

Bertalan Zoltán vagyok, az idén is részt vettem a Rátz László vándorgyűlésen, amelyen sok érdekes előadáson vehettem részt. Az ideai előadások közül Szoldatits József tanár úr ismeretlenek egész részét tartalmazó egyenletekről szóló előadását választottam, amellyel kapcsolatban írom a dolgozatomat. Ebben a dolgozatban olyan problémákat választottam, amelyeknek megoldásához olyan diofantoszi egyenleteket kell megoldani, amelyben az ismeretlenek értéke 0 vagy 1 lehet csak.

SUDUKU

Egy 9x9-es táblázat fel van osztva 9 db 3x3-as kisebb táblázatra. Ennek a táblázatnak minden celláját kell kitölteni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekkel úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

- A 9x9-es táblázat minden sorában szerepeljen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike.
- A 9x9-es táblázat minden oszlopában szerepeljen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike.
- Minden 3x3-as táblázatban szerepeljen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike.

A 9x9-es táblázat néhány elemének ismeretében meg kell határozni a táblázat hiányzó elemeit.

Például meg van adva egy ilyen 9x9-es táblázat, és ismert a táblázat néhány eleme:

5			7			2		
		9						3
	7			4	1			8
	2					6		
	5		3	2	4		7	
		7					3	
7			5	3				2
9					6	3		
		5			9			7

Ekkor a táblázat hiányzó celláit kétféleképpen lehet kitölteni a megadott feltételeknek megfelelően.

5	6	1	7	8	3	2	9	4
8	4	9	6	5	2	7	1	3
2	7	3	9	4	1	5	6	8
3	2	8	1	9	7	6	4	5
1	5	6	3	2	4	8	7	9
4	9	7	8	6	5	1	3	2
7	1	4	5	3	8	9	2	6
9	8	2	4	7	6	3	5	1
6	3	5	2	1	9	4	8	7

5	6	4	7	8	3	2	9	1
8	1	9	6	5	2	7	4	3
2	7	3	9	4	1	5	6	8
3	2	8	1	9	7	6	5	4
1	5	6	3	2	4	8	7	9
4	9	7	8	6	5	1	3	2
7	4	1	5	3	8	9	2	6
9	8	2	4	7	6	3	1	5
6	3	5	2	1	9	4	8	7

A táblázat kitöltésének módszere a visszalépéses (BACKTRACK) algoritmus módszerén alapul.

De van egy ötletem!

Definiáljuk az X_{ijM} mennyiséget úgy, hogy $X_{ijM}=1$ teljesüljön, ha a táblázat i -ik sorában és j -ik oszlopában szerepel az M számjegy, ellenkező esetben $X_{ijM}=0$ teljesüljön. Itt $i \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $j \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $M \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Ekkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie:

#1: A 9x9-es táblázat minden sorában a M számjegy pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{j=1}^{j=9} X_{ijM} = 1; \quad i \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \quad M \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.

#2: A 9x9-es táblázat minden oszlopában a M számjegy pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{i=1}^{i=9} X_{ijM} = 1; \quad j \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \quad M \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.

#3 Minden 3x3-as cellában minden $M \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ számjegy pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{\substack{i=1;2;3 \\ j=1;2;3}} X_{ijM} = 1 \quad \sum_{\substack{i=1;2;3 \\ j=4;5;6}} X_{ijM} = 1 \quad \sum_{\substack{i=1;2;3 \\ j=7;8;9}} X_{ijM} = 1$$

$$\sum_{\substack{i=4;5;6 \\ j=1;2;3}} X_{ijM} = 1 \quad \sum_{\substack{i=4;5;6 \\ j=4;5;6}} X_{ijM} = 1 \quad \sum_{\substack{i=4;5;6 \\ j=7;8;9}} X_{ijM} = 1$$

$$\sum_{\substack{i=7;8;9 \\ j=1;2;3}} X_{ijM} = 1 \quad \sum_{\substack{i=7;8;9 \\ j=4;5;6}} X_{ijM} = 1 \quad \sum_{\substack{i=7;8;9 \\ j=7;8;9}} X_{ijM} = 1$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.

#4 A 9x9-es táblázat minden cellájában a feltételeknek megfelelően kell lennie az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ számjegyek pontosan egyikének, ami egyúttal azt is jelenti, hogy bármely cellába egyidejűleg két számjegyet nem lehet írni. Azaz:

$$\sum_{M=1}^{M=9} X_{ijM} = 1; \quad i \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \quad j \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.

