

Ötletek a függvények témakörében

Székely Péter

A feladatok egy-egy problémafelvetés szemléltetőpéldái, egymástól függetlenek. A számozás nem jelöl nehézségi szintet. Az ötletekből viszont kis továbbgondolással feladatsorokat gyárthatunk.

1. Függvényábrázolások I.

1. $f : x \mapsto |x|$ vagy $f : x \mapsto x \cdot \operatorname{sgn} x$
2. $f : x \mapsto |x^2 - 5x + 6|$ vagy $f : x \mapsto (x^2 - 5x + 6) \cdot \operatorname{sgn} (x^2 - 5x + 6)$
3. $f : x \mapsto \frac{2x + 3}{x - 1} \cdot \operatorname{sgn} (x^2 - 4x)$
4. $f : x \mapsto \left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 2 \right| - 3 \right| - 4 \left| \right|$
5. $f : x \mapsto \left(- \left(\frac{4}{5} |x| - 0,7 \right)^2 + 0,3 \right) \cdot \operatorname{sgn} (-x + 1) \cdot \operatorname{sgn} (x + 1)$
6. a) $f(x) = \sin(5x) + \sin(6x)$ b) $g(x) = \sin \sin x$
7. a) $f(x) = \{kx\}$ b) $f(x) = \sin(kx)$
8. Adott $f(x) = |x|$ és $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Hányféle egyszeresen összetett függvényt készíthetünk ezekből? Mik ezek? Grafikonjaik?
9. Tényleg monoton? (Feladat SB. IV./1279. alapján: $\log_{\cos x} (|y| - 2) > 0$.)
 - a) $f(x) = \log_x x$
 - b) $f(x) = \log_x \sin(x)$
 - c) $f(x) = \log_{\sin(x)} x$
 - d) $f(x) = \log_{2 \sin(x)} x$
10. A gyerekeket érdeklő izgalmak...
 - a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
 - b) $f(x) = \sin x \cdot e^x$
 - c) $f(x) = \frac{\cos 5x}{x^2 + 1}$

11. Szép „függvények” (a kilencedikesek ötletei, játékaik).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } Lili_madarkai(x) &= x - \{x\}^2 - [2x] \\
 \text{b) } Balu_virag(x) &= \begin{cases} x^2 + 8, & \text{ha } -2 \leq x \leq 2 \\ -(x+2)^2 + 12, & \text{ha } -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 12, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 12, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \\ 2(x+2)^2, & \text{ha } -2 \leq x \leq 0 \\ 2x^2, & \text{ha } -2 \leq x \leq -1 \\ -(x+2)^2 + 8, & \text{ha } -2 \leq x \leq 0,37 \end{cases} \\
 \text{c) } Luca_madara(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4,5, & \text{ha } -1 \leq x \leq -0,5 \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } 0,25 \leq x \leq 5,3 \\ 4, & \text{ha } -1 \leq x \leq 0,25 \\ \sqrt{x-1,3} + 2,1, & \text{ha } 1,3 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{4}(x-2,7)^2 + 2, & \text{ha } 3,6 \leq x \leq 5,3 \\ \frac{1}{3}(x-2,2)^2 + 1,3, & \text{ha } 2,2 \leq x \leq 5 \\ \sqrt{x-1,3} + 2,1, & \text{ha } 1,3 \leq x \leq 5 \\ -1,5x^2 + 4,6, & \text{ha } -0,5 \leq x \leq 1,3 \\ \frac{1}{3}(x-2,2)^2 + 1,4, & \text{ha } 5 \leq x \leq 5,2 \\ \sqrt{x-1,2} + 2,4, & \text{ha } 1 \leq x \leq 5,2 \end{cases} \\
 \text{d) } Kristof_fa(x) &= \begin{cases} \left| \frac{4}{x} \right| \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-0,4} \cdot \operatorname{sgn} x + 0,4 \\ \left| \frac{4}{x} \right| \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-0,4} \\ (-\sqrt{x+2} + 11) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-0,5} \\ (-\sqrt{-x+2} + 11) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-0,5} \\ (-2\sqrt{x+3} + 13) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-2} \\ (2\sqrt{x+3} + 13) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-2} \\ (\sqrt{x+2} + 15) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x} \\ (\sqrt{-x+2} + 15) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x} \\ (2\sqrt{x+3} + 13) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-2} \\ (-2\sqrt{x+3} + 13) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

