2$ alakú, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Mivel $4k + 2 = 2(2k + 1)$, ahol $2k + 1$ páratlan szám, ezért a bal oldal 2-nek páratlan kitevőjű (maximális) hatványával osztható ($2s + 1$ a kitevő), a jobb oldal pedig 2-nek páros kitevőjű hatványával osztható (4022 a kitevő). Ez pedig lehetetlen, tehát nincs megoldás. 2 pont

Ha $s < t$, akkor $2^{2s} \cdot x_1^2 + 2^{2t} \cdot y_1^2 = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$ alapján

$$2^{2s}\left(x_1^2 + 4^{t-s} \cdot y_1^2\right) = 2^{4022} \cdot 503^{2011}.$$

A zárójeles kifejezés értéke páratlan szám, mert $t > s$. Ekkor pedig csak $s = 2011$ lehet.

Így viszont $x_1^2 + 4^{t-s} \cdot y_1^2 = 503^{2011}$.

Az x_1 szám páratlan, ezért az utóbbi egyenlőség bal oldalának 4-es maradéka 1. Viszont 503^{2011} 4-es maradéka $(-1)^{2011} = -1$, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben sincs megoldás. 1 pont

Tehát az $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$ egyenletnek nincs gyöke a pozitív egész számok körében. 1 pont

Összesen: 7 pont

Bolyai János
Matematikai Társulat

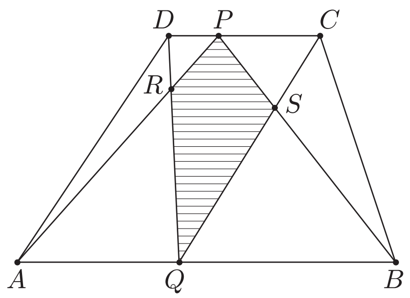
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[8048]{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 4023! \cdot (1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2012!)^4} < 2012!$$

2. Van 2012 darab (nem feltétlenül különböző) pozitív számunk: $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$, melyek összege $2S$. A k természetes számot *felezőnek* nevezzük, ha az a_i számok közül kiválasztható k, amelyek összege éppen S. Legfeljebb hány különböző k természetes szám lehet *felező?*



1. ábra

3. Egy $ABCD$ trapéz CD alapján adott egy P belső pont (lásd 1. ábra!).

Hogyan válasszuk meg a másik AB alap Q belső pontját, ha azt szeretnénk, hogy a $PRQS$ négyszög területe a lehető legnagyobb legyen?

(R az AP és a DQ szakaszok metszéspontja, míg S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja).

Az eredményhirdetést 2012. május 25-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[8048]{1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 4023!\cdot (1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4} < 2012!$$

Megoldás. Emeljük mindkét oldalt 8048-adik hatványra, majd osszunk le $(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4$ kifejezéssel:

$$1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 4023! < \frac{2012!^{8048}}{(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4}$$

Az átalakítás ekvivalens, mivel minden kifejezés pozitív. 1 pont

Az egyenlőtlenség jobb oldalán vizsgáljuk 2, 3, …, 2012 hatványkitevőjét:

$$\frac{2012!^{8048}}{(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4} = \frac{(2)^{8048}}{\left((2)^{2011}\right)^4}\cdot \frac{(3)^{8048}}{\left((3)^{2010}\right)^4}\cdot \ldots \cdot \frac{(2012)^{8048}}{(2012)^4} = 2^4\cdot 3^8\cdot \ldots \cdot 2012^{8044}.$$ 2 pont

A bal oldalon lévő $1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 4023!$ szorzat tényezőit csoportosítsuk kettesével, és tekintsük a $(2k)!\cdot(2k+1)!$ kifejezéseket ($k = 1, 2, \ldots, 2011$):

$$(2k)!\cdot(2k+1)! =$$

$$= \left[2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k)\right]\cdot\left[1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k)\cdot(2k+1)\right].$$

Az első szögletes zárójelben lévő szorzatban 2 és $2k$, 3 és $(2k-1)$, …, k és $(k+2)$ párokra alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti összefüggést:

$$\overbrace{2\cdot \underbrace{3\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k-1)}\cdot 2k} <$$

$$< \left(\frac{2+2k}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3+(2k-1)}{2}\right)^2\cdot \ldots \cdot\left(\frac{k+(k+2)}{2}\right)^2\cdot(k+1) = (k+1)^{2k-1}.$$

A második szögletes zárójelben lévő kifejezésre hasonlóan adódik, hogy:

$$\overbrace{1\cdot \underbrace{2\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k)}\cdot(2k+1)} <$$

$$< \left(\frac{1+(2k+1)}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2+2k}{2}\right)^2\cdot \ldots \cdot\left(\frac{k+(k+2)}{2}\right)^2\cdot(k+1) = (k+1)^{2k+1}.$$ 2 pont

Ez alapján $(2k)! \cdot (2k+1)! < (k+1)^{4k}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2011)$. 1 pont

Így a bal oldalra adott felső becslés $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 4023! < 2^4 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 2012^{8044}$.