Így van összesen $9 \times 9 \times 9$ darab = 729 darab X_{ijM} ismeretlen változónk, amelyek értéke 0 vagy 1 lehet csak, továbbá van 4×81 darab = 324 darab egymástól nem feltétlen független egyenletekből álló elsőfokú egyenletrendszer. (Az egyenletek némelyike következhet a többi egyenletből, vagy az egyenletek némelyike ellentmondhat a többi egyenletnek. Ez utóbbira példa, amikor a táblázat néhány eleme úgy van megadva, hogy például az ötödik sorban három 2-es számjegy szerepel. Ha az egyenletekből álló egyenletrendszer ellentmondásos, akkor a 9x9-es táblázatot nem lehet kitölteni a feltételeknek megfelelő módon.)

Ha ismert a táblázat néhány eleme, akkor az X_{ijM} ismeretlen változók értéke sokkal kevesebb. Például, ha a táblázat 2-ik sorában és 5-ik oszlopában a 7-es számjegy szerepel, akkor a következő egyenletek adódnak:

$$X_{257}=1$$

$$X_{2j7}=0 \text{ ha } j \neq 5 \text{ (a 2-ik sor 5-ik cellájának kivételével sehol sem szerepelhet a 7-es számjegy.)}$$

$X_{i57}=0$ ha $i \neq 2$ (az 5-k oszlop 2-ik cellájának kivételével sehol sem szerepelhet a 7-es számjegy.)

$X_{ij7}=0$ ha $i \in \{1;2;3\}$ és $j \in \{4;5;6\}$ amennyiben $i \neq 2$ és $j \neq 5$ (A táblázat 1, 2, 3 sorának és 4, 5, 6 oszlopának metszeteként előálló 3×3 résztáblázatában csak a középső cellájában szerepel a 7-es számjegy, a többi helyen nem szerepelhet.)

$X_{25k}=0$ ha $M \neq 7$ (A táblázat 2-ik sorában és 5-ik oszlopában csak a 7-es számjegy szerepelhet.)

Tehát a mostani példában $X_{257}=1$ ismeretében további 32 darab X_{ijM} változó értéke ismert.

Így a „Sudoku” táblázat kitöltése visszavezethető egy sok egyenletből álló sok ismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldására.

LATIN-GÖRÖG NÉGYZET

Euler foglalkozott a következő problémával egy 1782-ben megjelent írásában.

A 36 tiszt feladata: Tekintsük a hadsereg 6 fegyvernemét és 6 rendfokozatát. Vegyünk minden fegyvernemből 6 különböző rendfokozatú tisztet. Ez összesen 36 tisztet jelent. Elrendezhető-e ez a 36 tiszt egy 6 hat sorból és 6 oszlopból álló alakzatban úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban minden fegyvernem és minden rendfokozat képviselve legyen a tisztek által?

Euler az a, b, c, d, e, f , latin betűkkel jelölte a fegyvernemeket és az $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ görög betűket használta a rendfokozatok jelölésére. Egy katonatisztet egy latin és egy görög betűből álló pár jelöl, így a 36 katonatisztet összesen 36 darab betűpárral lehet egyértelműen jelölni. Így ezt a 36 betűpárt kell úgy elhelyezni egy 6×6 -os táblázatba, hogy minden sorban és minden oszlopban mind a 6 latin betű szerepeljen (a, b, c, d, e, f), továbbá minden sorban és minden oszlopban mind a 6 görög betű ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$) szerepeljen. (Ez az eredete a „latin-görög négyzet problémája” elnevezésnek.) Euler nem tudta megoldani a feladatot. Úgy gondolta, hogy nincs is megoldás, és azt a sejtést fogalmazta meg, hogy ha k 4-gyel osztva 2-öt ad maradékul, akkor nincs $k \times k$ méretű latin-görög négyzet. A kérdés nehézségét mutatja, hogy csak 1900-ban sikerült bebizonyítani Terry matematikusnak, hogy a 36 tiszt feladata nem megoldható. 1922-ben McNeish bebizonyította, hogy ha k 4-gyel osztva nem 2-öt ad maradékul, akkor létezik $k \times k$ méretű latin-görög négyzet.

Most tekintsük csak a 4×4 -es latin-görög négyzet problémáját!