12. Paritásvizsgálat

$$a(x) = |\cos(x)| \quad b(x) = \cos^2(x) \quad c(x) = |x|^3 \quad d(x) = \sin^3(x) \quad e(x) = \operatorname{tg} |x|$$

2. Függvényábrázolások II., kitekintés „3D”-be

1. a) Benoît Mandelbrot (1924-2010.), fraktálok. $z \mapsto z^2 + c$.

$$f : (x; y) \mapsto \text{szín}$$

ciklus a=-2-től 2-ig

ciklus b=-2-től 2-ig

hossz=0

ciklus amíg hossznegyzet<2, i<1000

$$a = a * a - b * b + a$$

$$b = 2 * a * b + b$$

$$\text{hossznegyzet} = a * a + b * b$$

$$i = i + 1$$

szin = i értéke szerint

- b) További játékok: Julia-halmaz, $z \mapsto z^3 + c, \dots$

2. Játékok GeoGebrával. (Ld. megosztott file-ok: <http://petiba.hu/?menu=geogebra#rlv>.)

a) $Canqi_1 : (x; y) \mapsto \cos x + \frac{1}{\operatorname{tg} y}$

c) $Canqi_3 : (x; y) \mapsto \ln x + \cos y$

b) $Canqi_2 : (x; y) \mapsto \sec x + \operatorname{cosec} y$

d) $Canqi_4 : (x; y) \mapsto \sin x^2 + \cos y^2$

3. Egyenletmegoldás függvényekkel

(Hol hasznosíthatjuk függvénytani ismereteinket: értelmezési tartomány, értékészlet, monotonitás, periodicitás, ... Geogebra: „paraméteresítés” lehetősége.)

1. $\sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} = x$ (Ződ 948.)

2. a) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$ (Ződ 951.)

b) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+p}$ („paraméteresítés”)

3. a) $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1-x$ (Ződ 954.)

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = p-x$

4. a) $x-1 = \sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$ (Ződ 958.)

b) $x-1 = \sqrt{1-x\sqrt{p+x^2}}$

$$5. \text{ Adott } f(x) = \left| x + \frac{3}{2} \right| - \frac{3}{2} \text{ és } g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1}, & \text{ha } x < -1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$$

Adjuk meg az $f - g$ nullahelyeit. (KöMaL, 2013. január, C.1152.)

$$6. \sqrt{x-2} + \sqrt{5-x} = |x-2| + |5-x| + 3 - \sqrt{3}$$

$$7. \text{ a) } \log_2 x = \frac{1}{3}(x+1) \quad (\text{Sárga Bohóc IV. 1166.})$$

$$\text{b) } \log_2 x = \frac{1}{3}(x+p)$$

$$8. \text{ a) } \lg x = 2^{-x} \quad (\text{Sárga Bohóc IV. 1169.})$$

$$\text{b) } \lg x = 2^{p-x}$$

$$9. 2^x = x^2 \quad (\text{Sárga Bohóc IV. 1102.})$$

$$10. \text{ a) } 2^{-x} = -x + 2 \quad (\text{Sárga Bohóc IV. 1103.})$$

$$\text{b) } 2^{-x} = -x + p$$

$$11. x^2 + 1 = \cos \frac{x}{2}$$

$$12. \sin 5x = \sin 15x + 2$$

$$13. \cos 6x = 2 - \cos 7x$$

$$14. \text{ a) } |x-2| + |y+3| \leq 4$$

$$\text{c) } 2(x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4$$

$$\text{b) } (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4$$

$$15. |2 \sin x + \sin 2x| < \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \quad (\text{KöMaL C.1482.})$$