Mivel $2^4 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 2012^{8044}$ éppen a jobb oldal értéke, az egyenlőtlenséget bebizonyítottuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Van 2012 darab (nem feltétlenül különböző) pozitív számunk: $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$, melyek összege $2S$. A k természetes számot *felezőnek* nevezzük, ha az a_i számok közül kiválasztható k, amelyek összege éppen S. Legfeljebb hány különböző k természetes szám lehet *felező?*

Megoldás. x és $2012 - x$ egyszerre felező, hiszen ha néhány szám összege S, akkor a maradéké is. 1 pont

Ha 1 (és így 2011) felező, akkor más már nem lehet az, hiszen ha 1 felező, akkor az egyik szám S, így rajta kívül csak úgy jöhet ki az S összeg, ha az összes többi számot felhasználjuk. 1 pont

Most megmutatjuk, hogy megadhatók az $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ számok úgy, hogy a $\{2, 3, \ldots, 2010\}$ halmaz minden eleme felező. Az előző észrevétellel együtt ebből következik, hogy legfeljebb 2009 különböző felező k lehetséges. 1 pont

Megadunk 2012 megfelelő számot:

$$\left\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \ldots, 2^{1004}, 2^{1004}\right\}.$$ 1 pont

A számok összege

$$2S = 2 + 2 \cdot \left(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{1004}\right) = 2 + 2 \cdot \left(2^{1005} - 1\right) = 2^{1006},$$

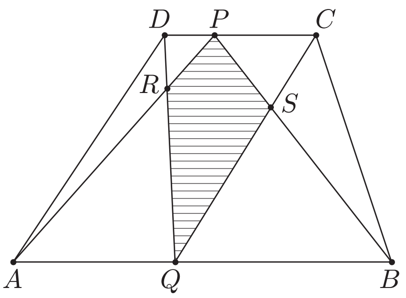
vagyis $S = 2^{1005}$. 1 pont

Az alábbiakból látható, hogy $k = 2, 3, 4, 5, \ldots, 1006$ felező.

$k = 2$: $S = 2^{1004} + 2^{1004}$
$k = 3$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1003}$
$k = 4$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1002}$
$k = 5$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1001} + 2^{1001}$
...
$k = 1006$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1001} + \cdots + 2 + 1 + 1$. 1 pont

A $k = 1007, 1008, \ldots, 2010$ értékekre pedig már nem kell konstrukciót adnunk, hiszen ha x felező, akkor $N - x$ is. 1 pont

Összesen: 7 pont



1. ábra

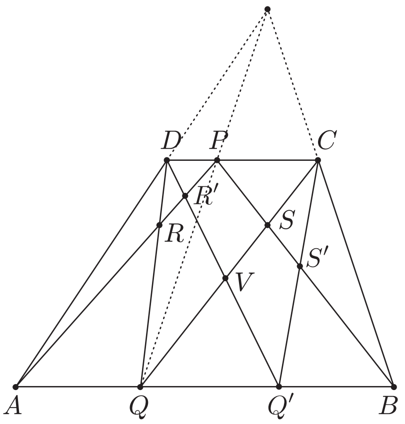
3. Egy $ABCD$ trapéz CD alapján adott egy P belső pont (lásd 1. ábra!).

Hogyan válasszuk meg a másik AB alap Q belső pontját, ha azt szeretnénk, hogy a $PRQS$ négyszög területe a lehető legnagyobb legyen?

(R az AP és a DQ szakaszok metszéspontja, míg S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja).

I. megoldás. A következő sejtést fogjuk igazolni:

A $PRQS$ négyszög területe pontosan akkor maximális, ha $\dfrac{DP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB}$ *(, és persze Q A és B között van).*



2. ábra

Bizonyítás: Vegyük fel Q-t a sejtésnek megfelelően, és vegyünk fel egy ettől különböző tetszőleges Q' pontot is az AB oldalon! (Q'-t úgy vesszük fel, hogy Q és B közrefogja, ha Q'-t A és Q fogná közre, a bizonyítás teljesen ugyanígy menne.)