Adott a következő 16 darab betűpár: **A α , A β , A γ , A δ , B α , B β , B γ , B δ , C α , C β , C γ , C δ , D α , D β , D γ , D δ** . Ezt a 16 betűpárt kell elhelyezni egy 4×4 -es táblázatba, hogy minden sorban és minden oszlopban mind a 4 latin betű szerepeljen („A”, „B”, „C”, „D”), továbbá minden sorban és minden oszlopban mind a 4 görög betű („ α ”, „ β ”, „ γ ”, „ δ ”) szerepeljen. Egy ilyen elrendezés például a következő:

Aα	Bβ	Dγ	Cδ
Bγ	Aδ	Cα	Dβ
Dδ	Cγ	Aβ	Bα
Cβ	Dα	Bδ	Aγ

Ez a feladat is megoldható számítógépes program segítségével, de megint támadt egy ötletem!

Legyen P_{ijk} értéke 1, ha az i -ik sorban és a j -ik oszlopban a K -ik latin betű szerepel az ebben a sorrendben felírt „A”, „B”, „C”, „D” betűk közül, ellenkező esetben legyen P_{ijL} értéke 0. Legyen Q_{ijL} értéke 1, ha az i -ik sorban és a j -ik oszlopban a L -ik görög betű szerepel, az ebben a sorrendben felírt „ α ”, „ β ”, „ γ ”, „ δ ” betűk közül, ellenkező esetben legyen Q_{ijL} értéke 0. Ekkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie:
#1p: A 4×4 -es táblázat minden sorában a K -ik latin betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{j=1}^4 P_{ijk} = 1; \quad i \in \{1;2;3;4\} \quad K \in \{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#2p: A 4x4-es táblázat minden oszlopában a K -ik latin betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{i=1}^4 P_{ijk} = 1; \quad j \in \{1;2;3;4\} \quad K \in \{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#3p: A 4x4-es táblázat minden cellájában a feltételeknek megfelelően kell lennie az ebben a sorrendben felírt „**A**”, „**B**”, „**C**”, „**D**” betűk pontosan egyikének, ami egyúttal azt is jelenti, hogy bármely cellába egyidejűleg két betűt nem lehet írni. Azaz:

$$\sum_{K=1}^4 P_{ijk} = 1; \quad i \in \{1;2;3;4\} \quad j \in \{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#1q: A 4x4-es táblázat minden sorában az L -ik görög betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{j=1}^{j=4} Q_{ijL} = 1; \quad i \in \{1;2;3;4\} \quad L \in \{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#2q: A 4x4-es táblázat minden oszlopában a L -ik görög betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_{ijL} = 1; \quad j \in \{1;2;3;4\} \quad L \in \{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#3q: A 4x4-es táblázat minden cellájában a feltételeknek megfelelően kell lennie az ebben a sorrendben felírt „**α**”, „**β**”, „**γ**”, „**δ**” betűk pontosan egyikének, ami egyúttal azt is jelenti, hogy bármely cellába egyidejűleg két betűt nem lehet írni. Azaz:

$$\sum_{L=1}^{L=4} Q_{ijL} = 1; \quad i \in \{1;2;3;4\} \quad j \in \{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#4: Már csak azt kell elérni, hogy minden lehetséges latin-görög betű párosítás szerepeljen a táblázatban. Ekkor egy latin-görög betűpár pontosan egyszer szerepelhet a táblázatban. Ekkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie:

$$\sum_{i=1; j=1}^{i=4; j=4} (P_{ijk} Q_{ijL}) = 1; \quad K \in \{1;2;3;4\} \quad L \in \{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab másodfokú egyenletet jelent.

Így van összesen $4 \times 4 \times 4$ darab = 64 darab P_{ijk} ismeretlen változónk, amelyek értéke 0 vagy 1 lehet csak, van összesen $4 \times 4 \times 4$ darab = 64 darab Q_{ijl} ismeretlen változónk, amelyek értéke 0 vagy 1 lehet csak továbbá van 6×16 darab = 96 darab egymástól nem feltétlen független elsőfokú egyenletből és 16 darab másodfokú egyenletből álló egyenletrendszer. Ennek az egyenletrendszernek egy lehetséges megoldásából egyértelműen előállítható egy 4×4 -es latin-görög négyzet.

Ez a módszer bár elvileg jó, gyakorlatilag szinte kivitelezhetetlen. Egyszerűbb backtrack algoritmust használó program segítségével ilyen latin-görög négyzeteket keresni.

SAKKTÁBBLA BEJÁRÁSA A HUSZÁR FIGURÁVAL.

