A 2014. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

október 22.—november 3.

1. Legyen n pozitív egész. Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan halmazrendszer, amely egy n elemű X halmaz összes részhalmazának több, mint a felét tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}$-ből mindig kiválasztható $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ halmaz úgy, hogy ezek együtt szeparálják X elemeit, vagyis X bármely két különböző eleméhez van olyan kiválasztott halmaz, amely a kettő közül pontosan egyet tartalmaz.

2. Legyen $k \geq 1$ és legyenek $I_1, \ldots, I_k$ a $[0,1]$ intervallum el nem fajuló részintervallumai. Bizonyítsuk, hogy
$$\sum \frac{1}{|I_i \cup I_j|} \geq k^2,$$
ahol az összegzés az olyan (i,j) indexpárokra vonatkozik, ahol I_i és I_j nem diszjunkt.

3. A sík $4n+5$, hármanként nem kollineáris pontját két színnel kiszínezzük. Igazoljuk, hogy lesz n üres (azaz, belsejében színes pontot nem tartalmazó) háromszög, amelyeknek a belseje páronként diszjunkt és amelyeknek az összes csúcsa mind egyszínű.

4. Legyen n pozitív egész számhoz $f(n)$ azon $a_1, \ldots, a_k$ pozitív egészekből álló számsorozatok száma, amelyekre $a_i \geq 2$ és $a_1 \ldots a_k = n$, $k \geq 0$ tetszőleges. ($f(1)=1$.) Legyen α az az egyetlen 1-nél nagyobb valós szám, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = 2$. Lássuk be, hogy

   (a)
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = O(n^{\alpha})$$
   és

   (b) nincs olyan $\beta < \alpha$ szám, amelyre $f(n) = O(n^{\beta})$ teljesül.

5. Legyen α nem tisztán valós, másodfokú algebrai egész, és legyen P a $\mathbb{Z}[\alpha]$ gyűrű irreducibilis elemeinek halmaza. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{p \in P} \frac{1}{|p|^2} = \infty.$$

6. Legyen $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ a G véges p-csoport egy reprezentációja egy p karakterisztikájú test felett. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{g \in G} \rho(g)$ lineáris leképezésnek a V egy véges dimenziós W alterére való megszorítása injektív, akkor a $\rho(g)W$ $(g \in G)$ alterek által kifeszített altér ezen altereknek direkt összege.

7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges. Igaz-e, hogy ha f grafikonjának és g grafikonjának a Minkowski-összege (azaz az
$$\{(x+y, f(x)+g(y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
halmaz) nulla Lebesgue-mértékű, akkor az f függvény $f(x) = ax + b$ alakú alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ konstansokkal?

8. Legyen $n \geq 1$ rögzített egész. Számítsuk ki az

$$\inf_{p,f} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)|$$

távolságot, ahol p az n-nél alacsonyabb fokú valós együtthatós polinomokon, f pedig a $[0,1]$ zárt intervallumon értelmezett,

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k$$

alakú függvényeken fut végig, ahol $c_k \geq 0$ és $\sum_{k=n}^{\infty} c_k = 1$.

9. Legyen $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho(\mathbf{x}) = e^{-||\mathbf{x}||^2}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ egy konvex test, azaz egy kompakt, nem üres belsejű konvex halmaz. Definiáljuk a K test ρ súlyfüggvényre vonatkozó $\mathbf{s}_K$ súlypontját a szokásos

$$\mathbf{s}_K = \frac{\int_K \rho(\mathbf{x})\mathbf{x} d\mathbf{x}}{\int_K \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

képlettel. Bizonyítsuk be, hogy a K test eltoltjainak páronként különböző a ρ súlyfüggvényre vonatkozó súlypontjuk.

10. A kétdimenziós gömbfelület egy triangulációjának minden csúcsához rendeljük hozzá a sík egy konvex részhalmazát úgy, hogy minden háromszöglap három csúcsához rendelt három konvex halmaznak legyen közös pontja. Mutassuk meg, hogy van négy olyan csúcs, amelyekhez rendelt konvex halmazoknak van közös pontjuk.

11. Legyen U a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és legyen

$$S_n = 2 \sum_{k=1}^{n} \sin(2kU\pi).$$

Mutassuk meg, hogy $n \to \infty$ esetén S_n határeloszlása az $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sűrűségfüggvényű Cauchy-eloszlás.

A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, feladatonként külön papírra írva 2014. november 3-án 12.00 óráig a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatánál, vagy az ELTE TTK Matematikai Intézet titkárságán (1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/C., 3. emelet, 510. szoba) kell benyújtani, vagy ugyanezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére: Frenkel Péter, ELTE TTK Mat. Intézet, Algebra és Számelmélet Tanszék, 1117 Budapest, Pázmány P. stny. 1/C., vagy elektronikusan, PDF formátumban a `frenkelp265@gmail.com` címre. Minden lapon szerepeljen a versenyző neve, és az egyik lapon az évfolyama, végzettsége, lakcíme és e-mail címe is.

A megoldásokat november 4-én 16 órakor az ELTE Déli tömb 2-712 termében megbeszéljük. A verseny eredményhirdetése december 17-én 14 órakor a Rényi Intézet Nagytermében lesz (1053 Bp., Reáltanoda utca 13-15.). Mindenkit szívesen látunk!

További információ a `bolyai.hu/schweitzer.htm` oldalon található.