Azt fogjuk belátni, hogy akárhogy is vettük fel a Q' pontot a kialakuló $PRQS$ négyszög területe nagyobb, mint a $PR'Q'S'$ négyszögé. 1 pont

(Ahol: R az AP és a DQ szakaszok metszéspontja, S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja, míg R' az AP és a DQ' szakaszok metszéspontja, S' a BP és a CQ' szakaszok metszéspontja, illetve még egy fontos pontunk lesz: V a DQ' és a CQ metszéspontja) Lásd 2. ábra!

Vagyis igazolandó: $T(PRQS) > T(PR'Q'S')$. („=" pontosan akkor lenne, ha $Q = Q'$.)

(A következők során többször fogunk valamely vizsgálandó sokszöget több kisebb sokszögre darabolni, illetve az egyenlőtlenség két oldalán ugyanazt a területet elhagyni.)

$PRQS$-t, illetve $PR'Q'S'$-t feldarabolva igazolandó:

$$T(PR'VS) + T(R'RQV) > T(PR'VS) + T(SVQS').$$

Ez pontosan akkor igaz, ha $T(R'RQV) > T(SVQS')$.

Az utóbbi egyenlőtlenségben szereplő négyszögek részei a közös alapú, és magasságú (így közös területű) $QQ'D$, illetve $QQ'C$ háromszögeknek, így a következő igazolandó:

$$T(QQ'D) - T(QQ'V) - T(RR'D) \geqq T(QQ'C) - T(QQ'V) - T(SS'C).$$

Elhagyva két oldalon a közös területeket: $-T(RR'D) > -T(SS'C)$, vagyis az igazolandó állításunk

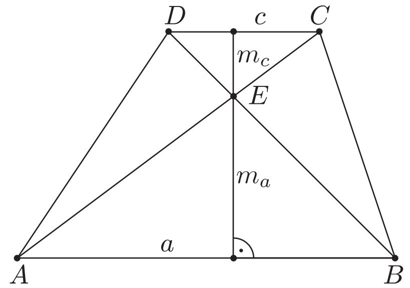
$$T(SS'C) > T(RR'D).$$ 1 pont

Ez utóbbi állítás igazolásához a következő segédtételt fogjuk igazolni:

Lemma: *Ha az $ABCD$ trapéz CD alapján P-t, illetve AB alapján Q-t úgy vesszük fel, hogy $\dfrac{DP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB}$ teljesüljön, akkor RS párhuzamos lesz az alapokkal.* 1 pont

(R az AP és DQ szakaszok metszéspontja, míg S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja).

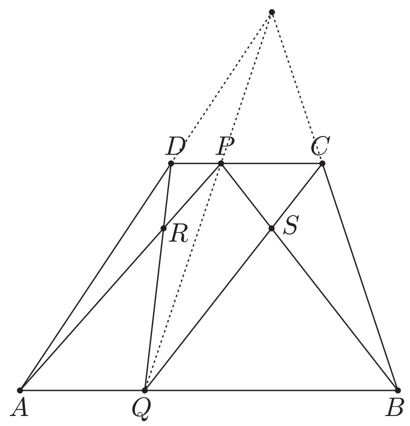
Lemma bizonyítása: Tekintsük a következő ábrát, és használjuk a jelöléseit!



3. ábra

Az ABE és a CDE háromszögek hasonlóak (megfelelő szögeik megegyeznek), a hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{a}{c}$, így a két háromszögben lévő megfelelő szakaszok aránya is ez, vagyis $\lambda = \dfrac{a}{c} = \dfrac{m_a}{m_c}$, innen (ha a trapéz magasságát m-mel jelöljük) $m_a = m \cdot \dfrac{a}{a+c}$, ami megegyezik az E pont és az AB alap távolságával.

Most nézzük a lemmában szereplő pontok esetén a trapézunkat:



4. ábra

A PQ szakasszal az eredeti $ABCD$ trapéz két trapézra bontható. Nevezzük most az AQ szakaszt a-nak, míg a DP szakaszt c-nek.

Ekkor a fentiek szerint R távolsága az AB alaptól: $m_a = m \cdot \dfrac{a}{a+c}$.

$\dfrac{DP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB}$ miatt valamely pozitív μ-re $QB = \mu \cdot a$, és $PC = \mu \cdot b$.