Régi klasszikus probléma egy 8×8 -as sakktábla a huszár figurával. Mint ismeretes, a huszárral úgy lehet lépni, hogy egy huszárlépéssel először két egységet kell ugrani, majd erre az ugrásra merőlegesen egy egységet kell ugrani, ahol egy egység a sakktábla egy mezőjének oldalát jelenti. (Az ugrások a sakktábla rácsvonalalaival párhuzamosak, illetve a sakktábla rácsvonalaira merőlegesek.) A probléma lényege, hogy a sakktábla egy mezőjéből kiindulva egy huszárral be kell járni a sakktábla összes mezőjét lehetőleg úgy, hogy az utolsó lépéssel a huszár abba a mezőbe jusson vissza, ahonnan elindult.

Euler megoldotta ezt a feladatot, úgy hogy először a sakktábla egyik felét járta be, majd utána a sakktábla másik felét. (Ha a sakktábla egy mezőjében k szerepel, akkor a huszár közvetlenül a k -edik lépés előtt abban a mezőben volt.) Ez a megoldás a következő:

18	27	16	1	54	63	44	37
9	2	19	26	45	38	55	62
28	17	8	15	64	53	36	43
3	10	25	20	39	46	61	56
24	29	14	7	52	57	42	35
11	4	21	32	47	40	49	60
30	23	6	13	58	51	34	41
5	12	31	22	33	48	59	50

Wenzelider nevű morva hivatalnok is talált egy megoldást. A megoldás külön érdekessége az, hogy minden sorban és minden oszlopban a lépések sorszámainak az összege 260. Ez a megoldás a következő:

10	27	34	49	8	47	54	31
35	50	9	28	53	32	7	46
26	11	52	33	48	55	30	5
51	36	25	12	29	6	45	56
24	13	38	61	44	57	4	19
37	62	23	16	1	20	43	58
14	39	64	21	60	41	18	3
63	22	15	40	17	2	59	42

Feleltessük meg a sakktábla mezőit egy gráf csúcsainak. A gráf V_1 csúcsa legyen az „A1” mező, a gráf V_2 csúcsa legyen az „A2” mező, a gráf V_3 csúcsa legyen az „A3” mező,....., a gráf V_{63} csúcsa legyen az „H7” mező, a gráf V_{64} csúcsa legyen az „H8” mező. Legyen ez a gráf olyan, hogy bármely két csúcsát pontosan egy él kösse össze, függetlenül attól, hogy a sakktáblának a két csúcsnak megfelelő mezőjének egyikéből a másikába egy huszárlépéssel el lehet jutni, vagy sem. Továbbá legyen ez a gráf olyan, hogy bármely két csúcsát összekötő él értéke legyen 1, ha a sakktáblának a két csúcsnak megfelelő mezőjének egyikéből a másikába egy huszárlépéssel el lehet jutni, egyébként az él értéke legyen 0. Ekkor a sakktáblán a huszár által bejárt körút a gráfon egy olyan Hamilton-körként jelenik meg, amelynek 64 éle van és mindegyik él értéke 1.

Számozzuk meg a Hamilton-kör éleit V_1 -ből indulva. Definiáljunk az $X_{M;N;K}$ mennyiséget, amelynek értéke 1, ha a Hamilton-kör K -edik éle a gráf V_M csúcsából a gráf V_N csúcsába vezet, ellenkező esetben legyen az $X_{M;N;K}$ mennyiség értéke 0. Legyen C_{MN} értéke 1, ha a gráf V_M és V_N csúcsát összekötő élnek értéke 1, ellenkező esetben legyen $C_{M;N}$ értéke 0. Ekkor tekintsük a következő lineáris függvényt, ahol $C_{M;N}$ értéke adott, és az $X_{M;N;K}$ változó értékét úgy kell meghatározni, hogy ennek a lineáris függvénynek az értéke maximális legyen. Az $X_{M;N;K}$ változó értéke 0 vagy 1 lehet. Az $M; N; K$ indexek lehetséges értékei 1, 2, 3, ..., 63, 64.

$$\sum_{K=1}^{64} \sum_{M=1}^{64} \sum_{N=1}^{64} C_{M;N} X_{M;N;K}$$

A következő feltételeknek kell teljesülnie:

A Hamilton-kör $K=1$ éle V_1 -ből indul, azaz $\sum_{N=1}^{64} X_{1;N;1} = 1$ és $X_{1;N;K}=0$ ha $K \neq 1$.

A Hamilton-kör $K=64$ éle V_1 -be érkezik, azaz $\sum_{M=1}^{64} X_{M;1;64} = 1$ és $X_{M;1;K}=0$ ha $K \neq 64$.

A gráf V_M és V_N csúcsa között pontosan 1 él lehetséges, ahol $M \in \{1; 2; \dots; 63; 64\}$ és $N \in \{1; 2; \dots; 63; 64\}$. Ekkor a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$\sum_{K=1}^{64} X_{M;N;K} = 1$$

A gráf V_M csúcsából pontosan egy él indul ki, ahol $M \in \{1; 2; \dots; 63; 64\}$. Ekkor a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$\sum_{K=1}^{64} \sum_{N=1}^{64} X_{M;N;K} = 1$$

A gráf V_N csúcsába pontosan egy él érkezik, ahol $N \in \{1; 2; \dots; 63; 64\}$. Ekkor a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$\sum_{K=1}^{64} \sum_{M=1}^{64} X_{M;N;K} = 1$$

A Hamilton-kör jellegéből következik, hogy ha a gráf V_P csúcsából V_Q csúcsába a Hamilton-kör $K1$ -edik éle vezet, akkor a gráf V_Q csúcsából V_R csúcsába a Hamilton-kör $K2$ -edik éle vezet, ahol $K2$ eggyel több $K1$ -nél. Ekkor a következő egyenletnek kell teljesülnie, ahol $K1 \in \{1; 2; \dots; 63; 64\}$, $K2 \in \{1; 2; \dots; 63; 64\}$, $Q \in \{1; 2; \dots; 63; 64\}$, továbbá $K2-K1=1$.

$$\sum_{P=1}^{64} X_{P;Q;K1} = \sum_{R=1}^{64} X_{Q;R;K2}$$

Ez tulajdonképpen egy lineáris programozási feladat, amely akár az Excel táblázatkezelő Solver menüjének alkalmazásával is elvileg megoldható. Mivel ennek a lineáris programozási feladatnak nagyon sok X változója van (a változók értéke 0 vagy 1), és a korlátozó feltételek száma is nagyon sok, ezért az Excel gyakorlatilag nem tud ezzel a feladattal mit kezdeni.

Ez a probléma szintén megoldható elvileg egy BACKTRACK algoritmust használó program segítségével, de gyakorlatilag az így történő megoldáshoz is nagyon sok idő szükséges.

TÁRSASJÁTÉK

Adott egy társasjáték, amelynek a neve „Okoskodj gazdagon”, tehát nem „Gazdálkodj okosan”. Tegyük fel, hogy egy partiban pontosan három játékos játszik egyszerre ezzel a játékkal a játék szabálya szerint. A játékban van első helyezett (ő 3 pontot kap ebben a partiban), van második helyezett (ő 2 pontot kap ebben a partiban), van harmadik helyezett (ő 1 pontot kap ebben a partiban).

Tegyük fel, hogy 12 játékos benevez egy „Okoskodj gazdagon” bajnokságba. Ezt a bajnokságot úgy kell megszervezni, hogy bármely 3 játékos összekerülhet pontosan egy partiban, tehát összesen $220 = \text{kombináció}(12;3)$ partit kell lebonyolítani ebben a bajnokságban. Mivel 12 játékos van, és egy partiban pontosan 3 játékos játszik, így egyszerre 4 partit lehet megrendezni egy úgynevezett fordulóban, ezért összesen legalább $220:4=55$ fordulóra van szükség. A feladat az, hogy el kell készíteni egy 55 fordulóból álló bajnokságnak a menetrendjét, azaz meg kell mondani, hogy melyik forduló melyik partijában melyik játékosok játszanak ebben az 55 fordulóból álló bajnokságban.

Az 1, 2, 3, 4 sorszámú parti legyen az 1 sorszámú fordulóban. Az 5, 6, 7, 8 sorszámú parti legyen a 2 sorszámú fordulóban. A 9, 10, 11, 12 sorszámú parti legyen a 3 sorszámú fordulóban. És így tovább, a q sorszámú parti legyen az r sorszámú fordulóban, ahol r értékét úgy lehet megkapni, hogy venni kell q negyedrészenek felső egészrészét. Így például a 217, 218, 219, 220 sorszámú parti az 55 sorszámú fordulóban van. A továbbiakban legyen $X_{P,Q}$ értéke 1, ha a P sorszámú játékos a Q sorszámú partiban részt vesz, és legyen $X_{P,Q}$ értéke 0, ha a P sorszámú játékos a Q sorszámú partiban nem vesz részt. (Ekkor az \underline{X}_Q egy olyan vektor, amelynek 12 koordinátája van, és ezek között 3 darab 1-es és 9 darab 0-ás szerepel. Az \underline{X}_Q vektor P -ik koordinátája 1, ha a P sorszámú játékos szerepel a Q -ik partiban, és az \underline{X}_Q vektor P -ik koordinátája 0, ha a P sorszámú játékos nem szerepel a Q -ik partiban.) Ekkor a következő megállapítások teljesülnek:

Egy fordulóban minden játékos játszik valamelyik ugyanazon fordulóbeli partiban, ezért ha Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 egymástól különböző sorszámokat 4-gyel elosztva, majd a kapott eredmények felső egészrészét véve ugyanaz az r érték adódik, akkor a következő egyenletnek kell teljesülnie, ahol $P \in \{1; 2; \dots; 11; 12\}$.

$$\#1 \quad X_{P,Q_1} + X_{P,Q_2} + X_{P,Q_3} + X_{P,Q_4} = 1$$

Ez $12 \cdot 55 = 660$ darab elsőfokú egyenletet jelent.

Egy fordulóban minden játékos pontosan egy partiban vesz részt, azaz egy fordulóban nincs olyan játékos, aki 2 partiban vesz részt. Ezért, ha Q_A, Q_B egymástól különböző sorszámokat 4-gyel elosztva, majd a kapott eredmények felső egészrészét véve ugyanaz az r érték adódik, akkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie, ahol $P \in \{1; 2; \dots; 11; 12\}$.

$$\#2 \quad X_{P,Q_A} \cdot X_{P,Q_B} = 0$$

Ez $55 \cdot 6 \cdot 12 = 3960$ darab másodfokú egyenletet jelent. Ugyanis 55 forduló van, és minden fordulóban 4 parti van, így minden fordulóban 6 olyan két partiból álló pár van, amelynek legfeljebb egyik partijában vesz részt a P sorszámú játékos.

(A #2 egyenleteket úgy is meglehetett volna fogalmazni, hogy az \underline{X}_{Q_A} vektor és az \underline{X}_{Q_B} vektor skaláris szorzata 0, ha Q_A, Q_B egymástól különböző sorszámokat 4-gyel elosztva, majd a kapott eredmények felső egészrészét véve ugyanaz az r érték adódik.)

A 12 játékos közül bármely 3 játékos összekerülhet pontosan egy partiban, így összesen 220 parti van. Ezért így bármely játékos pontosan $55 = \text{kombináció}(11;2)$ darab partiban vehet részt. Így a következő egyenleteknek kell teljesülnie, ahol $P \in \{1; 2; \dots; 11; 12\}$.

$$\#3 \quad \sum_{Q=1}^{220} X_{P,Q} = 55$$

Ez 12 darab egyenletet jelent. (Ez a 12 darab egyenlet következik az #1 egyenletből.)

Továbbá így nincs két egyforma összetételű parti, azaz nincs két olyan parti, amelynek ugyanaz a három játékos a résztvevője. Így bármely két partit kiválasztva, a kiválasztott partiknak legfeljebb 2 közös résztvevője lehet. Ezért a következő egyenlőtlenségeknek kell teljesülnie, ahol Q_A és Q_B két, egymástól különböző tetszőlegesen kiválasztott parti sorszáma, $P \in \{1; 2; \dots; 11; 12\}$.

$$\#2 \quad X_{P;Q_A} * X_{P;Q_B} < 3$$

Ez nagyon sok másodfokú egyenlőtlenséget jelent.

Összegezve van tehát nagyon sok X változó, amelyeknek értéke 0 vagy 1 lehet csak, és van nagyon sok egyenlet és egyenlőtlenség, amelyeknek teljesülnie kell. Az ezeknek a feltételeknek megfelelő megoldásból leolvasható egy ilyen bajnokság menetrendje. Azonban ez a módszer csak elvileg jó, gyakorlatilag szinte kivitelezhetetlen. Gráfelméleti módszerekkel illetve backtrack algoritmust használó algoritmust használó program segítségével hamarabb található ilyen menetrend.

Zárszó gyanánt: Talán sikerült érdekes és elgondolkoztató problémákat felvetni dolgozatomban. Magam részéről igyekszem ezeket a problémákkal szabadidőmben tovább foglalkozni, és számítógépes programokkal megoldást találni.

Bertalan Zoltán.

e-mail.: marcius.08@freemail.hu