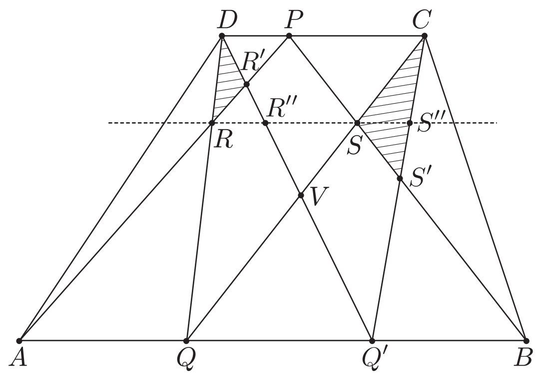
De akkor a QBS háromszög QB-hez tartozó magassága (, vagyis az S pont távolsága az AB alaptól):

$$m_{\mu\cdot a} = m \cdot \frac{\mu \cdot a}{\mu \cdot a + \mu \cdot c} = m \cdot \frac{a}{a+c}.$$

Vagyis az R és az S pont azonos távolságra van az AB alaptól, ahogy azt a lemmában igazolni szerettük volna. 1 pont

Most térjünk vissza az igazolandó $T(SS'C) > T(RR'D)$ állításhoz!

Tekintsük az 5. ábrát! Ez csak abban különbözik a 2. ábrától, hogy berajzoltuk az RS egyenesét, és ezen egyenes metszéspontjait $Q'D$-vel, illetve $Q'C$-vel elneveztük R''-nek, illetve S''-nek.



5. ábra

R'' és D közrefogja R'-t (vagyis R' közelebb van a DC alaphoz, mint R''), míg S' és C közrefogja S''-t (vagyis S' közelebb van az AB alaphoz, mint S''), mert a Q' pontot úgy vettük fel, hogy Q és B közrefogja Q'-t. 1 pont

Így $T(SS'C) = T(SS''C) + T(SS'S'')$, míg $T(RR'D) = T(RR''D) - T(RR''R')$.

Valamint $RR''D$ hasonló $QQ'D$-hez, míg $SS''C$ hasonló a $QQ'D$-vel azonos területű $QQ'C$-hez; és mindkét esetben a hasonlóság aránya azonos (hiszen a fent bizonyított lemma miatt R és R'', illetve S és S'' távolsága az AB alaptól azonos), vagyis

$$T(RR''D) = T(SS''C).$$ 1 pont

Innen következik a bizonyítandó $T(SS'C) > T(RR'D)$ állítás, mert

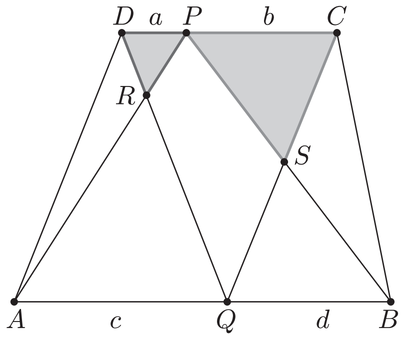
$$T(SS'C) = T(SS''C) + T(SS'S'') >$$
$$> T(SS''C) = T(RR''D) > T(RR''D) - T(RR''R') = T(RR'D).$$ 1 pont

Ezzel igazoltuk, hogy a $PRQS$ négyszög területe pontosan akkor maximális, ha

$$\frac{DP}{PC} = \frac{AQ}{QB}.$$

Összesen: 7 pont

II. megoldás. (*Homonnay Bálint* dolgozata alapján.)



6. ábra

Az *ábra* jelöléseit használjuk.

A DCQ háromszög területe nem függ Q helyzetétől, hiszen DC és a DC-hez tartozó magasság nem változik. Emiatt T_{RQSP} akkor lesz maximális, ha a DRP és PSC háromszögek területének összege minimális. Az előző megoldásban használt hasonlóságok alapján

$$T_{DRP} + T_{PSC} = \frac{a \cdot \dfrac{m \cdot a}{a+c}}{2} + \frac{b \cdot \dfrac{m \cdot b}{b+d}}{2} = $$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+d} \right),$$

ahol m a trapéz magassága, tehát állandó.

A zárójelben lévő kifejezés minimumát a *Titu-lemma* segítségével adjuk meg.

Titu-lemma. *Ha x és y pozitív, akkor*

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqq \frac{(a+b)^2}{x+y},$$

és egyenlőség csak $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ esetben teljesül.

A lemmát beszorzással és teljes négyzetté alakítással könnyen igazolhatjuk, vagy észrevehetjük, hogy a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség speciális esete az $\left(a/\sqrt{x}, b/\sqrt{y}\right)$ és $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}\right)$ számpárokra.

Visszatérve a feladatra:

$$\frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+d} \geqq \frac{(a+b)^2}{a+c+b+d}.$$

A jobb oldal állandó (a nevezőben a két alap hosszának összege jelent meg), és $a/c = b/d$ esetén meg is kapható ez az érték.

Tehát a vizsgált négyszög területe akkor maximális, ha $DP/AQ = PC/QB$.